



Приета: 18.03.2016 г.
Преработена: 11.04.2016 г.
Одобрена: 22.04.2016 г.

ДИСКРЕТНО МОДЕЛИРАНЕ НА НЕПРЕКЪСНАТИ СИСТЕМИ – ЧИСЛЕНО И ЕКСПЕРИМЕНТАЛНО СЪОТВЕТСТВИЕ

П. Павлов¹, Д. Евлогиев²

Ключови думи: дискретно моделиране, непрекъснати системи, механо-математичен модел, числено изследване, експериментално изследване, свободни трептения, съответствие

РЕЗЮМЕ

В статията се изследва динамичното поведение на трептяща в хоризонтално направление равнинна конструкция – конзола тип обърнато махало. Статията има за цел да установи съответствието на резултатите, получавани при различните типове динамичен анализ за този тип конструкция. За верификацията на резултатите са разгледани решенията на съответния динамичен проблем посредством, методологията на теоретичната механика, строителната статика, софтуерни продукти, работещи на базата на крайните елементи ANSYS и SAP2000 и експериментално съответствие. В изследването са засегнати свободните и принудените трептения на системата. Същността на статията се състои в намиране на разликата, грешката и оценката на различните методи, определящи динамичните характеристики на конструкцията. Реалната конструкция представлява билборд, който следва при своята експлоатация да бъде натоварван със статични и динамични въздействия от различен характер. При изследване на тялото посредством методологията на Теоретичната Механика тялото се изследва като безкрайно кораво като се работи с еквивалентна коравина на хоризонтално преместване. При Строителната Статика тялото бива разглеждано с действителните характеристики на своето напречно сечение, но търпи ограничения от гледна точка на подробно задаване на геометрията. При изследванията на база на FEM при SAP2000 имаме възможността да дефини-

¹ Петър Павлов, доц. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: perar.d.pavlov@gmail.com

² Даниел Евлогиев, инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: daniel_evlogiev@abv.bg

раме подробно материал и геометрия на конструкцията като моделът се моделира с Beam елементи. При решението на база на софтуерен продукт ANSYS имаме възможност да моделираме конструкцията с пространствени елементи, чиято гъстота „дискретизация“ можем да избираме свободно. Последният етап от едно комбинирано – теоретично, числено и експериментално изследване – е експерименталното изследване, чрез конструирания стенд за изследване на динамичните характеристики на мащабни модели на различни видове конструкции.

1. Въведение

Както е известно от литературата по Динамика и специализираната литература в областта на механичните трептения, основните етапи при решаването на обратната задача на динамиката на определен материален обект или система са:

- 1) създаване на динамичен модел;
- 2) създаване на математичен модел;
- 3) аналитично или числено решаване на създадените диференциални уравнения;
- 4) възможност за решение на съответния проблем на база на FEM;
- 5) визуализация на резултатите;
- 6) експериментална проверка на резултатите;
- 7) сравнение и анализ на получените резултати.

Първите два етапа, и в миналото, и в сегашните научни изследвания, са запазили своето съдържание и форма. Развитието на новите информационни технологии позволява разширяването на възможностите при решаването на третия и четвъртия етап. Новите софтуерни пакети за статичен и динамичен анализ на системите пък позволяват едновременното решение на първите 4 етапа. След известно игнориране, научните изследвания отново се насочват към експерименталните изследвания. Основната причина за това е в новите поколения измервателна техника, която лесно се свързва с различни периферни устройства, което позволява резултатите от експерименталните изследвания лесно да се обработват, анализират и визуализират.

Всичко това позволява етапите (преди всичко третия и четвъртия), споменати в началото на въвеждането, да се увеличат значително. Такова по-разширено изследване на определен динамичен проблем до 7 етапа е реализирано в доклада. За целта се ползва хардуерната, софтуерната и експерименталната база на Лабораторията за числено и експериментално динамично моделиране, наскоро създадена към катедра „Техническа механика“. Основните етапи на това разширено изследване на динамичните характеристики на конструкция конзола тип обърнато махало са:

- създаване на динамичен модел;
- създаване на математичен модел;
- аналитично решаване на създадените диференциални уравнения (ДУ), при нулеви начални условия;
- разработване в средата на ANSYS и SAP2000 на динамичен модел на конструкцията;

