



Получена: 05.03.2021 г.

Приета: 15.04.2021 г.

ТРАНСФОРМАЦИЯ МЕЖДУ ГЕОПОТЕНЦИАЛНИ КОТИ И НОРМАЛНИ ВИСОЧИНИ ПРИ ПРЕЦИЗНИ ВИСОЧИННИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Т. Ламбева¹

Ключови думи: нормални височини, геопотенциални коти, прецизни височинни определения

РЕЗЮМЕ

Съгласно конвенциите за дефиниране на Европейската височинна референтна система (EVRS – European Vertical Reference System) за височинни компоненти на EVRS са посочени геопотенциалните коти и техните еквивалентни стойности на нормални височини, определени при дефинирано референтно (нормално) гравитационно поле [11].

Изчисляването на нормални височини от вече известни стойности на геопотенциални коти се налага в геодезическата практика при извършването на контролни, независими изчисления на физическите превишения.

В статията се разглежда връзката между двете еквивалентни величини, осигуряваща необходимата практическа точност за целите на прецизни височинни определения.

1. Въведение

Известно е, че между двата вида височини – нормални височини и геопотенциални коти – съществува теоретична еквивалентност при използването на еднакви гравиметрични и нивелачни данни. На практика тази еквивалентност се определя от реализираната точност на изчисленията, изискваща използване на подходящи, обосновани изчислителни формули. Точността на трансформацията зависи от степента на детайлност при описанието на връзката между двете величини.

¹ Татяна Ламбева, гл. ас. д-р инж., кат. „Висша геодезия”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: lambeva_fgs@uacg.bg

Геопотенциалната кота C_i на т. i се дефинира чрез потенциалната разлика ΔW_i между потенциала W_0 в конвенционалното нулево начало на референтната система и геопотенциала в точка i , взета с обратен знак:

$$C_i = -\Delta W_i = W_0 - W_i.$$

Нормалната височина H_i^N на точка i , „напълно точно“ [3, 5] се определя посредством нейната геопотенциална кота C_i и се задава с формулата:

$$H_i^N = \frac{C_i}{\gamma_m^i}, \quad (1)$$

където γ_m^i е средноинтегралната стойност на нормалната сила на тежестта, определена по продължение на нормалната силова линия през т. i от нормалния елипсоид до телуроида.

Стойността на γ_m^i може да бъде определена точно, с познаването само на ширината и нормалната височина на разглежданата точка, за разлика от стойността на средноинтегралната стойност на силата на тежестта [5, 7, 9], необходима при определянето на ортометричните височини. Детайлна обосновка на предимството на нормалните височини пред ортометричните е дадена в [8].

Желаната точност на изчисление на γ_m^i на практика зависи само от степента на апроксимация на изчислителния спрямо теоретичния ѝ модел, без да има необходимост от ползването на други данни, освен вече изброените.

Известни са предимствата на геопотенциалните коти в сравнение с останалите геопотенциални или физични височини – ортометрични и нормални [5]: те се получават като директен резултат от преки измервания, без да има необходимост към тях да се насяят допълнителни, специфични корекции; еднозначни са; имат голямо научно и практическо значение – въвеждат се като основна височинна компонента при дефинирането на съвременните височинни системи [11] и др.

Държавната нивелачна мрежа (ДНМ) на Р България е част от реализацията на Европейската височинна референтна система – EVRF 2007 (European Vertical Reference Frame 2007). Стойностите на геопотенциалните коти на възловите репери от ДНМ и техните средни квадратни грешки m_{C_i} са определени в резултат на изравнение на Обединената европейската нивелачна мрежа.

В геодезическата практика са необходими данни за стойностите на нормалните височини, както на възловите репери, така и на междинните репери по нивелачните линии. Изчисляването им се извършва не в резултат на изравнение, а посредством трансформация на стойностите на възловите репери в системата нормални височини съгласно формула (1). Връзката (1), следваща от дефиницията на нормалните височини, определя еквивалентността между геопотенциалните коти и нормалните височини. При практическото приложение на формулата, логично е да се постави изискването точността на определяните стойности на нормални височини да съответства на точността на геопотенциалните коти.

