

Получена: 03.11.2017 г.

Приета: 17.11.2017 г.

ДВИЖЕНИЕ НА НЕСИМЕТРИЧНО ТВЪРДО ТЯЛО ВЪВ ФЛУИДНА СРЕДА

А. Иванов¹

Ключови думи: общо движение, твърдо тяло, флуид, аеродинамични сили

РЕЗЮМЕ

В статията се изследва общо движение на произволно несиметрично хомогенно твърдо тяло във флуидна среда. Чрез дефинирана нова теорема – Теорема за изменение на обобщения импулс на твърдо тяло, и нови по структура уравнения на Лагранж, наречени Кондензирани уравнения на Лагранж, са изведени в матрична форма диференциалните уравнения, описващи пространственото движение на тялото. С нова теорема за обтичане на несиметрично твърдо тяло от флуиден поток е доказано наличието на дестабилизиращ аеродинамичен момент. Дефинирана е нова пълна матрица на аеродинамичните сили. Сферичната компонента от движението на тялото се отчита с Карданови ъгли. Статията е изцяло теоретична. Тя представлява основа, върху която са разработени други публикации за движение на твърди тела с конкретна форма във флуидна среда.

1. Въведение

Предварително ще се формулира следния философски закон. Той гласи: „В живата и мъртвата материя идеална (абсолютна, съвършена) симетрия няма и не може да съществува. Съществува само материална (привидна, несъвършена) симетрия.” И така, когато изследваме пространственото движение на симетрични тела, които имат най-малко две взаимно перпендикулярни равнини на геометрична и масова симетрия, трябва определено да знаем, че на практика идеална симетрия не може да се реализира технически и технологично. Колкото и съвършени да са уредите и апаратите при производ-

¹ Анастас Иванов, доц. д-р инж., кат. „Механика”, ВТУ „Тодор Каблешков”, 1574 София, ул. „Гео Милев”158, e-mail: aii2010@abv.bg

ството на дадени детайли, съвършена симетрия не може да се постигне. От друга страна, в техниката се използват и множество твърди тела с изразена несиметрия. Всичко това прави настоящето изследване много актуално към датата на публикуване.

От анализа на публикациите и научните трудове по тази тема, например вж. [1 – 5], не се намериха работи, в които са изпълнени *едновременно* следните изисквания:

- Изследването да изучава пространственото движение на произволно несиметрично твърдо тяло във флуидна среда, като тялото да се приема за свободно с шест степени на свобода.
- Изследването да се осъществява в матрична форма с последващо използване на пригодения за тези нужди програмен пакет MatLab.
- Кинематиката и динамиката да са разработени с прилагането на Карданови ъгли (*Girolamo Cardano, 1501 – 1576*).

Повечето работи по тази тема са разработени в скаларно-векторна форма, разглеждат предимно идеално симетрични тела и използват класическите Ойлерови ъгли (*Leonhard Euler, 1707 – 1783*), вж. [2 – 5].

Основната цел на това изследване може да се изкаже в следните три точки:

- Да се изведе в матрична форма системата диференциални уравнения, която описва общото пространствено движение на несиметрично идеално твърдо тяло, форма, удобна за числено интегриране с програмния пакет MatLab;
- Да се изведат и опишат в матрична форма известните досега аеродинамични сили, които действат на тялото по време на неговото движение в неподвижна флуидна среда;
- Да се открие и установи аеродинамичното въздействие върху асиметричното тяло и да се опише в матрична форма.

2. Кинематика на общото движение на твърдо тяло

По-нататъшното изследване в настоящата работа е свързано с въвеждане на основни понятия в областта на Кинематиката, изградена в матрична форма, вж. [6].

Разглеждат се две идеално твърди тела "A" и "B", вж. фиг. 1. Тяло "A" се приема за абсолютно неподвижно. На тяло "B", не са наложени никакви ограничения на движението му. То се движи свободно в пространството и извършва общо движение. Това движение може да се установи единствено по преместването му спрямо тяло "A".

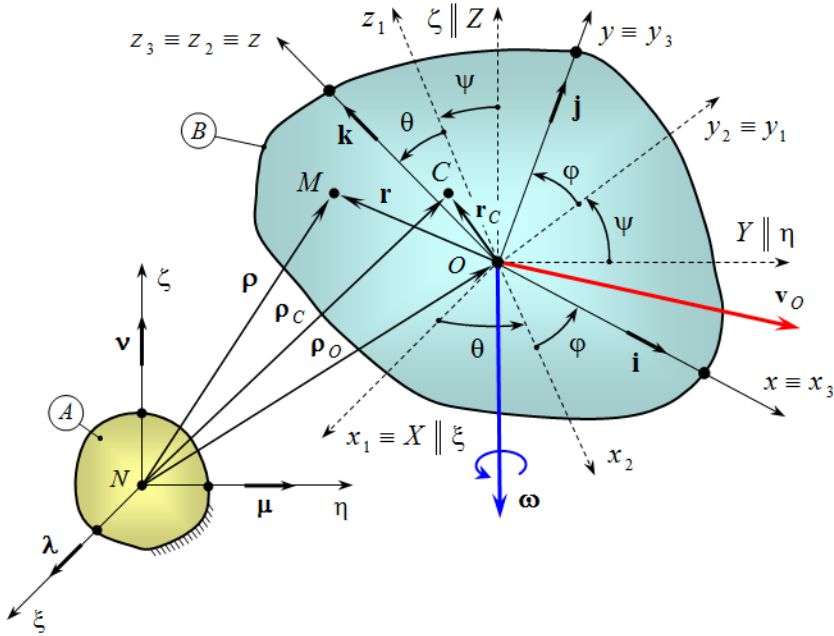
Първата координатна система $N\xi\eta\zeta$ с единични вектори λ , μ и ν е свързана с тяло "A" и следователно се приема за неподвижна, (НКС). Отчитането на всеки един вектор спрямо нея се отразява с индекса "A".

Втората координатна система $Oxyz$ има за начало произволна точка O от тяло "B". Тя е свързана с него и се нарича подвижна, (ПКС). Дефинира се с единичните вектори \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} . Отчитането на всеки вектор спрямо нея се отразява с индекса "B".

Съществува възможност началото на подвижната координатна система да съвпадне с масовия център C на тялото. Този вариант също се разглежда в изложението, като се доказва, че той е най-подходящ особено, когато тялото е несиметрично.

Въвежда се и трета спомагателна координатна система $OXYZ$. Тя се движи транслационно спрямо НКС.

