



Получена: 30.04.2020 г.

Приета: 05.06.2020 г.

## АНАЛИЗ НА МНОГОСЛОЙНИ ФУНКЦИОНАЛНО-ГРАДИЕНТНИ ГРЕДИ С НАДЛЪЖНИ ПУКНАТИНИ

**В. Ризов<sup>1</sup>**

*Ключови думи: функционален градиент, пукнатина, многослоен материал*

### РЕЗЮМЕ

Анализирана е многослойна функционално-градиентна греда с надлъжна пукнатина. Гредата е запъната в десния си край. Дебелините на рамената на пукнатината са различни, понеже пукнатината е разположена произволно по височината на напречното сечение на гредата. Получена е скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за произволна дължина на пукнатината. Модулът на еластичност във всеки слой на гредата се изменя непрекъснато по дебелината на слоя и по дължината на гредата. Представени са резултати от параметрично изследване.

### 1. Въведение

Многослойните функционално-градиентни гредови конструкции се изпълняват от здраво закрепени (залепени) слоеве от различни материали. Слоевете, от своя страна, се изпълняват от функционално-градиентни материали, за които е характерно, че механичните им свойства, например модулът на еластичност, се изменят в напречното сечение на слоя, т.е. слоевете са нехомогенни. Многослойните функционално-градиентни гредови конструкции разкриват възможности за пълноценно използване на якостта на материала във всяка точка на напречното сечение. Например, в по-натоварените зони могат да се използват материали с по-висока якост. Многослойните функционално-градиентни материали имат високо отношение якост–собствено тегло. Конструкциите, изпълнени от многослойни функционално-градиентни материали имат, също така, високо отношение коравина–собствено тегло. Високите отношения якост–собствено тегло и коравина–

---

<sup>1</sup> Виктор Ризов, проф. д-р инж., кат. „Техническа механика“, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: v\_rizov\_fhe@uacg.bg

собствено тегло са основните предимства на многослойните функционално-градиентни материали в сравнение с хомогенните конструктивни материали. Многослойните функционално-градиентни материали, обаче, имат и недостатъци. Много съществен недостатък е високата вероятност от поява и нарастване на надлъжни пукнатини между слоевете [1 – 6]. В специализираната литература са изследвани надлъжни пукнатини предимно в многослойни гредови конструкции, които са изпълнени от хомогенни слоеве. Ето защо основната задача на настоящата публикация е да се изследва надлъжна пукнатина в многослойна греда, изпълнена от функционално-градиентни (нехомогенни) материали. Във връзка с това се предвижда да се получат решения за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията.

Резултатите от настоящата разработка ще могат да се използват при проектиране на многослойни функционално-градиентни греди с оглед на осигуряването им срещу поява на надлъжни пукнатини. Също така, настоящата разработка ще допринесе за развитието на механиката на разрушението на многослойните функционално-градиентни материали и конструкции.

## 2. Определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията

На фиг. 1 е показана многослойна функционално-градиентна греда. Тя е изпълнена от  $n$  броя надлъжни слоеве. Всеки слой е изпълнен от функционално-градиентен материал. Модулът на еластичност  $E_i$  на всеки слой се изменя непрекъснато по дебелина и дължина на слоя, т.е.

$$E_i = E_i(x, z), \quad (1)$$

където

$$i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

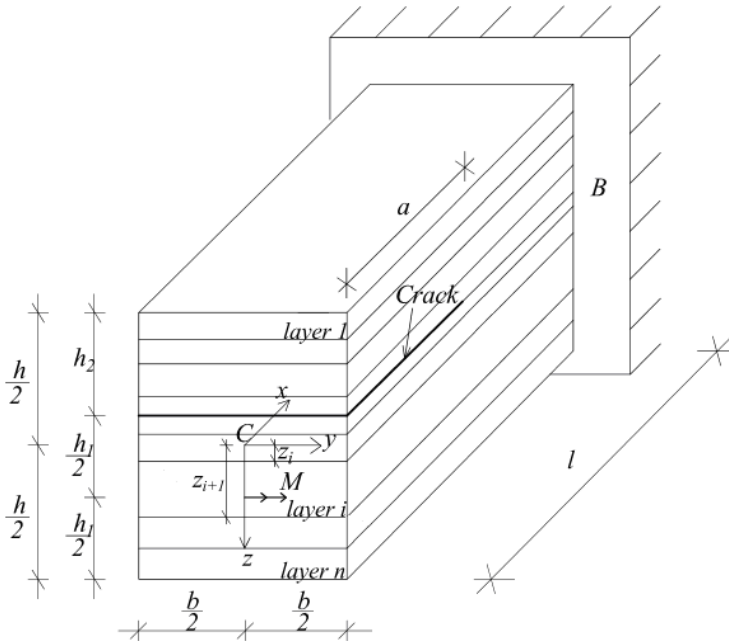
Във формула (1),  $x$  и  $z$  са осите на координатната система, показана на фиг. 1. Гредата е запъната в сечение  $B$ . Гредата има правоъгълно напречно сечение с ширина  $b$  и височина  $h$ . Дължината на гредата е означена с  $l$ . Надлъжна пукнатина с дължина  $a$  е разположена между два съседни слоя, както е показано на фиг. 1. Долното и горното рамо на пукнатината имат правоъгълни напречни сечения с височини  $h_1$  и  $h_2$  съответно. Ненапуканият участък на гредата има дължина  $l - a$ . Външното натоварване на гредата се състои от един огъващ момент  $M$ , приложен върху свободния край на долното рамо на пукнатината. Очевидно е, че горното рамо на пукнатината е ненапрегнато. Основната цел на настоящата разработка е да се получи решение на задачата за определяне на скоростта на освободената потенциална енергия на деформация  $G$  за пукнатината на фиг. 1. За тази цел тук се прилага методът на податливостта. Според този метод, скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията се изразява по следния начин:

