



Получена: 20.03.2019 г.

Приета: 29.07.2019 г.

ВЪРХУ ИЗСЛЕДВАНЕТО НА НАДЛЪЖНИ ПУКНАТИНИ В ГРЕДИ С ДВУМЕРЕН ФУНКЦИОНАЛЕН ГРАДИЕНТ

В. Ризов¹

Ключови думи: двумерен функционален градиент, надлъжна пукнатина, нехомогенна греда

РЕЗЮМЕ

Получени са решения за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжни пукнатини при наличие на двумерен функционален градиент (по височина и по дължина на гредата). Извършени са изследвания за влиянието на функционалните градиенти по височина и по дължина на гредата върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Анализирано е също и влиянието на местоположението и дължината на пукнатината върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (това дава много добра представа за влиянието на градиента по дължина на гредата).

1. Въведение

За гредите, изпълнени от композитен материал с двумерен функционален градиент, е характерно, че механичните им свойства (например модулът на еластичност) се изменят постепенно както по височина на напречното им сечение, така и по дължина на гредата [1]. Това позволява механичните свойства да се изменят по подходящ начин в различните части на гредата (например, в по-напрегнатите зони на напречното сечение и в по-натоварените участъци на гредата да се използват по-високи механични свойства). По този начин се постига по-пълно използване на якостта на материала, което води до намаляване на собственото тегло на конструкциите. Това, от своя страна, е предпоставка

¹ Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа Механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

за подобряване на антисейзичната обезпеченост на сградите и съоръженията, а също и за намаляване на себестойността на конструкциите.

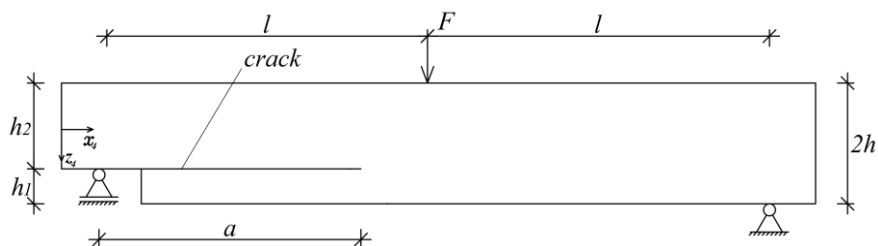
Обаче, наличието на функционален градиент е предпоставка за появата на пукнатини [2 – 8]. Например, функционалният градиент по височината на сечението създава условия за поява на надлъжни пукнатини в гредата, което е един от основните недостатъци на този тип конструкции. Надлъжните пукнатини в греди с двумерен функционален градиент са изследвани твърде слабо в научната литература.

Ето защо, основната цел на проекта е да се анализира скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжни пукнатини при наличие на двумерен функционален градиент (по височина и по дължина на гредата). Извършени са изследвания за влиянието на функционалните градиенти по височина и по дължина на гредата върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Анализирано е също и влиянието на местоположението и дължината на пукнатината върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (това дава много добра представа за влиянието на гредата).

Получените резултати допринасят за повишаване на обезпечеността на гредите с двумерен функционален градиент срещу поява на пукнатини. Също така, настоящата разработка допринася за развитие на механика на разрушението на материалите с двумерен функционален градиент, което е предпоставка за по-широкото навлизане на тези конструктивни материали в строителството в България.

2. Анализ на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията

Функционално-градиентната композитна греда, показана на фиг. 1, съдържа надлъжна пукнатина с дължина a . Отворът на гредата е $2l$. Напречното сечение на гредата представлява правоъгълник с основа b и височина $2h$. Пукнатината е разположена произволно по височината на напречното сечение. Височините на долното и на горното рамо на пукнатината са означени съответно с h_1 и h_2 . Външното натоварване на гредата се състои от една вертикална концентрирана сила F , приложена в средата на отвора. Очевидно е, че долното рамо на пукнатината е ненапрегнато. Гредата е изпълнена от функционално-градиентен композитен материал с двумерен градиент по височина и по дължина на гредата.