За описание на сферичната компонента от движението на тялото се използват Карданови ъгли ψ , θ и ϕ . Те се дефинират като три последователни прости ротации.



Фиг. 1. Кинематика на общо движение на идеално твърдо тяло

Първата ротация на ъгъл ψ се осъществява около оста $x_1 \equiv X \parallel \xi$ на свързаната с тялото координатна система $Ox_1 y_1 z_1$. Втората ротация на ъгъл θ се осъществява около оста $y_2 \equiv y_1$ на свързаната с тялото координатна система $Ox_2 y_2 z_2$. Третата ротация на ъгъл ϕ се осъществява около оста $z_3 \equiv z_2 \equiv z$ на свързаната с тялото координатна система $Ox_3 y_3 z_3 \equiv Oxyz$.

Законът на движение на тялото се задава с вектора на обобщените координати:

$$\mathbf{q} = \langle \xi_O \quad \eta_O \quad \zeta_O \quad \psi \quad \theta \quad \phi \rangle^T. \quad (1)$$

Двете матрици на преход имат вида:

$$\mathbf{U}_{A,B} = \begin{bmatrix} c\theta \cdot c\phi & -c\theta \cdot s\phi & s\theta \\ s\psi \cdot s\theta \cdot c\phi + c\psi \cdot s\phi & -s\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + c\psi \cdot c\phi & -s\psi \cdot c\theta \\ -c\psi \cdot s\theta \cdot c\phi + s\psi \cdot s\phi & c\psi \cdot s\theta \cdot s\phi + s\psi \cdot c\phi & c\psi \cdot c\theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{U}_{B,A} = \begin{bmatrix} c\theta.c\phi & s\psi.s\theta.c\phi + c\psi.s\phi & -c\psi.s\theta.c\phi + s\psi.s\phi \\ -c\theta.s\phi & -s\psi.s\theta.s\phi + c\psi.c\phi & c\psi.s\theta.s\phi + s\psi.c\phi \\ s\theta & -s\psi.c\theta & c\psi.c\theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Направени са означенията $c \equiv \cos$ и $s \equiv \sin$.

Скоростта на полюса O спрямо НКС и спрямо ПКС се задава с формулите:

$$\mathbf{v}_{O,A} = \dot{\mathbf{p}}_{O,A} = \left\langle \dot{\xi}_O \quad \dot{\eta}_O \quad \dot{\zeta}_O \right\rangle^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_{O,B} = \mathbf{U}_{B,A} \cdot \mathbf{v}_{O,A}. \quad (5)$$

Векторът-моментна ъглова скорост и съответната матрица, отчетени спрямо НКС, имат следния вид:

$$\boldsymbol{\omega}_A = \begin{bmatrix} \omega_\xi \equiv \omega_X = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cdot \sin \theta \\ \omega_\eta \equiv \omega_Y = \dot{\theta} \cdot \cos \psi - \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi \\ \omega_\zeta \equiv \omega_Z = \dot{\theta} \cdot \sin \psi + \dot{\phi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_A = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_Z & \omega_Y \\ \omega_Z & 0 & -\omega_X \\ -\omega_Y & \omega_X & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Същите кинематични характеристики, но отчетени спрямо ПКС, се изписват така:

$$\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} \omega_x = \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi + \dot{\theta} \cdot \sin \psi \\ \omega_y = \dot{\theta} \cdot \cos \phi - \dot{\psi} \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi \\ \omega_z = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cdot \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Дефинираме вектор, който обединява вектора скорост на полюса O и вектора ъглова скорост. Той също е с размерност 6×1 и, отнесен спрямо НКС, има вида:

$$\mathbf{u}_{O,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{O,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Този вектор ще наречем вектор-реална обобщена скорост на идеално твърдото тяло (ИТТ) за произволен полюс O от него.

Връзката между вектора-реална обобщена скорост $\mathbf{u}_{O,A}$ и вектора-обобщена скорост $\dot{\mathbf{q}}$ на същото тяло се осъществява с равенството:

$$\mathbf{u}_{O,A} = \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (11)$$

Във формула (11) матрицата \mathbf{H}_A , при използване на Карданови ъгли, е конструирана по следния начин:

$$\mathbf{H}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{H}}_A \end{bmatrix}. \quad (12)$$

$$\mathbf{E} = \text{diag} [1]_3, \quad (13)$$

$$\mathbf{0} = \text{diag} [0]_3, \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{H}}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin \theta \\ 0 & \cos \psi & -\cos \theta \cdot \sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \theta \cdot \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Поради преминаване в изследването с вектори и матрици, имащи размерност съответно 6×1 и 6×6 , се въвеждат и следните две матрици на преход:

$$\mathbf{W}_{A,B} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{A,B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{A,B} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\mathbf{W}_{B,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{B,A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{B,A} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Масовият център C на тялото се дефинира с абсолютния радиус-вектор $\boldsymbol{\rho}_{C,A}$ и с релативния радиус-вектор $\mathbf{r}_{C,A}$, съответно:

$$\boldsymbol{\rho}_{C,A} = \langle \xi_C \quad \eta_C \quad \zeta_C \rangle^T, \quad (18)$$

$$\mathbf{r}_{C,A} = \langle X_C \quad Y_C \quad Z_C \rangle^T. \quad (19)$$

Дефинираме вектор-реална обобщена скорост на ИТТ за масовия център C :

$$\mathbf{u}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\rho}}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}. \quad (20)$$

3. Динамика на общото движение на твърдо тяло

В този параграф се разработва в матрична форма съществената част от динамиката на общото движение на несиметрично хомогенно идеално твърдо тяло (ИТТ).

3.1. Динамични характеристики

Масовите свойства на изследваното ИТТ се задават с неговата маса m и диагонална матрица на масите:

$$\mathbf{M} = \text{diag} [m]_3. \quad (21)$$

Инерционните свойства на тялото се дефинират с тензора на масовите инерционни моменти. Определен за осите на неизменно свързаната с ИТТ подвижна координатна система $Oxyz$, той е съставен от константни елементи:

$$\mathbf{J}_{O,B} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Тензорът на масовите инерционни моменти, определен за координатната система $OXYZ$, се променя в зависимост от ориентацията на тялото и е функция на времето t :

$$\mathbf{J}_{O,A} = \mathbf{J}_{O,A}(t) = \begin{bmatrix} J_X(t) & -J_{XY}(t) & -J_{XZ}(t) \\ -J_{YX}(t) & J_Y(t) & -J_{YZ}(t) \\ -J_{ZX}(t) & -J_{ZY}(t) & J_Z(t) \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Подобни два тензора, $\mathbf{J}_{C,B}$ и $\mathbf{J}_{C,A} = \mathbf{J}_{C,A}(t)$, могат да се дефинират, ако полюсът O съвпадне с масовия център C .

