УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046, Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

ПРИЕМЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ

23 Април 2017 г.

Тема 1-примерни решения

Задача 1. (1 т.) Решението на неравенството $|x+2|<1$ е интервала

а) $(-3,-1)$ б) $(-2,-1)$ в) $(-1,0)$ г) $(0,1)$.

Коментар: Неравенството $|x+2|<1$ е равносилно на $-1<x+2<1$, от където лесно се получава $x\in(-3,-1)$.

Задача 2. (1 т.) За коя от посочените по – долу стойности на x изразът $\sqrt{2}-2\sin 2x$ е равен на нула?

а) $x=\dfrac{\pi}{8}$; б) $x=\dfrac{\pi}{4}$; в) $x=\dfrac{2\pi}{5}$; г) $x=\dfrac{\pi}{12}$.

Коментар: Равенството $\sqrt{2}-2\sin 2x=0$ означава, че $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тоест $2x=\dfrac{\pi}{4}$ и от предложените отговори получаваме а).

Задача 3. (1 т.) В триъгълната пирамида $ABCD$, всички ръбове са с дължина 3. Обемът на пирамидата $ABCD$ е равен на:

а) 12; б) 4,5 ; в) $1+\sqrt{3}$; г) никое от предходните.

Коментар: Не е трудно да се съобрази, че височината на пирамидата е равна на $\sqrt{6}$. Отговор: г).

Задача 4. (1 т.) Броят на корените на уравнението $9^x-2.3^x-3=0$ е равен на

а) 3; б) 2; в) 1; г) 0.

Коментар: Полагането $t=3^x$ дава квадратното уравнение $t^2-2t-3=0$, което има един отрицателен и един положителен корен, защото $t_1t_2=-3$. Отговор: в).

Задача 5. (1 т.) Страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия, като най-малката страна има дължина 3. Тогава лицето на триъгълника е

а) 6; б) 4; в) 8; г) 12.

Коментар: Добре известният „египетски“ триъгълник със страни 3, 4 и 5 е правоъгълен.

Задача 6. Дадени са функциите $f(x)=x^2+2x+c$ и $g(x)=x^2-4x-6c$, където c е реален параметър. Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x)=0$, а x_3 и x_4 са корените на $g(x)=0$.

а) (1т.) За кои стойности на параметъра c е вярно, че $x_1+x_3=x_2+x_4=1$.

б) (2т.) Намерете всички стойности на c, за които системата $f(x)\le 0, g(x)\le 0$ има единствено решение.

в) (2т.) Нека $h(x)=(f(x)g(x))'$. За кои стойности на c $h(x)$ има екстремум?

Решение: а) Да допуснем, че $x_1+x_3=x_2+x_4=1$. Тогава $x_1=1-x_3$ и $x_2=1-x_4$. От формулите на Виет следва, че $c=x_1x_2=\left(1-x_3\right)\left(1-x_4\right)=1-\left(x_3+x_4\right)+x_3x_4$. Прилагаме отново формулите на Виет за уравнението $g\left(x\right)=0$ и получаваме $c=1-4-6c$. Значи $c=-\dfrac{3}{7}$. Остава само да се види, че при $c=-\dfrac{3}{7}$ уравненията $f\left(x\right)=0$ и $g\left(x\right)=0$ имат решения.

б) За да има системата $\begin{cases} f\left(x\right)\le 0 \\ g\left(x\right)\le 0 \end{cases}$ единствено решение е необходимо и достатъчно интервалите $\left[x_1,x_2\right], x_1\le x_2$ и $\left[x_3,x_4\right], x_3\le x_4$, които са решения на двете неравенства да имат точно една обща точка ξ която, разбира се, лежи на оста Ox. С други думи ξ е решение на системата $\begin{cases} \xi^2+2\xi+c=0 \\ \xi^2-4\xi-6c=0 \end{cases}$. От тук се получава, че $c=0$ или $c=\dfrac{48}{49}$. При $c=0$ решенията на $f\left(x\right)\le 0$ са интервалът $\left[-2,0\right]$, а на $g\left(x\right)\le 0$ са $\left[0,4\right]$, тоест условието е изпълнено. При $c=\dfrac{48}{49}$ решенията на $f\left(x\right)\le 0$ са интервалът $\left[-\dfrac{8}{7},-\dfrac{6}{7}\right]$, а на $g(x)\le 0$ са $\left[-\dfrac{8}{7},\dfrac{36}{7}\right]$. Значи системата

