



*Получена: 07.03.2017 г.*

*Приета: 20.03.2017 г.*

## АНАЛИЗ НА НАДЛЪЖНА ПУКНАТИНА В МНОГОСЛОЙНА ГРЕДА С ОТЧИТАНЕ НА НЕЛИНЕЙНОТО ПОВЕДЕНИЕ НА МАТЕРИАЛА

**В. Ризов<sup>1</sup>**

*Ключови думи: пукнатина, многослойна греда, физическа нелинейност*

### РЕЗЮМЕ

Анализирана е надлъжна пукнатина в многослойна греда с отчитане на нелинейното поведение на материала. Приложен е интегралът  $J$ . Разгледана е греда, изпълнена от произволен брой надлъжни слоеве. Освен това, дебелината на слоевете и материалните им константи могат да са различни. Рамената на пукнатината имат различна височина. Решението е получено във функция на огъващите моменти в напречните сечения на гредата пред и зад върха на пукнатината, което значително улеснява практическото му приложение. Полученото решение разкрива възможности за изследване на влиянието на местоположението и дължината на пукнатината, броя и дебелината на отделните слоеве и физическата нелинейност върху поведението на пукнатината.

### 1. Въведение

Многослойните гредови конструкции имат редица предимства в сравнение с гредите, изпълнени от традиционни конструктивни материали. Например, многослойните греди имат по-високо отношение якост – собствено тегло. Многослойните греди предоставят възможност за пълноценно използване на якостта на материала, като за целта в по-напрегнатите зони се прилагат слоеве от материали с по-висока якост [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Гредовите конструкции от стомана или стоманобетон, усилен с ленти от полимерен композит, също представляват многослойни системи. Многослойни конс-

---

<sup>1</sup> Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: v\_rizov\_fhe@uacg.bg

трукции се прилагат също за работа в агресивна среда, като от към страната на агресивното въздействие (температура, химически агенти и др.) се използват слоеве от материал с подходящи свойства. Многослойни системи намират приложение и в ядрената енергетика. Сандвич панелите, които благодарение на отличните си топлоизолационни свойства допринасят за подобряване на енергийната ефективност на сградите, също представляват многослойни системи. Една от слабостите на многослойните конструкции е появата и нарастването на надлъжни пукнатини между слоевете. Тези пукнатини редуцират значително носимоспособността на многослойните конструкции и могат да предизвикат катастрофално разрушение. Публикациите за надлъжни пукнатини предимно прилагат методите на линейно-еластичната теория на разрушението (тази теория се основава на предпоставката за валидност на закона на Хук, т.е. предполага се линейно-еластично поведение). В действителност обаче връзката между напреженията и деформациите може да е нелинейна. Отчитането на физическата нелинейност е предпоставка за разкриване на резерви от носимоспособност и за снижаване на себестойността на конструкцията. Ето защо в настоящата статия се разглежда изследване на надлъжна пукнатина в многослойна греда с отчитане на физическата нелинейност. За целта се прилага интегралът  $J$ . Полученото решение може да се използва при проверка на вероятността за нарастване на съществуващи пукнатини. За целта определената с помощта на предлаганото тук решение стойност на интеграла  $J$  трябва да се сравни с граничната стойност за разглежданата многослойна система. Полученото в настоящата статия решение ще може да се прилага и за определяне на граничната стойност на интеграла  $J$  въз основа на данни от експериментални изследвания на пукнатини. За целта експериментално определеното гранично натоварване трябва да се замести в изведените тук формули. В статията се предвижда също и сравнение с известни решения с цел проверка на достоверността на получените резултати. Резултатите ще могат да се използват и за оптимизиране на структурата на многослойните системи (брой и дебелина на отделните слоеве, вид на материала и др.) с оглед на тяхното осигуряване срещу поява на пукнатини.