При произволен избор на полюса O се използва и обратно-симетричният тензор на масовите статични моменти:

$$\mathbf{S}_{C,A} = m \cdot \begin{bmatrix} 0 & -Z_C & Y_C \\ Z_C & 0 & -X_C \\ -Y_C & X_C & 0 \end{bmatrix} = m \cdot \mathbf{R}_{C,A}. \quad (24)$$

Всички сили, които действат на тялото, се редуцират за точка O до главна сила \mathbf{F}_A и главен момент $\mathbf{M}_{O,A}$.

Дефинираме следния вектор:

$$\mathbf{D}_{O,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S}_{C,A}^T \\ \mathbf{S}_{C,A} & \mathbf{J}_{O,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{O,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}, \quad (25)$$

който ще наречем вектор-обобщен импулс на твърдо тяло за полюс O от него.
Матрицата:

$$\mathbf{A}_{O,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S}_{C,A}^T \\ \mathbf{S}_{C,A} & \mathbf{J}_{O,A} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

дефинира масовите и инерционни свойства на несиметричното твърдо тяло.
Записваме формула (25) в съкратен векторно-матричен вид:

$$\mathbf{D}_{O,A} = \mathbf{A}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A}. \quad (27)$$

Дефинираме вектор-обобщен импулс на ИТТ за масовия център C .

$$\mathbf{D}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (28)$$

Въвеждаме вектор-обобщен импулс на ИТТ за неподвижния полюс N :

$$\mathbf{D}_{N,A} = \mathbf{D}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{D}_{C,A}, \quad (29)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_{O,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{O,A} = \begin{bmatrix} 0 & -\zeta_O & \eta_O \\ \zeta_O & 0 & -\xi_O \\ -\eta_O & \xi_O & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Заместваме формули (27) и (28) в равенство (29) и получаваме:

$$\mathbf{D}_{N,A} = \mathbf{A}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (32)$$

Дефинираме вектор-реална обобщена сила на ИТТ за полюса O :

$$\mathbf{Q}_{O,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{O,A} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Дефинираме вектор-реална обобщена сила на ИТТ за полюса N :

$$\mathbf{Q}_{N,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{N,A} \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Връзката между тези два вектора се осъществява с равенството:

$$\mathbf{Q}_{N,A} = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}. \quad (35)$$

Това са основните динамични характеристики, необходими за извеждане на диференциалните уравнения на общото движение на свободно несиметрично ИТТ. Сега ще

покажем два начина за получаване на тези уравнения при произволен избор на полюса O , когато този полюс не съвпада с масовия център C на тялото.

Първият начин се основава на формулирана нова теорема, назована Теорема за изменение на обобщения импулс на твърдо тяло.

Вторият начин се основава на дефинирани нови по структура уравнения, назовани Кондензирани уравнения на Лагранж (*Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813*).

3.2. Теорема за изменение на обобщения импулс

Теоремата гласи: Първата производна спрямо времето на обобщения импулс на дадено твърдо тяло за неподвижен полюс е равна на неговата реална обобщена сила, определена за този полюс.

Математическият запис на изказаната теорема има вида:

$$\frac{d \mathbf{D}_{N,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{N,A}. \quad (36)$$

Заместваме формули (29) и (35) в уравнение (36) и получаваме:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}. \quad (37)$$

Извършваме диференциране по времето в уравнение (37):

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{O,A} + \dot{\mathbf{A}}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} + \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}. \end{aligned} \quad (38)$$

Провеждаме следните подробни пресмятания:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Като вземем предвид равенствата (39) и (40), уравнение (38) се опростява:

$$\mathbf{A}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{O,A} + \dot{\mathbf{A}}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} + \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} +$$

$$+ \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{array} \right] = \mathbf{Q}_{O,A} + \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} \cdot \mathbf{F}_A \end{array} \right]. \quad (41)$$

Сега използваме Теоремата за движение на масовия център:

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} = \mathbf{F}_A. \quad (42)$$

Чрез тази теорема уравнение (41) приема вида:

$$\mathbf{A}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{O,A} + \dot{\mathbf{A}}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} = \mathbf{Q}_{O,A} - \dot{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (43)$$

И така, прилагайки Теоремата за изменение на обобщения импулс на твърдо тяло (ТИОИТТ) за неподвижния полюс N , получихме системата уравнения (43).

По-нататък извършваме диференциране на матрицата $\mathbf{A}_{O,A}$ и след известни преобразувания достигаме до следната зависимост:

$$\dot{\mathbf{A}}_{O,A} = \mathbf{\Phi}_A \cdot \mathbf{B}_{O,A} - \mathbf{B}_{O,A} \cdot \mathbf{\Phi}_A, \quad (44)$$

$$\mathbf{\Phi}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_A \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathbf{B}_{O,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{S}_{C,A}^T \\ \mathbf{S}_{C,A} & \mathbf{J}_{O,A} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Заместваме формула (44) в уравнение (43) и получаваме:

$$\mathbf{A}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{O,A} = \left(\mathbf{B}_{O,A} \cdot \mathbf{\Phi}_A - \mathbf{\Phi}_A \cdot \mathbf{B}_{O,A} \right) \cdot \mathbf{u}_{O,A} + \mathbf{Q}_{O,A} - \dot{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (47)$$

Уравнение (47) представлява векторно-матричен запис на нелинейна система от шест диференциални уравнения, която описва общото движение на свободно несиметрично ИТТ, при произволен избор на полюса O , който не съвпада с масовия му център.

Сега ще се опитаме да приложим същата теорема, но приложена за подвижния полюс O . За тази цел въвеждаме следния вектор:

$$\mathbf{Q}_{O,A}^* = \mathbf{Q}_{O,A} - \dot{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}, \quad (48)$$

който ще наречем вектор-реална *кинетична* обобщена сила.

Предвид въведения нов вектор, уравнение (43) се записва така:

$$\mathbf{A}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{O,A} + \dot{\mathbf{A}}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} = \mathbf{Q}_{O,A}^*. \quad (49)$$

То може да се запише още по-съкратено във вида:

$$\frac{d \mathbf{D}_{O,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{O,A}^*. \quad (50)$$

Уравнение (50) представлява математически запис на самата ТИОИТТ, приложена за подвижен полюс O , която гласи следното: Първата производна спрямо времето на обобщения импулс на дадено твърдо тяло за подвижен полюс от него е равна на неговата реална *кинетична* обобщена сила, определена за същия полюс.