$\begin{cases} f(x) \le 0 \\ g(x) \le 0 \end{cases}$ има за решения всички точки от интервала $\left[-\frac{8}{7}, -\frac{6}{7}\right]$, което означава, че $\frac{48}{49}$ не е решение.

Следва да отбележим, че горните разсъждения не изчерпват възможните случаи. Имаме пред вид, че е необходимо да се види дали не е възможно графикът на някоя от функциите да се *допира* до оста Ox в точка, *в която другата функция е отрицателна* (с други думи някой от интервалите $[x_1, x_2]$ или $[x_3, x_4]$ да е изроден). За да се допира графикът на f до Ox трябва дискриминантата и $D_f = 1 - c$ да е нула. Значи $c = 1$; тогава $x = -1$. За g се получава $g(-1) = 1 + 4 - 6 < 0$, значи б) е вярно и при $c = 1$. Последният случай е $D_g = 4 + 6c = 0$. Тогава $c = -\frac{2}{3}$ и $x = 2$. Съответно се получава $f(2) = 4 + 4 - \frac{2}{3} > 0$ значи $c = -\frac{2}{3}$ не е решение. Окончателно $c = 0$ и $c = 1$.

в) Имаме $h(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ и
$h'(x) = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$. Тъй като $f''(x) = g''(x) = 2\,\forall x$, то
$h'(x) = 2\left(g(x) + f'(x)g'(x) + f(x)\right)$ е полином от втора степен и h има екстремум точно когато $h'(x)$ си мени знака. С други думи, дискриминантата на h' трябва да е положителна. Стандартни пресмятания показват, че това е изпълнено, ако
$c > -\frac{19}{10}$.

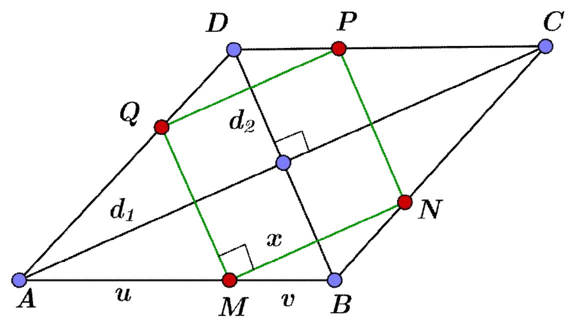
Задача 7. В ромба $ABCD$ с диагонали d_1 и d_2 е разположен квадрат k, страните на който са успоредни на диагоналите на ромба, а върховете му лежат на страните на $ABCD$.

(а) (1 т.) Докажете, че ако страната на k е равна на x, то $\frac{1}{x} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$.

(б) (2 т.) Нека острият ъгъл на ромба е равен на α, а страната му има дължина $\cos\alpha$. Изразете лицето σ_k на k като функция на α. При коя стойност на $\sin\alpha$ лицето σ_k е максимално?

(в) (2 т.) Пресметнете границата $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma_k}{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)^2}$.

Решение: Решението се получава лесно, ако разгледаме следната рисунка:



а) От подобието на триъгълниците AMQ и ABD следва, че $\frac{MQ}{BD}=\frac{x}{d_2}=\frac{u}{u+v}$.

Аналогично от $\triangle MBN \simeq \triangle ABC$ следва, че $\frac{x}{d_1}=\frac{v}{u+v}$. Значи

$\frac{x}{d_1}+\frac{x}{d_2}=\frac{v}{u+v}+\frac{u}{u+v}=1$. Ясно е, че от тук следва $\frac{1}{x}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$.