## 2. Нелинеен анализ на надлъжна пукнатина

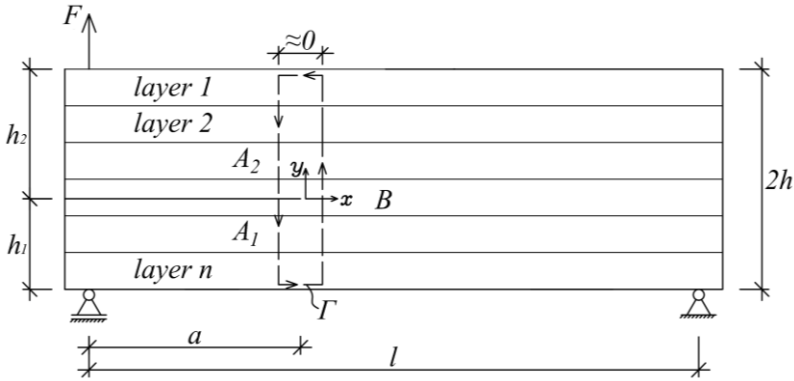
Изследваната многослойна греда е показана схематично на фиг. 1. В гредата има надлъжна пукнатина с дължина  $a$ . Двете рамена на пукнатината имат различна височина, долното рамо има височина на напречното сечение  $h_1$ , а височината на напречното сечение на горното рамо е  $h_2$ . Напречното сечение на гредата е правоъгълник с основа  $b$  и височина  $2h$ . Гредата е изпълнена от  $n$  броя надлъжни слоеве, здраво свързани помежду си. Външното натоварване се състои от една концентрирана вертикална сила  $F$ , приложена в свободния край на горното рамо на пукнатината (фиг. 1). Гредата има отвор  $l$ .

Интегралът  $J$ , който се прилага в настоящия нелинеен анализ на надлъжната пукнатина, се записва по следния начин [11, 12, 13]:

$$J = \int_{\Gamma} \left[ U_0 \cos \alpha - \left( p_x \frac{\partial u}{\partial x} + p_y \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] ds, \quad (1)$$

където  $\Gamma$  е контурът на интегриране;  $U_0$  – специфичната потенциална енергия на деформацията;  $\alpha$  – ъгълът между външната нормала към контура на интегриране и направление-

нието на пукнатината;  $p_x$  и  $p_y$  – компонентите на вектора на напрежението;  $u$  и  $v$  – компонентите на вектора на преместванията в координатни оси  $x, y$ ,  $ds$  е диференциален елемент от контура  $\Gamma$ .



Фиг. 1. Многослойна греда с надлъжна пукнатина

Механичното поведение на слоевете на гредата се описва със следните нелинейни зависимости между напреженията и деформациите:

$$\sigma_i = D_i \varepsilon_i^{f_i} - L_i \varepsilon_i^{g_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

където  $\varepsilon_i$  е надлъжната деформация;  $\sigma_i$  – надлъжното нормално напрежение;  $D_i$ ,  $L_i$ ,  $f_i$  и  $g_i$  – материални константи в слой  $i$ ;  $n$  е броят на слоевете. Нелинейната крива напрежение–деформация, определена с (2), е показана схематично на фиг. 2. Трябва да се отбележи, че при  $f_i = 1$  и  $g_i = 1$ , зависимост (2) се трансформира в закона на Хук, допускайки, че модулът на еластичност е  $D_i - L_i$ .

Решението на интеграла  $J$  е получено по контура  $\Gamma$ , състоящ се от двете напречни сечения на гредата пред и зад върха на пукнатината. Ясно е, че интегралът  $J$  има ненулева стойност в сечения  $A_1$  и  $A_2$  на двете рамена на пукнатината, понеже силата  $F$  се поема само от лявата опора на гредата. Ето защо, решението на интеграла  $J$  се намира чрез сумиране

$$J = J_{A_1} + J_{A_2}, \quad (3)$$

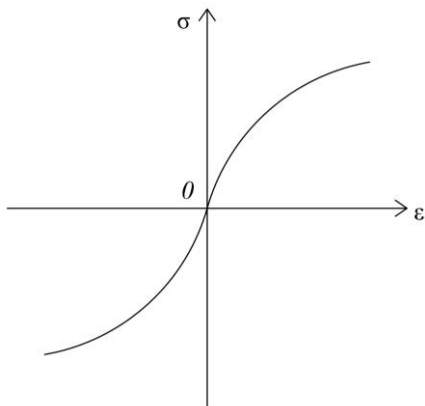
където  $J_{A_1}$  и  $J_{A_2}$  са стойностите на интеграла  $J$  в сечения  $A_1$  и  $A_2$ .