Нека приемем, че полюсът O съвпада с масовия център C . И нека развием подробно следното векторно-матрично произведение:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} &\equiv \dot{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \dot{\rho}_{C,A} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\rho}_{C,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \dot{\rho}_{C,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (51)$$

Оказва се, че когато се направи такъв избор, ТИОИТТ, приложена за подвижния полюс O , който съвпада с масовия център C , приема вида:

$$\frac{d \mathbf{D}_{C,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (52)$$

Този вид на ТИОИТТ напълно съвпада по структура с вида ѝ от уравнение (36).

Сега, ако се замести равенство (28) в уравнение (52), ще се достигне до следното просто уравнение:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (53)$$

Извършваме диференциране на матрицата $\mathbf{A}_{C,A}$ и след известни преобразувания достигаме до следната зависимост:

$$\dot{\mathbf{A}}_{C,A} = \boldsymbol{\Phi}_A \cdot \mathbf{B}_{C,A} - \mathbf{B}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\Phi}_A, \quad (54)$$

$$\mathbf{B}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix}, \quad (55)$$

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \left(\mathbf{B}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\Phi}_A - \boldsymbol{\Phi}_A \cdot \mathbf{B}_{C,A} \right) \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (56)$$

Сега ще се възползваме от равенство (11), пригодно за този вариант:

$$\mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}. \quad (57)$$

Заместваме формула (57) в уравнение (56) и получаваме:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \left(\mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} \right) = \left(\mathbf{B}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\Phi}_A - \boldsymbol{\Phi}_A \cdot \mathbf{B}_{C,A} \right) \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (58)$$

Уравнение (58) представлява векторно-матричен запис на нелинейна система от шест диференциални уравнения, която описва общото движение на дадено свободно идеално твърдо несиметрично тяло, при приемането, че полюсът O съвпада с масовия му център C . Това уравнение е най-удобно за по-нататъшно изследване.

3.3. Кондензирани уравнения на Лагранж

Кинетичната енергия на свободното ИТТ, което извършва общо движение, се определя от квадратичната форма на вектора-реална обобщена скорост и матрицата на масовите и инерционни свойства:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \left\langle \mathbf{v}_{O,A} \quad \boldsymbol{\omega}_A \right\rangle^T \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S}_{C,A}^T \\ \mathbf{S}_{C,A} & \mathbf{J}_{O,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{O,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Като се използват формули (10) и (26), кинетичната енергия на ИТЕ се записва в съкратен векторно-матричен вид така:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{O,A}^T \cdot \mathbf{A}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A}. \quad (60)$$

Ако полюса O съвпада с масовия център C , кинетичната енергия ще се определи по Теоремата на Кьониг (*Johann Samuel König, 1712 – 1757*):

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u}_{C,A}^T \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}, \quad (61)$$

$$\mathbf{A}_{C,A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix}. \quad (62)$$

Нека на ИТТ действат определен брой активни сили $\mathbf{F}_{k,A}$, ($k=1,2,\dots,h$), приложени в точки D_k и дефинирани с абсолютните радиус-вектори $\boldsymbol{\rho}_k$.

Определя се възможната мощност на тези сили, при възможни безкрайно малки изменения на скоростта на приложените точки D_k , което се дължи на възможно безкрайно малко общо движение на ИТТ:

$$\begin{aligned} \delta P &= \sum_{k=1}^h \mathbf{F}_{k,A}^T \cdot \delta \mathbf{v}_{k,A} = \mathbf{F}_A^T \cdot \delta \mathbf{v}_{O,A} + \left(\mathbf{M}_{O,A} + \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} \cdot \mathbf{F}_A \right)^T \cdot \delta \boldsymbol{\omega}_A = \\ &= \delta \mathbf{v}_{O,A}^T \cdot \mathbf{F}_A + \delta \boldsymbol{\omega}_A^T \cdot \left(\mathbf{M}_{O,A} + \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} \cdot \mathbf{F}_A \right) = \\ &= \delta \left\langle \mathbf{v}_{O,A}^T \quad \boldsymbol{\omega}_A^T \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{O,A} + \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} \cdot \mathbf{F}_A \end{bmatrix} = \\ &= \delta \left\langle \mathbf{v}_{O,A} \quad \boldsymbol{\omega}_A \right\rangle^T \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{O,A} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{O,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{F}_A \\ \mathbf{M}_{O,A} \end{bmatrix} \right) = \\ &= \delta \mathbf{u}_{O,A}^T \cdot \left(\mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A} \right). \quad (63) \end{aligned}$$

Тогава векторът реална обобщена сила на ИТЕ за неподвижния полюс N ще се определи по формулата:

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{N,A} &= \frac{\delta P}{\delta \mathbf{u}_{O,A}} = \frac{\delta \mathbf{u}_{O,A}^T}{\delta \mathbf{u}_{O,A}} \cdot \left(\mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A} \right) = \\ &= \bar{\mathbf{E}} \cdot \left(\mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A} \right) = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A},\end{aligned}\quad (64)$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \text{diag} [1]_6. \quad (65)$$

Дефинираме следните диференциални уравнения, които наричаме Кондензирани уравнения на Лагранж, с които се изследва общото движение на свободно ИТТ:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (E_k + \tilde{E}_O)}{\partial \mathbf{u}_{O,A}} \right] = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}. \quad (66)$$

Величината \tilde{E}_O се конструира по следния начин:

$$\tilde{E}_O = \mathbf{u}_{O,A}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{O,A}, \quad (67)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{O,A} = \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{D}_{C,A} = \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (68)$$

Заместваме формули (60) и (67) в уравнения (66) и получаваме:

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} \right) + \frac{d \tilde{\mathbf{F}}_{O,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}, \quad (69)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} \right) + \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}, \quad (70)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{O,A} + \dot{\mathbf{A}}_{O,A} \cdot \mathbf{u}_{O,A} + \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \\ + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{Q}_{O,A} + \bar{\mathbf{T}}_{O,A} \cdot \mathbf{Q}_{O,A}.\end{aligned}\quad (71)$$

Уравнение (71) напълно съвпада с уравнение (38). Оттук нататък се действа по алгоритъма, описан от уравнение (39) до уравнение (47).

