**Р Е Ш Е Н И Я**
**на задачите от приемния изпит**
**за УАСГ, 13.07.2013 г.**

## Задача 1.

а) (2 т.) Решете уравнението $\left(4x^2 - 7x - 2\right)\sqrt{1 - x} = 0$.
б) (2 т.) Докажете, че ако *k>9*, то уравнението $\left(kx^2 - 7x - 2\right)\sqrt{1 - x} = 0$ има три реални различни решения $x_1 < x_2 < x_3$.
в) (2 т.) Ако *k>9*, пресметнете най – малката стойност на израза $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3$, където $x_1$, $x_2$ *и* $x_3$ са корени на горното уравнение.

**Решение.** а) Ясно е, че *x=1* е решение на нашето уравнение. Други решения мога да се получат от уравнението $4x^2 - 7x - 2 = 0$, при което само от тези корени, които са по – малки от *1*, защото иначе функцията . $\left(4x^2 - 7x - 2\right)\sqrt{1 - x}$ няма смисъл. По такъв начин получаваме, че уравнението има две решения: $x_1=1$ и $x_2=-1/4$.

б) Нека *к>9.* Тогава решенията на уравнението $kx^2 - 7x - 2 = 0$ са реални числа (т. е. –съществуват), защото дискрминантата му е равна на *49+8к* очевидно е положителна. Да отбележим обаче, че това условие не е достатъчно. Трябва по – големият корен да е по – малък от *1.*Той очевидно е равен на $\dfrac{7 + \sqrt{49 + 8k}}{2k}$ и значи трябва $\dfrac{7 + \sqrt{49 + 8k}}{2k} < 1$. Последното неравенство (при условието *к>0*) очевидно има решение *к>9.*

в) Очевидно при горните условия
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2x_3 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 1 = \left(x_1 + x_2\right)^2 + 2x_1x_2 + 1 = \frac{49}{k^2} - \frac{4.7}{7k} + 1 = f(k).$$
Ако положим сега $\dfrac{7}{k} = t < \dfrac{7}{9}$, то се получава, че най – малката стойност на *g(t)=f(7/k)=* $t^2 - \dfrac{4}{7}t + 1$ се достига при *t=2/7*, значи при *k=49/2*. Тя съответно е равна на *45/49.*

## Задача 2.

Даден е правоъгълен триъгълник *ABC* с прав ъгъл при *C* и височина *CD* към хипотенузата. В триъгълниците *ABC*, *ACD* и *BCD* са вписани окръжностите *К*, $K_1$ и $K_2$ с радиуси *r*, $r_1=3$ *и* $r_2=4$ съответно.

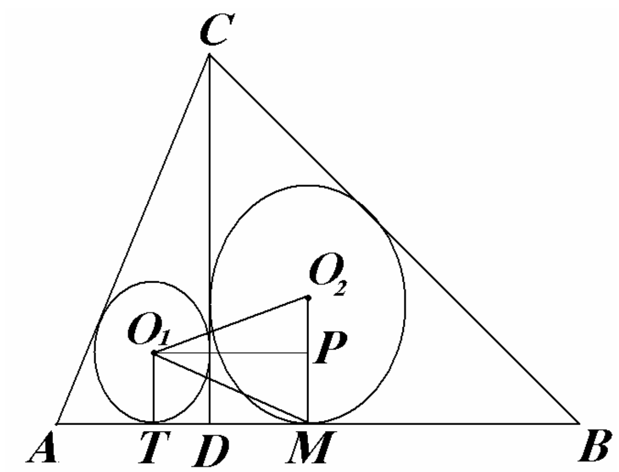
а) (2т.) Докажете, че $\frac{r_1}{r}=\cos\alpha$, $\frac{r_1}{r}=\sin\alpha$ (α е ъгълът при *A*) и *r=5* .

б) (3т.) Докажете, че *AB=25*. Пресметнете лицето на триъгълника $O_1O_2M$, където $O_1$ и $O_2$ са центровете на $K_1$ и $K_2$, а *M* е допирната точка на $K_2$ и *AB*.

в.) (2 т.) Нека медианата *AN* пресича *CD* в точката *P*. Докажете, че *CP/PD=25/9* и пресметнете лицето на триъгълника *APC*.