Първо се намира решението на интеграла  $J$  в участък  $A_1$ . Разпределението на нормалните напрежения се намира по (2). Компонентите на интеграла  $J$  са

$$p_{x_i} = -\sigma_i = -D_i \varepsilon_i^{f_i} + L_i \varepsilon_i^{g_i}, \quad p_{y_i} = 0, \quad (4)$$

$$ds_i = dz_1, \quad \cos \alpha_i = -1, \quad i = 1, 2, \dots, n_L, \quad (5)$$

където  $n_L$  е броят на слоевете в долното рамо на пукнатината.



**Фиг. 2. Нелинейна крива напрежение–деформация**

Частната производна  $\partial u / \partial x_i$  в слой  $i$  се изразява по следния начин:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon = \kappa_1 \left( z_1 - z_{1n_1} \right). \quad (6)$$

Тук  $\kappa_1$  е кривината на долното рамо на пукнатината,  $z_{1n_1}$  е разстоянието от нулевата линия до центъра на напречното сечение на долното рамо на пукнатината.

Специфичната потенциална енергия на деформацията  $U_{0_i}$  в слой  $i$  е равна на лицето под кривата напрежение-деформация [14, 15, 16, 17, 18, 19]

$$U_{0_i} = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (7)$$

От (2) и (7)  $U_{0_i}$  се получава в следния вид:

$$U_{0_i} = \frac{D_i \varepsilon_i^{f_i+1}}{f_i+1} - \frac{L_i \varepsilon_i^{g_i+1}}{g_i+1}. \quad (8)$$

Формула (6) се замества в (8):

$$U_{0_i} = \frac{D_i \left[ \kappa_1 \left( z_1 - z_{1n_1} \right) \right]^{f_i+1}}{f_i+1} - \frac{L_i \left[ \kappa_1 \left( z_1 - z_{1n_1} \right) \right]^{g_i+1}}{g_i+1}. \quad (9)$$

Кривината на долното рамо и разстоянието от нулевата линия до центъра на напречното сечение се намират от следните условия за равновесие на напречното сечение на долното рамо:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n_L} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_i(\varepsilon) b dz_1 = 0, \quad (10)$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n_L} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \sigma_i(\varepsilon) b z_1 dz_1, \quad (11)$$

където  $N_1$  и  $M_1$  са надлъжната сила и огъващият момент в долното рамо (очевидно е, че  $N_1 = 0$  (фиг. 1)). Огъващият момент е  $M_1 = Fa$ . След заместване на (2) и (6) в (10) и (11) се получава

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n_L} \left\{ \frac{D_i \kappa_1^{f_i}}{f_i + 1} \left[ (z_{i+1} - z_{1n_1})^{f_i+1} - (z_i - z_{1n_1})^{f_i+1} \right] - \frac{L_i \kappa_1^{g_i}}{g_i + 1} \left[ (z_{i+1} - z_{1n_1})^{g_i+1} - (z_i - z_{1n_1})^{g_i+1} \right] \right\} = 0, \quad (12)$$

$$M_1 = b \sum_{i=1}^{n_L} \left\{ \frac{D_i \kappa_1^{f_i}}{f_i + 2} \left[ (z_{i+1} - z_{1n_1})^{f_i+2} - (z_i - z_{1n_1})^{f_i+2} \right] + \frac{D_i \kappa_1^{f_i} z_{1n_1}}{f_i + 1} \left[ (z_{i+1} - z_{1n_1})^{f_i+1} - (z_i - z_{1n_1})^{f_i+1} \right] - \frac{L_i \kappa_1^{g_i} z_{1n_1}}{g_i + 1} \left[ (z_{i+1} - z_{1n_1})^{g_i+1} - (z_i - z_{1n_1})^{g_i+1} \right] - \frac{L_i \kappa_1^{g_i}}{g_i + 2} \left[ (z_{i+1} - z_{1n_1})^{g_i+2} - (z_i - z_{1n_1})^{g_i+2} \right] \right\}. \quad (13)$$