Сега ще приложим вариант на Кондензираните уравнения на Лагранж, при положение, че сме избрали полюса O да съвпада с масовия център C :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (E_k + \tilde{E}_C)}{\partial \mathbf{u}_{C,A}} \right] = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (72)$$

Величината \tilde{E}_C се конструира по следния начин:

$$\tilde{E}_C = \mathbf{u}_{C,A}^T \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{C,A}, \quad (73)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{C,A} = \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{D}_{C,A} = \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (74)$$

Заместваме формули (62) и (73) в уравнение (72):

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) + \frac{d \tilde{\mathbf{F}}_{C,A}}{dt} = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}, \quad (75)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) + \frac{d}{dt} \left(\bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} \right) = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}, \quad (76)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \\ & + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A} + \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \end{aligned} \quad (77)$$

Извършваме следните подробни пресмятания:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,A} \\ \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \boldsymbol{\omega}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{T}}}_{C,A} \cdot \mathbf{A}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{C,A} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{C,A} \\ \mathbf{J}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{C,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{R}}}_{C,A} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_{C,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (80)$$

Предвид равенствата (78), (79) и (80), уравнение (77) приема вида:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{C,A} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}_{C,A} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{C,A} \cdot \mathbf{F}_A \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Сега използваме Теоремата за движение на масовия център, при което уравнение (81) придобива следния опростен вид:

$$\mathbf{A}_{C,A} \cdot \dot{\mathbf{u}}_{C,A} + \dot{\mathbf{A}}_{C,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A}. \quad (82)$$

Уравнение (82) напълно съвпада с уравнение (53). Оттук нататък се действа по алгоритъма, описан от уравнение (54) до уравнение (58).

4. Аеродинамични сили, действащи на твърдото тяло

В този параграф ще се спрем по-обстойно на аеродинамичните сили, с които флуидът въздейства върху движещото се в него ИТТ. Получаването на тези сили по аналитичен път е изключително трудна задача, вж. [7, 8]. С нея се занимава Теорията на граничния слой, с която са решени точно множество сравнително по-прости задачи. В повечето случаи, обаче, изследователите се сблъскват с непреодолими затруднения, поради което се е наложил друг начин на изследване. И както в Механиката на деформируемото твърдо тяло чрез напреженията се достига до интегрални силови характеристики – разрезни усилия, така и тук, възникващите по обтечната повърхнина на тялото нормални и тангенциални напрежения водят до интегрални силови характеристики, които се наричат аеродинамични сили. Определянето им, обаче, не се извършва по аналитичен път, макар че в някои случаи се достига и до такива решения. В повечето задачи те се получават чрез експериментални изследвания в специализирани лаборатории, където действителни или умалени модели се изпитват в аеродинамични канали (тръби). Именно този подход се използва в настоящата статия.

Ще приемем, че полюсът O съвпада с масовия център C . Несиметричното ИТТ има в даден момент скорост на полюса $\mathbf{v}_{O,A} \equiv \mathbf{v}_{C,A}$ и ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_A$, вж. фиг. 2.

Основните сили, които действат на твърдото тяло, са следните:

- **Редуцирана сила на тежестта**

Тя включва едновременно теглото на тялото и противоположната сила от Закона на Архимед (*Αρχιμήδης, 287 – 212 г. пр.н.е.*). Определя се по формулата:

$$\tilde{\mathbf{G}}_A = (m - V \cdot \rho_a) \cdot g \cdot \langle 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle^T, \quad (83)$$

където m е масата на ИТТ, g е земното ускорение, V е обемът на тялото, ρ_a е плътността на флуида, вж. фиг. 2.

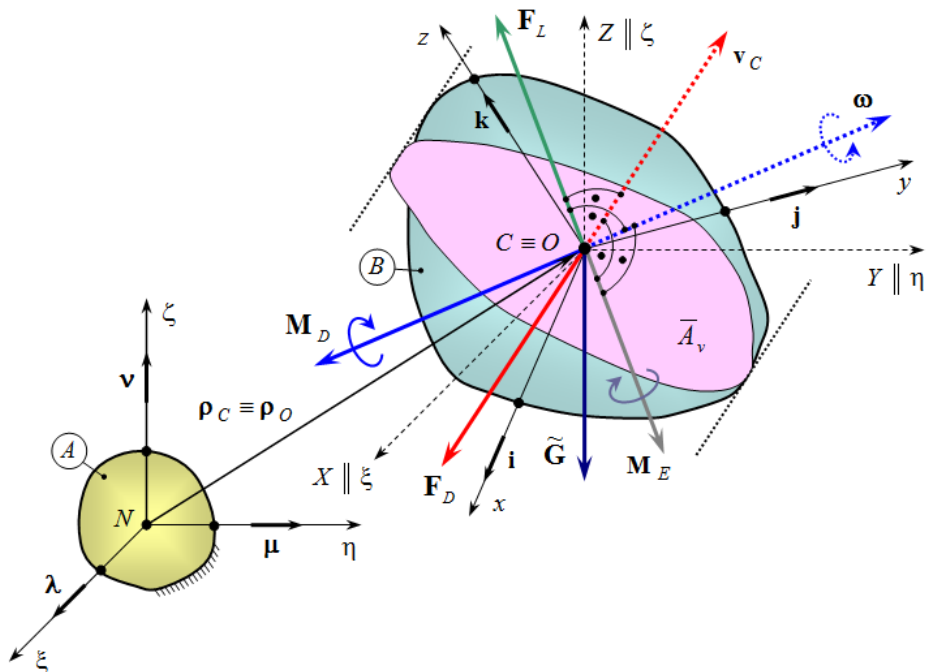
- **Съпротивителна сила**

Тя се явява в противоположна посока на скоростта $\mathbf{v}_{O,A}$ и има вида:

$$\mathbf{F}_{D,A}^{(a)} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_D \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\mathbf{v}_{C,A}}{|\mathbf{v}_{C,A}|}, \quad (84)$$

където $\mathbf{v}_{C,A}$ е векторът скорост на полюса $C \equiv O$ на ИТТ, а $|\mathbf{v}_{C,A}| \equiv v_C$ е големината на тази скорост.

Константата \bar{A}_v представлява проектираното лице на ИТТ в равнина, перпендикулярна на вектора $\mathbf{v}_{C,A}$. Това лице по време на движението на твърдото тяло се променя и следователно представлява трудно определяема функция на времето t .



Фиг. 2. Динамика на общо движение на идеално твърдо тяло

Безразмерният коефициент C_D е известен в аеродинамиката като коефициент на челно съпротивление. Той зависи от режима на обтичане – ламинарен или турбулентен, количествен и качествен показател на който се явява числото на Рейнолдс (*Osborne Reynolds, 1842 – 1912*):

$$Re = \frac{v_C \cdot L}{\vartheta} = \frac{v_C \cdot L}{\mu} \cdot \rho_a, \quad (85)$$

където ϑ и μ са съответно кинематичният и динамичният коефициент на вискозитет на флуида, който обтича ИТТ, а L е характерна дължина.