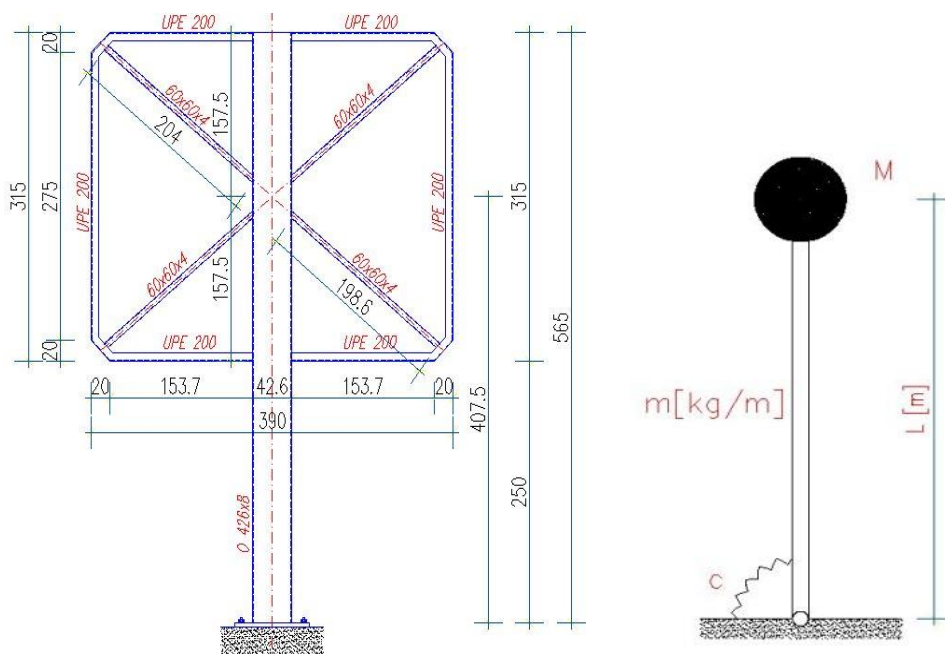
- визуализация на резултатите и анимация на движението посредством софтуер на база на крайни елементи или построяване на графики на трепене на системата по получени вече премествания или скорости в определени точки от конструкцията;
- реализиране на приблизително експериментално изследване чрез проектирания и конструиран Стенд за изследване мащабни модели на строителни конструкции.

2. Кратко описание на теоретичните, числени и експериментални изследвания

Както бе споменато, разширеното решаване на обратната задача ще бъде приложено за определен динамичен проблем – Изследване на свободните и принудените трептения на конзолна конструкция тип обърнато махало, причинени от свободни трептения и кинематично смущение. Съвсем накратко ще бъдат описани седемте етапа на това изследване.

2.1. Динамичен модел за изследване на конзолна конструкция тип обърнато махало

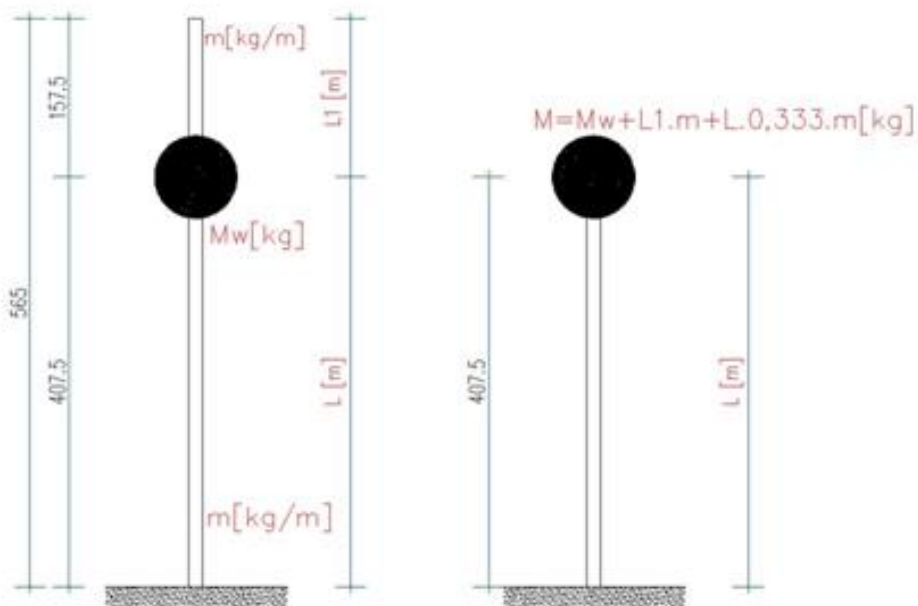
Действителната конструкция и динамичният модел посредством теорията на техническата механика за този тип конструкция, е показан на следващата фиг. 1.