Определяните нормални височини, както на междинните репери по първокласни нивелачни линии, така и на тези от второкласните нивелачни линии, е необходимо да бъдат контролирани посредством двукратни определения – чрез измерените геопотенци-

ални разлики (превишения) и чрез определените нормални превиишения. За извършване на качествен контрол на тези изчисления е необходимо използването на подходящ модел на трансформация между нормални височини и геопотенциални коти, имащ обоснована точност.

2. Точност на определените от геопотенциални коти нормални височини

Средната квадратна грешка $m_{H_i^N}$ на нормалната височина, определена от геопотенциалната кота на даден репер, е следната:

$$\left(m_{H_i^N}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma_m^i}\right)^2 \left(m_{C_i}\right)^2 + \left[\frac{C_i}{\left(\gamma_m^i\right)^2}\right]^2 \left(m_{\gamma_m^i}\right)^2, \quad (2)$$

където $m_{\gamma_m^i}$ е средната квадратна грешка на γ_m^i .

Стойността на величината γ_m^i е необходимо да бъде определена, така че нейната грешка $m_{\gamma_m^i}$ да оказва пренебрежимо малко влияние върху стойността на $m_{H_i^N}$. За осигуряване на това изискване е необходимо да бъде изпълнено условието [4]:

$$m_{\gamma_m^i} \leq \frac{m_{H_i^N} \left(\gamma_m^i\right)^2}{3|C_i|}. \quad (3)$$

От формула (3) е видно, че точността на изчисление на γ_m^i зависи и от стойността на геопотенциалната кота C_i .

При определянето на нормалните височини във възловите репери грешките $m_{H_i^N}$ могат да бъдат определени от средните квадратни грешки на геопотенциалните коти и да бъдат заместени във формула (3). За общия случай на изчисление на нормални височини по междинните репери на нивелачните линии може да се приеме, че изискваната точност $m_{H_i^N}$ да бъде равна на изчислителната точност при обработка на прецизни нивелачни измервания: 0,01 mm. Ако се разгледа и случай, в който нивелачни измервания са извършени в екстремални условия и същевременно за опростяване на по-нататъшните разсъждения се приеме, че нормалните височини са от порядъка на 1000 m или приблизително $C_i = 1000 \text{ kGal.m}$, то за средната квадратна грешка на средноинтегралната стойност на нормалната сила на тежестта, определена по (3) следва $m_{\gamma_m^i} \leq 3 \mu\text{Gal}$. Осигуряването на тази точност ще доведе до изпълнение на равенството:

$$m_{H_i^N} = \frac{m_{C_i}}{\gamma_m^i}. \quad (4)$$

3. Точност на средноинтегралната стойност на нормалната сила на тежестта

Точността на γ_m^i зависи от детайлността на развитието ѝ в ред:

$$\gamma_m^i = \gamma_0^i + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_0 \frac{H_i^N}{2!} + \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial H^2}\right)_0 \frac{(H_i^N)^2}{3!} + \left(\frac{\partial^3\gamma}{\partial H^3}\right)_0 \frac{(H_i^N)^3}{4!} + \dots, \quad (5)$$

от точността на нормалната сила на тежестта върху елипсоида γ_0^i и от точността на производните, участващи в нея.

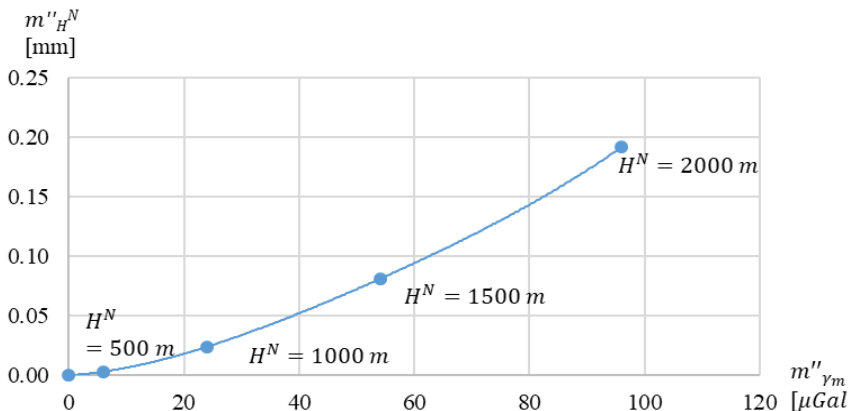
Ако бъде пропусната третата производна от развитието (5), допуснатата грешка в γ_m ще възлиза на 0,004 mGal за височини от 10 km [7] или $4 \cdot 10^{-1}$ $\mu\text{Gal}/\text{km}$, откъдето следва и пренебрежимо малкото влияние на третия член върху точността на γ_m .