- **Подемна сила**

При обтичане на тела с различна форма тази сила се отъждествява със силата на Магнус (*Heinrich Gustav Magnus, 1802 – 1870*). Тя се нарича „подемна“ условно, тъй като нейното направление и посока се определят от векторното произведение на ъгловата скорост ω_A и скоростта $v_{C,A}$. Обяснението за възникването на тази сила може да се даде по няколко начина, вж. [8]. Накратко, поради наличието на сферична компонента от общото движение на дадено твърдо тяло около избран полюс (в случая това е точката O от ИТТ) се създава циркулация на флуидния поток. Това води до поява на разлика в налягането в нормално (перпендикулярно) направление на равнината, минаваща през векторите ω_A и $v_{C,A}$. Експерименталните изследвания показват, че тази сила може с достатъчна точност да се определи по формулата:

$$\mathbf{F}_{L,A}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_L \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\boldsymbol{\Omega}_A \cdot \mathbf{v}_{C,A}}{|\boldsymbol{\Omega}_A \cdot \mathbf{v}_{C,A}|}. \quad (86)$$

Безразмерният коефициент C_L зависи също от числото на Рейнолдс, вж. формула (85), като приблизително той е около два пъти по-малък от коефициента C_D .

- **Съпротивителен момент**

Този момент се явява в противоположна посока на ъгловата скорост $\boldsymbol{\omega}_A$ на елипсоида. Определя с по формулата:

$$\mathbf{M}_{D,A}^{(a)} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_M \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\boldsymbol{\omega}_A}{|\boldsymbol{\omega}_A|}, \quad (87)$$

където коефициентът C_M зависи от числото на Рейнолдс, но също и от грапавостта на обтечната повърхност на тялото.

Неудобството на трите формули (84), (86) и (87) се дължи на обстоятелството, че по време на движение на тялото, лицето \bar{A}_v постоянно се променя. Това означава, че за да се използват тези формули, е необходимо по някакъв начин да се определи законът на изменение на това лице в зависимост от ориентацията на тялото в пространството.

- **Дестабилизиращ аеродинамичен момент при несиметрично тяло**

Дефинираме следната Теорема: При движение на несиметрично тяло с определена скорост в неподвижна флуидна среда, и при наличие на ъглова скорост на тялото, се създава несиметричен флуиден поток, който води до появата на дестабилизиращ аеродинамичен момент, пропорционален на векторното произведение на вектора скорост на полюса и вектора ъглова скорост на тялото.

Ще извършим физическо доказателството на тази теорема.

Нека несиметричното ИТТ има скорост на полюса $\mathbf{v}_{C,B} = \langle v_{C,x} \quad v_{C,x} \quad v_{C,x} \rangle^T$ и ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_B = \langle \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z \rangle^T$, отчетени спрямо ПКС. Съгласно принципа на инверсията може да се приеме, че ИТТ е неподвижно, а флуидният поток се движи спрямо тялото със скорост $\mathbf{U}_{C,B} = -\mathbf{v}_{C,B}$.

Разглеждаме първоначално координатните равнини Cxy и Czx .

Флуидният поток по направление на оста x , обща за тези две равнини, няма да остане симетричен спрямо равнината Czx . Ще се породи дестабилизиращ момент по направление на оста z (перпендикулярна на оста x), който ще има вида:

$$M_{E,z}^{(a)} \cdot \mathbf{k} = a_z \cdot v_x \cdot \omega_y \cdot \mathbf{k}. \quad (88)$$

Предполагаме, че константата a_z има известна алгебрична стойност.

Флуидният поток по направление на оста x няма да остане симетричен и спрямо равнината Cxy . Ще се породи също и дестабилизиращ момент по направление на оста y (перпендикулярна на оста x), който ще определим по формулата:

$$M_{E,y}^{(a)} \cdot \mathbf{j} = -a_y \cdot v_x \cdot \omega_z \cdot \mathbf{j}. \quad (89)$$

Константата a_y също има известна алгебрична стойност.

Ако последователно разгледаме двойката равнини Cxy и Cyz с обща ос y , и накрая, двойката равнини Cyz и Czx с обща ос z , и извършим аналогични разсъждения, ще получим и пълни формули за трите компоненти на дестабилизиращия аеродинамичен момент, който, записан във векторно-матрична форма, ще има вида:

$$\begin{bmatrix} M_{E,x}^{(a)} \\ M_{E,y}^{(a)} \\ M_{E,z}^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & 0 & 0 \\ 0 & a_y & 0 \\ 0 & 0 & a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -v_{C,z} & v_{C,y} \\ v_{C,z} & 0 & -v_{C,x} \\ -v_{C,y} & v_{C,x} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (90)$$

В горната формула сме въвели матрицата:

$$\mathbf{V}_{C,B} = \begin{bmatrix} 0 & -v_{C,z} & v_{C,y} \\ v_{C,z} & 0 & -v_{C,x} \\ -v_{C,y} & v_{C,x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (91)$$

Съкратеният запис на формула (81) има вида:

$$\mathbf{M}_{E,B}^{(a)} = \mathbf{diag}(a_x \ a_x \ a_x) \cdot \mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_A. \quad (92)$$

С това теоремата е доказана, като допълнителното конкретизиране на формули (90) и (92) се извършва в следващия параграф.

5. Диференциални уравнения

Системата диференциални уравнения (58), която описва пространственото движение на ИТТ, е отнесена спрямо НКС. В този вид, обаче, тя не е най-подходящият вариант с оглед на численото ѝ интегриране. Това е така, защото матриците $\mathbf{A}_{C,A}$ и $\mathbf{B}_{C,A}$, които са носители на масовите и инерционни характеристики на ИТТ, са функции на времето t . За да се освободим от това неудобство, отнасяме системата (58) спрямо ПКС. Получаваме следния преобразуван вид:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{C,B} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot (\mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}) = \\ & = (\mathbf{B}_{C,B} \cdot \Phi_B - \Phi_B \cdot \mathbf{B}_{C,B}) \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{Q}_{C,A}. \end{aligned} \quad (93)$$

Сега матриците $\mathbf{A}_{C,B}$ и $\mathbf{B}_{C,B}$ са изградени от елементи с константни стойности, което прави горната система много по-удобна за работа в сравнение със системата (58). Освен това векторите $\dot{\mathbf{u}}_{C,A} = \mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{u}_{C,A} = \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}$ и $\mathbf{Q}_{C,A}$ са отнесени спрямо НКС, което също е удобство. Като недостатък може да се изтъкне появата на матрицата на преход $\mathbf{W}_{B,A}$. Но за числено интегриране това не е от значение.