Фиг. 1. Действителна конструкция и динамичен модел според методологията на техническата механика

Вертикално разположеното тяло се приема за абсолютно твърдо. Тялото се моделира като ставно закрепено в долния край и е изобразено като прът, тъй като в изследванията се отчитат само надлъжната геометрия и напречния инерционен момент. Якостните характеристики на сечението се приравняват с ъгловата пружина, разположена в основата на динамичния модел. В горната част на пръта е разположена концентрирана маса, която е сумарна за цялата маса на връхната част на конструкцията и разпределена маса, която представлява теглото на напречното носещо сечение на конструкцията.

Динамичният модел на конструкцията според методологията на строителната механика е показан на следващата фиг. 2.



Фиг. 2. Динамичен модел според методологията на строителната механика

При изследване на характеристиките на конструкцията според методологията на строителната механика тялото се приема за деформируемо, а материалът за идеално еластичен. Отчита се инерционният момент на напречното сечение и E -модулът на материала. Като концентрирана маса се приема масата на цялата връхна конструкция.

2.2. Математичен модел за изследване на свободните трептения на конструкцията

При изследването на конструкцията според теорията на техническата механика, за извеждане на уравнението на движение на системата се ползват уравненията на Лагранж от II род за консервативна система по отношение на избраната обобщена координата φ .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0. \quad (1)$$

Кинетичната енергия на системата се формира от кинетичната енергия на пръта и на концентрираната маса.

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (ml) l^2 + Ml^2 \right) \dot{\varphi}^2, \quad (2)$$

$$E_k = \sum E_{k,i} = 4,997 \dot{\varphi}^2.$$

Потенциалната енергия се формира от потенциалната енергия на пръта, концентрираната маса и ъгловата пружина и след известни преобразувания може да се представя във вида

$$E_p = \frac{1}{2} c \varphi^2 - Mgl \frac{\varphi^2}{2} - (mgl) \frac{l}{2} \frac{\varphi^2}{2}; \quad (3)$$

$$E_p = \sum E_{p,i} = 17729,59 \varphi^2.$$

След намиране на производните на кинетичната и потенциалната енергия и заместване в (1) се получава диференциалното уравнение на свободните трептения на конструкцията във вида

$$9,994 \ddot{\varphi} + 35459,18 \varphi = 0. \quad (4)$$

При изследването на динамичното поведение на конструкцията при принудени хармонични трептения според методологията на техническата механика и базирайки се на основното уравнение на динамиката можем да достигнем до израза

$$ma = \sum F_i; \quad (5)$$

$$m\ddot{u} = -cu + P(t) \rightarrow m\ddot{u} + cu = P \sin(Qt + \mu) \rightarrow \ddot{u} + \omega^2 u = (P/m) \sin(Qt + \mu).$$

При изследването на динамичното поведение на конструкцията при свободни трептения според методологията на строителната статика използваме вече установената зависимост за коравината на конструкцията

$$c = \frac{3EI}{L} = 35485,48 \text{ kN.m.} \quad (6)$$

2.3. Аналитично решение на съставеното диференциално уравнение

Диференциалното уравнение, получено в т. 2.2 се решава като линейно нехомогенно диференциално уравнение от втори ред с хармонична дясна част. Общото му решение може да се даде с израза

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin(\omega t) -$$

$$-\frac{H}{\omega^2 - Q^2} \left(\sin(\mu) \cos(\omega t) + \frac{Q}{\omega} \cos(\mu) \sin(\omega t) \right) + \frac{H}{\omega^2 - Q^2} \sin(Qt + \mu). \quad (7)$$

