УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул.”Хр. Смирненски” №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02) 865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

ПРЕДВАРИТЕЛЕН КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

5 АПРИЛ 2015 ГОДИНА

ВТОРИ ВАРИАНТ- ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

1. Числата *a*, 5, *b*, *c*, 14 образуват в този ред аритметична прогресия. Тогава a е равно на
а) 1 б) 3/2 в) 2 г) 5/2

Коментар: Ако разликата на прогресията е d , то трябва 5+*d*+*d*+*d*=14; 3*d*=9; *d*=3 и *a*=5-3=2.

2. В правоъгълен трапец с ъгъл 150^0 е вписан кръг с лице 1. Тогава лицето на трапеца е
а) 4 б) $\dfrac{6}{\pi}$ в) π^2 г) $\sqrt{3}$

Коментар: Лицето (=1) на кръг с радиус *r* е равно на πr^2; $\pi r^2 = 1$; $r = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Височината на трапеца е диаметъра на вписаната окръжност и значи в отговора π би трябвало да е в знаменател. С други думи отговорът би трябвало да е (*и е*) б).

3. Дадена е функцията $f(x) = x^3 + x - 2$. Точка M е от графиката й и лежи в I квадрант. Точка P е проекцията на M върху оста *Ox*. Дадено е, че $\measuredangle MOP = 45^0$. Тогава ординатата на точка M е равна на
а) 1 б) 2 в) $\sqrt[3]{2}$ г) 5/2

Коментар: От условието се вижда, че *M* лежи на правата $y = x$. Значи $y = x^3 + x - 2 = x$; $x^3 - 2 = 0$ и отговорът е в).

4. Околните ръбове на триъгълна пирамида са равни на 1, 2 и 3 и са два по два взаимно перпендикулярни. Тогава обемът на пирамидата е
а) 6 б) 3 в) 2 г) 1

Коментар: Всеки околен ръб е височина към околната стена, която не го съдържа.

Например ръбът с дължина 1 е височина в пирамидата към стената с катети 2 и 3. Тя има лице 3 (защо?) и значи обемът е равен на 1, тоест имаме отговор г).

5. Най-голямата стойност на функцията $f(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$ се достига при *x* равно на:

а) 2π б) π в) π/2 г) cos 1

Коментар: $f(2\pi) = 1; \quad f(\pi) = -1 = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Значи отговорът е а) или г). Остава само да се съобрази, че $\cos 2\pi = 1 > \cos(\cos 1)$; значи отговорът е а).

Забележка: Разбира се, трябва да се убедим, че $\cos 1 \neq 2k\pi$ за всяко цяло k - това е почти очевидно, но такава степен на прецизност не е необходима в този конкурс. Това не значи, че е трудно. Забавно (това няма отношение към изпита) е да отбележим, че $\dfrac{\pi}{4} < 1 < \dfrac{\pi}{3}$ (радиани) и значи $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \cos 1 > \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$ (защо ?), а интервалът $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ не съдържа числа от вида $2k\pi$ (защо ?:).

6. (5 т.) Дадена е функцията $f(x) = \lg^2 x + \lg x^2 + a$.

а) (2 т.) За кои стойности на параметъра "*a*" графиката на *f(x)* отсича от абсцисата Ox отсечка с дължина $\dfrac{1}{5}$.

б) (1 т.) Пресметнете най – малката стойност на функцията $f(x)$.

в) (2 т.) Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$, пресметнете стойността на израза $x_1 x_2$ и докажете, че $x_1 + x_2 \geq \dfrac{1}{5}$.