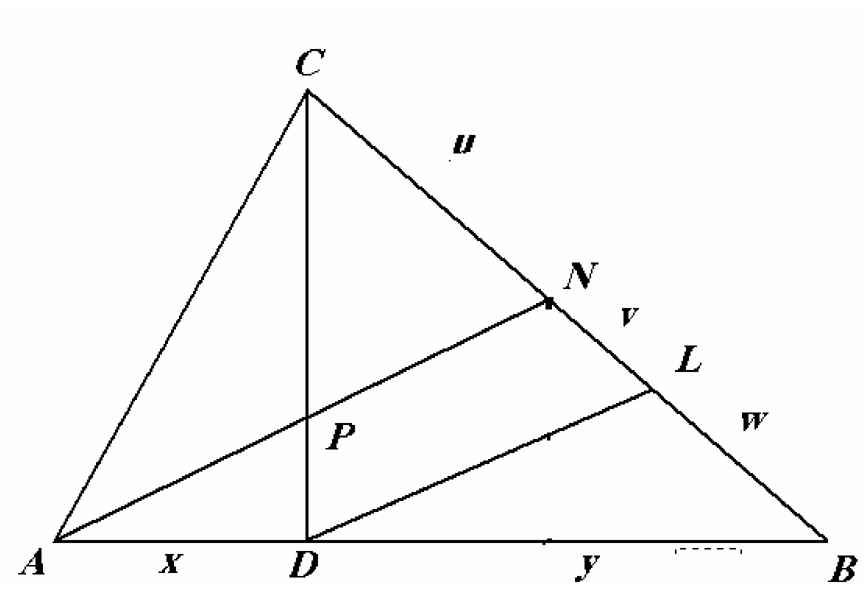
**Решение.** а) Триъгълникът *ABC* е подобен на *ACD* и *BCD* съответно и коефициентите на подобие са очевидно cosα и sinα. След това имаме $\frac{r_1^2}{r^2}+\frac{r_1^2}{r^2}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ и значи *r=5*.

б) Може да се види от таблиците с формули, че за всеки правоъгълен триъгълник $r=\frac{a+b-c}{2}$, където a, c и r са съответните елементи на триъгълнка. В дадения случай имаме $5=\frac{c\left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-1\right)}{2}$ ; c=25.




Сега, рисунката по – горе дава представа за геометричната ситуация. $O_1P$ (което прекарваме успоредно на AB) има дължина TD+DM= $O_1P$ =3+4=7. След това получаваме, че търсеното лице е равно на1/2$O_2$M. $O_1$P=1/2.7.4=14.

в) Да разгледаме рисунката, която следва.




След това прекарваме през D отсечка, успоредна на AM (тя пресича BC в точка L, която е среда на BN. Да обележим след това, че след лесни пресмятания се вижда, че x=c.cos$^2$α и y=c.sin$^2$α.. От това и теоремата на Талес следва, че u=v+w, v/w=tg$^2$α и значи u=v+w.=v+v tg$^2$α=v.1/ cos$^2$α.=25/9. От друга страна $S_{APC}/S_{ACD}$=25/34, а лицето на ADC е равно на 54. Следователно търсеното лице равно на 675/17.

## **Задача 3**.

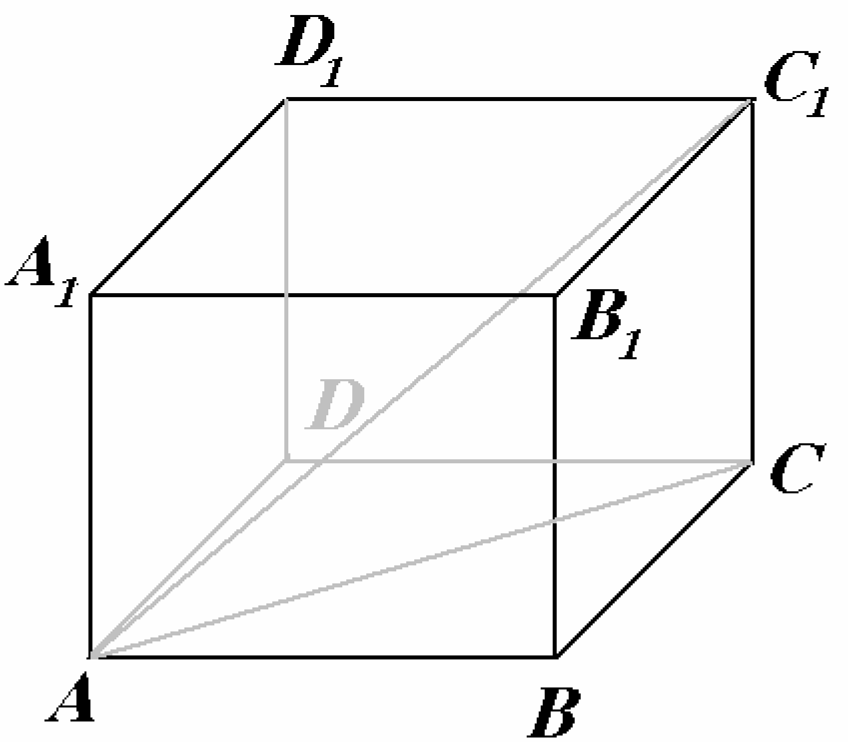
Даден е правилен паралелепипед с основи ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ за който AB=a, BC=$a\sqrt{2}$ и ъгълът между правата $AC_1$ и ABCD е равен на $30^0$.

а) (3 т.) Пресметнете обема на паралелепипеда.