Фиг. 1. Функционално-градиентна греда с надлъжна пукнатина

Модулът на еластичност на функционално-градиентния композитен материал E се изменя постепенно по височина и по дължина на гредата, т.е. E е непрекъснатата функция на координатите x_4 и z_4 (координатните оси x_4 и z_4 са показани на фиг. 1)

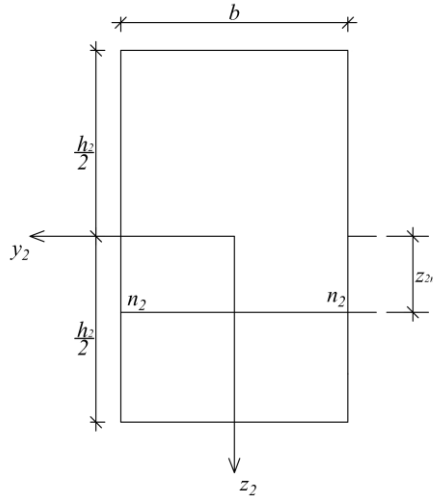
$$E = E(x_4, z_4) . \quad (1)$$

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията G се записва като

$$G = \frac{dU}{dA} , \quad (2)$$

където

$$dA = b da . \quad (3)$$



Фиг. 2. Напречно сечение на горното рамо на пукнатината
($n_2 - n_2$ е положението на нулевата линия)

Във формула (2) U е потенциалната енергия на деформацията, A е лицето на пукнатината. В (3) da е едно елементарно нарастване на дължината на пукнатината.

Потенциалната енергия на деформацията се получава по следения начин:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 , \quad (4)$$

където U_1 , U_2 и U_3 са потенциалните енергии на деформацията съответно в горното рамо на пукнатината и в участъци BD и DK на гредата (фиг. 1). Трябва да се отбележи, че потенциалната енергия на деформацията в долното рамо на пукнатината е нула, понеже то е ненапрегнато.

За определяне на потенциалната енергия на деформацията в горното рамо на пукнатината прилагаме следната формула:

$$U_1 = \iiint_{(V_1)} u_{01} dV , \quad (5)$$

където u_{01} е специфичната потенциална енергия на деформацията в това рамо, V_1 е обемът на рамото. С оглед на означенията на фиг. 1, формула (5) се презаписва така:

$$U_1 = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^a u_{01} dx_4 dy_2 dz_2, \quad (6)$$

където осите y_2 и z_2 са показани на фиг. 2.

Специфичната потенциална енергия на деформацията се определя по формулата

$$u_{01} = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (7)$$

където σ е нормалното напрежение в горното рамо на пукнатината. Напрежението σ се намира по закона на Хук

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (8)$$

където ε е деформацията в горното рамо на пукнатината. Модулът на еластичност се изразява по (1).

Разпределението на деформациите в едно произволно напречно сечение на горното рамо на пукнатината се записва по следния начин:

$$\varepsilon = \kappa_2 (z_2 - z_{2n_2}), \quad (9)$$

където κ_2 и z_{2n_2} са съответно кривината на гредата и координатата на нулевата линия на напречното сечение.

За определяне на κ_2 и z_{2n_2} се прилагат следните условия за равновесие на напречното сечение на горното рамо на пукнатината:

$$N = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma(\varepsilon) b dz_2 = 0, \quad (10)$$

$$M = \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \sigma(\varepsilon) b z_2 dz_2, \quad (11)$$

където N и M са надлъжната сила и огъващият момент в това сечение. Очевидно е, че $N = 0$ и $M = \frac{F}{2} x_4$ (фиг. 1). Уравненията, получени след заместване на (8) и (9) в (10) и (11), се решават по отношение на κ_2 и z_{2n_2} .

След заместване на (8) и (9) в (7) получаваме

$$u_{01} = \frac{E \left[\kappa_2 (z_2 - z_{2n_2}) \right]^2}{2}. \quad (12)$$

Потенциалната енергия на деформацията в участък BD на гредата се записва така

$$U_2 = \int_{-h}^h \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{l}{2}} u_{02} dx_4 dy_3 dz_3, \quad (13)$$

където u_{02} е специфичната потенциална енергия на деформацията в този участък на гредата, y_3 и z_3 са централните оси на напречното сечение на гредата. За определяне на u_{02} се прилага формула (12). За тази цел, κ_2 , z_2 и z_{2n_2} се заменят съответно с κ_3 , z_3 и z_{3n_3} . Тук κ_3 е кривината на гредата, z_{3n_3} е координатата на нулевата линия. Уравнения (10) и (11) се използват за намиране на κ_3 и z_{3n_3} . Във връзка с това, κ_2 , z_2 и z_{2n_2} се заменят съответно с κ_3 , z_3 и z_{3n_3} , след което уравненията се решават по отношение на κ_3 и z_{3n_3} .