$$G = \frac{M^2}{2b} \frac{dC_M}{dM}, \quad (3)$$

където  $C_M$  е податливостта. За определяне на податливостта се прилага формулата

$$C_M = \frac{\varphi}{M}, \quad (4)$$

където  $\varphi$  е ъгълът на завъртане на свободния край на долното рамо на пукнатината.



**Фиг. 1.** Многослойна функционално-градиентна гредка с надлъжна пукнатина

За определяне на  $\varphi$  тук се прилага теоремата на Кастилиано, т.е.

$$\varphi = \frac{\partial U}{\partial M}, \quad (5)$$

където  $U$  е потенциалната енергия на деформацията в гредката. Понеже горното рамо на пукнатината е ненапрегнато, потенциалната енергия на деформацията е получена по формулата

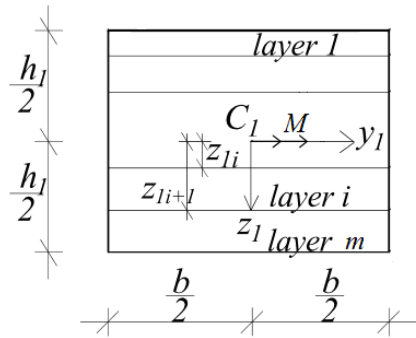
$$U = U_1 + U_2, \quad (6)$$

където  $U_1$  и  $U_2$  са съответно потенциалните енергии на деформацията в долното рамо на пукнатината и в ненапукания участък на гредката.

За определяне на  $U_1$  тук се използва формулата (фиг. 2)

$$U_1 = \sum_{i=1}^{i=m} \iiint_{(V_i)} u_{0i} dV, \quad (7)$$

където  $m$  е броят на слоевете в долното рамо на пукнатината,  $u_{0i}$  е специфичната потенциална енергия на деформацията в един произволен слой,  $V_i$  е обемът на този слой.



Фиг. 2. Напречно сечение на долното рамо на пукнатината

Специфичната потенциална енергия на деформацията е изразена като

$$u_{0i} = \frac{1}{2} \sigma_i \varepsilon, \quad (8)$$

където  $\varepsilon$  е деформацията. Напрежението  $\sigma_i$  в разглеждания слой е получено по закона на Хук

$$\sigma_i = E_i \varepsilon. \quad (9)$$

Следователно, специфичната потенциална енергия на деформацията приема следния вид:

$$u_{0i} = \frac{1}{2} E_i \varepsilon^2. \quad (10)$$

Разпределението на деформациите по височина на напречното сечение на долното рамо на пукнатината се записва като

$$\varepsilon = \kappa_1 (z_1 - z_{1n}), \quad (11)$$

където  $\kappa_1$  е кривината,  $z_{1n}$  е координатата на нулевата линия. За определяне на кривината и координатата на нулевата линия прилагаме уравненията за равновесие на елементарните сили в напречното сечение на долното рамо на пукнатината

$$N = \sum_{i=1}^{i=m} \iint_{(A_i)} \sigma_i dA, \quad (12)$$

$$M = \sum_{i=1}^{i=m} \iint_{(A_i)} \sigma_i z_1 dA, \quad (13)$$

където  $A_i$  е лицето на напречното сечение на един произволен слой,  $N$  е надлъжната сила в долното рамо на пукнатината. Очевидно е, че (фиг. 1)

$$N = 0. \quad (14)$$

Потенциалната енергия на деформацията в ненапукания участък на гредата получаваме по формулата

$$U_2 = \sum_{i=1}^{i=n} \iiint_{(V_i)} u_{0ri} dV, \quad (15)$$

където  $u_{0ri}$  е специфичната потенциална енергия на деформацията в един произволен слой. За определяне на  $u_{0ri}$  прилагаме формулата