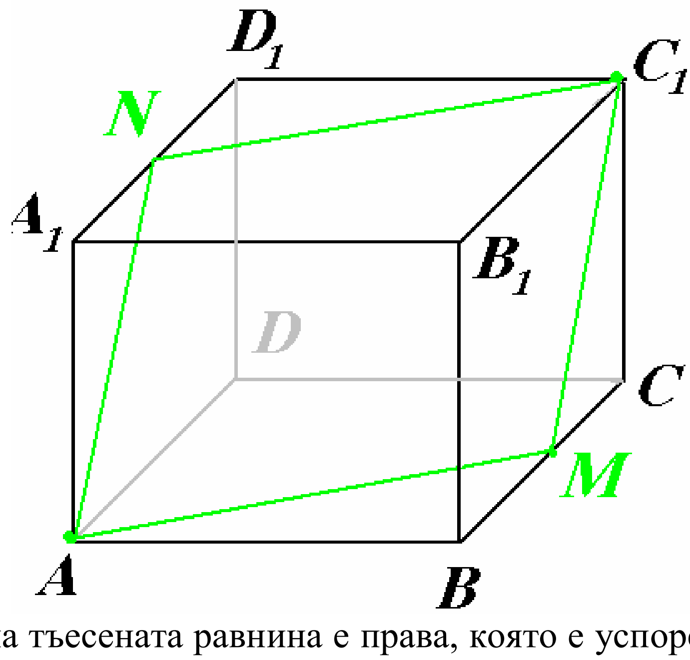
б) (2 т.) Нека α е равнината, която минава през точките A, $C_1$ и средата M на BC. Пресметнете ъгълът между α и основата ABCD на паралелепипеда. Докажете, че сечениетно на α с повърхнината на паралелепипеда.

в) Нека O е център на стената $ABB_1A_1$. Пресметнете косинуса ъгъла между правите $D_1O$ и AM.

**Решение.** а) Диагоналът AC на основата ABCD е равен на $AC=\sqrt{a^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2}=a\sqrt{3}$. След това от правоъгълния триъгълник $ACC_1$ и Петагоровата теорема следва, че $CC_1=ACtg30^0=AC\dfrac{\sqrt{3}}{3}=a$. Значи $V=a^3\sqrt{2}$.



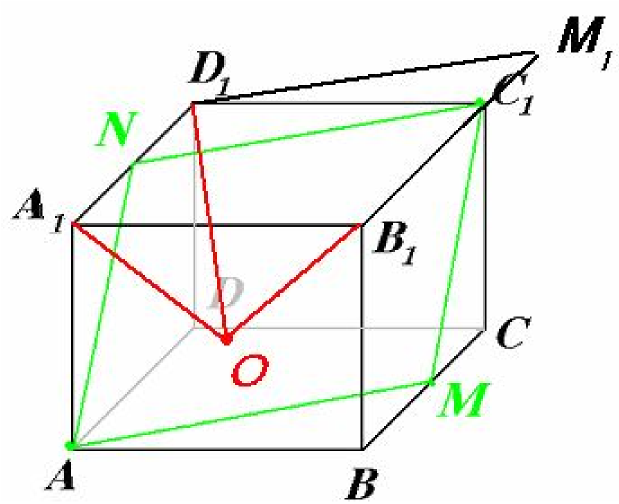

б) Всяка равнина пресича две неуспоредни на нея успоредни равнини в успоредни прави.




Значи сечението на тъсената равнина е права, която е успоредна на $C_1M$ и минава през точката A. С дтруги думи това е павата AN, която е успоредна на $C_1M$ и минава през A. Значи тя пресича $A_1D_1$ в средата N на тази отсечка. Очевидно AN и $C_1M$ са успоредни и равни. Нещо повече, AM=AN, защото са еднакво разположени прави в едкакви правоъгълници; значи успоредникът е ромб. Слеедователно лицето му е равно на половината от проиведението на диагоналите. $AC_1$ е равен на $2CC_1$, тоест на *2a,* а MN= $a\sqrt{2}$. Значи лицето на сечението е $a^2\sqrt{2}$.

И накрая, ако ортоганалната проекция в някоя равнина на равнинна фигура с лице S има лице σ, то σ=Scosφ, където φ е двустенният ъгъл между равнините. В случая лесно се вижда, че $\sigma = a^2\frac{\sqrt{2}}{2}$, а S=$a^2\sqrt{2}$, значи cos φ=1/2; φ=$60^0$.

в).




Прекарваме $D_1M_1$, успоредна на $AM$, като $M_1$ лежи на $B_1C_1$. Търсеният ъгъл е $OD_1M_1$. Да отбележим,че $D_1M_1 = AM = a\sqrt{\frac{3}{2}}$. От триъгълника $OD_1A_1$ $\left(\left(\sphericalangle A_1 = 90^0\right)\right.$ получаваме $D_1O = a\sqrt{\frac{5}{2}}$. От $\triangle OB_1M_1$ $(\measuredangle B_1 = 90^0)$ се получава,че $OM_1 = a\sqrt{5}$. След това от косинусовата теорема за триъгълника $OD_1M_1$ се получава,че търсеният косинус е равен на $-\frac{1}{15}$.