Приблизителната стойност на втората производна на нормалната сила на тежестта може да се представи [7]:

$$\frac{1}{6} \frac{\partial^2\gamma}{\partial H^2} \approx \frac{GM}{R^4} \approx \frac{\gamma_e}{R^2} \approx 0,024 \text{ mGal}/\text{km}^2, \quad (6)$$

където R е средният земен радиус, γ_e е нормалната сила на тежестта при екватора. Тези две величини са известни с достатъчна точност. Използването на константната стойност, дадена с формула (6) е достатъчна при извършването на изчисления на γ_m .

На фиг. 1 е представена грешката в $\gamma_m \left(m''_{\gamma_m} \right)$, получена в резултат от пренебрегването на втората производна във формула (5) (третия член вдясно), както и съответната грешка, която би била допусната във височината – H_i^N . Стойностите на m''_{γ_m} и H_i^N са определени за нормални височини от 500, 1000, 1500 и 2000 метра.



Фиг. 1. Влияние на втората производна от развитието на γ_m върху нейната точност (по абсцисата) и върху точността на нормална височина (по ординатата)

Грешката m''_{γ_m} се явява съществена за височини над 300 m.

Използването на стандартната (приблизителна) стойност за вертикалния нормален градиент:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial H} = -0,3086 \text{ mGal/m},$$

може да доведе до грешка от около 50 μGal в нормалната сила на тежестта за височини от 1 km [7] за репери по средните ширини или съответно 25 μGal в γ_m . Следователно по-детайлното представяне на нормалния вертикален градиент е от значение при определянето на прецизни стойности на нормалните височини.

Нормалният вертикален градиент, представен с грешка от порядъка на квадрата на сплеснатостта на f на нормалния елипсоид, се задава с формула (III.9.69) в [3]:

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_0 = -\frac{2}{a}\gamma_e\left(1+f+m-3f\sin^2 B+\frac{5}{2}m\sin^2 B\right), \quad (7)$$

където B е геодезическата ширина. Параметърът m се определя чрез:

$$m = \frac{a\omega^2}{\gamma_e} = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM},$$

a и b са съответно голямата и малката полуос на нормалния елипсоид, ω е ъглова скорост на въртене на Земята и GM е земната гравитационна константа.

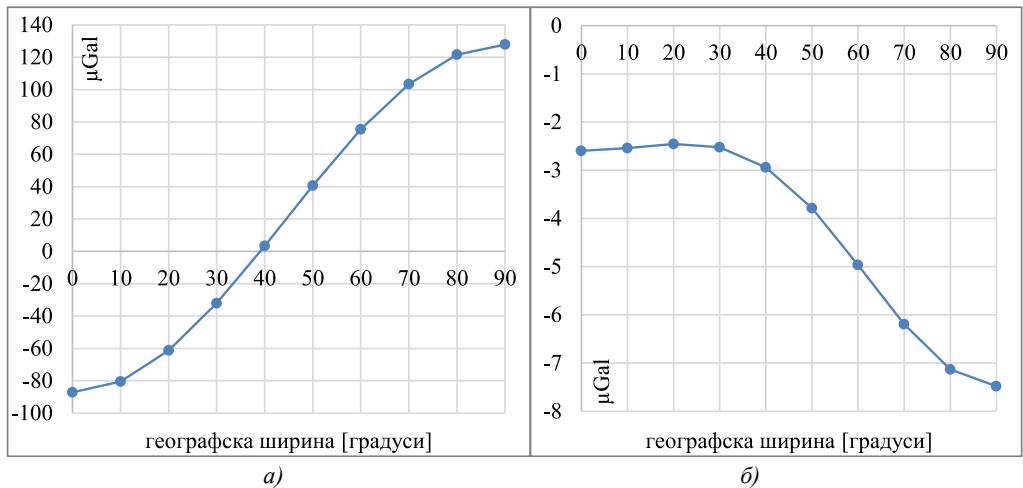
На фиг. 2а е представена грешката, която би била допусната при използването на приблизителната стойност на нормалния вертикален градиент $-0,3086 \text{ mGal/m}$, вместо развитието, дадено с формула (7). При $H_i^N = 1000 \text{ m}$ в обхвата на всички ширини, грешката в γ_m ще варира в диапазона $(-87 \div 128) \mu\text{Gal}$.