И така, системата диференциални уравнения, която описва пространственото движение на ИТТ, е определена. Остава открит въпросът за идентифициране на вектора на реалната обобщена сила $\mathbf{Q}_{C,A} \equiv \mathbf{Q}_{O,A}$.

В параграф 4 описахме основните сили, които действат на ИТТ. Но и там, всички кинематични и силови характеристики отнесохме спрямо неподвижната координатна система $N\xi\eta\zeta$. Изказахме се и за затруднението, което следва от това.

Сега, тези величини ще ги отнесем спрямо свързаната неизменно с ИТЕ подвижна координатна система $Cxyz$. В резултат на това проектираните лица, както и аеродинамичните коефициенти, ще бъдат константни величини при константно число на Рейнолдс.

За тази цел ще разгледаме отново аеродинамичните сили, които действат на ИТЕ.

• Съпротивителна сила

Съпротивителната аеродинамична сила отнасяме спрямо ПКС. Конструираме я във векторно-матрична форма по следния начин:

$$\begin{bmatrix} F_{D,x}^{(a)} \\ F_{D,y}^{(a)} \\ F_{D,z}^{(a)} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \frac{C_{D,x} \cdot A_x}{|\mathbf{v}_{O,B}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{D,y} \cdot A_y}{|\mathbf{v}_{O,B}|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{D,z} \cdot A_z}{|\mathbf{v}_{O,B}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{C,x} \\ v_{C,y} \\ v_{C,z} \end{bmatrix}. \quad (94)$$

Големината на вектора скорост на полюса $C \equiv O$ не зависи от координатната система, спрямо която се отчита. Ето защо са в сила равенствата: $|\mathbf{v}_{C,A}| = |\mathbf{v}_{C,B}| = v_C$.

Въвеждаме следната матрица:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(D)} = \frac{1}{|\mathbf{v}_{C,A}|} \cdot \begin{bmatrix} -C_{D,x} \cdot A_x & 0 & 0 \\ 0 & -C_{D,y} \cdot A_y & 0 \\ 0 & 0 & -C_{D,z} \cdot A_z \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Изписваме формула (82) в съкратен вид:

$$\mathbf{F}_{D,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(D)} \cdot \mathbf{v}_{C,B}. \quad (96)$$

Лицата на елипсите A_x , A_y и A_z с нормали, съответно осите x , y и z , имат постоянни значения. Освен това, трите коефициента на челно съпротивление $C_{D,x}$, $C_{D,y}$ и $C_{D,z}$ при константно число на Рейнолдс също имат константни значения.

- **Подемна сила**

Подемната сила композираме във векторно-матрична форма по обратен начин, като първоначално я изписваме в съкратена форма:

$$\mathbf{F}_{L,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)} \cdot \mathbf{v}_{C,B}. \quad (97)$$

Конкретизираме матрицата $\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)}$ съгласно следваната методика така:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)} = \begin{bmatrix} \frac{C_{L,x} \cdot A_x}{|\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{L,y} \cdot A_y}{|\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{L,z} \cdot A_z}{|\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_{C,B}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Тъй като големината на векторното произведение $\boldsymbol{\Omega}_B \cdot \mathbf{v}_C$, отнесено спрямо ПКС и спрямо НКС е една и съща, то за матрицата $\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)}$ съставяме следната формула:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)} = \frac{1}{|\boldsymbol{\Omega}_A \cdot \mathbf{v}_{C,A}|} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -C_{L,x} \cdot A_x \cdot \omega_z & C_{L,x} \cdot A_x \cdot \omega_y \\ C_{L,y} \cdot A_y \cdot \omega_z & 0 & -C_{L,y} \cdot A_y \cdot \omega_x \\ -C_{L,z} \cdot A_z \cdot \omega_y & C_{L,z} \cdot A_z \cdot \omega_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Трите коефициента на подемната сила $C_{L,x}$, $C_{L,y}$ и $C_{L,z}$ при константно число на Рейнолдс също имат константни значения.

- **Съпротивителен момент**

Първоначално формулата за съпротивителния момент изписваме така:

$$\mathbf{M}_{D,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} \cdot \boldsymbol{\omega}_B. \quad (100)$$

Конкретизираме матрицата $\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)}$ по следния начин:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} = \begin{bmatrix} -\frac{C_{M,x} \cdot A_x}{|\boldsymbol{\omega}_B|} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_{M,y} \cdot A_y}{|\boldsymbol{\omega}_B|} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C_{M,z} \cdot A_z}{|\boldsymbol{\omega}_B|} \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Тъй като големината на вектора моментна ъглова скорост $\boldsymbol{\omega}_B$, отнесен спрямо ПКС и спрямо НКС е една и съща, то за матрицата $\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)}$ получаваме следната формула:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega}_A|} \cdot \begin{bmatrix} -C_{M,x} \cdot A_x & 0 & 0 \\ 0 & -C_{M,y} \cdot A_y & 0 \\ 0 & 0 & -C_{M,z} \cdot A_z \end{bmatrix}. \quad (102)$$

И тук трите коэффициента на съпротивителния момент $C_{M,x}$, $C_{M,y}$ и $C_{M,z}$ при константно число на Рейнолдс имат константни значения.

- **Дестабилизиращ аеродинамичен момент от несиметрия на тялото**

Дестабилизиращият аеродинамичен момент, който се появява вследствие на несиметрията на тялото, съгласно формули (90), (91) и (92), отчетен спрямо НКС, има вида:

$$\mathbf{M}_{E,A}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot C_E \cdot \bar{A}_v \cdot \frac{\mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_A}{|\mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_A|}, \quad (103)$$

където безразмерният коэффициент C_E зависи от числото на Рейнолдс.

