КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
УАСГ

26 юни 2017 г.

Вариант 1

Задача 1.) (1 т.) Изразът $\dfrac{x^2+\dfrac{1}{x}}{x+\dfrac{1}{x}-1}$ при $x \neq 0$ е равен на:

а) x б) $x-1$ в) $x+1$ г) $\dfrac{1}{x}$.

Коментар: Заместете x например с 1. Отговор – в).

Задача 2. (1 т.) Решенията на уравнението $\log_{2x} x + \log_{8x} x = 0$ са:

а) $\dfrac{1}{4}$ и $-\dfrac{1}{4}$ б) 1 и $\dfrac{1}{4}$ в) 1, $\dfrac{1}{4}$ и $-\dfrac{1}{4}$ г) $\dfrac{1}{4}$.

Коментар: Очевидно всеки отговор, в който има отрицателно число е грешен. Остават б) и г). Но очевидно $x=1$ е решение. Отговор – б).

Задача 3. (1 т.) Функцията $f(x) = \lg(x^2-1)$ е растяща в интервала:

а) $(-1,1)$ б) $(0,+\infty)$; в) $(-\infty,1)$; г) $(1,+\infty)$.

Коментар: Лесно се съобразява, че x^2-1 е растяща в $[1,\infty)$. Логаритъмът (при основа 10 също е растяща функция. Значи остава отговор г), при което интервалът е отворен (защо?).

Задача 4.) (1 т.) Нека a, b са катетите, а c е хипотенузата на правоъгълен триъгълник. Тогава

а) $c^3 > a^3+b^3$ б) $c^3 < a^3+b^3$ в) $c^3 = a^3+b^3$ г) нито едно от предходните.

Коментар: $c^2 = a^2+b^2$, значи $c^3 = ca^2+cb^2 > a^3+b^3$, защото $c>a$ и $c>b$. Отговор а).

Задача 5. (1 т.) В правилна четириъгълна пирамида два срещуположни околни ръба са перпендикулярни. Ъгълът между околен ръб и основата е:

а) 30^0 б) 45^0 в) 60^0 г) 90^0

Коментар: Тъй като околните ръбове на всяка правилна пирамида са равни, то срещуположните ръбове образуват (заедно с диагонала на основата) равнобедрен правоъгълен триъгълник, чийто остър ъгъл е търсеният. Отговор – 45 градуса.

Задача 6. (5т.) Дадено е уравнението

$$(x-1)(9^x - 2(k+2)3^x - 2k + 11) = 0,$$

където k е реален параметър.

а) (2 т.) Да се реши уравнението за $k=2$.

б) (2 т.) За кои стойности на параметъра k уравнението има точно два различни корена?
в) (1 т.) За кои стойности на параметъра k уравнението има корени $x_1, 1$ и x_2, които в посочения ред образуват аритметична прогресия?

Решение: а) При $k=2$ уравнението е $(x-1)\left(9^x-8.3^x+7\right)=0$. Полагаме $3^x=t$ и се получава уравнението $(x-1)\left(t^2-8t+7\right)=0$. То има очевидните решения $x_1=1$, $t_1=1$ и $t_2=7$. Значи $3^x=1$ от което следва, че $x_2=0$ и $3^x=7$; $x_3=\log_3 7$.

б) Тъй като 1 е корен на уравнението, то квадратното уравнение $t^2-2(k+2)-2k+11=0$ трябва да има един корен, различен от 1. С други думи дискриминантата му трябва да е нула. Значи $D=4\left(k^2+6k-7\right)=0$, откъдето $k=1$ или $k=-7$. При $k=1$ се получава $(t-3)^2=0$ и $t_1=t_2=3$. Тъй като $3^x=t$, то $x=1$, което не бива да се получава. Ако $k=-7$ получаваме $(t+5)^2=0$, $3^x=t=-5$, което е невъзможно.

До тук изложихме разсъждение, което е *невярно* (или поне непълно). То обаче може да се случи на доста кандидат – студенти. Уравнението $t^2-2(k+2)t-2k+11=0$ *може да има и два корена, но единият трябва да е неположителен, а другият - да е положителен и да не е равен на* 3. За тази цел е необходимо да е изпълнено $-2k+11<0$; $k\geq\frac{11}{2}$ и

$9-6(k+2)-2k+11\neq 0$; $8-8k\neq 0$; $k\neq 1$. Това е вярно, защото $1<\frac{11}{2}$. И така, отговорът е $k\in\left[\frac{11}{2},\infty\right)$.