б) Диагоналът d_2 е основа на равнобедрения $\triangle ABD$, който има ъгъл α при върха A и бедро $AB=\cos\alpha$. От синусовата или косинусовата теореми (все едно коя) следва, че $d_2=2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично d_1 е основа на равнобедрения $\triangle ABC$, който има ъгъл $\pi-\alpha$ при върха B и бедро с дължина $\cos\alpha$. Следователно $d_2=2\cos\alpha\sin\frac{\pi-\alpha}{2}=2\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. От тъждеството в а) следва, че

$x=\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}=\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\frac{\alpha}{2}}$. Получаваме

$\sigma_k=x^2=\frac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\left(1-\sin\alpha\right)\sin^2\alpha$. Да положим след това $t=\sin\alpha$. Тогава $\sigma_k=\varphi(t)=t^2-t^3; t\in[0,1]$; $\varphi'(t)=2t-3t^2$ и

$\varphi'(t)=0\Rightarrow t=0$ или $t=\frac{2}{3}$. Тъй като $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, то σ_k е максимално при

$\sin\alpha=\frac{2}{3}$.

в)

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma_k}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\frac{\alpha}{2}\right)^2}=$$

$$=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha}{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\alpha\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}$$

така, че остава само да се пресметне $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}$. Това не е трудно – ако положим

$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$, то $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim\limits_{\beta\to 0}\dfrac{\sin^2\beta}{\beta^2}=1$.

Друго решение: (на в))

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma_k}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin\alpha)\sin^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\beta\to 0}\frac{(1-\cos\beta)\cos^2\beta}{\beta^2}=\lim_{\beta\to 0}\frac{(1-\cos\beta)}{\beta^2}=\frac{1}{2}$$

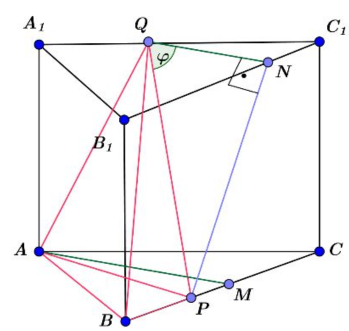
Задача 8. В правилната триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с основа ABC всичките ръбове са равни на a. Точките P и Q лежат съответно на ръбовете BC и A_1C_1, при което $\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{A_1Q}{QC_1}=\dfrac{1}{2}$.

(а) (1,5 т.) Пресметнете обема на триъгълната пирамида $ABPQ$.

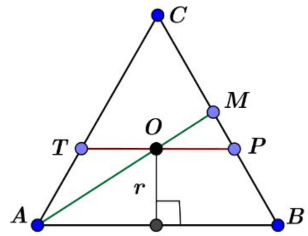
(б) (1,5 т.) Пресметнете ъгъла между правата PQ и медианата през върха A на $\triangle ABC$.

(в) (2 т.) Пресметнете радиусът на сферата, която се допира до равнините ABB_1A_1 и ACC_1A_1, центърът на която лежи на правата PQ.

Решение: а) Тъй като $S_{ABP}=\dfrac{1}{3}S_{ABC}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$ и $h_Q=AA_1=a$, за търсения обем получаваме $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{36}$.



б) Нека M е средата на BC, а QN е успоредна на AM ($N\in B_1C_1$). Тогава търсеният ъгъл е $\varphi=\sphericalangle PQN$. Тъй като $\sphericalangle PNQ$ е прав ($AM\perp BCC_1B_1$) и $QN=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, а $PN=\sqrt{a^2+\dfrac{a^2}{9}}=\dfrac{a}{3}\sqrt{10}$, то $tg\varphi=\dfrac{PN}{QN}=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$.



в) Нека Q се проектира в точката T от основата ABC на призмата ($T \in AC$), а O е пресечната точка на AM и PT. Тъй като центърът на търсената сфера е прободната точка на PQ и ъглополовящата равнина на двустенния ъгъл с ръб AA_1, проекцията му в равнината ABC (успоредно на AA_1!) е точката O. Понеже $TP \parallel AB$, лесно се вижда, че O е центърът на $\triangle ABC$ и тогава радиусът на сферата е разстоянието от O до AB, т.е. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

ТАБЛИЦА

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
а	а	г	в	а