УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046, Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

ПРИЕМЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ

09 Април 2017 г.

Тема 1

Задача 1. Числата a_1, a_2, a_3 образуват растяща геометрична прогресия, при което $a_1 a_3 = 4$ и $a_2 - a_1 = 1$. Тогава a_1, a_2 и a_3 са равни на:

а) 1, 2 и 4; б) 2, 4 и 8; в) 1/2, 3/2 и 9/2; г) 3/2, 1 и 4/3.

Коментар: Отг. а). За б) не е вряно, че $a_2 - a_1 = 1$, за в) не е изпълнено другото условие, а г) не е геометрична прогресия.

Задача 2. Ъгълът α е остър и $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Тогава $\cos\alpha$ е равен на:

а) 1; б) $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Коментар: Отг. г). Използвайте, че $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ (пише го в таблиците с формули).

Задача 3. Ако a_n и b_n са числови редици и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n + 4b_n}{5a_n + 2b_n}$ е равно на:

а) 3; б) 2; в) 1; г) 7.

Коментар: Отг. б). Нека $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0$. Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n + 4b_n}{5a_n + 2b_n} = \dfrac{3\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 4\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{5\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 2\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{4b}{2b} = 2$. Разбира се, задачата допуска и други решения.

Задача 4. (1 т.) В правоъгълен триъгълник единият катет е с 10 по-голям от другия и с 10 по-малък от хипотенузата. Хипотенузата на триъгълника е равна на:

а) 30; б) 40; в) 50; г) 60.

Коментар: Отг. в). За единия катет x се получава уравнението $x^2+(x-10)^2=(x+10)^2; 2x^2-20x+100=x^2+20x+100$, за което лесно се вижда, че има решение $x=40$ или $x=0$. Ясно е, че катетът не е нула, значи хипотенузата е равна на $x+10=40+10=50$.

Задача 5. Най-голямата стойност на функцията $4\cos x+3\sin x$ е равна на:

а) 7; б) 3; в) 5; г) 4.

Коментар: Отг. в) Не може да е а), защото тогава трябва да е изпълнено $\cos x=\sin x=1$, което е невъзможно (защо ?).Не може да е б), защото $4\cos 0=4>3$. И накрая не е 4, защото при $x=45^\circ$ получаваме очевидното неравенство $5>\dfrac{7}{\sqrt{2}}>4$ (проверете го). Разбира се, има различни други решения: $4\cos x+3\sin x=5\left(\dfrac{4}{5}\cos x+\dfrac{3}{5}\sin x\right)=5\sin(x+\varphi)$, където φ е този ъгъл, за който $\sin\varphi=\dfrac{4}{5}; \cos\varphi=\dfrac{3}{5}$; такъв ъгъл има, защото $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=1$. Остава да забележим, че $\sin(x+\varphi)\le 1$.

Задача 6. Дадена е системата $\begin{cases} x-y=a \\ xy=-4 \end{cases}$.

(а) (1,5 т.) Решете системата, ако $a=5$.

(б) (1 т.) За кои стойности на *а* системата има решение?

(в) (2,5 т.) За тези стойности на параметъра *а* пресметнете стойността на израза $(x^2+y^2)^{xy}$ Докажете, че $(x^2+y^2)^{xy}\le\dfrac{1}{4096}$.

Решение: а) Ясно е, че $y=-\dfrac{4}{x}$ и след като се замести в първото уравнение (при $a=5$) се получава последователно $x+\dfrac{4}{x}=5;\ x^2+4=5x;\ x^2-5x+4=0.$ Това уравнение има корени $x_1=1$ и $x_2=4$ (може да се получи направо и с формулите на Виет). Значи $y_1=-\dfrac{4}{x_1}=-4$ и $y_2=-\dfrac{4}{x_2}=-1$. Окончателно решенията са двойките числа $(1,-4)$ и $(4,-1)$.

б) Както в предходната точка изключваме y от системата и се получава квадратното уравнение $x^2-ax+4=0$. То има решение при $D=a^2-16\geq 0$, където D е дискриминантата. Значи трябва да е изпълнено неравенството $a^2\geq 16$, решенията на което е множеството $a\in(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$.

в) Повдигаме на втора степен първото уравнение: $(x-y)^2=a^2;\ x^2-2xy+y^2=a^2$. Значи $x^2+y^2=a^2+2xy$ и тъй като $xy=-4$, получаваме окончателно $\left(x^2+y^2\right)^{xy}=\left(a^2-8\right)^{-4}$. Да отбележим сега, че X^{-4} е намаляваща функция на $X=a^2-8$. Но $a^2\geq 16$, значи $X=a^2-8\geq 8;\ X\in[8,\infty)$, следователно $X^{-4}\leq 8^{-4}$, или казано с други думи $\left(x^2+y^2\right)^{xy}=\dfrac{1}{\left(a^2-8\right)^4}\leq\dfrac{1}{8^4}=\dfrac{1}{4096}$.

Задача 7 . Равнобедрен трапец има ъгъл φ между бедро и основа, диагоналите му са взаимно перпендикулярни и са равни на d .

а) (1,5 т.) Пресметнете радиуса на описаната окръжност.

