

Получена: 11.10.2017 г.

Приета: 20.10.2017 г.

## ПРИЛОЖЕНИЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКИ МЕТОДИ ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ОПТИМАЛНИЯ РЕЖИМ НА РАБОТА НА ПОМПА С ПРОМЕНЛИВА ЧЕСТОТА, ЗАХРАНВАЩА РЕЗЕРВОАР

Б. Борисов<sup>1</sup>

*Ключови думи:* помпа с променлива честота на въртене, спестяване на електроенергия, приложение на методи за оптимизация, генетичен алгоритъм, *patternsearch*, *multistart*, метод с неопределени множители на Лагранж

### РЕЗЮМЕ

Минимизирането на количеството или цената на електроенергията, изразходена от помпа с променлива честота на въртене (ППЧ), е класическа оптимизационна задача. За нея е направен сравнителен анализ на съвременни, приложими с помощта на софтуер методи за оптимизация, като генетичен алгоритъм, *patternsearch*, *multistart*.

С помощта на метода на множителите на Лагранж, с ограничително условие подаденият от ППЧ към резервоара воден обем да е по-голям от средния денонощен разход, са изведени аналитични изрази за изчисляване на оптималните водни количества за случаите на минимизиране на цената на електроенергията при различни единични цени в две и три зони на денонощието.

### 1. Въведение

Използването на помпи с променлива честота (ППЧ) във водоснабдяването е предпоставка за намаляване на количеството и цената на изразходената електрическа енергия. В изследването е разгледана водоразпределителна система (ВРС), състояща се от ППЧ, която захранва резервоар. Практическа задача е да се състави режим на помпата, при който се минимизира цената или количеството на електроенергията. Този

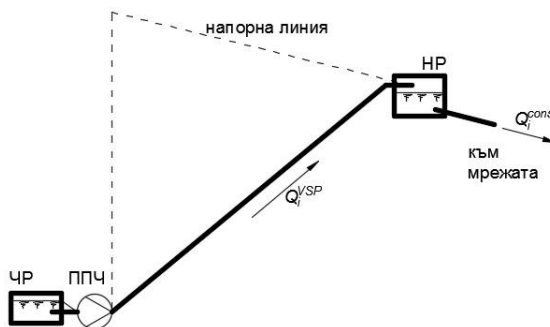
---

<sup>1</sup> Боян Борисов, ас. инж., кат. „Водоснабдяване, канализация и пречистване на води”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: boyan\_borisov@abv.bg

въпрос е разгледан в редица изследвания [9, 10, 13, 14]. В настоящата разработка е направен сравнителен анализ на съвременни оптимизационни методи, които са подходящи за използване в инженерната практика, както и за изследвания, свързани с повишаване на енергийната ефективност на ВрС.

## 2. Структура на задачата

Разглежда се следната задача. За ВрС (фиг. 1) да се намери режимът на работа на ППЧ през денонощието, при който се постига най-малка цена на електроенергията.



**Фиг. 1. Схема на ВрС, състояща се от ППЧ, гласкател и напорен резервоар**

Обобщената символна формулировка на оптимизационната задача е следната<sup>1</sup>:  
Да се намери минимумът на целевата функция:

$$f(x) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

така, че независимите променливи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  да удовлетворяват следните ограничения: *долна граница*  $\leq x \leq$  *горна граница* – интервални ограничения;  $A \cdot x \leq b$  – линейни ограничения – неравенства;  $A_{eq} \cdot x = b_{eq}$  – линейни ограничения – равенства;  $c(x) \leq 0$  – нелинейни ограничения – неравенства;  $ceq(x) = 0$  – нелинейни ограничения – равенства, където  $x \equiv [x_1, x_2, \dots, x_n]$  е  $n$  – мерен вектор;  $A$  и  $A_{eq}$  – матрица от коефициентите пред независимите променливи в ограниченията;  $b$  и  $b_{eq}$  – вектор-стълб от дясната страна на ограниченията;  $c$  и  $ceq$  – нелинейни ограничителни функции.

Следва преформулиране на оптимизационната задача във връзка с предмета на настоящото изследване.

Целевата функция при минимизиране на количеството на електрическата енергия е дадена с форм. (1), а при минимизиране на цената с форм. (2).

$$E_q = \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{\gamma \cdot Q_i \cdot (H_{stat} + s \cdot Q_i^2) \cdot T_i}{1000 \cdot \eta_{tot}} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Използвани са приетите в Matlab означения и подредбата на оптимизационния проблем от [3]

$$E_{pr} = \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} \frac{\gamma \cdot Q_i \cdot (H_{stat} + s \cdot Q_i^2) \cdot \sigma_j \cdot T_i}{1000 \cdot \eta_{tot}}, \quad (2)$$

където броят  $i$  взема стойности от 1 до  $n$  броя на времевите интервали, на които се разделя периодът на оптимизация. В разглеждания случай се приема  $n = 24$ , колкото са часовете от денонощието; броят  $j$  е свързан с броя на скалите (зоните)  $m$  с различни единични цени на електроенергията през денонощието;  $\sigma_j$  – единична цена на енергията в зона  $j$ , лв/kWh;  $H_{stat}$  – геодезичната височина, m;  $s$  – съпротивителният коефициент на тласкателя;  $\eta_{tot}$  – коефициент на полезно действие на помпата, двигателя и честотния преобразувател. С оглед на целите на настоящото изследване, се приема  $\eta_{tot} = \text{const}$ ;  $\gamma$  – обемно тегло на водата, 9810 kN/m<sup>3</sup>;  $Q_i$  – подавано от помпата водно количество, m<sup>3</sup>/s;  $T_i$  – времеви интервал, за който се приема, че водното количество не се променя. При използване на програмен продукт се приема  $T_i = 1$  час, а при метода с неопределените множители на Лагранж  $T_i$  е равен на продължителността на зоните с една цена на електроенергията.