В участък DK на гредата потенциалната енергия на деформацията се намира по формулата

$$U_3 = \int_{-h}^h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{2l}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{l}{2}} u_{03} dx_4 dy_4 dz_4, \quad (14)$$

където u_{03} е специфичната потенциална енергия на деформацията в същия участък, y_4 и z_4 са централните оси на напречното сечение. За определяне на u_{03} се прилага формула (12) като κ_2 , z_2 и z_{2n_2} се заменят съответно с κ_4 , z_4 и z_{4n_4} , където κ_4 е кривината, z_{4n_4} е координатата на нулевата линия. За намиране на κ_4 и z_{4n_4} се използват уравнения (10) и (11) като κ_2 , z_2 и z_{2n_2} се заменят с κ_4 , z_4 и z_{4n_4} .

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжната пукнатина във функционално-градиентната греда, показана на фиг. 1, се намира чрез заместване на (3), (4), (6), (13) и (14) в (2). Резултатът е

$$G = \frac{1}{b} \left[\int_{\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_{01}(a) dy_2 dz_2 - \int_{-h}^h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_{02}(a) dy_3 dz_3 \right]. \quad (15)$$

Решението за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (15) се проверява чрез анализиране на баланса на енергията. За целта се дава малко нарастване на дължината на надлъжната пукнатина δa . Балансът на енергията се записва като

$$F \delta w = \frac{\partial U}{\partial a} \delta a + G b \delta a, \quad (16)$$

където δw е нарастването на вертикалното преместване на приложната точка на силата F . От формула (16) се получава следният израз за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията:

$$G = \frac{F}{b} \frac{\partial w}{\partial a} - \frac{1}{b} \frac{\partial U}{\partial a}. \quad (17)$$

Преместването w се определя с помощта на интегралите на Максвел-Моор, т.е.

$$w = \int_0^a M_1(x_4) \kappa_2(x_4) dx_4 + \int_a^l M_{1BD}(x_4) \kappa_3(x_4) dx_4 + \int_l^{2l} M_{1DK}(x_4) \kappa_4 dx_4, \quad (18)$$

където моментите от единичното натоварване са

$$M_1(x_4) = \frac{1}{2} x_4, \quad (19)$$

$$M_{1BD}(x_4) = \frac{1}{2} x_4, \quad (20)$$

$$M_{1DK}(x_4) = \frac{1}{2} x_4 - (x_4 - l). \quad (21)$$

След заместване на (4), (6), (13), (14), (18), (19), (20) и (21) в (17) се получава следната формула за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжната пукнатина във функционално-градиентната гредка на фиг. 1:

$$G = \frac{F}{b} \left[\frac{1}{2} a \kappa_2(a) - \frac{1}{2} a \kappa_3(a) \right] - \frac{1}{b} \left[\int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_{01}(a) dy_2 dz_2 - \int_{-h}^h \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} u_{02}(a) dy_3 dz_3 \right]. \quad (22)$$

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, получена по формула (22), съвпада с тази, определена по (15). Този факт е една проверка на извършения анализ.

3. Влияние на различни геометрични и материални параметри върху поведението на пукнатината

Формула (15) се използва за получаване на конкретни числени резултати с цел изследване на влиянието на различни фактори като местоположение и дължина на пукнатината, функционален градиент по височина и по дължина на гредата, върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Получените резултати са представени в безразмерна форма по формулата $G_N = G / (E_g b)$, където E_g е стойността на модула на еластичност на функционално-градиентния материал в горния ръб на напречното сечение на гредата. Приети са следните числени стойности: $b = 0,003$ m, $h = 0,002$ m и $F = 10$ N.