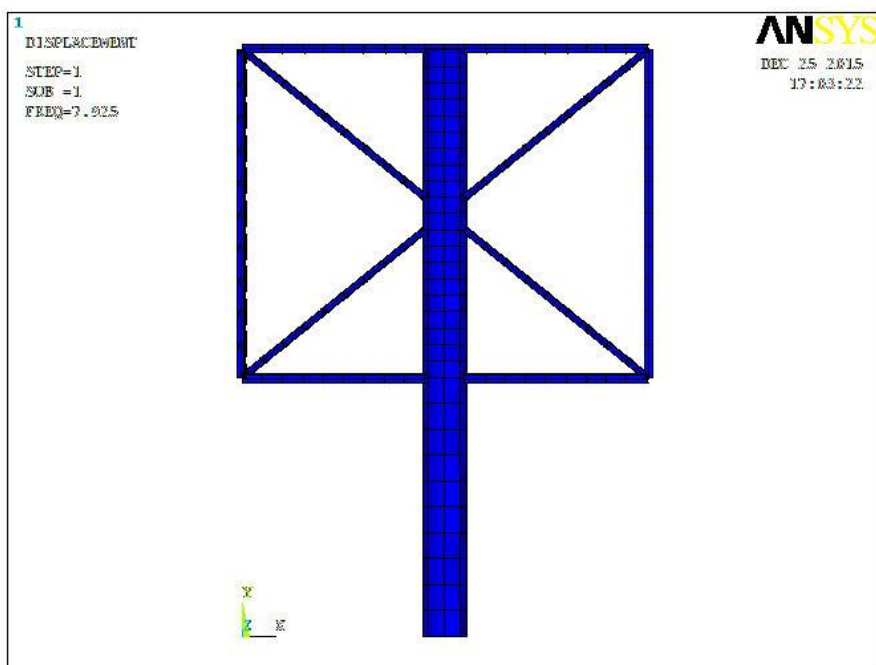
Като извод за първата собствена честота на конструкцията според методологията на строителната механика можем да посочим израза

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{ML^3}}. \quad (8)$$

2.4. Обобщен програмен модул в средата на ANSYS и SAP2000 за изследване на свободните и принудените трептения на конзолната конструкция тип обърнато махало

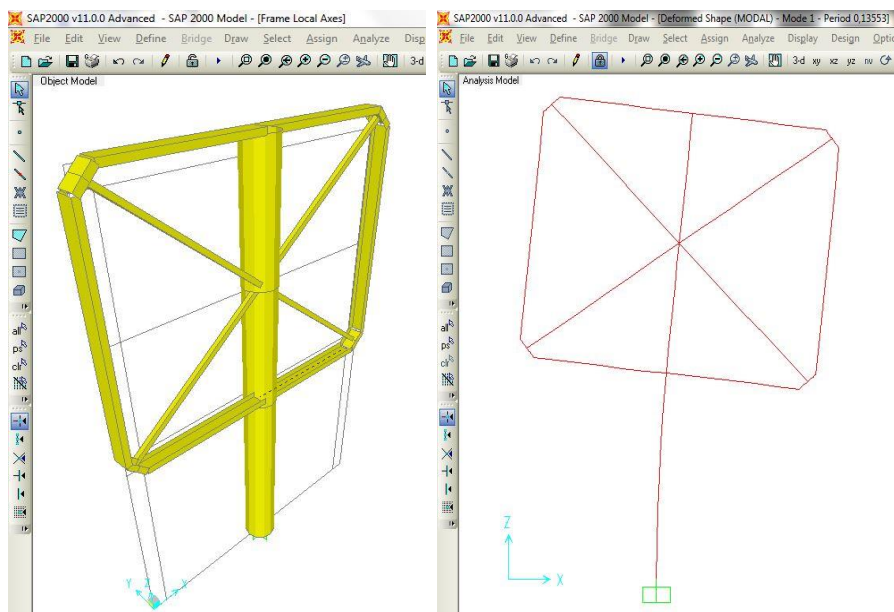
Пълното решение на разглежданата задача от създаването на динамичния модел до визуализацията и анализа на резултатите е реализирано и въз основа на метода на крайните елементи в средата на програмната система ANSYS.

Моделът (фиг. 3) представлява пълно геометрично и материално подобие на конструкцията. Чрез него могат да се изследват основните видове трептения – свободни и принудени. Моделът е изграден от елементи тип BEAM 189, а масата се задава като единица обем от материала.



Фиг. 3. Модел на конструкцията със софтуерен продукт ANSYS базиран на МКЕ

Решението на разглежданата задача с помощта на SAP2000 се реализира с моделирането на конструкцията с гредови елементи. Извършен е модален анализ за определяне на собствените честоти и периоди на конструкцията, както и анализ във времето, с който да може да отчетем сеизмично или действащо по хармоничен закон ветрово въздействие. Модел с помощта на софтуерен продукт SAP2000 (фиг. 4).