Водните количества на ППЧ за обособените времеви интервали могат да се запишат като множество или вектор:

$$Q_i^{VSP} = \{Q_1^{VSP}, Q_2^{VSP}, \dots, Q_n^{VSP}\} \text{ или } \overline{Q_i^{VSP}} = [Q_1^{VSP} \quad Q_2^{VSP} \quad \dots \quad Q_n^{VSP}].$$

Интервалните ограничения  $Q_{VSP}^{\min}$  и  $Q_{VSP}^{\max}$  за водното количество зависят от възможния обхват на работа на ППЧ. Долната граница  $Q_{VSP}^{\min}$  се определя от едно от следните ограничения в зависимост от конкретния случай: прегряване на двигателя (със или без допълнително охлаждане); гранична точка от неустойчивата област на разходно-напорната характеристика; преценка, свързана с намаляване на КПД при намаляване на водното количество. Горната граница  $Q_{VSP}^{\max}$  зависи от максималната честота на помпата и съответстващото ѝ водно количество.

Линейните ограничения са неравенства. Те са свързани с недопускането на източване и преливане на резервоара, както и подаденият от ППЧ воден обем да е по-голям от излезлия обем от резервоара към водопроводната мрежа [7, 10]. С оглед на разделянето на денонощието на 24 интервала и използваните в изследването програмни продукти по-долу се предлага следната математическа формулировка на ограниченията.

Първата група от 24 уравнения, които осигуряват условието резервоарът да не се източва (водното ниво да достига до противопожарния запас) е с общ вид, съгласно форм. (3).

$$V_{in} + \sum_{i=1}^k Q_i^{VSP} T_i \geq \sum_{i=1}^k Q_i^{cons} T_i, \quad (3)$$

$$k \in \{1; n = 24\},$$

където  $V_{in}$  е началният обем в резервоара в разглежданото денонощие;

$Q_i^{VSP}$  – водното количество подавано от ППЧ за  $i$ -тия час;

$Q_i^{cons}$  – водното количество, което се подава от НР за  $i$ -тия час;

$T_i$  – продължителност на обособен времеви интервал, през който ППЧ работи с постоянно водно количество. В случая се приема за 1 час.

Втората група от 24 уравнения, които осигуряват условието резервоарът да не прелива, е с общ вид, съгласно форм. (4).

$$V_{in} + \sum_{i=1}^{24} Q_i^{VSP} \cdot T_i - \sum_{i=1}^{24} Q_i^{cons} \cdot T_i \leq V_{oper}, \quad (4)$$

$$k \in \{1; n = 24\}.$$

Работният обем  $V_{oper}$  е заключен между минималното и максималното водно ниво и не включва т.нар. долен запас [2] и противопожарния обем.

Последното ограничение (5) е свързано с изискването подаденият от ППЧ воден обем за цялото денонощие да е по-голям от изразходвания обем.

$$\sum_{i=1}^{24} Q_i^{VSP} \cdot T_i \geq \sum_{i=1}^{24} Q_i^{cons} \cdot T_i. \quad (5)$$

Обикновено оптималното решение е на границата на 49-тото ограничение. В някои случаи може да бъде зададено ограничение, съгласно което в края на денонощието резервоарът да е пълен наполовина или догоре, независимо от началния обем  $V_{in}$ .

В изследването са използвани оптимизационни методи, които са вградени в програмния продукт *Matlab* и *MS Excel*. Във връзка с особеностите на *Matlab* и обособяването на матрицата  $A$  и вектора  $b$ , горните неравенства трябва да се реструктурират, като членовете, съдържащи независимите променливи са отляво, а останалите отдясно спрямо знака за неравенство „по-малко“. След тези преобразувания матрицата  $A$  на коефициентите пред независимите променливи, при разделяне на денонощието на 24 часа, може да се представи със следните три съставни части: (6.1) – за неизточване на резервоара, (6.2) – за непреливане, (6.3) – за наличен обем в края на периода на оптимизиране, не по-малък от обема в началото на периода.

$$A_{1 \div 24} = \begin{bmatrix} -T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1 & -T_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -T_1 & -T_2 & -T_3 & -T_4 & -T_5 & \dots & -T_{22} & -T_{23} & -T_{24} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$A_{25 \div 48} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_1 & T_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & \dots & T_{22} & T_{23} & T_{24} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$A_{49} = [-T_1 \quad -T_2 \quad -T_3 \quad -T_4 \quad -T_5 \quad \dots \quad -T_{22} \quad -T_{23} \quad -T_{24}]. \quad (6.3)$$

Векторът  $b$  може да се представи със следните съставни части (7):

$$b_{1+24} = \begin{bmatrix} V_{in} - Q_{cons,1}T_1 \\ V_{in} - Q_{cons,1}T_1 - Q_{cons,2}T_2 \\ \dots \\ V_{in} - Q_{cons,1}T_1 - Q_{cons,2}T_2 - \dots - Q_{cons,n}T_n \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$b_{25+48} = \begin{bmatrix} V_{oper} + Q_{cons,1}T_1 - V_{in} \\ V_{oper} + Q_{cons,1}T_1 + Q_{cons,2}T_2 - V_{in} \\ \dots \\ V_{oper} + Q_{cons,1}T_1 + Q_{cons,2}T_2 - \dots + Q_{cons,n}T_n - V_{in} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$b_{49} = \left[ -\sum_{i=1}^{24} Q_{cons,i}T_i \right]. \quad (7.3)$$

В изследването са използвани следните оптимизационни методи:

- метод с неопределени множители на Лагранж;
- *multistart*, версия в Matlab;
- *patternsearch*, версия в софтуера Matlab;
- генетичен алгоритъм, версия в програмата с общо предназначение Matlab и програмата за хидравлично моделиране WaterGems;
- методите, включени във вградения в MS Excel инструмент Solver (т. 3.3).

### 3. Оптимизационни методи

#### 3.1. Метод с неопределени множители на Лагранж

В рамките на изследването е предложен инженерен подход за пряко изчисляване на водните количества на ППЧ при зоновно заплащане на електроенергията, който се основава на математическия метод за намиране на условен екстремум с неопределени множители на Лагранж. В структурата на оптимизационната задача влиза само 49-тото ограничение (форм. (5)), което прави подхода подходящ само при по-големи работни обеми на резервоарите. Друго ограничение, което се налага във връзка с естеството на математическия метод, е разделянето на периода на оптимизация на интервали, равни на продължителността на зоните, вместо на 24 интервала. Предимството на предложения подход се състои във възможността оптималните водни количества да бъдат изчислени пряко с калкулатор или формули, въведени в електронни таблици.