Вертикалният нормален градиент, представен с грешка от порядъка на четвъртата степен на сплеснатостта, е следният [3]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_0 = & -\frac{2}{a}\gamma_e\left(1+f-3f\sin^2 B+\frac{3}{2}f^2-\frac{5}{2}f^2\sin^2 B+2f^2\sin^4 B+2f^3- \right. \\ & -4f^3\sin^2 B+2f^3\sin^4 B+m+\frac{5}{2}m\sin^2 B-\frac{17}{14}fm\sin^2 B+ \\ & \left. +\frac{5}{2}fm\sin^4 B+\frac{243}{196}f^2m\sin^2 B-\frac{1}{28}f^2m\sin^4 B\right). \end{aligned} \quad (8)$$

На фиг. 2б е представена грешката в γ_m , причинена от пропуснатите членове, включително и над втора степен на сплеснатостта в описанието на вертикалния градиент, при стойност на височината $H_i^N = 1000 \text{ m}$. Грешката е в интервала $(-2 \div -8) \mu\text{Gal}$.

Следователно, при осъществяване на трансформацията между нормални превисения и геопотенциалните разлики, е необходимо пространствената кривина на нормалните силови линии да се представи по-прецизно.



Фиг. 2. Грешка в γ_m^i при височина $H_i^N = 1000$ m

а) при използване на стойност за нормалния вертикален градиент $0,3086$ mGal/m вместо стойността, определена по формула (7); б) поради отсъствието членовете от втора и трета степен на сплеснатостта, дадени с формула (8)

В Конвенциите за дефиниране и реализиране на EVRS 2007 [11] е посочена формула А-2 за определяне на γ_m . Тя съдържа нормален вертикален градиент с аналогична по точност на формула (7), но представен с използване на нормалната сила на тежестта при елипсоида γ_0 :

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial H}\right)_0 = -\frac{2}{a}\gamma_0(1+f+m-2f\sin^2 B). \quad (9)$$

До формула (9) може да се достигне след заместването на нормалната сила на тежестта върху екватора γ_e , дадена с формула (III.9.68) в [3], ограничена до същия порядък:

$$\gamma_e = \gamma_0 \left(1 - f \sin^2 B + \frac{5}{2} m \sin^2 B\right)^{-1}.$$

Най-накрая ще бъде разгледано и влиянието на точността на γ_0 . Изчисляването на γ_m със стойност за γ_0 , имаща грешка $m_{\gamma_0} \approx 0,1$ mGal по формулата [13]:

$$\gamma_0 = 9,780\,327 \cdot \left(1 + 0,005\,3024 \cdot \sin^2 B - 0,000\,0058 \cdot \sin^2 2B\right), \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

би довела до грешка във височината $m_{H_i^N} = 0,1$ mm.

Посочената формула (А-1) за γ_0 , касаеща реализиране на Европейската височинна референтна система 2007 [11], с точност $m_{\gamma_0} \approx 1 \cdot 10^{-4}$ mGal [13], е:

$$\gamma_0 = 9,780\ 326\ 7715 \cdot \left(1 + 0,005\ 279\ 0414 \cdot \sin^2 B + 0,000\ 023\ 2718 \cdot \sin^4 B + \right. \\ \left. + 0,000\ 000\ 1262 \cdot \sin^6 B + 0,000\ 000\ 0007 \cdot \sin^8 B \right), \text{ m/s}^2. \quad (11)$$

Използването на формулата (11) би осигурило желаната точност в определянето на нормалната височина. Пропускането на последния член от нея би довело до пренебрежимо малка грешка от порядъка $m_{\gamma_0} \approx 0,7 \mu\text{Gal}$ на полюсите, докато пропускането на 6-та степен вече би довела до значителна грешка от порядъка между $m_{\gamma_0} \approx (25 \div 123) \mu\text{Gal}$ от екватора до полюсите.