Разпределението на модула на еластичност по височина на гредата е изразено по формулата

$$E = E_g - \frac{E_g - E_d}{8h^3} (h + z_4)^3, \quad (23)$$

където

$$-h \leq z_4 \leq h. \quad (24)$$

В (23) E_d е стойността на модула на еластичност в долния ръб на напречното сечение на гредата.

Разпределението на E_g и E_d по дължина на гредата се намира по формулите

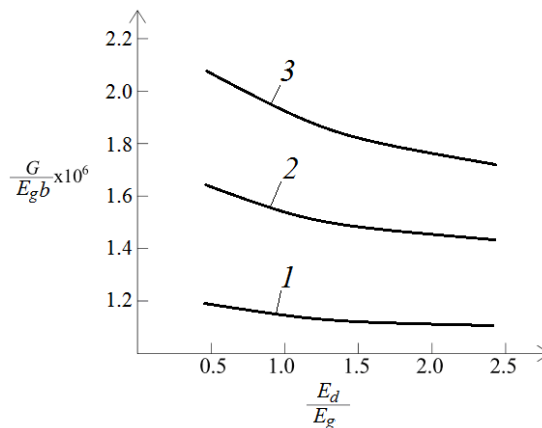
$$E_g = E_{gk} + \frac{E_{gn} - E_{gk}}{8l^3} (2l - x_4)^3, \quad (25)$$

$$E_d = E_{dk} + \frac{E_{dn} - E_{dk}}{8l^3} (2l - x_4)^3, \quad (26)$$

където

$$0 \leq x_4 \leq 2l. \quad (27)$$

Във формули (25) и (26) E_{gn} и E_{dn} са стойностите на E_g и E_d в левия край на гредата. Стойностите на E_g и E_d в десния край на гредата са означени съответно с E_{gk} и E_{dk} .



Фиг. 3. Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията във функция на отношението E_d / E_g (крива 1 за $a / l = 0,2$, крива 2 за $a / l = 0,4$ и крива 3 за $a / l = 0,6$)

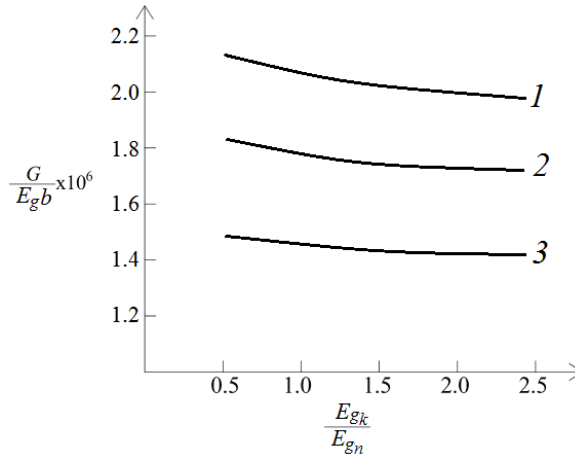
За да се изрази разпределението на E по височината на напречното сечение на горното рамо на пукнатината, което е необходимо за определяне на специфичната потенциална енергия u_{01} , формула (23) се презаписва по следния начин:

$$E = E_g - \frac{E_g - E_d}{8h^3} (h + z_2 - h_t)^3, \quad (28)$$

където

$$h_t = h - \frac{h_2}{2}. \quad (29)$$

Може да се обобщи, че формули (23), (25), (26) и (28) изразяват разпределението на модула на еластичност в разглежданата функционално-градиентна греда с двоен градиент, т.е. с градиент по височина и по дължина на гредата.



Фиг. 4. Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията като функция на отношението E_{gk} / E_{gn} (крива 1 за $h_1 / 2h = 0,3$, крива 2 за $h_1 / 2h = 0,6$ и крива 3 за $h_1 / 2h = 0,9$)

Анализирано е влиянието на функционалния градиент по височина на напречното сечение на гредата и на дължината на пукнатината върху поведението на пукнатината. За целта, скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията в безразмерна форма е показана във функция на отношението E_d / E_g на фиг. 3 за три стойности на отношението a / l . Трябва да се уточни, че функционалният градиент по височина на напречното сечение на гредата се характеризира с отношението E_d / E_g . Дължината на пукнатината се характеризира с отношението a / l . Фигура 3 показва, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с увеличаване на отношението E_d / E_g . Увеличаването на отношението a / l води до нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (фиг. 3).