##### 3.1.1. Заплащане на електрическата енергия по две скали – дневна и нощна

Свободният пазар на електрическа енергия предлага тарифен план, при който електрическата енергия се заплаща по две скали. Целевата функция при минимизиране на цената на електрическата енергия се дава с форм. (8).

$$E_{pr} = \frac{\gamma \cdot Q_n \cdot (H_{stat} + s \cdot Q_n^2) \cdot \sigma_n \cdot T_n + \gamma \cdot Q_d \cdot (H_{stat} + s \cdot Q_d^2) \cdot \sigma_d \cdot T_d}{1000 \cdot \eta_{tot}}, \quad (8)$$

където  $n$  и  $d$  са индекси, съответно за параметри през нощта и деня.

Ограничителното условие се дава с форм. (9).

$$Q_n \cdot T_n + Q_d \cdot T_d = V_{cons}, \quad (9)$$

където  $V_{cons}$  е подаденият към потребителите в мрежата обем вода,  $m^3/3600$ ;

$T_n$  и  $T_d$  – продължителностите на зоните с нощна и дневна единични цени на електроенергията. Приема се  $T_n = T_d = 12$  часа.

Функцията (8) се представя във вида:

$$E = B \cdot f(Q_n) \cdot T_n \cdot \sigma_n + B \cdot f(Q_d) \cdot T_d \cdot \sigma_d, \quad (10)$$

където множителите  $B$  и  $f(Q_i)$  се дават съответно с изразите:

$$B = \frac{\gamma}{1000 \cdot \eta};$$

$$f(Q_i) = Q_i \cdot H_{stat} + s \cdot Q_i^3, \quad i = n, d.$$

Функцията на Лагранж се дава с (11):

$$L(Q_n, Q_d, \lambda) = \sum_{i=\{n,d\}} B \cdot f(Q_i) \cdot \sigma_i \cdot T_i + \lambda \cdot \left( \sum_{i=\{n,d\}} Q_i \cdot T_i - V_{cons} \right). \quad (11)$$

Спрямо нея се съставя системата с три частни диференциални уравнения (12), като  $T_i$  се приема 12 часа.

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_i} = B \cdot \frac{f(Q_i)}{dQ_i} \cdot 12 + \lambda \cdot 12 = 0, & i = n, d \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=\{n,d\}} Q_i \cdot T_i - V_{cons} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

След преобразувания и решаване на първите две уравнения за водните количества на ППЧ се получават следните изрази (13):

$$Q_n = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-\lambda - B \cdot H \cdot \sigma_n}}{3 \cdot \sqrt{B \cdot s \cdot \sigma_n}}; \quad Q_d = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-\lambda - B \cdot H \cdot \sigma_d}}{3 \cdot \sqrt{B \cdot s \cdot \sigma_d}}. \quad (13)$$

За да се намери изразът за неопределения множител, изразите за водните количества (13) се заместват в третото уравнение от системата (12) и след това то се решава за  $\lambda$ .

Получават се два корена, като търсеният е:

$$\lambda = -\frac{B.V_{cons}^2 \cdot s \cdot \sigma_d \cdot \sigma_n^2 + B.V_{cons}^2 \cdot s \cdot \sigma_d^2 \cdot \sigma_n - D}{48 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)^2} \quad (14)$$

$$D = 2 \cdot \sqrt{B \cdot s \cdot V_{cons} \cdot \sigma_d \cdot \sigma_n} \cdot \sqrt{-B \cdot (-s \cdot V_{cons}^2 \cdot \sigma_d \cdot \sigma_n + 48 \cdot H_{stat} \cdot \sigma_d^2 - 96 \cdot H \cdot \sigma_d \cdot \sigma_n + 48 \cdot H_{stat} \cdot \sigma_n^2)}.$$

### 3.1.2. Заплащане на електрическата енергия по три скали – нощна, дневна и върхова

Целевата функция, на която трябва да се намери минимумът е дадена с форм. (15).

$$E_{pr} = \frac{\gamma}{1000\eta} \left[ Q_d \left( H + sQ_d^\beta \right) T_d \sigma_d + Q_n \left( H + sQ_n^\beta \right) T_n \sigma_n + Q_p \left( H + sQ_p^\beta \right) T_p \sigma_p \right], \text{ лв/ден,} \quad (15)$$

където  $T_{n,d,p}$  са съответно продължителностите в часове на нощната, дневната и върховата зони, час;  $\sigma_{n,d,p}$  – единичната цена на електрическата енергия за всяка от трите зони, лв/kWh.

В (15) е използвана формулата за напорни загуби  $h = (k \cdot \ell / D^m) \cdot Q^\beta$ .

Ограничителното условие е:

$$Q_d \cdot T_d + Q_n \cdot T_n + Q_p \cdot T_p = V_{cons}, \quad (16)$$

където  $V_{cons}$  е подаденият към потребителите след нап. резервоар воден обем, в  $m^3/3600$ ;  $Q_{d,n,p}$  – подаваното от помпата водно количество за дневна, нощна и върхова времева зона,  $m^3/s$ ;  $T_{d,n,p}$  – продължителностите на дневната, нощната и върховата зони, ч.

Въвежда се съкратен запис на целевата функция:

$$E_{pr} = \sum_{i=\{n,d,p\}} A_i \cdot f(Q_i). \quad (17)$$

Множителите  $A_i$  и  $f(Q_i)$  се дават съответно с изразите:

$$A_i = \frac{\gamma}{1000 \cdot \eta} \cdot T_i \cdot \sigma_i;$$

$$f(Q_i) = Q_i \cdot H + Q_i^{\beta+1} \cdot s.$$

Функцията на Лагранж е (18):

$$L(Q_n, Q_d, Q_p, \lambda) = \sum_{i=\{n,d,p\}} A_i \cdot f(Q_i) + \lambda \cdot \left( \sum_{i=\{n,d,p\}} Q_i \cdot T_i - V_{cons} \right). \quad (18)$$

Съставя се системата (19) от четири уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_i} = A_i \cdot \frac{df(Q_i)}{dQ_i} + \lambda \cdot T_i = 0 & i = n, d, p \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=\{n,d,p\}} Q_i \cdot T_i - V_{cons} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

След преобразувания и решаване на първите три уравнения за водните количества на ППЧ се получава (20).

$$Q_n = \left( \frac{-\lambda T_n - A_n H}{A_n s (\beta + 1)} \right)^\alpha; \quad Q_d = \left( \frac{-\lambda T_d - A_d H}{A_d s (\beta + 1)} \right)^\alpha; \quad Q_p = \left( \frac{-\lambda T_p - A_p H}{A_p s (\beta + 1)} \right)^\alpha, \quad (20)$$