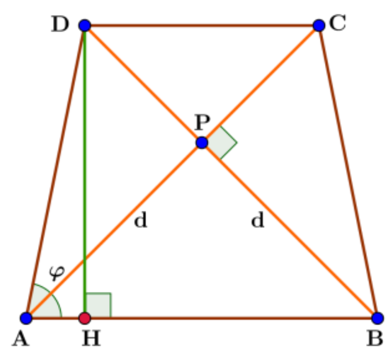
б) (1,5 т.) Пресметнете лицето на трапеца.

в) (2 т.) За коя стойност на φ в трапеца може да се впише окръжност?

Решение: а) Нека трапецът е означен с $ABCD$; $AB\parallel CD$ са основите му.и $\varphi=\sphericalangle DAB$. Окръжността, която е описана около трапеца е описана и около $\triangle ABD$. В този триъгълник ни е дадена страната $BD=d$ и срещулежащия ъгъл φ. От синусовата теорема следва, че $\dfrac{BD}{\sin\varphi}=2R$ (R е радиусът на описаната около $\triangle ABD$ *значи и около трапеца* окръжност), следователно $R=\dfrac{BD}{2\sin\varphi}=\dfrac{d}{2\sin\varphi}$.

б) Лицето на всеки четириъгълник с диагонали d_1 и d_2 и ъгъл φ между тях е равно на $\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ (пише го например в таблиците с формули). В нашия случай лицето на трапеца е равно на $\frac{d^2}{2}$, защото $\varphi = 90^\circ$.

в) Прекарваме височината DH.



Да отбележим след това, че $\sphericalangle ABD = 45^\circ$, защото е ъгъл и в равнобедрения правоъгълен триъгълник ABP. Значи и $\triangle DHB$ е равнобедрен и $DH = HB$. Остава да отбележим, че $HB = \frac{AB+CD}{2}$ и ако в трапеца може да се впише окръжност, то $AB + CD = AD + BC = 2AD$, значи $AD = \frac{AB+CD}{2}$ Тъй като $DH = HB$, то в $\triangle AHD$ имаме $AD = HD$. Това означава, че $\varphi = 90^\circ$. С други думи в нашия трапец може да се впише окръжност само ако той е квадрат (някои страдат от заблуждението, че квадратът не е трапец :).

Задача 8. Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$ с основа $\triangle ABC$, в който $AC = BC = a$ и $\sphericalangle BCA = \gamma$. Околните ръбове са равни също на a.

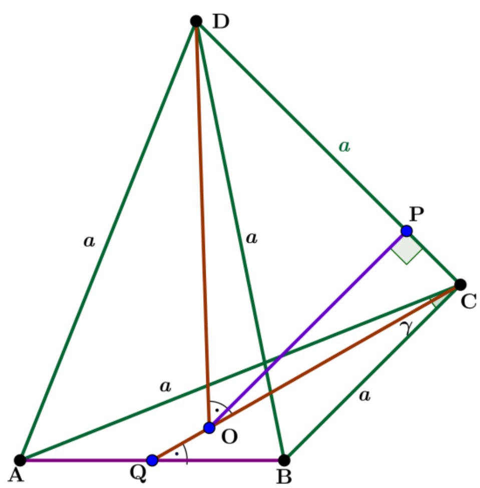
а) (1,5 т.) Докажете, че радиусът на описаната около основата окръжност е равен на $\frac{a}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$ и че трябва $\gamma < 120^\circ$.

б) (1,5 т.) Пресметнете височината на пирамидата.

в) (2 т.) Нека d е разстоянието от центъра на описаната около основата окръжност до ръба CD. За кой ъгъл γ разстоянието d е най-голямо, ако a е фиксирано?

Решение: а) За радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност със Синусова теорема получаваме $2R = \dfrac{a}{\sin\left(90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}\right)}$, откъдето следва исканото равенство. Тъй като от условието следва, че върхът на пирамидата се проектира в центъра O на описаната около основата окръжност, трябва този радиус да е по-малък от околния ръб, т.е. $\cos\dfrac{\gamma}{2} > \dfrac{1}{2}$ или $\gamma < 120^\circ$.

б) От правоъгълния $\triangle COD$ получаваме $OD = \sqrt{a^2 - R^2} = \dfrac{a}{2\cos\dfrac{\gamma}{2}}\sqrt{4\cos^2\dfrac{\gamma}{2} - 1}$.



в) Разстоянието от точката O до околния ръб CD (което е едно и също за всички околни ръбове) е равно на височината OP ($P \in CD$) в $\triangle COD$. Тогава $CD.OP = CO.OD$, откъдето чрез резултатите от а) и б) получаваме

$d = \dfrac{a}{4\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}\sqrt{4\cos^2\dfrac{\gamma}{2} - 1}$. Ясно е, че може да изследваме кога d^2 е най-голямо.

Означаваме $x = \cos^2\dfrac{\gamma}{2}$ и разглеждаме функцията $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2}, x \in \left(\dfrac{1}{4};1\right)$.

Производната ѝ е $f'(x) = \dfrac{2(1-2x)}{x^3}$, която се анулира при $x = \dfrac{1}{2}$, за което x

стандартно се вижда, че $f(x)$ достига най-голямата си стойност. Тогава $\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 = 0$, т.е $\gamma = 90^\circ$.

ТАБЛИЦА

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
а	г	б	в	в

Окончателната оценка – на база получен брой точки – се определя по методика, приета от УАСГ.