в) За да образуват числата $x_1,1,x_2$ аритметична прогресия, е необходимо и достатъчно да е изпълнено $\frac{x_1+x_2}{2}=1$. Тъй като $x_i=\log_3 t_i; i=1,2$, то получаваме $\log_3 t_1+\log_3 t_2=2$; $\log_3 t_1t_2=2$, значи $t_1t_2=9$. Тъй като $t_1t_2=-2k+11$, получаваме, че $k=1$. Както видяхме в горния текст, при тази стойност на k уравнението има двоен корен $x_1=x_2=1$. И така, при $k=1$ се получава тривиалната (с разлика 0) аритметична прогресия $1,1,1$.

Задача 7. (5т.) Даден е правоъгълният $\triangle ABC$ с прав ъгъл при върха C и ъгъл α при върха A, а катетът $AC=b$. Окръжност с хорда AC пресича страните AB и BC съответно в точките M и N, като $MN=kb$, $k>0$.
а) (1 т.) Да се докаже, че триъгълниците ABC и NBM са подобни с коефициент на подобие k.
б) (2 т.) Да се докаже, че $S_{\triangle AMN}=\dfrac{b^2}{2\cos\alpha}k(1-k\sin\alpha)$. Какви стойности може да приема k в зависимост от α?
в) (2 т.) Да се изрази чрез α ъгълът $\sphericalangle NAM$, ако лицето на $\triangle NAM$ е възможно най-голямо.

Решение: а) Тъй като около четириъгълника $AMNC$ е описана окръжност, то сумата от срещуположните ъгли е 180^0. Следователно $\sphericalangle AMN=90^0$ и триъгълниците ABC и MNB са подобни. Коефициентът на подобие е равен на k, защото MN и AB са съответни елементи (лежат срещу един и същ ъгъл).

б) $\triangle AMN$ е правоъгълен, защото $\sphericalangle AMN = 90^0$. Значи $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM.MN = \frac{kb}{2} AM$. Остава да пресметнем дължината на AM. Ясно е, че $AM = AB - MB = \frac{b}{\cos\alpha} - MB$. От друга страна $\sphericalangle MNB = \alpha$, защото $\alpha + \sphericalangle MNC = 180^0$ като срещуположни ъгли във вписан четириъгълник. Значи MB съответства на BC и $MB = kBC = kb\tan\alpha$. Заместваме и се получава

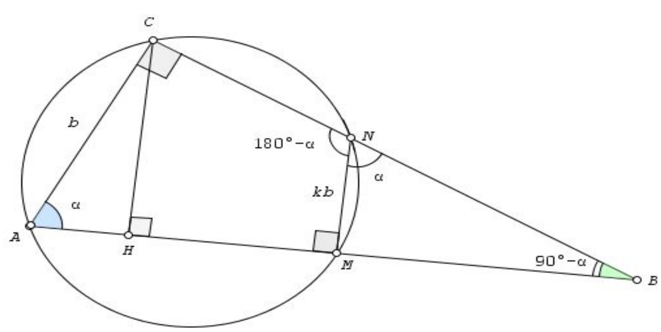
$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM.MN = \frac{kb}{2} AM = \frac{kb}{2}\left(\frac{b}{\cos\alpha} - kb\tan\alpha\right) = \frac{b^2}{2\cos\alpha} k\left(1 - k\sin\alpha\right).$$

Тъй като N е точка от отсечката BC, то MN е най-дълга, когато N съвпада с точката C, т. е. MN съвпада с височината $CH = b\sin\alpha$, откъдето $k \le \sin\alpha$ или $k \in (0, \sin\alpha]$. (Ясно е, че за тези стойности на k $1 - k\sin\alpha > 0$.)

в) Лицето на $S_{\triangle AMN}$ е най – голямо, когато квадратната функция $y(k) = k - k^2\sin\alpha$ за $k \in (0, \sin\alpha]$ има най-голяма стойност. Тъй като производната й $y' = 1 - 2k\sin\alpha$ е нула за $k_0 = \frac{1}{2\sin\alpha}$ трябва да се разгледат два случая.