където  $\alpha = \frac{1}{\beta}$ ;

Неопределеният множител  $\lambda$  се изразява от ограничителното условие (16), както следва.

$$T_n \cdot \left( \frac{-\lambda T_n - A_n H}{A_n s (\beta + 1)} \right)^\alpha + T_d \cdot \left( \frac{-\lambda T_d - A_d H}{A_d s (\beta + 1)} \right)^\alpha + T_p \cdot \left( \frac{-\lambda T_p - A_p H}{A_p s (\beta + 1)} \right)^\alpha = V_{cons}.$$

След преобразувания се достига до уравн. (21).

$$T_n \cdot \left( -1 - \lambda \cdot \frac{T_n}{A_n H} \right)^\alpha + T_d \cdot \left( -1 - \lambda \cdot \frac{T_d}{A_d H} \right)^\alpha + T_p \cdot \left( -1 - \lambda \cdot \frac{T_p}{A_p H} \right)^\alpha = V_{cons} \cdot \left( \frac{s (\beta + 1)}{H} \right)^\alpha. \quad (21)$$

Правят се следните полагания:

$$\frac{T_i}{A_i H} = C_i; \quad i = n, d, p; \quad V_{cons} \cdot \left( \frac{s (\beta + 1)}{H} \right)^\alpha = G$$

$$T_n \cdot (-1 - \lambda C_n)^\alpha + T_d \cdot (-1 - \lambda C_d)^\alpha + T_p \cdot (-1 - \lambda C_p)^\alpha = G. \quad (22)$$

Опитите да бъдат намерени изрази за корените  $\lambda$  на уравнение (22) „на ръка“ и с програма за аналитични преобразувания [5] бяха неуспешни, включително и при приемане на  $\beta = 2$ . В тази връзка е предложен подход (по идея на доц. Юлиана Бонева<sup>1</sup>), при който се извършва полагането (23):

$$C = C_n = C_d = C_p = \sqrt[3]{C_n \cdot C_d \cdot C_p}. \quad (23)$$

Следва да се отбележи, че приближението (23) ще се отрази неблагоприятно върху точността на крайния резултат. След полагане и решаване на (22) по отношение на  $\lambda$  се достига до следния израз (24).

$$\lambda = \frac{1}{C} \cdot \left[ -1 - \left( \frac{G}{T_n + T_d + T_p} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (24)$$

*Пример:*

Да се намери чрез форм. (20) и (24) оптималният режим на ППЧ от фиг. 1, при следните данни:

<sup>1</sup> катедра „Математика“ в УАСГ



Тарифен план<sup>1</sup>:

$T_{n,d,p}$  – съответно 8, 10 и 6 часа;  $\sigma_{n,d,p}$  – съответно 0,11; 0,19 и 0,27 лв/kWh.

Данни за системата:

$H_{stat} = 20\text{m}$ ;  $s = 30\ 000$ ;  $\eta_{tot} = 0,60$ ;  $\beta = 2$ ;  $V_{cons} = 1540\ \text{m}^3$  (в (16) се замества  $1540/3600 = 0,428$ ); Работният обем  $V_{oper}$  се приема с достатъчна големина и не са въведени ограничения за преливане и източване.

Решение:

След заместване във форм. (20):

$Q_n = 0,0255\ \text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_d = 0,168\ \text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_p = 0,116\ \text{m}^3/\text{s}$ ; Подаденият обем  $V_{pumped} = 1591\ \text{m}^3$  (разлика 10% с  $V_{cons}$ );  $E_{pr} = 36,80\ \text{лв/д}$ ;

При използване на оптимизационен метод в програмен продукт, например *multistart* или *Solver* на MS Excel, резултатите са:

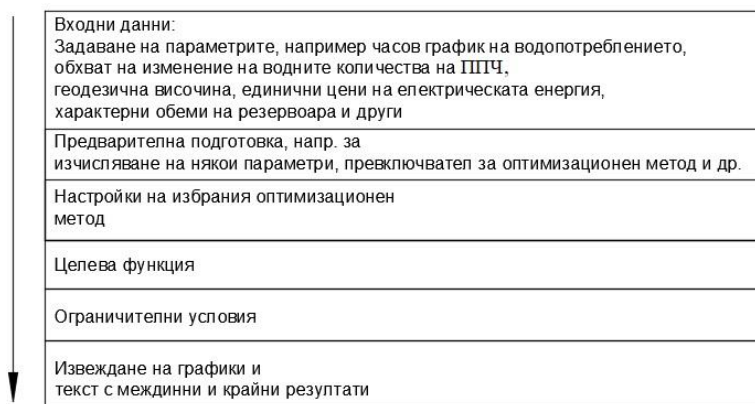
$Q_n = 0,0249\ \text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_d = 0,0163\ \text{m}^3/\text{s}$ ;  $Q_p = 0,0110\ \text{m}^3/\text{s}$ ; Подаденият обем  $V_{pumped} = 1540\ \text{m}^3$ ;  $E_{pr} = 34,82\ \text{лв/д}$ ; Разликата между двете стойности на цената на електроенергията е около 10%.

Необходимо е да се коментира незначителната разлика между стойността на  $E_{pr} = 34,82\ \text{лв/д}$  и стойността в табл. 2 –  $E_{pr} = 34,90\ \text{лв/д}$ . Тя се дължи на обстоятелството, че работният обем, използван в т.3.2.1 –  $V_{oper} = 768\ \text{m}^3$  е малко по-малък от оптималния ( $V_{oper}^{opt} = 777\ \text{m}^3$ ).

## 3.2. Оптимизационни методи, приложими с програмния продукт *Matlab*

### 3.2.1. Общи положения

Оптимизациите с програмния продукт *Matlab* могат да се извършват чрез оптимизационни процедури [3, 4]. В зависимост от целите на оптимизацията, структурата на процедурата може да се различава в детайли, но най-общо се състои от блоковете, показани на фиг. 2.



Фиг. 2. Блок схема на оптимизационна процедура за *Matlab*

<sup>1</sup> Електроразпределително дружество Енерго-Про, тарифен план до 30.06.2016 год.