Най-подходяща за определянето на γ_0 е точната, затворена [9] формула на Сомилияна, имаща и определено по-компактен вид:

$$\gamma_0 = \frac{a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}},$$

където γ_e е нормалната сила на тежестта при полюсите.

Средната квадратна грешка на γ_m може да се обобщи като сума от три средни квадратни грешки:

$$\left(m_{\gamma_m}\right)^2 = \left(m_{\gamma_0}\right)^2 + \left(m_{\gamma_I}\right)^2 + \left(m_{\gamma_{II}}\right)^2 + \dots, \quad (12)$$

обозначаващи съответно грешките на първите три значими члена във формула (5).

Стойността на γ_0 може да бъде определена лесно с достатъчно висока точност, за разлика от γ_I , зависеща от вертикалния градиент. Третият член γ_{II} също може да бъде определен с достатъчно висока точност, тъй като неговият принос като цяло е много малък.

Оттук следва, че за постигане на точност $m_{\gamma_m} \leq 3 \mu\text{Gal}$ е достатъчно $m_{\gamma_I} \leq 3 \mu\text{Gal}$, ако влиянието на m_{γ_0} бъде пренебрежимо малко, т.е.:

$$m_{\gamma_0} \leq \frac{1}{3} m_{\gamma_m} \Rightarrow m_{\gamma_0} \leq 1 \mu\text{Gal},$$

което се удовлетворява с използването на препоръчаната формула (11) или най-добре формулата на Сомилияна.

Препоръчаната от [11] формула за определяне на средноинтегралната стойност на нормалната сила на тежестта, представена от [2] е:

$$\gamma_m^i = \gamma_0^i \left[1 - \left(1 + f + m - 2f \sin^2 B \right) \frac{H_i^N}{a} + \frac{\left(H_i^N \right)^2}{a^2} \right]. \quad (13)$$

Тя включва първите три члена на формула (5), развитие на вертикалния градиент с грешка от порядъка на втората степен на сплеснатостта и отговаря на изискването нейната точност да бъде по-висока от $3 \mu\text{Gal}$.

До същата формула се достига след заместване на формули (6), (7), (9) в (5) и запазване на членовете с грешка от порядъка на втората степен на сплеснатостта.

4. Изводи и заключения

Определяните нормални височини от геопотенциални коти или респективно разлики са значително по-силно зависими от характеристиките на нормалното гравитационно поле в сравнение с определяните нормални височини от нормални превишения. Причина за това е, че нормалните поправки към определените с геометрична нивелация превишения изискват гравиметричните данни за нормалното гравитационно поле със значително по-ниска точност. Необходимо е да се подчертае, че при извършване на трансформацията в първия случай е необходима коректна обосновка на нейната точност, особено ако тя е предназначена за контрол на прецизни височинни определения. В тази връзка може да се направи извод, че изравнението на една нивелачна мрежа е по-подходящо да се извърши с нормални превишения. Тогава резултатите от изравнението могат да се ползват директно за практически цели. А изчисляването на геопотенциални коти и разлики може да послужи както за контрол на измерванията, така и за целите на научни и научно-практически изследвания.

Изчисляването на нормални превишения и височини от стойности на геопотенциални разлики и коти се налага все по-често в геодезическата практика и в други случаи: при контрол на получените резултати от изравнение на нивелачни мрежи в различни системи височини – нормални и геопотенциални; при използване на технологията за определяне на геопотенциални разлики с оптични часовници; при извършването на прецизни инженерни и геодезически дейности [1, 6, 12] и др.

Паралелно с трансформацията на височините е необходима и коректна трансформация или определяне на средните им квадратни грешки. Поддържането на регистър с данни за средните квадратни грешки на всички репери е от съществено значение не само за стандартните геодезически приложения.

Получаването и поддържането на точни данни, както за физическите височини (нормални височини и геопотенциални коти) и геометричните (геодезическите) височини, така и за техните средни квадратни грешки, би позволило коректното извеждане на скорости и установяване на съвременни кинематични реализации на референтните системи [10], съгласно изискванията на европейските и международните конвенции.

С направените изводи тук не може да не се изтъкне отново и преимущество то на системата нормални височини пред ортометричните височини. Определянето с висока точност на ортометрични височини от геопотенциални коти и разлики е невъзможно. Причина за това е, че средната квадратна грешка на средноинтегралната стойност на силата на тежестта е невъзможно да бъде точно определена. Още по-малко тази точност да е съпоставима с разискваната по-горе точност при определяне на нормалните височини.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Angelov, A. Geodezicheski metodi za izsledvane na deformatsionni protsesi pri visoki sgradi i inzhenerni saorazhenia. Monografia, UASG, Sofia, ISBN: 978-619-90832-1-5, 72 str.*

2. *Gofman-Vellengof, B., Morits, G. Fizicheskaya geodezia. (Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H., Physical Geodesy, 1967), perevod Yu. M. Neyman i L. S. Sugaipova, redaktsiye Yu. M. Neyman, Izd-vo MIIAiK, M., 2017.*

3. *Eremeev, V. F., Jurkina, M. I.* Teorija vysot v gravitacionnom pole Zemli. Trudy CNIIGAiK, vyp. 191, 1968, Moskva, Nedra, 1972.
4. *Kostadinov, K., Valchinov, V.* Matematicheska obrabotka na geodezicheskite izmervania. UASG, 2012.
5. *Peneva, E.* Visochini i visochinni sistemi. Voenno-geografska sluzhba, Sofia, 2017.
6. *Penev, P., Angelov, A.* Predvaritelna otsenka na tochnostta na tunelna inzhenerno-geodezicheska mreza. Godishnik na UASG, ISSN 1310-814X, ISSN 2534-9759, tom 50, br. 2, 2017, str. 251-259.
7. *Popad'jov, V. V.* Osnovy geodezicheskoy gravimetrii i teoreticheskoy geodezii. Kurs lektsii, Moskva, 2017.
8. *Popad'jov, V. V.* O preimushhestve sistemy normal'nykh vysot. // Geodezia i kartografia, 2018, T. 79, № 9, S. 2-9, DOI: 10.22389/0016-7126-2018-939-9-2-9.
9. *Stoynov, Vl., Peneva, E.* Fizicheska geodezia. Sofia 2002.
10. *Tsanovski, Yu., Danchev, Ts.* Kinematichni aspekti pri realizatsia na ETRS89, epoha 2005 za teritoriyata na Republika Bulgaria. // Godishnik na Universiteta po arhitektura, stroitelstvo i geodezia, tom. 53, br. 4, 2020, ISSN 1310-814X.
11. *Ihde, J., Mäkinen, J., Sacher, M.* Conventions for the Definition and Realization of a European Vertical Reference System (EVRS) – EVRS Conventions 2007, IAG Sub-commission 1.3a EUREF, EVRS Conventions V5.2, 11.01.2019.
12. *Kunchev, I.* On standards and specifications for vertical control surveys. // Annual of the University of Architecture, Civil Engineering and Geodesy – Sofia, Vol. 54, 2021, Issue 2, ISSN 1310-814X, ISSN 2534-9759 (on-line), in Bulgarian.
13. *Moritz, H.* Geodetic reference system 1980. Bulletin Geodesique, Vol. 62, No. 3, 1988.

TRANSFORMATION BETWEEN GEOPOTENTIAL NUMBERS AND NORMAL HEIGHTS FOR PRECISE HEIGHT DETERMINATIONS

T. Lambeva¹

***Keywords:** normal heights, geopotential numbers, precise height determinations*

ABSTRACT

According to the conventions for the Definition and Realization of the European Vertical Reference System (EVRS), the height components of EVRS are geopotential numbers and their equivalent values of normal heights determined by the defined reference (normal) gravitational field [11].

¹ Tatyana Lambeva, Prof. Dr. Eng., Dept. “Geodesy”, UACEG, 1 H. Smirnenski Blvd., Sofia 1046, e-mail: lambeva_fgs@uacg.bg

The calculation of normal heights from already determined values of geopotential numbers is necessary in geodetic practice, when performing preliminary, independent calculations of physical heights.

The paper discusses the relationship between the two equivalent quantities, providing the necessary practical accuracy for the purposes of precise height determinations.