I сл. $k_0 < \sin\alpha$, т. е. $\sin^2\alpha > \frac{1}{2}$ или $\alpha > 45^\circ$. В този случай най-голямата стойност на $S_{\triangle AMN}$ се достига за $k = k_0$. Непосредствено се изчислява, че сега $AM = \frac{b}{\cos\alpha}\left(1 - k_0\sin\alpha\right) = \frac{b}{2\cos\alpha} = \frac{1}{2} AB$, т. е. точката M е среда на AB и $\triangle ABN$ е равнобедрен, което означава, че $\sphericalangle MAN = \sphericalangle ABC = 90^\circ - \alpha$. (Не е трудно да се получи също, че $\tan\sphericalangle MAN = \frac{MN}{AM} = \cot\alpha$, което води до същото.)

II сл. $k_0 \ge \sin\alpha$, т. е. $\alpha \le 45^\circ$. Сега най-голямата стойност на $S_{\triangle AMN}$ се достига в десния край на интервала за k, т. е. за $k = \sin\alpha$. Но тогава $MN = CH$ и търсеният ъгъл е равен на α.



Задача 8. (5т.) В четириъгълната пирамида $ABCDE$ основата $ABCD$ е квадрат със страна a. Ъглите между основата и стените BAE, ADE и DCE са съответно α, 90^0 и α, където α е остър ъгъл.

а) (1 т.) Да се докаже, че $\sphericalangle BAE$ е прав.

б) (2 т.) Да се пресметне обемът на пирамидата.
в) (2 т.) Да се намерят косинусът на ъгъла и разстоянието между правите BE и CD, ако $\alpha = 30^0$.

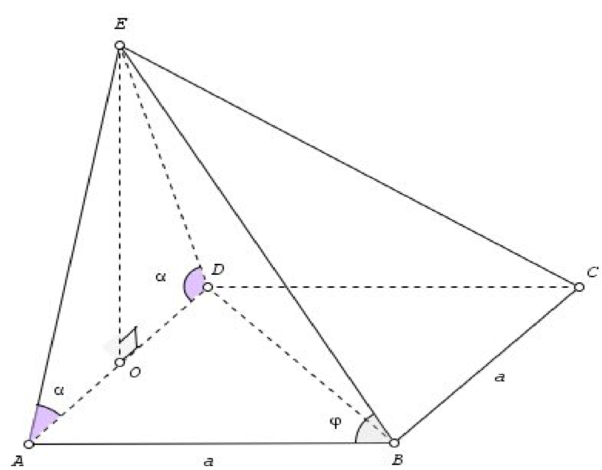
Решение: а) Тъй като $(ADE) \perp (ABCD)$, ако EO е височина на стената ADE ($O \in AD$), EO е височина и на пирамидата (защо?). Сега $AB \perp AD$ и $AB \perp EO$ и значи $AB \perp AE$.

б) От а) следва, че ъгълът между стената BAE и основата е $\sphericalangle DAE$ и е равен на α, също както и $\sphericalangle ADE$, откъдето O е среда AD. Оттук за височината на пирамидата получаваме $EO = AO\tan\alpha = \dfrac{a}{2}\tan\alpha$, за обема $V = \dfrac{a^3}{6}\tan\alpha$.

в) Тъй като $AB \,||\, CD$, търсеният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle ABE$. Тъй като $AE = \dfrac{AO}{\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$ и от а) $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{4\cos^2\alpha + 1}$, то $\cos\varphi = \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{2\cos\alpha}{\sqrt{4\cos^2\alpha + 1}}$. Тогава при $\alpha = 30^\circ$, $\cos\alpha = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откъдето $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. φ също е 30°.

Търсеното разстояние d е разстоянието от точката D до равнината ABE и може да се намери като височина през върха D в пирамидата $ABDE$. Обемът й е половината от обема на пирамидата $ABCDE$ (защо?), а $S_{ABE} = \dfrac{a^2}{4\cos\alpha}$. Сега $d = \dfrac{3V_{ABDE}}{S_{ABE}} = a\sin\alpha = \dfrac{a}{2}$.

Всъщност до този резултат се стига непосредствено, ако се съобрази, че оста на дадените прави е успоредна на височината през върха D в $\triangle ADE$ (която е и търсената по-горе височина на $ABDE$).



Таблица

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
В	Б	Г	А	Б