В рамките на изследването са съставени оптимизационни процедури за повишаване на енергийната ефективност на ВрС с ППЧ за програмата Matlab и оптимизационен модел със *Solver* на *MS Excel*. Направено е сравнение на резултатите и особеностите на следните оптимизационни методи: *multistart*, *patternsearch*, *генетичен алгоритъм* в Matlab; *GRG<sup>1</sup>* в MS Excel.

Характеристиките на ВрС са:

- $H_{stat} = 20$  m;  $s = 30\ 000$ ;  $\eta_{tot} = 0,60$ ;
- тарифен план с три зони с единични цени  $\sigma_{n,d,p}$  – съответно 0,11; 0,19 и 0,27 лв/kWh;
- обхватът на изменение на водните количества е: 10 до 30 l/s;
- работен обем на резервоара  $V_{oper} = 768$  m<sup>3</sup>;
- подаденият обем вода е  $V_{cons} = 1540$  m<sup>3</sup>;
- часовият график на водопотреблението е показан в табл. 1.

**Таблица 1**

час	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
водно кол., m <sup>3</sup> /h	22,37	18,19	18,19	18,89	25,86	50,87	79,21	97,79	101,5	97,1	90,92	88,85
час	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
водно кол., m <sup>3</sup> /h	91,6	92,98	80,59	75,07	77,14	80,59	86,79	84,03	68,86	40,46	27,95	24,19

### 3.2.2. Генетичен алгоритъм в програмния продукт *Matlab*

Генетичният алгоритъм (ГА) може да работи със силно нелинейни и прекъснати целеви функции и ограничителни условия. Той е често използван в изследванията за повишаване на енергийната ефективност на ВрС [7, 13, 14]. Също така ГА е в основата на инструмента за енергийна ефективност на ВрС на програмата *WaterGems* за хидравлично моделиране на ВрС на разработчика Bentley. Опитите в рамките на изследването показаха, че при задаване на интервални ограничения за независимите променливи, в които те са непрекъснати, методът е много бавен и дава лоши резултати дори и при големи популации, например с над 300 индивида (вектори от 24 часово количество). Тази особеност на ГА може да се разглежда не само като недостатък, но и като предимство, тъй като е възможно ограничение от вида  $Q = \{0, Q_{\min}^{VSP} \neq 0, Q_i, \dots, Q_{\max}^{VSP}\}$ .

В рамките на изследването е съставена оптимизационна процедура за прилагане на ГА с дискретизация на водните количества. Пример за три приети дискретизации е даден в табл. 2. За всяка от тях са използвани последователно популации от 50, 500 и 1000 индивида (режими на ППЧ).

<sup>1</sup> *Generalized Reduced Gradient algorithm*

Таблица 2

Период на отч.	Водното количество на ППЧ, м <sup>3</sup> /с		
	Дискретизация с 3 + 6 + 3 стойности	Дискретизация с 5 + 8 + 4 стойности	Дискретизация с 9 + 13 + 7 стойности
нощ	0,020; 0,025; 0,030	0,020; 0,023; 0,025; 0,028; 0,030	0,020; 0,021; 0,023; 0,024; 0,025; 0,026; 0,027; 0,028; 0,030
ден	0; 0,01; 0,015; 0,020; 0,025; 0,030	0; 0,01; 0,015; 0,020; 0,023; 0,025; 0,028; 0,030	0; 0,01; 0,012; 0,013; 0,014; 0,015; 0,016; 0,017; 0,020; 0,023; 0,025; 0,028; 0,030
върх. период	0; 0,01; 0,015	0; 0,01; 0,013; 0,015	0; 0,01; 0,011; 0,012; 0,013; 0,014; 0,015

При първата дискретизация допустимата област се състои от  $289 \cdot 10^{12}$  вектора от 24 елемента – часови водни количества (1 бр. ППЧ\* $3^8$  нощни водни количества\* $6^{10}$  дневни водни количества\* $3^6$  върхови водни количества), при втората  $1 \cdot 718 \cdot 10^{15}$  вектора, а при третата  $375 \cdot 10^{21}$  вектора.

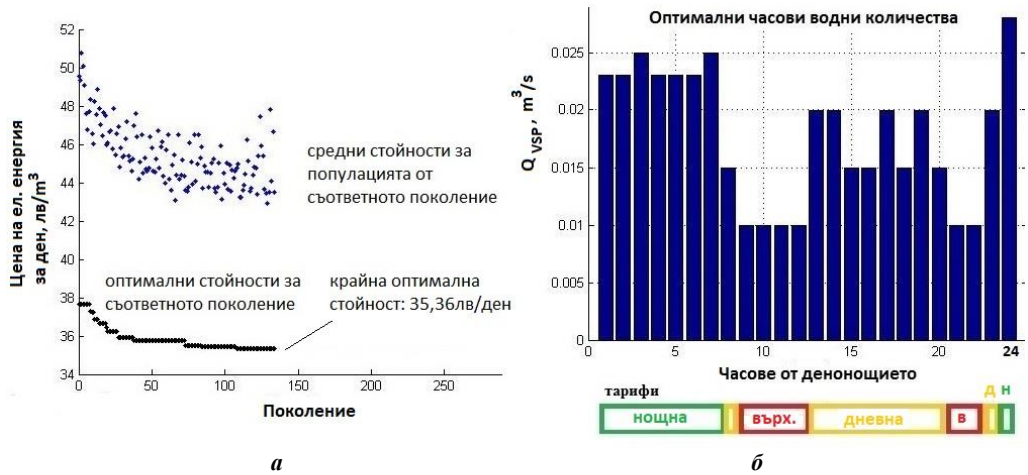
Резултатите от проведените 9 оптимизации с ГА са дадени в табл. 3.

Таблица 3

Генетичен алгоритъм (ГА)				Multistart (MS)	Patternsearch (PS)
Възможни водни количества (дискретизация)	Големина на популацията				
	50	500	1000	Цена на електроенергията, лв/д	
12	35,61 лв/д	35,61 лв/д	35,61 лв/д	34,90 лв/д	34,68 лв/д
17	35,36 лв/д	35,33 лв/д	35,36 лв/д		
29	35,13 лв/д	35,05 лв/д*	34,97 лв/д		
Забележки:					
1. Времетраенето при MS е $4 \div 5$ min, при PS е $1 \div 2$ sec, при ГА за случай * – 24 sec.					
2. Работният обем в сравнението е малко по-малък от оптималния граничен работен обем $V_{oper, lim}$ . Вследствие на това се задействат ограничителни условия и $E_{pr}^{opt}$ е с по-голяма стойност от $E_{pr}^{opt, abs} = 34,82$ лв/д.					
3. Стойността на $E_{pr}^{opt}$ при patternsearch е по-малка от тази на multistart, тъй като в примера patternsearch допуска нарушение на 49-тото ограничително условие – подаденият обем за 24 часа е $1536 \text{ m}^3$ вместо $1540 \text{ m}^3$ .					