Влиянието на функционалния градиент в горния ръб на напречното сечение по дължина на гредата върху поведението на пукнатината е илюстрирано на фиг. 4, където скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията в безразмерна форма е показана във функция на отношението E_{gk} / E_{gn} за три отношения $h_2 / 2h$ (отношението

E_{gk} / E_{gn} характеризира функционалния градиент в горния ръб на напречното сечение по дължина на гредата, местоположението на пукнатината по височина на напречното сечение се характеризира с отношението $h_2 / 2h$). Графиките на фиг. 4 показват, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с увеличаване на отношенията E_{gk} / E_{gn} и $h_2 / 2h$.

4. Заключение

В заключение може да се отбележи, че в настоящата разработка е получено решение на задачата за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина във функционално-градиентна композитна греда с двоен функционален градиент по височина на напречното сечение и по дължина на гредата.

Разгледана е греда с правоъгълно напречно сечение. Гредата е изпълнена от материал, на който модулът на еластичност се изменя постепенно по височина и по дължина на гредата. Надлъжната пукнатина е разположена произволно по височината на напречното сечение на гредата и има произволна дължина. Полученото решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията разкрива възможности за изследване на влиянието на различни фактори като местоположение и дължина на пукнатината, функционален градиент по височина и по дължина на гредата, външно натоварване върху поведението на пукнатина. За проверка на полученото решение за скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е анализиран балансът на енергията. Пълното съответствие между двете решения представлява проверка на извършения в настоящата разработка анализ. Установено е, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с нарастване на отношенията E_d / E_g и E_{gk} / E_{gn} (тези отношения характеризират функционалния градиент съответно по височина и по дължина на гредата). Освен това, изследването показва, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията намалява с увеличаване на отношението $h_2 / 2h$ (това отношение характеризира местоположението на пукнатината по височина на гредата). Увеличаването на отношението a/l води до нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (отношението a/l характеризира дължината на пукнатина).

Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-208/2018 е подкрепена финансово от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ – София.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bohidar, S. K., Sharma, R., Mishra, P. R.* Functionally graded materials: A critical review. *International Journal of Research*, **1**(4): 289-301, 2014.
2. *F. Erdogan.* Fracture mechanics of functionally graded materials. *Comp. Eng.*, **5**(2): 753-770, 1995.
3. *Paulino, G. C.* Fracture in functionally graded materials. *Engng Fract Mech*, **69**(3): 1519-1530, 2002.
4. *Tilbrook, M. T., Moon, R. J., Hoffman, M.* Crack propagation in graded composites. *Composite Science and Technology*, **65**(1): 201-220, 2005.
5. *Carpinteri, A., Pugno, N.* Cracks in re-entrant corners in functionally graded materials. *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(1): 1279-1291, 2006.
6. *Upadhyay, A. K., Simha, K. R. Y.* Equivalent homogeneous variable depth beams for cracked FGM beams; compliance approach. *Int. J. Fract.*, **144**(4): 209-213, 2007.
7. *Shi-Dong Pan, Ji-Cai Feng, Zhen-Gong Zhou, Wu-Lin-Zhi.* Four parallel non-symmetric Mode – III cracks with different lengths in a functionally graded material plane. *Strength, Fracture and Complexity: an International Journal*, **5**(3): 143-166, 2009.
8. *Hsueh, C. H., Tuan, W. H., Wei, W. C. J.* Analyses of steady-state interface fracture of elastic multilayered beams under four-point bending. *Scripta Materialia*, **60**(2): 721-724, 2009.

ON THE INVESTIGATION OF LONGITUDINAL CRACKS IN BEAMS OF TWO-DIMENSIONAL FUNCTIONAL GRADIENT

V. Rizov¹

Keywords: *two-dimensional functional gradient, longitudinal crack, inhomogeneous beam*

ABSTRACT

Solutions to the strain energy release rate for longitudinal cracks at two-dimensional functional gradient (along the height and length of the beam) are derived. The influence of the functional gradient along the height and length of the beam on the strain energy release rate is investigated. The influence of the location and length of the crack is also analyzed (this gives a very good idea of the influence of the gradient along the beam length).

¹ Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg