



Получена: 01.03.2021 г.

Приета: 16.04.2021 г.

ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ГЕОПОТЕНЦИАЛНИ РАЗЛИКИ И НОРМАЛНИ ПРЕВИШЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ОПТИЧНИ ЧАСОВНИЦИ

Т. Ламбева¹

Ключови думи: оптични часовници, релативистична геодезия, геопотенциални разлики, нормални превишения

РЕЗЮМЕ

В статията е разгледан основният принцип на технологията за определяне на геопотенциални разлики и нормални превишения, базирана на гравитационния Доплеров ефект, възникващ при работата на два отдалечени атомни часовника. Реализирането на тази технология става възможно благодарение на постигнатата точност на съвременните оптични часовници, близка до 1.10^{-18} s (използвани също като прецизни гравиметри) [10]. Същността на технологията се състои в определяне на разликата в собственото време или по-точно на разликата в честотите на работа на два отдалечени часовника, дължащи се на ефекта на гравитационно (червено отместване на честотите – redshift effect), базиран на Общата теория на относителността (ОТО).

Развитието на технологията определя създаването на нов дял от геодезията, посочен като релативистична (релативистка) или хронометрична геодезия и определя приложението ѝ в редица други науки – спътниковата геодезия, физическата геодезия, геодезическата гравиметрия, метрологията, фундаменталната физика, геофизиката, геологията и др.

В статията е представена теоретичната връзка между нормални превишения и отместванията в честотите на работа на оптичните часовници. Разглежданата връзка е в зависимост от елементи на нормалното гравитационно поле, от нормалните височини или от избора на изходното начало на височинната система.

¹ Татяна Ламбева, гл. ас. д-р инж., кат. „Висша геодезия”, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски“ № 1, 1046 София, e-mail: lambeva_fgs@uacg.bg

1. Въведение

До скоро използваните точни, директни методи за определяне на геопотенциални разлики или физически превишения в геодезията бяха хидростатична нивелация и геометрична нивелация, придружена от гравиметрични измервания. Релативистичната геодезия дава трети, изцяло нов, независим, директен метод за определяне на геопотенциални разлики с приложението на оптични часовници. Основните проблеми при използване на този метод са инструментални и са свързани с осигуряването на *точност*, *стабилност* и *синхронизация* (*синтонизация*) на часовниците, отчитащи истинското време.

Още през 1975 г. Арне Берхамер [8] и след това през 1983 г. Мартин Вермеер [13] предлагат метод за наблюдение, основаващ се на един от ефектите, възникващи при Общата теория на относителността (ОТО) – т. нар. ефект на червено отместване на честотите на електромагнитните вълни. Методът води до определянето на геопотенциални разлики, посредством сравнение на показанията на отдалечени, свръхточни атомни часовници. Първоначалното предложение – сравнението да се извърши чрез пренос на сигнал с данни през атмосферата, се оказва силно чувствително към йоносферните и тропосферните влияния. Впоследствие, за ограничаването на тези външни влияния върху обменяната информация между часовниците (при сравнението на техните показания) методът е реализиран чрез използването на коаксиална кабелна връзка. Така точността на извършените измервания, респективно и определения, зависи най-вече от стабилността на работа на използваните атомни часовници.

Атомният стандарт за честота е утвърден за стандарт при определяне на времето още през 1968 г. на 13-тата Генерална конференция за мерки и теглилки. Приетата тогава Резолюция № 1 дава ново определение на SI секундата, вече базирано на атомния стандарт. Оттогава практическата реализация на SI секундата става посредством анализирането на работата и сравнението на атомни часовници [6]. Под реализация на единицата за време се разбира създаването или възпроизвеждането на стойността Δt , както и определянето на нейната точност, което да е в съответствие с нейната дефиниция. В метрологията качеството на честотния стандарт се характеризира с *точност*, *надеждност* и *стабилност*.

Методът за определяне на геопотенциални разлики с помощта на прецизни часовници, е наречен „*Нова физическа геодезия*“, „*Хронометрична нивелация*“ [13], „*Релативистична геодезия*“ [7], както и „*Хронометрична геодезия*“. Тази технология намира приложение в редица научни области [8, 9, 11, 12, 14]:

- В геодезията:
 - Физическата геодезия – при решаването на една основните задачи на геодезията, свързана с определянето на „естествените“ или „физически-те“ височини [3]; при реализиране и унифициране на височинните системи; при определянето на разликите между независими решения на геоида, произтичащи от прилагането на различни класически методи.
 - Спътниковата геодезия – като допълнение на спътниковите измервания, както на геодезическите и ГНС спътници; при анализирането на спътникови гравиметрични данни, изключително зависими от скоростта на движение.
 - Геодезическата гравиметрия – при определяне на абсолютни и относителни стойности за силата на тежестта; при прецизиране на регионални и глобални решения на модели на гравитационното поле.

- В метрологията:
 - За прецизно *реализиране* на времевите стандарти. Международният комитет за мерки и теглилки одобрява четири оптични прехода за вторичното представяне на SI секундата.
 - За *дефинирането* и *реализирането* на международните скали за време (по-добра стабилност на TAI, реализиране на TT).
 - При *сравнението* на часовници.
- Във фундаменталната физика: изследването на фундаментални константи.
- В геофизиката, геодинамиката и геологията:
 - При решаване на обратната гравиметрична задача във връзка с определяне на разпределението на плътностите във вътрешността на Земята посредством измервания върху нея.
 - При определянето на ротацията на Земята.

2. Принцип на технологията

Принципът на действие на атомния часовник като еталон за честота се състои в използването на електромагнитна радиация за възбуждане на свръхфин електронен преход в основните състояния на атомите или йоните. В резултат се постига резонанс между принудената честота на електромагнитно излъчване и собствената честота на атома или йона. Точността на постигнатия резонанс определя *стабилността* на часовника и зависи обратнопропорционално от честотата на свръхфиния атомен преход, броя на атомите и времето на взаимодействие [9].

Новото поколение атомни часовници, базирани на квантовия преход в *оптичната област* ($f = 300$ до 800 THz), за разлика от използваните до преди това *микровълнови* атомни стандарти (*Cs* и *Rb* часовници), предоставя нови възможности за развитието и приложението на метода на областта на фундаменталната физика и геодезията [9]. Повисоката честота на електромагнитната радиация в оптичната област определя значително по-високата *точност* и *стабилност* на оптичните часовници, в сравнение с микровълновите атомни часовници. Използваните честоти в оптичния диапазон са около 5 пъти по-високи от тези в микровълновия диапазон [10].

При съвременните оптични часовници се използват две принципно различни технологии [9]. Първата е базирана на единични йони (Hg^+ , Al^+ , Yb^+ , Sr^+ , Ca^+), придържани от електромагнитно поле. Тези йонни оптични часовници (*ion optical clocks*) достигат точност $9 \cdot 10^{-18}$ и стабилност $2 \cdot 10^{-15}$ за 1 секунда. Втората технология включва използване на няколко хиляди неутрални атома (Hg , Yb , Sr , Mg), задържани от мощна лазерна стояща вълна (оптична решетка). Тези часовници, наричани оптични часовници с решетка (*optical lattice clocks*), имат висока стабилност – под $1 \cdot 10^{-17}$ за секунда. За сравнение, най-добрите микровълнови *атомни фонтанни часовници* (*atomic fountain clocks*), използващи охладени атоми, имат стабилност от порядъка на $1 \cdot 10^{-14}$ за секунда и статистическа резолюция $1 \cdot 10^{-16}$, постигана до няколко дни.

Съвременните *оптични часовници* (използвани също като прецизни гравиметри) [10] достигат стабилност и точност, близка до $1 \cdot 10^{-18}$. Тази точност при определяне на *разликата в собственото време* или на *разликата в честотите* на работа на два отда-

лечени часовника дава възможност за практическото измерване на ефекта на червено отместване на честотите, а оттам и за определяне на прецизни геопотенциални разлики и динамични превишения.

В основата на технологията за определяне на геопотенциални разлики посредством оптични часовници стои Доплеровият ефект, дефиниран съгласно ОТО. За представянето на принципа на технологията ще бъдат разглеждани два часовника, движещи се в пространството – единият със скорост v_s , намиращ се в точка s , и втори, движещ се със скорост v_p , свързан с точка p . Собствените времена на двата часовника $d\tau_s$ и $d\tau_p$, съответстващи на едно и също координатно време dt , отчетено от неподвижен часовник, разположен в началото на координатната система, намираща се в пространството на Шварцшилд, имат вида [1, 2], съгласно Специалната теория на относителността (СТО) и Общата теория на относителността:

$$d\tau_s = \left(1 - \frac{V_s}{c^2} - \frac{v_s^2}{2c^2} \right) dt, \quad (1)$$

$$d\tau_p = \left(1 - \frac{V_p}{c^2} - \frac{v_p^2}{2c^2} \right) dt, \quad (2)$$

където c е скоростта на светлина във вакуум, V_s и V_p са потенциалите на привличане в точка p и точка s , генерирани от масивно сферично тяло, чийто център се намира в началото на координатната система.

От уравненията е видно, че разликите в интервалите от време, отчетени по подвижния и неподвижния часовник ще зависят както от скоростите на движение на часовниците, така и от гравитационното поле, в което те се намират. Времето, отчетено по подвижните часовници, ще бъде толкова по-малко, колкото скоростта им на движение е по-висока и колкото по-голяма е стойността на потенциала на привличане [1] (или колкото по-близо те се намират до масивното тяло и колкото по-голяма е масата на привличащото тяло).

След елиминиране на координатното време от горните два израза, опростяване на получения резултат и запазване на членовете с точност до c^{-2} се достига до следната връзка:

$$d\tau_s = d\tau_p \left(1 - \frac{V_s}{c^2} - \frac{v_s^2}{2c^2} + \frac{V_p}{c^2} + \frac{v_p^2}{2c^2} \right). \quad (3)$$

Ще бъде разгледан случай, при който между двата часовника се осъществява комуникация посредством изпращането и приемането на електромагнитни вълни. Изпратеният импулс от т. s с продължителност $d\tau_s$ към т. p ще бъде приет в т. p , но отчетен по часовника там, ще има продължителност $d\tau'_p$ [2]:

$$d\tau'_p = d\tau_p \left(1 + \frac{v_r}{c} \right). \quad (4)$$

Определеният интервал с формула (4) от време $d\tau'_p$ отчита класическия Доплеров ефект. Тук с v_r е означена радиалната компонента на релативната скорост (в направление от точка s към точка p) между двата часовника. Тя може да мени своя знак, в зависимост от това дали часовниците се приближават или отдалечават.

След заместване на формула (4) в (3) и опростяване на израза до същия порядък както по-горе, следва:

$$d\tau_s = d\tau'_p \left(1 - \frac{v_r}{c} + \frac{V_p}{c^2} - \frac{V_s}{c^2} + \frac{v_p^2}{2c^2} - \frac{v_s^2}{2c^2} \right). \quad (5)$$

Честотата на излъчения импулс от т. s се нарича собствена честота и се определя като $f_s = 1/d\tau_s$. Приетата честота в т. p ще бъде означена с $f_p = 1/d\tau'_p$. След заместване на честотите в уравнение (5) се получава [2]:

$$f_p - f_s = f_s \left(-\frac{v_r}{c} + \frac{(V_p - V_s)}{c^2} + \frac{(v_p^2 - v_s^2)}{2c^2} \right), \quad (6)$$

където $f_p - f_s$ е Доплеровото отместване на честотите.

Първият член в средните скоби във формула (6) зависи от радиалната скорост v_r и формира т. нар. надлъжен ефект на Доплер. Вторият член вдясно формира разлика в честотите, дължаща се на разликата в стойностите на потенциалите в двете точки и се нарича гравитационно отместване на честотите. Той отчита доплеровия ефект съгласно ОТО. Третият член в същата формула зависи от скоростите на движение на източника и приемника и определя напречния Доплеров ефект [2]. Последният се базира на СТО.

Ще бъде разгледан случаят, в който двата часовника се намират неподвижно върху повърхността на Земята. В резултат на това за радиалната компонента на релативната скорост v_r между двата часовника следва: $v_r = 0$. В същото време линейните скорости v_p и v_s на двата часовника биха били различни, тъй като зависят от центробежно ускорение, което получават (в зависимост от ширината и височината, на която те се намират). Съгласно направените допускания от разглеждания случай следва:

$$\frac{f_p - f_s}{f_s} = \frac{(V_p - V_s)}{c^2} + \frac{(v_p^2 - v_s^2)}{2c^2}. \quad (7)$$

Стойността на центробежния потенциал Z в дадена точка, намираща се върху повърхността на Земята, зависи от ъгловата скорост ω на въртене на Земята и от разстоянието r' на разглежданата точка до ротационната ос:

$$Z = \frac{(\omega r')^2}{2}.$$

На практика стойността в числителя $\omega r'$ е точно линейната скорост v на часовника, въртящ се заедно със Земята. Следователно, вторият член вдясно на формула (7) не е нищо друго, освен разлика в центробежните потенциали на двата часовника [10]:

$$\frac{f_p - f_s}{f_s} = \frac{(V_p - V_s)}{c^2} + \frac{(Z_p - Z_s)}{c^2},$$

$$\frac{f_p - f_s}{f_s} = \frac{(W_p - W_s)}{c^2}, \quad (8)$$

където с W е означена стойността на земния потенциал в двете точки.

Ако се разгледат два часовника, имащи максимална разлика в разстоянията до ротационната ос: единият – на екватора, другият на някой от полюсите, и тялото на Земята се приеме за сплеснат ротационен елипсоид с голяма полуос $a = 6371 \text{ km}$, въртяща се с ъглова скорост $\omega = 7,292123517 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$, както и стойност за скоростта на светлината $c = 299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, тогава за напречния Доплеров ефект или за приноса на разликата в центробежните потенциали се получава:

$$\frac{1}{2c^2} (v_{eq}^2 - v_{pole}^2) = \frac{1}{2c^2} (w^2 a^2 - 0) \approx 1,2 \cdot 10^{-12},$$

поради което отчитането му в уравнения (7) и (8) не може да се пренебрегне и следователно

$$\frac{f_p - f_s}{f_s} = \frac{\Delta W_{ps}}{c^2}. \quad (9)$$

Отместването в честотите $(f_p - f_s)$ е пропорционално на геопотенциалната разлика между двете точки и се дава с формулата:

$$\Delta W_{ps} = \frac{(f_p - f_s)}{f_s} c^2. \quad (10)$$

Точността на определяне на отместване на честотите $(f_p - f_s)/f_s$ от порядъка на $1 \cdot 10^{-18}$ s съответства на точността от $0,1 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ на определената геопотенциална разлика между две точки или на точност $0,01 \text{ m}$ във *физическото превишение* [10].

Ако потенциалната разлика (10) е отрицателна, тогава и отместването в честотите ще е отрицателно: $-\Delta f$. Това означава, че приетата честота f_p ще бъде по-малка от излъчената f_s , т.е. приетата честота ще бъде „отместена“ по посока на **червения спектър**, за видимата светлина, имащ по-голяма дължина на вълната (по-малка честота) [10]. Тогава ефектът на отместването на честотите се нарича **червено отместване на честотите (redshift effect)**.

Ако потенциалната разлика е положителна, Δf също ще бъде положително, приетата честота на f_p ще бъде по-голяма, дължината на вълната ще бъде по-малка, т.е.

„отместването“ ще е по посока на **синия спектър**. В този случай ефектът се нарича **синьо отместване на честотите (blue shift effect)**.

Гравитационното отместване на честотите е третият доказан ефект на ОТО. Ефектът на гравитационното забавяне на времето е потвърден с експеримент, носещ името на спътника *Gravity Probe A*. Спътникът е изстрелян през 1976 г., като е разположен на височина от 10 km. Оборудван е с генератор на стабилна честота – атомен часовник (водороден мазер). Приетият сигнал върху земната повърхност от спътника, движещ се на височина около 10 000 km, е съпоставен с генерирания сигнал от подобен мазер, намиращ се върху земната повърхност. Установеното гравитационно забавяне на времето или гравитационно отместване на честотите е от порядъка на $70 \cdot 10^{-6}$. При съпоставянето на сигналите предварително е отстранен кинематичният ефект от релативното движение между източника и приемника – напречния и надлъжния Доплеров ефект.

При GPS системата от спътници, разположени на височина от около 20 200 km над повърхността на Земята, ефектът на забавяне на времето (отместването на честотата) се редуцира посредством малко отместване на номиналната стойност на основната честота на спътниковия часовник от 10.23 MHz. Това отместване на честотите се определя от възникващия напречен и гравитационния Доплеров ефект, като възлиза на $\Delta f = -4,57 \cdot 10^{-3}$ Hz. В резултат GPS спътниците излъчват сигнал с основна честота 10,22999999543 Hz [5].

3. Определяне на нормални превишения от геопотенциални разлики, определени с оптични часовници

Нормалното превишение h_{ik}^N между две точки i и k , определено посредством техните геопотенциални коти, съответно C_i и C_k , се задава с формулата [2, 3]:

$$h_{ik}^N = H_k^N - H_i^N = \frac{C_k}{\gamma_m^k} - \frac{C_i}{\gamma_m^i}. \quad (11)$$

H_i^N и H_k^N са нормалните височини на двете точки, а γ_m^i и γ_m^k са средноинтегралните стойности на нормалната сила на тежестта, определени по нормалната силова линия от повърхнината на нормалния елипсоид до телуроида. Геопотенциалните коти C_i и C_k се дефинират като геопотенциални разлики ΔW_{oi} и ΔW_{ok} , взети с обратен знак:

$$C_i = -\Delta W_{oi} = W_o - W_i,$$

$$C_k = -\Delta W_{ok} = W_o - W_k,$$

определени като разлики между потенциала W_o в конвенционалното нулево начало на референтната система и геопотенциалите в точките i и k .

След преобразувания на уравнение (11) за нормалното превишение следва:

$$h_{ik}^N = \frac{\gamma_m^i C_k - \gamma_m^k C_i}{\gamma_m^k \gamma_m^i}. \quad (12)$$

Ако геопотенциалната кота в точка k се представи с помощта на геопотенциалната кота на точка i и потенциалната разлика $\Delta W_{ik} = W_k - W_i$ или:

$$C_k - C_i = \Delta C_{ik} = -\Delta W_{ik}, \quad (13)$$

и се замести в числителя на (2), се достига до

$$h_{ik}^N = \frac{\gamma_m^i (C_i - \Delta W_{ik}) - \gamma_m^k C_i}{\gamma_m^k \gamma_m^i}. \quad (14)$$

След прегрупиране на числителя следва:

$$h_{ik}^N = \frac{(\gamma_m^i - \gamma_m^k) C_i - \gamma_m^i \Delta W_{ik}}{\gamma_m^k \gamma_m^i}. \quad (15)$$

или

$$h_{ik}^N = \frac{(\gamma_m^i - \gamma_m^k) C_i}{\gamma_m^k} \frac{C_i}{\gamma_m^i} - \frac{\Delta W_{ik}}{\gamma_m^k}. \quad (16)$$

Като се вземе предвид, че $H_i^N = C_i / \gamma_m^i$, може да се запише:

$$h_{ik}^N = \frac{(\gamma_m^i - \gamma_m^k)}{\gamma_m^k} H_i^N - \frac{\Delta W_{ik}}{\gamma_m^k}. \quad (17)$$

Последният израз може допълнително да се преобразува до:

$$h_{ik}^N = \left(\frac{\gamma_m^i}{\gamma_m^k} - 1 \right) H_i^N - \frac{\Delta W_{ik}}{\gamma_m^k}. \quad (18)$$

Ако във формула (18) се замести потенциалната разлика от уравнение (10), се достига до окончателното уравнение, определящо връзката между нормалното превишение и измерената разлика в честотите между два отдалечени часовника:

$$h_{ik}^N = \left(\frac{\gamma_m^i}{\gamma_m^k} - 1 \right) H_i^N - \frac{1}{\gamma_m^k} \frac{(f_p - f_s)}{f_s} c^2. \quad (19)$$

4. Изводи и заключения

От полученото уравнение (19) е видно, че за определяне на нормални превишения от потенциални разлики или от измерени разлики в честотите на два отдалечени часовника, са необходими данни за височините или геопотенциалните коти на една от точките, между които се търсят превишенията.

Стойността на нормалното превишение зависи от мястото на изходното начало, спрямо което е дефинираната съответна нормална система височини. Стойностите на

нормалните превишения могат да се различават, ако те са отнесени към различни височинни системи.