Фиг. 4. Модел на конструкцията със софтуерен продукт SAP2000, базиран на МКЕ

2.5. Програмен модул за визуализация на численото решение

В средата на MatLab е създаден програмен модул, който се използва в случаите, когато аналитичното решение е извършено ръчно. Модулът съдържа блок за входни данни, блок за изчисления и блок за визуализация. В последния са заложени голям брой графични представяния на база на безбройните възможности на програмната система като е базиран на уравнения (7).

2.6. Експериментално решение на задачата чрез Стенд за изследване на динамичните характеристики на мащабни модели на конструкции

За експериментално решение на динамични задачи в областта на трептенията на модели на строителни конструкции бе проектиран и конструиран специален стенд. Основните елементи на стенда са следните: възможност за динамично изпитване на модели на конструкции с размери до 50/40 cm в план, 60 cm по височина и тегло до 10 kg. Моделът на конструкцията представлява мащабно подобие, на което изследваме, динамичните характеристики, а заключение за реалните характеристики на конструкцията можем да получим благодарение на следните мащаби:

- Мащаб на силите – $M_F = \frac{\bar{F}}{F} \quad F = m.g, \quad g = \text{const} \quad \rightarrow M_F = M_m$;
- Мащаб на масите – $M_m = \frac{\bar{m}}{m} = \frac{0,1203}{82,47} = 1,458 \cdot 10^{-3}$;

– Машаб за височина, дължина – $M_L = \frac{\bar{L}}{L} = \frac{0,4075}{4,075} = \frac{1}{10} = 0,1$;

– Машаб на инерционния момент – $M_I = \frac{\bar{I}}{I} = \frac{3754,15}{229529107} = 1,6356 \cdot 10^{-5}$;

– Машаб на коравина – $M_E = \frac{\bar{E}}{E} = \frac{2400}{210000} = 11,4286 \cdot 10^{-3}$;

– Машаб за премествания –

$$M_U = \frac{\bar{U}}{U}, \quad U = \text{const} \frac{FL^3}{EI} \rightarrow M_U = \frac{\text{const} \frac{\bar{F}\bar{L}^3}{\bar{E}\bar{I}}}{\text{const} \frac{FL^3}{EI}} = M_{\text{const}} \frac{M_F M_L^3}{M_E M_I} = 7,79987.$$

Стендът позволява симулиране на кинематично инерционно въздействие в основата на конструкцията (сеизмично въздействие), действащо по хармоничен или произволен закон във времето. Отчитането на резултатите се осъществява благодарение на датчици, измерващи хоризонталните премествания в конструкцията. Резултатите се разчитат от компютър благодарение на програмен пакет MatLab, което позволява тяхната лесна обработка и анализ. Стендът е отворена система и може да се променят отделни части от него с цел подобряване на функциите му.

2.7. Сравнение и анализ на получените резултати

На (фиг. 5) са изобразени резултатите от собствените характеристики на конструкцията – честота и период, получени на базата на различни теоретични суфтуерни или експериментално решение на проблема. Като сравнение на резултатите е получена средноаритметичната грешка в абсолютно и в процентно отношение.

	TABLE: Modal Periods And Frequencies			Сравнение на резултатите					
	Характеристики			max Δ			max Δ [%]		
Методика	Период T [s]	Честота f [Hz]	Честота f [s-1]	Δ T [s]	Δ f [Hz]	Δ f [s-1]	Δ T [s]	Δ f [Hz]	Δ f [s-1]
Строителна механика	0,105	9,485	59,595	0,013	0,918	6,195	12,381	9,678	10,395
Теоретична механика	0,105	9,480	59,565	0,013	0,913	6,165	12,381	9,631	10,350
SAP 2000	0,136	7,379	46,361	0,018	1,189	7,039	12,934	16,108	15,183
ANSYS	0,126	7,925	49,770	0,008	0,642	3,630	6,484	8,100	7,294
Стендово Изпитване	0,121	8,234	51,710	0,003	0,333	1,691	2,839	4,044	3,269

Фиг. 5. Анализ и сравнение на резултатите

3. Заключение

Сравнението на резултатите показва разлики в теоретичните, софтуерните и експерименталното изпитване на модела на строителната конструкция – конзола тип обърнато махало. Получените разлики се дължат на предпоставките, с които в случая на

механиката приемаме масата за концентрирана, а тялото за абсолютно твърдо или идеално еластично. Като извод може да се каже, че тези първоначални опростявания могат да бъдат прилагани и са приложими при по-прости и симетрични конструкции и методиката на механиката дава достоверни резултати. В случаите на по-сложни и разчупени конструкции е необходимо изготвянето на тримерни модели на съответната конструкция на база на МКЕ.

Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-82/2015 е подкрепена финансово от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ.

Авторите на статията изказват благодарност:

- на техническия изпълнител на стенда Владимир Грозданов, извършил прецизно различните по характер операции (заваръчни, стругарски, електрически, бояджийски и др.);
- на ЦНИП при УАСГ, за помощта им и проявеното разбиране към проблемите ни през последната година във връзка с работата ни по научния проект, завършила с конструирането на земетръсния стенд;
- на инж.-физик Димитър Василев, разработил системите за управление на стенда и системите за отчитане на резултатите на база италианската Arduino технология.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, П., Лилкова-Маркова, С., Донева, С., Наков, Б. Параметри на Стенд за изследване ъгловите трептения на тяло, ротиращо във вертикалната равнина – избор и граници на изменение. Механика на машините (под печат).

2. Павлов, П., Лилкова-Маркова, С., Наков, Б., Донева, С. Стенд за изследване ъгловите трептения на тяло във вертикалната равнина. Сб. доклади МЮНПК 65 години Хидротехнически факултет, 2014.

3. Pavlov, P., Lilkova-Markova, S., Doneva, S. Numerical study of the angular vibrations of rotating in a vertical plane system in the field of MatLab/Simulink. Conf. "27th Chemnitz FEM Symposium 2014", (in print after correction).

4. Lilkova-Markova, S., Pavlov, P., Evlogiev, D. Study, based on FEM, of the angular vibrations of a rotating in the vertical plane system of rod and concentrated masses. Conf. "27th Chemnitz FEM Symposium 2014", (in print after correction).

5. Павлов, П., Евлогиев, Д. Оптимизиране параметрите на стенд за модулни динамични изпитвания на конструкции от рамков тип. Механика на машините (под печат).

6. Pavlov, P., Evlogiev, D. Experimental determination of the elastic-viscous characteristics of elastic ropes. Procedia Engineering 108, 488 – 495, 2015.

7. Павлов, П., Евлогиев, Д., Иванова, Г. Комбинирано – аналитично, числено и експериментално изследване динамичното поведение на водна кула. Дни на механиката, Варна, 2015, под печат.

DISCREET MODELLING OF CONTINUOUS SYSTEMS – NUMERICAL AND EXPERIMENTAL CONFORMATION

P. Pavlov¹, D. Evlogiev²

Keywords: discreet modelling, continuous systems, mechano-mathematical model, numerical research, experimental research, free oscillations, conformation of results

ABSTRACT

The field of research of the present paper is the dynamic behaviour of a horizontally vibrating, two dimensional inverted pendulum “cantilever”. The aim of this paper is to establish the conformation of results delivered by different types of analysis for the specific structure. The results are delivered and compared in several different methodologies, according to theoretical mechanics, structural statics, FEM based software packages “ANSYS” and “SAP2000”, and experimentally. Free and forced oscillations of the system are also subject of research. The essence of the report is to reveal differences, inaccuracies and to evaluate different methods for calculating dynamical parameters of structures. In practice, the structure is a billboard, exposed to static and dynamic loads of various nature, during its exploitation life.

According to the methodology of Theoretical Mechanics, the object is assumed as a rigid body, thus using equivalent stiffness for horizontal deflections; while on the other hand, in Structural Statics the cross sectional parameters of the object are determined precisely, but the object suffers limitations in determining its geometry. In SAP2000, a FEM based analysis, we are able to define in details the material and geometry of a structure, modelling it with “beam” elements. The solution under software package ANSYS, allows us to design the structure with three dimensional finite elements, the discretization of which we determine. The last stage of this combined theoretical, numerical and practical research is the experimental part by means of the specially constructed stand for examining the dynamical parameters for scaled models of various structures.

¹ Petar Pavlov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: petar.d.pavlov@gmail.com

² Daniel Evlogiev, Eng., Dept. “Technical Mechanics”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: daniel_evlogiev@abv.bg