Ясно е, че при  $L_i = 0$  и  $f_i = 1$  формула (2) се трансформира в закона на Хук (допускайки, че модулът на еластичност е  $E = D_i$ ). Наистина при  $n_L = 1$ ,  $L_i = 0$  и  $f_i = 1$  от (13) се получава

$$\kappa_1 = \frac{12M_1}{Ebh^3}, \quad (14)$$

което е познатата формула за кривина на линейно-еластична хомогенна греда. Също, при  $n_L = 1$ ,  $D_i = 0$  и  $g_i = 1$  формула (13) се трансформира в (14), приемайки, че модулът на еластичност е  $-L_i$ . При  $f_i = 1$  и  $g_i = 1$  от (13) отново се получава (14), приемайки, че модулът на еластичност е  $D_i - L_i$ .

Уравнения (12) и (13) се решават по отношение на  $\kappa_1$  и  $z_{1n_1}$  с помощта на MatLab.

Компонентите на интеграла  $J$  в участък  $A_1$  са

$$J_{A_1} = \sum_{i=1}^{n_L} \int_{z_{1i}}^{z_{1i+1}} \left[ U_{0i} \cos \alpha - \left( p_{xi} \frac{\partial u}{\partial x} + p_{yi} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] ds. \quad (15)$$

След заместване на (4), (5), (6) и (9) в (15) се получава

$$J_{A_1} = \sum_{i=1}^{n_L} \left\{ \frac{D_i f_i}{(f_i + 1)(f_i + 2)} \kappa_1^{f_i + 1} \left[ (z_{1i+1} - z_{1n_1})^{f_i + 2} - (z_{1i} - z_{1n_1})^{f_i + 2} \right] + \frac{L_i g_i}{(g_i + 1)(g_i + 2)} \kappa_1^{g_i + 1} \left[ (z_{1i} - z_{1n_1})^{g_i + 2} - (z_{1i+1} - z_{1n_1})^{g_i + 2} \right] \right\}. \quad (16)$$

Формула (16) се прилага също за намиране на решението на интеграла  $J$  в участък  $A_2$  от контура за интегриране (фиг. 1). За целта  $n_L$ ,  $z_{1i}$ ,  $z_{1i+1}$ ,  $z_{1n_1}$  и  $\kappa_1$  се заменят с  $n_U$ ,  $z_{2i}$ ,  $z_{2i+1}$ ,  $z_{2n_2}$  и  $\kappa_2$

$$J_{A_2} = \sum_{i=1}^{n_U} \left\{ \frac{D_i f_i}{(f_i + 1)(f_i + 2)} \kappa_2^{f_i + 1} \left[ (z_{2i+1} - z_{2n_2})^{f_i + 2} - (z_{2i} - z_{2n_2})^{f_i + 2} \right] + \frac{L_i g_i}{(g_i + 1)(g_i + 2)} \kappa_2^{g_i + 1} \left[ (z_{2i} - z_{2n_2})^{g_i + 2} - (z_{2i+1} - z_{2n_2})^{g_i + 2} \right] \right\}, \quad (17)$$

където  $n_U$ ,  $\kappa_2$  и  $z_{2n_2}$  са броят на слоевете, кривината и разстоянието между нулевата линия и центъра на сечението. Уравнения (12) и (13) се използват за определяне на кривината и разстоянието между нулевата линия и центъра на сечението. За целта  $M_1$ ,  $n_L$ ,  $z_{1i}$ ,  $z_{1i+1}$ ,  $z_{1n_1}$  и  $\kappa_1$  се заменят с  $M_2$ ,  $n_U$ ,  $z_{2i}$ ,  $z_{2i+1}$ ,  $z_{2n_2}$  и  $\kappa_2$ . Огъващият момент в горното рамо е  $M_2 = Fa$ . Уравнения (12) и (13) се решават с помощта на програмата MatLab. След това  $z_{2n_2}$  и  $\kappa_2$  се заместват в (17).