$$u_{0ri} = \frac{1}{2} E_i \varepsilon_r^2, \quad (16)$$

където  $\varepsilon_r$  е деформацията в ненапукания участък на гредата. Кривината на гредата и координатата на нулевата линия в напречното сечение на ненапукания участък на гредата определяме с помощта на следните условия за равновесие:

$$N = \sum_{i=1}^{i=n} \iint_{(A_i)} \sigma_{ri} dA, \quad (17)$$

$$M = \sum_{i=1}^{i=n} \iint_{(A_i)} \sigma_{ri} z_2 dA, \quad (18)$$

където  $\sigma_{ri}$  е напрежението в един произволен слой в ненапукания участък на гредата.

Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е получена и чрез диференциране на потенцианата енергия на деформацията в гредата по отношение на лицето на пукнатината

$$G = \frac{dU}{dA}. \quad (19)$$

Понеже

$$dA = bda, \quad (20)$$

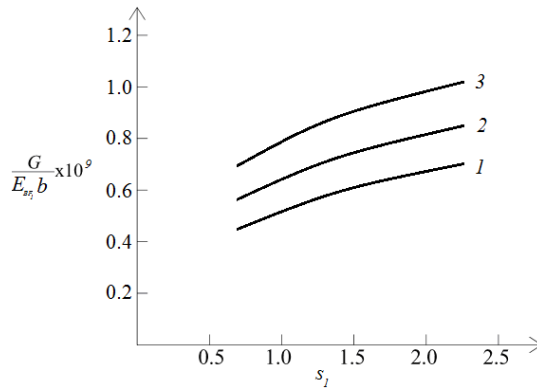
формула (19) приема следния вид:

$$G = \frac{dU}{bda}, \quad (21)$$

където потенциалната енергия на деформацията се намира по формули (6), (7) и (15). Трябва да се отбележи, че скоростите на освободената потенциална енергия на деформацията, получени по (3) и по (21), съвпадат, което е една проверка на полученото решение.

### 3. Параметрично изследване

В тази част на статията са представени резултати от параметрично изследване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжната пукнатина в многослойната функционално-градиентна греда от фиг. 1.



**Фиг. 3.** Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, представена във функция на  $s_1$  (крива 1 – за  $s_{F_1} = 0,5$ , крива 2 – за  $s_{F_1} = 1,0$  и крива 3 – за  $s_{F_1} = 2,0$ )

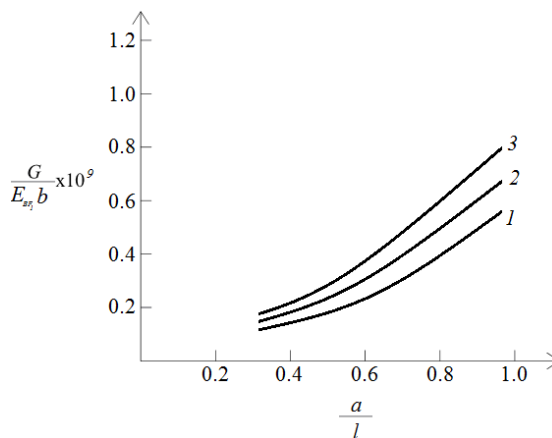
Разпределението на модула на еластичност по дебелината на един произволен слой в гредата е изразено по следния начин:

$$E_i = \frac{E_{B_i}}{1 + s_i \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}}, \quad (22)$$

където (фиг. 1)

$$z_i \leq z \leq z_{i+1}. \quad (23)$$

Във формула (22),  $E_{B_i}$  е стойността на модула на еластичност в горната повърхност на слоя,  $s_i$  е материална характеристика, която контролира разпределението на модула на еластичност по дебелината на слоя.



**Фиг. 4.** Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията, представена във функция на  $a/l$  (крива 1 – за  $h_1/h = 0,2$ , крива 2 – за  $h_1/h = 0,4$  и крива 3 – за  $h_1/h = 0,6$ )

Разпределението на  $E_{B_i}$  по дължина на гредата е представено по аналогичен начин

$$E_{B_i} = \frac{E_{BF_i}}{1 + s_{F_i} \frac{x}{l}}, \quad (24)$$

където

$$0 \leq x \leq l. \quad (25)$$

Във формула (24),  $E_{BF_i}$  е стойността на  $E_{B_i}$  в свободния край на гредата. Разпределението на  $E_{B_i}$  по дължина на гредата се контролира от  $s_{F_i}$ .