Времетраенето на изчисленията с обикновен процесор<sup>1</sup> за преносим компютър във всичките случаи е под 1 мин. Липсата на практически разлики в цената на електрическата енергия при увеличаване на популацията за дадена дискретизация означава, че дори и при малки популации (с дискретни стойности), при разглежданата несложна ВрС, ГА достига до оптимално решение. Малко по-забележимото подобряване на резултатите с увеличаване на броя на дискретните водни количества означава, че при достатъчно голям техен брой може да се очаква достигане на резултатите на методите *multistart* и *patternsearch*. Установи се, че е важно с увеличаването на популацията да се запазва процентът на елитните индивиди.

На фиг. 3а е дадено развитието на целевата функция при 17 дискретизации на променливата с увеличаване на броя на поколенията, а на фиг. 3б е даден оптималният часов график на подаваните от ППЧ водни количества.



Фиг. 3. Развитие на целева функция и часов график на ППЧ при генетичен алгоритъм

Получените резултати в табл. 3 съвпадат с резултатите при използване на генетичен алгоритъм, заложен в програмния продукт за хидравлично моделиране *WaterGems*.

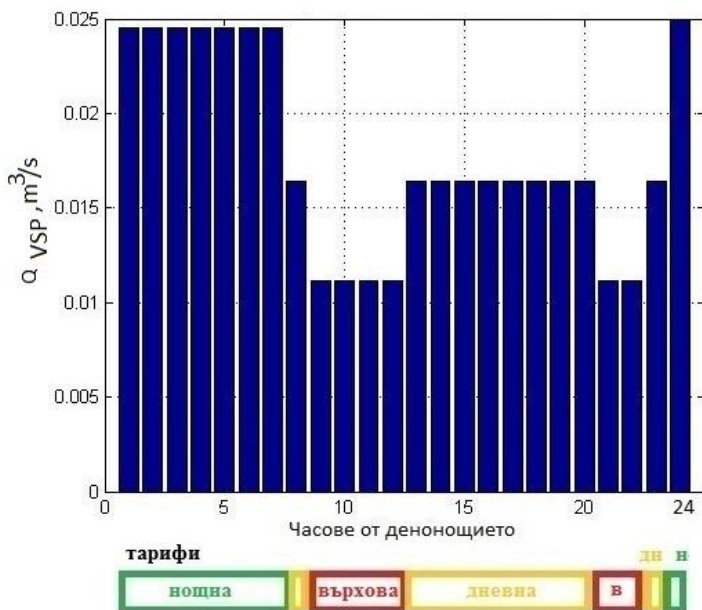
### 3.2.3. Методи *multistart* и *patternsearch* в програмния продукт *Matlab*

Необходимостта от обособяване на достатъчен брой дискретни водни количества при ГА е причина в рамките на изследването да бъдат разгледани и използвани други оптимизационни методи.

Изследвани са методите *multistart* (MS)<sup>2</sup> и *patternsearch* (PS) [8, 11], които са вградени в софтуера *Matlab*. Обобщените резултати са дадени в табл. 3, а на фиг. 4 са дадени водните количества при оптималния режим (тъй като разликите в стойностите на водните количества са малки, е дадена само една фигура). В сравнение с оптималните водни количества при ГА на фиг. 3, водните количества в рамките на отделните часови зони не варират.

<sup>1</sup> Intel Core i5-3337U Processor, 1.8GHz, произведен през 2013 година

<sup>2</sup> В основата на *multistart* е заложен математическият метод *interior point algorithm*



Фиг. 4. Оптимални водни количества на ППЧ при оптимизационните методи *multistart* и *patternsearch*

При сравнителния анализ е открита следната особеност на *MS*. Необходимо е в настройките на оптимизационната процедура да се заложат достатъчен брой провървявания (runs) от различни стартови точки, докато поне едно провървяване от набор се окаже сходящо. В други изследователски задачи на автора по-често е използван *PS* заради значително по-голямото му бързодействие и сходимостта му при едно провървяване за естеството на разглежданите задачи.

Недостатък на методите *multistart* и *patternsearch* е невъзможността за въвеждане без предварителна програмна подготовка на ограничителни условия от вида: *водното количество да бъде 0 или ППЧ да работи*. В рамките на изследването е потърсен начин за *автоматизирано* провеждане на оптимизационната процедура при набор от много комбинации (съчетания) от работни и неработни часове.

Предлага се следният подход. Във входните данни на оптимизационната процедура (фиг. 2) се въвежда инцидентна матрица<sup>1</sup>, с 24 стълба за 24-те часа от денонощието и редове, с брой равен на броя на съчетанията, за които оптимизаторът желае да провери оптималните режими на ППЧ.

Формулата от комбинаториката за броя на комбинациите без повторение при  $n$  обособени интервала от денонощието (най-често 24) и  $k$  неработни часа е:

$$C_n^k = C(n, k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

При  $k = 1$ , броят на комбинациите е  $C = 24$ , но при  $k = 5$  броят на съчетанията достига до 42 504. Оптимизационната процедура с по един оптимизационен процес за няколко секунди въз основа на всяка комбинация ще продължи недопустимо дълго. Следо-

<sup>1</sup> Състояща се от нули за неработните часове и единици за работните

вателно е необходимо да се предложи друг подход, при който ръчно се създават вероятно оптимални съчетания работни/неработни часове. Предлагат се следните комбинации: само работни часове, изключване на всички върхови часове, изключване на различни части от върховите часове, 24 бр. комбинации с по един неработен час и няколко произволни комбинации с два неработни часа.

Следва да се отбележи, че има случаи, където при някои съчетания от работни и неработни часове ограничителните условия не могат да бъдат спазени. Такива са случаите: 1. С резервоари с малък регулиращ обем и съчетания само с работни или с малко на брой неработни часове на ППЧ, защото тогава резервоарът ще прелива; 2. Съчетание с голям брой на неработните часове и ППЧ с малко максимално водно количество на ППЧ, защото тогава подаденият воден обем към резервоара ще е по-малък от излезлия от него.

В рамките на изследването се установи, че често оптималното решение е разположено (при малки работни обеми и малки обхвати на изменение на водното количество на ППЧ) в определени часове на границата на допустимата област. Поради особености на математическите методи (най-вече при *patternsearch*) може да премине в съвсем малка степен отвъд нея. Например при даден работен обем след оптимизация и последващо провеждане на симулационна процедура, може да се окаже, че има момент, при който водното ниво достига максималното ниво в резервоара и ППЧ спира да работи за известно време. Начинът да се избегне този недостатък е оптимизациите да се провеждат с 1 до 2 % по-малки работни обеми спрямо реалните. Този подход е полезен и в случаите, когато часовият график на водопотреблението не може да бъде прогнозиран достатъчно точно.

Малко по-добрите резултати на *multistart* и *patternsearch* в сравнение с тези на генетичния алгоритъм, могат да се достигнат от последния с много на брой дискретизации на водните количества. За да се ползват пълноценно възможностите на *PS* и *MS*, е необходимо да се направи предварителна подготовка, състояща се в задаването на съчетанията работни/неработни часове на ППЧ.

### 3.3. Оптимизационни методи, приложими с програмния продукт *MS Excel*

Голямо предимство на *MS Excel*, заедно с вградения инструмент *Solver*, е широкото му разпространение в инженерната практика и научните разработки [1, 6]. Използваният от *Solver* оптимизационен метод *GRG nonlinear* дава практически еднакви резултати с *PS* и *MS* за задачата с тарифен план с три часови зони, като времето за изпълнение на задачата е малко по-бавно от *PS*.

Като малки недостатъци по отношение на задачата от т. 3.2.1, може да се отбележат необходимостта от въвеждане на 48-те ограничителни условия (3, 4, 5) в скаларен вид, което е трудоемко, както и обстоятелството, че не може да се осигури интервално ограничение от вида:

$$Q_{\min} \leq Q_{VSP} \leq Q_{\max} \text{ и } Q_{VSP} = 0.$$

Следва кратко описание на структурата на оптимизационния проблем.

Блокът с входни данни (табл. 4) съдържа физическите характеристики на системата и водопотреблението от табл. 1.

Таблица 4

$H_{stat}$	$\gamma$	$s$	$\eta$	$\sigma_d$	$\sigma_n$	$\sigma_p$	$V_{in}$	$V_{oper}$
m	N/m <sup>3</sup>			лв/kWh	лв/kWh	лв/kWh	m <sup>3</sup> /3600	m <sup>3</sup> /3600
20	9 810	30 000	0,6	0,19	0,11	0,27	0,15	0,3

При съставянето на ограничителните условия (3), (4) и (5) всички членове се прехвърлят от лявата страна на неравенството.

Таблица 5

Ограничителния условия за непреливане		Ограничителни условия за неизточване		Ограничително условие за наличие на воден обем в резервоара в края на денонощието, не по - малък от обема в началото	
$V_{in} + \sum_{i=1}^k Q_i^{ISP} T_i - \sum_{i=1}^k Q_i^{CONS} T_i - V_{oper} \leq 0$		$V_{in} + \sum_{i=1}^k Q_i^{VSP} T_i - \sum_{i=1}^k Q_i^{CONS} T_i \geq 0$		$\sum_{i=1}^k Q_i^{VSP} T_i - \sum_{i=1}^k Q_i^{CONS} T_i \geq 0$	
$k \in \{1; n = 24\}$		$k \in \{1; n = 24\}$		$k \in \{1; n = 24\}$	
№ на огр. условие	Стойност на лява страна неравенство	№ на огр. условие	Стойност на лява страна неравенство	№ на огр. условие	Стойност лява на страна неравенство
1	-0,13	25	0,17	49	0,00
2	-0,11	26	0,19		
...	...	...	...		
24	-0,15	48	0,15		

Блоковете с часовете и денонощната цена на електроенергията, както и оптималните часови водни количества, са показани съответно в табл. 6 и 7.

Таблица 6

Часови цени на електрическата енергия, целева функция					
$E_1=$	1,73	$E_2=$	1,73	...	...
		$E_{24}=$	1,73		

$$\sum_{i=1}^{24} E_i = E_{pr} = 34,82 \text{ лв / д.}$$

Таблица 7

Оптимални часови водни количества, m<sup>3</sup>/s

$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	$Q_4$	$Q_5$	$Q_6$	$Q_7$	$Q_8$	$Q_9$	$Q_{10}$	$Q_{11}$	$Q_{12}$
0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,025	0,016	0,011	0,011	0,011	0,011
$Q_{13}$	$Q_{14}$	$Q_{15}$	$Q_{16}$	$Q_{17}$	$Q_{18}$	$Q_{19}$	$Q_{20}$	$Q_{21}$	$Q_{22}$	$Q_{23}$	$Q_{24}$
0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,016	0,011	0,011	0,016	0,025

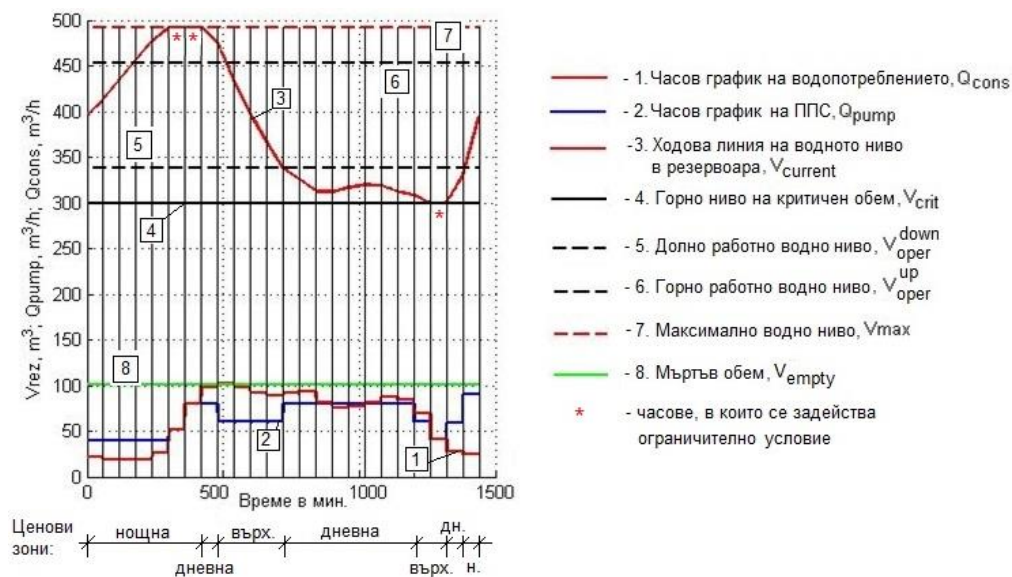
Следва да се отбележи, че при други оптимизационни задачи с по-сложна структура е необходимо да се ползва програмен продукт с възможностите на *Matlab*.

#### 4. Приложение на оптимизационни методи при други практически и изследователски задачи

Разгледаните по-горе оптимизационни методи са използвани от автора в различни изследвания, свързани с оптимизация на ВрС с ППЧ по отношение на енергийната ефективност. По-подробно те ще бъдат разгледани в други публикации, като по-долу са описани накратко някои от изследваните въпроси.

##### 4.1. Граничен оптимален работен обем

Минималният обем, който осигурява неактивност на ограничителните условия за непреливане и неизточване при равномерно подаване от ППЧ, може да се означава като **граничен оптимален работен обем**  $V_{opt,oper}^{lim}$ . На фиг. 5 е онагледена работата на ППЧ при работен обем  $V_{oper} = 384 \text{ m}^3$ , който е по-малък от  $V_{opt,oper}^{lim} = 777 \text{ m}^3$ .



Фиг. 5. Характерни линии, описващи работата на ВрС, състояща се от ППЧ, гласкател и резервоар

Сравнявайки режимите на ППЧ ( $V_{oper} = 768 \text{ m}^3$ ) на фиг. 4 и фиг. 5 – линия 2, се вижда, че при по-малкия обем нощната зона не може да се използва пълноценно, тъй като в 6.00 и 7.00 ч. се задейства ограничителното условие за непреливане. Ограничението за неизточване, задействано в 22-рия час от денонощието, е причина за сравнително големите дебити във втората върхова зона и дневната зона. От практическо значение е задачата да се предложи метод за установяване на стойността на граничния



оптимален (по отношение на количеството или цената на електроенергията) обем, както и факторите, от които той зависи.

## 4.2. Влияние на тарифния план върху цената на електроенергията

ВиК операторите, които са на свободния пазар на електроенергия сключват договор с доставчика на електроенергия след провеждане на обществена поръчка. Проучванията показват, че най-често се предпочита една цена на електроенергията за цялото денонощие. Във връзка с това изискване доставчиците предлагат усреднени цени въз основа на проучвания на часовия график на водопотребление на оператора.

Поставена е задачата да се изследва в каква степен и в зависимост от какви характеристики на ВрС, за ВиК операторите, както и за енергийната система на страната, е по-изгодно да се сключват договори за доставка на електроенергия с повече от една скала за заплащане, например 24 бр. Интерес представлява възможността за спестяване, каквато има при пазарния механизъм „ден напред“ (стартиран през 2016 година), при който се обявяват почасови цени за следващия ден, във връзка с възможността за използване на резервоарите за период на регулиране, по-голям от 24 часа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов, Сл.* Числено хидравлично моделиране на разклонени водопроводни мрежи. // Водно дело, 03-04.2009.
2. *Иванов, Сл.* Автоматичен режим на системата „Помпи – напорен резервоар“ във водоснабдяването. // Хидротехника и мелиорации, 9/1982.
3. *Тончев, Й., Витлиев, В.* Оптимизация с Матлаб. Прагматичен подход. Русе, РУ „Ангел Кънчев“, 2013.
4. *Тончев, Й.* Matlab. Част I, II и III, С., Техника, 2010.
5. *Тончев, Й.* Murad. С., Техника, 2011.
6. *Филков, П.* Използване на MS Excel за изчисляване на сключени напорни мрежи. УАСГ. Международна юбилейна научно-приложна конференция, 2012.
7. *Baran, B. et al.* Multi-objective pump scheduling optimisation evolutionary strategies. // Elsevier. Advances in Engineering Software, 36.2005.
8. *Basak, R., Sanyal, A.* Comparative View of Genetic Algorithm and Pattern Search for Global Optimization. // International Journal of Engineering and Science, 03.2013.
9. *Mays, L et al.* Water distribution systems handbook. New York: McGraw – Hill. 1999.
10. *Ormsbee, L., Walski, T., Chase, D., Sharp, W.* Methodology for improving pump operation efficiency. // Journal of Water Resources Planning and Management, 03.1989.
11. Matlab; <https://www.mathworks.com/help/matlab/>.
12. *Wetter, M., Wright, J.* Comparison of a generalized pattern search and a genetic algorithm optimization method. Eindhoven: 8 IBPSA Conference, 08.2003.

13. Wu, Zheng. From theory to practice on evolutionary optimization of urban water systems. International Workshop on Advances in Hydroinformatics. Niagara Falls. 2007.

14. Wu, Zheng. A benchmark study for minimizing energy cost of constant and variable speed pump operation. World Environmental and Water Resources Congress. USA. FL. Tampa. 2007.

## **APPLICATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR DETERMINATION OF THE OPTIMAL REGIME OF A VARIABLE SPEED PUMP WHICH SUPPLIES A TANK**

**B. Borisov<sup>1</sup>**

**Keywords:** *variable speed pump, energy efficiency, efficiency, optimization methods, genetic algorithm, method of Hooke and Jeeves, multipliers of Lagrange*

### **ABSTRACT**

The minimization of the quantity and the price of the energy of a variable speed pump which supplies a tank is a classical task. The comparative analyses of contemporary software applicable optimization methods, like *genetic algorithm, patternsearch* and other is made in the frames of this task.

By means of the method of Lagrange multipliers analytical expressions for optimal flow rates in the case of minimization of the energy price when the tariff plan consists of different prices during the hours of the day are derived.

---

<sup>1</sup> Boyan Borisov, Assist. Prof. Eng., Dept. "Water Supply, Sewerage, Water and Wastewater Treatment", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: boyan\_borisov@abv.bg