Окончателното решение на интеграла  $J$  се намира след заместване на (16) и (17) в (3)

$$J = \sum_{i=1}^{n_L} \left\{ \frac{D_i f_i}{(f_i + 1)(f_i + 2)} \kappa_1^{f_i + 1} \left[ (z_{1i+1} - z_{1n_1})^{f_i + 2} - (z_{1i} - z_{1n_1})^{f_i + 2} \right] + \frac{L_i g_i}{(g_i + 1)(g_i + 2)} \kappa_1^{g_i + 1} \left[ (z_{1i} - z_{1n_1})^{g_i + 2} - (z_{1i+1} - z_{1n_1})^{g_i + 2} \right] \right\} + \sum_{i=1}^{n_U} \left\{ \frac{D_i f_i}{(f_i + 1)(f_i + 2)} \kappa_2^{f_i + 1} \left[ (z_{2i+1} - z_{2n_2})^{f_i + 2} - (z_{2i} - z_{2n_2})^{f_i + 2} \right] + \frac{L_i g_i}{(g_i + 1)(g_i + 2)} \kappa_2^{g_i + 1} \left[ (z_{2i} - z_{2n_2})^{g_i + 2} - (z_{2i+1} - z_{2n_2})^{g_i + 2} \right] \right\}. \quad (22)$$

При линейно-еластично поведение на материала интегралът  $J$  е равен на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Това обстоятелство се използва за проверка на (22). След заместване на  $D_i = E$ ,  $L_i = 0$ ,  $f_i = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$  и  $n_L = n_U = n = 1$  в (22) се получава

$$G = \frac{12M_1^2}{Eb^2h^3} . \quad (23)$$

Израз (23) съвпада със скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, когато пукнатината е разположена в средната равнина на гредата [20]. При  $D_i = 0$ ,  $-L_i = E$ ,  $g_i = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$  и  $n_L = n_U = n = 1$  формула (22) се трансформира също в (23). При заместване на  $f_i = 1$ ,  $g_i = 1$ ,  $h_1 = h_2 = h$ ,  $c_1 = l/2$  и  $n_L = n_U = n = 1$  формула (22) отново се трансформира в (23).

### 3. Заключение

Изследвана е надлъжна пукнатина в многослойна греда с отчитане на физическата нелинейност. За целта е приложен интегралът  $J$ . Разглежданата греда е изпълнена от произволен брой слоеве, здраво свързани помежду си. Надлъжната пукнатина е разположена произволно по височината на напречното сечение на гредата, т.е. рамената на пукнатината имат различна дебелина. Освен това, слоевете на гредата имат различна дебелина и материални константи. Също така, зависимостта между напреженията и деформациите може да е различна във всеки от слоевете. Решението е получено във функция на разрезните усилия в напречните сечения на гредата пред и зад върха на пукнатината, което значително улеснява практическото приложение на решението. За целта е извършено интегриране на специфичната потенциална енергия на деформацията във всеки от слоевете на гредата. Решението е проверено чрез сравнение с известни резултати, публикувани от други автори в специализираната литература. Може да се обобщи, че изследването, представено в настоящата статия, позволява да се анализира влиянието на различни фактори като местоположение и дължина на пукнатината, брой и дебелина на слоевете, различни зависимости между напреженията и деформациите върху поведението на пукнатината в разглежданата многослойна гредова конфигурация. Получените резултати могат да се приложат за оптимизиране на многослойни греди с оглед на осигуряването им срещу поява на пукнатини. Също така, полученото решение може да се използва и за проверка за нарастване на съществуващи пукнатини. Настоящата разработка допринася за развитие на механиката на разрушението на многослойните материали с нелинейно поведение. Освен това, получените резултати ще способстват за по-широкото навлизане на многослойните конструктивни системи в строителната практика.

### Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-189/2016 е подкрепена финансово от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson, B.D. and Sundararaman, V. (1996). A single-leg bending test for interfacial fracture toughness determination. *International Journal of Fracture* 78: 193 – 210.
2. Narin, J.A. (1999). Energy release rate analysis of adhesive and laminate double cantilever beam specimens emphasizing the effect of residual stresses. *International Journal of Adhesion and Adhesives* 20: 59 – 70.
3. Yeung, D.T.S., Lam, D.C.C. and Yuen, M.M.F. (2000). Specimen design for mixed mode interfacial fracture properties measurement in electronic packages. *J. Electr. Packag.* 122: 67 – 72.
4. Szekrenyes, A., Vicente, W.M. (2012). Interlaminar fracture analysis in the GII-GIII plane using prestressed transparent composite beams. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 43(1): 95 – 103.
5. Szekrenyes, A. (2010). Fracture analysis in the modified split-cantilever beam using the classical theories of strength of materials. *Journal of Physics: Conference Series* 240 (1), 012030.
6. Guadette, F.G., Giannopoulos, A.E., Suresh, S. (2001). Interfacial cracks in layered materials subjected to a uniform temperature change. *Int. J. Fract.* 28: 5620 – 5629.
7. Jiao, J., Gurumurthy, G.K., Kramer, E.J., Sha, Y., Hui, C.Y., Borgesen, P. (1998). Measurement of interfacial fracture toughness under combined mechanical and thermal stress. *J. Electron Packag* 120: 325 – 349.
8. Yokozeiki, T., Ogasawara, T., Aoki, T. (2008). Correction method for evaluation of interfacial fracture toughness of DCB, ENF and MMB specimens with residual thermal stresses. *Composite Science and Technology* 68: 760 – 767.
9. Hsuesh, C.H., Tuan, W.H., Wei, W.C.J. (2009). Analyses of steady-state interface fracture of elastic multilayered beams under four-point bending. *Scripta Materialia* 60: 721 – 724.
10. Her, S-C. and Su, W-B. (2015). Interfacial fracture toughness of multilayered composite structures. *Strength of Materials Vol. 47. No. 1.* Doi:10.1007/s11223-015-9646-y.
11. Rice, J.R. (1968). A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics* 35: 379 – 386.
12. Cherepanov, G. (1974). *Brittle materials fracture mechanics.* Nauka, M.
13. Broek, D. (1986). *Elementary engineering fracture mechanics.* Springer.
14. Kachanov, L.M. (1969). *Fundamentals of the theory of plasticity.* Nauka, Moscow.
15. Lubliner, J. (2006). *Plasticity theory (Revised edition).* University of California, Berkeley, CA.
16. Hoff, N.J. (1956). *The analysis of structures.* John Wiley&Sons, New York.
17. Nadai, A. (1963). *Theory of flow and fracture of solids, 2.* McGraw-Hill, New York.
18. Seely, F.B., Smith, J.O. (1967). *Advanced mechanics of materials.* John Wiley&Sons, New York.
19. Washizu, K. (1974). *Variational methods in elasticity and plasticity.* Pergamon press, Oxford.
20. Hutchinson, J.W., Suo, Z. (1992). Mixed mode cracking in layered materials. *Advances in Applied Mechanics* 64: 804 – 810.



# ANALYSIS OF A LONGITUDINAL CRACK IN A MULTILAYERED BEAM WITH TAKING INTO ACCOUNT THE PHYSICAL NON-LINEARITY

V. Rizov<sup>1</sup>

*Keywords: crack, multilayered beam, physical non-linearity*

## ABSTRACT

A longitudinal crack in a multilayered beam is analyzed with taking into account the physical non-linearity. The  $J$ -integral is applied. A beam made of an arbitrary number of longitudinal layers is considered. Besides, the thickness and material constants can be different in the layers. The crack arms have different height. The solution is derived as a function of the bending moments in the beam cross-sections ahead and behind the crack tip, which substantially facilitates the practical application of the solution. The solution obtained can be applied for investigations of the influence of the location and length of the crack, the number and thickness of the layers and the physical non-linearity on the behavior of the crack.

---

<sup>1</sup> Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: V\_RIZOV\_FHE@UACG.BG