Изследвано е влиянието на изменението на модула на еластичност по дебелината на слоя и по дължина на гредата върху скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. За целта са извършени изчисления на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за различни стойности на  $s_i$  и  $s_{F_i}$ . Получената скорост на освободената потенциална енергия на деформацията е представена в безразмерен вид по формулата

$$G_N = G / (E_{BF_1} b). \quad (26)$$

Резултатите от извършеното изследване са илюстрирани на фиг. 3, където скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията в безразмерна форма е представена във функция на  $s_1$  за три стойности на  $s_{F_1}$ . Кривите на фиг. 3 показват, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нарастват с нарастване на  $s_1$ . Може да се види също, че и нарастването на  $s_{F_1}$  води до нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (фиг. 3).

Анализирано е и влиянието на дължината на пукнатината върху освободената потенциална енергия на деформацията. За целта е въведено отношението  $a/l$ . Разгледано е, също така, влиянието на местоположението на пукнатината по височина на напречно сечение на гредата. Във връзка с това е въведено отношението  $h_1/h$ . Получени са стойности на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за различни стойности на отношенията  $a/l$  и  $h_1/h$ . Влиянието на тези отношения е показано на фиг. 4, където скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията в безразмерна форма е представена във функция на  $a/l$  за три стойности на  $h_1/h$ . Вижда се (фиг. 4), че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нараства с нарастване на  $a/l$ , т.е. нарастването на дължината на пукнатината води до нарастване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията. Нарастването на отношението  $h_1/h$  води до намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията (фиг. 4).

## 4. Заключение

Получена е скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията за надлъжна пукнатина в многослойна функционално-градиентна греда. Отделните слоеве на гредата са изпълнени от функционално-градиентен материал. Във всеки слой модулът на еластичност се изменя непрекъснато по дебелина на слоя и по дължина на гредата. Пукнатината е разположена между два съседни слоя. Дебелините на долното и горното рамо на пукнатината са различни. Гредата е запъната в единия си край. Гредата е натоварена с момент, приложен върху свободния край на долното рамо на пукнатината. Скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията е определена по метода на податливостта. Получено е и решение чрез диференциране на потенциалната енергия на деформацията, натрупана в гредата по отношение на лицето на пукнатината. Резултатите по двете решения съвпадат, което е една проверка на получените решения. Изследвано е влиянието на стойностите на  $s_1$  и на  $s_{F_1}$ . Установено е, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нараства с нарастване на  $s_1$  и на  $s_{F_1}$ . По отношение на влиянието на дължината на пукнатината, анализът показва, че скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията нараства с увеличаване на дължината на пукнатината. Местоположението на пукнатината по височината на напречното сечение се характеризира с отношението  $h_1/h$ . Изследването показва, че нарастването на  $h_1/h$  води до намаляване на скоростта на освободената потенциална енергия на деформацията.

## Благодарности

Настоящата научноизследователска разработка по договор БН-217/2019 е подкрепена финансово от Център за научни изследвания и проектиране при УАСГ-София.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Tkacheva L. A. *Unsteady crack propagation in the beam approximation*, Applied Mechanics and Technical Physics, **49**(4): 177 – 189, 2008.
2. Szekrenyes, A. *Semi-layerwise analysis of laminated plates with nonsingular delamination -The theorem of autocontinuity*, Applied Mathematical Modelling, **40**(2): 1344 – 1371, 2016.
3. Szekrenyes, A. *Nonsingular crack modelling in orthotropic plates by four equivalent single layers*, European Journal of Mechanics – A/Solids, **55**(2): 73 – 99, 2016.
4. Guadette, F. G., Giannopoulos, A. E., Suresh, S. (2001) Interfacial cracks in layered materials subjected to a uniform temperature change. Int. J. Fract. 28:5620-5629.
5. Yeung DTS, Lam DCC and Yuen MMF (2000) Specimen design for mixed mode interfacial fracture properties measurement in electronic packages. J. Electr. Packag. 122: 67 – 72.
6. J. D. Whitcomb “Delamination growth in a laminate with a post-bucked edge delamination” in: *J. Comp. Tech. Res.*, Vol. 13 (1991), pp. 175 – 178.



# ANALYSIS OF MULTILAYERED FUNCTIONALLY-GRADED BEAMS WITH LONGITUDINAL CRACKS

V. Rizov<sup>1</sup>

*Keywords: functional gradient, crack, multilayered material*

## ABSTRACT

A multilayered functionally-graded beam with a longitudinal crack is analyzed. The thicknesses of the two crack arms are different. The beam is clamped in its right-hand end. The strain energy release rate is obtained for arbitrary crack length. In each layer, the modulus of elasticity changes continuously along the thickness of the layer and along the length of the beam. Results of a parametric investigation are presented.

---

<sup>1</sup> Victor Rizov, Prof. Dr. Eng., Dept. "Technical Mechanics", UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: v\_rizov\_fhe@uacg.bg