Разликата между превишения, определени в две различни височинни системи, различаващи се от порядъка на 1 m, може да достигне до дециметри, за разстояние между часовниците от порядъка на стотици километри. Следователно, при прилагане на технологията с използване на измервания от оптични часовници, е необходимо задължително да се вземе предвид влиянието на първия член вдясно на формула (9).

Представената зависимост (19) има приложение при унифицирането на национални, регионални и континентални височинни системи и при контрола на прецизни височинни определения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gospodinov, Sl., Dzhorova, S.* Geodezicheska astronomia. Uchebnik, Voenno geografiska sluzhba, 2011, 264 str.

2. *Krilov, V. I.* Vvedenie v teoriyu sistem otscheta: uchebnoe posobie. Moskva, UPP „Reprografia“ MIIGAiK, 2003, 90 str.

3. *Peneva, E.* Visochini i visochinni sistemi. Monografia, Voenno-geografiska sluzhba, 173 str. 2017.

4. *Stoynov, Vl., Peneva, E.* Fizicheska geodezia. Uchebnik, UASG, 2002.

5. *Hofman-Velenhof, B., Lihteneger, H., Kolins, Dzh.* Globalna sistema za opredelyane na mestopolozhenie. Teoria i praktika, prevod na balg., SGZB, 2002.

6. *BIPM* The International System of Units (SI Brochure), 9th edition, 2019, <https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>.

7. *Bjerhammar, A.* On a relativistic geodesy. Bull. Geod. 59:207-220, 1985.

8. *Bjerhammar, A.* Relativistic Geodesy. NOAA Technical Report NOS 118 NGS 36, U.S. Department of commerce, National Oceanic and Atmospheric Administration, National Ocean Service, 1986.

9. *Delva P., Lodewyck J.* Atomic clocks: new prospects in metrology and geodesy, LNE-SYRTE, Observatoire de Paris, CNRS, UPMC, Paris, France, arXiv:1308.6766v1, 2013.

10. *Denker, H., Timmen, L., Voigt, C., Weyers, S., Peik, E., Margolis, H. S., Delva, P., Wolf, P., Petit, G.* (2017 online) Geodetic methods to determine the relativistic redshift at the level of 10 – 18 in the context of international timescales: a review and practical results Journal of Geodesy volume 92, 2018, pages 487-516.

11. *Mai Enrico, Jürgen Müller.* General Remarks on the Potential Use of Atomic Clocks in Relativistic Geodesy. zfv 4/2013, pp 257-266.

12. *Müller, J., Dirx, D., Kopeikin, S. M., Lion, G., Panet, I., Petit, G., Visser, P. N.* High Performance Clocks and Gravity Field Determination, Space Science Reviews volume 214, Article number: 5, 2018.

13. *Vermeer, M.* Chronometric Levelling, Report of the Finish Geodetic Institute, Helsinki, No 83(2), 1983, pp 1-7.

14. Voigt, C., Denker, H., Timmen, L. Time-variable gravity potential components for optical clock comparisons and the definition of international time scales, BIPM & IOP Publishing Ltd, Metrologia, Volume 53, Number 6, 2016.

DETERMINING GEOPOTENTIAL DIFFERENCES AND NORMAL HEIGHT DIFFERENCES BY USING OPTICAL CLOCKS

T. Lambeva¹

***Keywords:** optical clocks, Relativistic Geodesy, geopotential differences, normal height differences*

ABSTRACT

The paper discusses the basic principles of technology for determining geopotential differences and normal height differences, based on the gravitational Doppler effect, between two remote precise clocks. The realization of the technology is possible thanks to the high accuracy of contemporary optical clocks (also used as precise gravimeters) [10] and is due to the gravitational redshift effect of frequencies, based on the General Relativity.

The paper presents the theoretical connection between normal height differences and clock frequencies offset. This connection also depends on components of the normal field and the normal heights or of the choice of zero level of the vertical systems.

¹ Tatyana Lambeva, Prof. Dr. Eng., Dept. "Geodesy", UACEG, 1 H. Smirnenki Blvd., Sofia 1046, e-mail: lambeva_fgs@uacg.bg