Същият момент, но отчетен спрямо ПКС, се представя във вида:

$$\mathbf{M}_{E,B}^{(a)} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(E)} \cdot \boldsymbol{\omega}_B, \quad (104)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(E)} = \begin{bmatrix} \frac{C_{E,x} \cdot A_x}{|\mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_B|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_{E,y} \cdot A_y}{|\mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_B|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{C_{E,z} \cdot A_z}{|\mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_B|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -v_{C,z} & v_{C,y} \\ v_{C,z} & 0 & -v_{C,x} \\ -v_{C,y} & v_{C,x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (105)$$

Тъй като големината на векторното произведение $\mathbf{V}_C \cdot \boldsymbol{\omega}_B$, отнесено спрямо ПКС и спрямо НКС е една и съща, то за матрицата $\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(E)}$ съставяме следната формула:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(E)} = \frac{1}{|\mathbf{V}_{C,B} \cdot \boldsymbol{\omega}_B|} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -C_{E,x} \cdot A_x \cdot v_z & C_{E,x} \cdot A_x \cdot v_y \\ C_{E,y} \cdot A_y \cdot v_z & 0 & -C_{E,y} \cdot A_y \cdot v_x \\ -C_{E,z} \cdot A_z \cdot v_y & C_{E,z} \cdot A_z \cdot v_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (106)$$

Трите коэффициента $C_{E,x}$, $C_{E,y}$ и $C_{E,z}$ при константно число на Рейнолдс, имат константни значения.

Съпротивителната сила $\mathbf{F}_D^{(a)}$, подемната сила $\mathbf{F}_L^{(a)}$, съпротивителният момент $\mathbf{M}_D^{(a)}$ и дестабилизиращият момент $\mathbf{M}_E^{(a)}$ могат да се обединят в една реална обобщена аеродинамична сила, а именно:

$$\mathbf{Q}_{C,B}^{(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_B^{(a)} \\ \mathbf{M}_{C,B}^{(a)} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{C,B} \\ \boldsymbol{\omega}_B \end{bmatrix}. \quad (107)$$

Във формула (107) сме въвели следните матрици:

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1} = \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(D)} + \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(L)}, \quad (108)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_{2,2} \equiv \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(M)} + \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(E)}. \quad (109)$$

Въвеждаме още една матрица, а именно:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot v_C^2 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{S}}_{2,2} \end{bmatrix}. \quad (110)$$

Тогава за реалната обобщена аеродинамична сила, отнесена спрямо ПКС в съкратен запис, получаваме следната формула:

$$\mathbf{Q}_{C,B}^{(a)} = \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{u}_{C,B}. \quad (111)$$

Реалната обобщена аеродинамична сила, отнесена спрямо НКС ще има вида:

$$\mathbf{Q}_{C,A}^{(a)} = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A}. \quad (112)$$

Реалната обобщена сила се получава като векторна сума от реалната обобщена аеродинамична сила и редуцираното тегло на тялото, а именно:

$$\mathbf{Q}_{C,A} = \mathbf{Q}_{C,A}^{(a)} + \tilde{\mathbf{G}}_A = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{u}_{C,A} + \tilde{\mathbf{G}}_A. \quad (113)$$

Заместваме формула (11) в горното равенство и получаваме:

$$\mathbf{Q}_{C,A} = \mathbf{W}_{A,B} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{G}}_A. \quad (114)$$

Заместваме формула (114) в диференциалното уравнение (93) и получаваме:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{C,B} \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot (\mathbf{H}_A \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{H}}_A \cdot \dot{\mathbf{q}}) = \\ & = (\mathbf{B}_{C,B} \cdot \Phi_B - \Phi_B \cdot \mathbf{B}_{C,B} + \tilde{\mathbf{S}}) \cdot \mathbf{W}_{B,A} \cdot \mathbf{H}_A \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{W}_{B,A} \cdot \tilde{\mathbf{G}}. \end{aligned} \quad (115)$$

Системата диференциални уравнения (115) описва общото движение на идеално твърдо несиметрично тяло във флуидна среда. Подходяща е за числено решение.

6. Заключение

Основната цел на настоящата теоретична статия е изпълнена. С дефинираните две Теорема и дефинираните Кондензирани уравнения на Лагранж, с използване на векторно-матричния апарат за описание на физическите явления при движение на несиметрично идеално твърдо тяло във флуидна среда, статията определено има научни приноси. Тя представлява основа за разработването на софтуерни програми, както чрез най-удобния за случая математически пакет MatLab, пригоден за работа с матрици, така и чрез учебни програми, като MathCAD и други, вж. [9]. В този смисъл, тя има и определени научно-приложни и приложни приноси.

Благодарност

В чест на 75-годишния юбилей на УАСГ изказвам моята най-сърдечна, пряка и задочна, благодарност на всички преподаватели, които в годините от 1977 г. до 1982 г. ме създадоха като инженер, преподавател, педагог и учен!

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gans, R. F.* Engineering Dynamics: From the Lagrangian to Simulation. Springer Science and Business Media, New Yourk, 2013.
2. *Vilmart, G.* Rigid Body Dynamics. HALCCSD, 2013.
3. *Beer, F. P., Johnston, E. R.* Vector Mechanics for Engineers. Mc Graw Hill Inc., 1977.
4. *Prescott, J.* Mechanics of Partic lesand Rigid Body. Longmans, Greenand CO., London, New Yourk, Toronto, 1947.
5. *Hedrich, K. S.* Leonhard Euler (1707 – 1783) and Rigid Body Dynamics. Ac. Tech. Review, vol. LVII, No 3 – 4, 2007.
6. *Иванов, А.* Теор. Механика-Кинематика в матрична форма. Аван. Прима, 2012.
7. *Katz, J., Plotkin, A.* Low-Speed Aerodynamics. Cambridge Un. Press, 2001.
8. *Иванов, А.* Основен курс по Механика на флуидите. Авангард Прима, 2016.
9. *Стоянов, А. Д.* Изследване движението на механична система с две степени на свобода в матрична форма. // Годишник МГУ, Том 59, Св. III, стр. 97 – 99, София, 2016.

MOTION OF ASYMMETRICAL RIGID BODY IN FLUID AREA

A. Ivanov¹

Keywords: general motion, rigid body, fluid, aerodynamic forces

ABSTRACT

In this paper the general motion of an asymmetrical homogeneous rigid body in a fluid environment is studied. By means of a defined new theorem – The Theorem for changing the rigid body general impulse and new form of Lagrange equations, called Lagrange condensed equations, the differential equations describing the three-dimensional motion of the body in a matrix form is obtained. With a new theorem for the fluid flow of an asymmetrical rigid body, the presence of a destabilizing aerodynamic moment is proved. A new complete matrix of aerodynamic forces is defined. The spherical component of body general motion is counted with Cardan corners. The paper is entirely theoretical. It is the basis on which a second paper on the motion of an ideal rigid ellipsoid in a fluid environment is developed.

¹ Anastas Ivanov, Assoc. Prof. Dr. Eng., Dept. “Mechanics”, Todor Kableshkov University of Transport, 158 Geo Milev St., Sofia 1574, e-mail: aii2010@abv.bg