Решение: а) От свойствата на логаритъма получаваме, че $f(x) = \lg^2 x + 2\lg x + a$. Нека x_1 и x_2 са корените на уравнението $f(x) = 0$ и $x_2 \geq x_1$. От $f(x) = 0$ получваме, че $x_2 = 10^{-1+\sqrt{1-a}}$ и $x_1 = 10^{-1-\sqrt{1-a}}$. По условие $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{5}$. Значи

$$10^{-1+\sqrt{1-a}} - 10^{-1-\sqrt{1-a}} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{10^{\sqrt{1-a}}}{10} - \frac{1}{10.10^{\sqrt{1-a}}} = \frac{2}{10} \quad \Rightarrow \quad 10^{\sqrt{1-a}} - \frac{1}{10^{\sqrt{1-a}}} = 2$$

След това полагаме $10^{\sqrt{1-a}} = u > 0$, получаваме уравнението $u^2 - 2u - 1 = 0$ от където се вижда, че $u = 1 + \sqrt{2}$.

Значи $a = 1 - \lg^2\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 0{,}85348277471412923240601493698$.

б) $f(x)=\left(\lg x+1\right)^2+a-1 \quad \Rightarrow \quad HMCf=a-1$.

Забележка: Може да се разсъждава и „напълно стандртно”: НМС на u^2-2u-1 се достига при $u_0=1; 10^{\sqrt{1-a_0}}=1=10^0$, значи $\sqrt{1-a_0}=0$ и $a_{\min}=a_0=1$.

в) $x_1x_2=10^{-1-\sqrt{1-a}}.10^{-1+\sqrt{1-a}}=\dfrac{1}{100}$.

$$x_1+x_2\geq 2\sqrt{x_1x_2}=2\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{1}{5}.$$

7. (5 т.) В ромба *ABCD* с дължини на диагоналите d_1 и d_2 е разположен квадрат, страните на който са успоредни на диагоналите му. Върховете на квадрата лежат на страните на ромба.

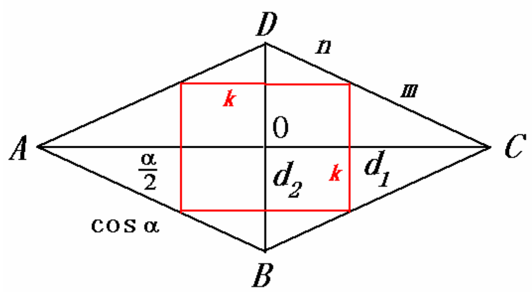
а) (2 т.) Докажете, че ако дължината на страната на квадрата е равна на k, то

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$$

б) (2 т.) Нека острият ъгъл на ромба е равен на α, а дължината на страната му е равна на $\cos\alpha$. Изразете лицето σ на квадрата като функция на α: $\sigma=\sigma\left(\alpha\right)$. При коя стойност на $\sin\alpha$ лицето $\sigma\left(\alpha\right)$ е най – голямо?

в) (1 т.) Пресметнете $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sigma(\alpha)}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}$.

Решение: а) От триъгълникът *ACD* се вижда, че $\dfrac{k}{d_1}=\dfrac{n}{n+m}$, а от $\triangle BCD$, че $\dfrac{k}{d_2}=\dfrac{m}{n+m}$. Събираме двете равенства и получаваме $\dfrac{k}{d_1}+\dfrac{k}{d_2}=\dfrac{n}{n+m}+\dfrac{m}{n+m}=1$.



б) От $\triangle AOB$ следва, че $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{AO}{AB}=\frac{\frac{d_1}{2}}{\cos\alpha}$ и значи $d_1=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$. От същия триъгълник получаваме аналогично, че $d_2=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$ (защото $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{OB}{AB}$). След това да отбележим, че от $\frac{1}{k}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}$ следва, че

$k=\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}=\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos^2\alpha}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\right)}$ и окончателно $k=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}$. Значи

$\sigma(\alpha)=k^2=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. Тъй като $\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha$ и

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\left(1-\sin\alpha\right)\left(1+\sin\alpha\right)$, то след преработване получаваме $\sigma(\alpha)=\sin^2\alpha\left(1-\sin\alpha\right)=\sin^2\alpha-\sin^3\alpha$. Остава да се съобрази, че функцията t^2-t^3 в интервала [0,1] има най-голяма стойност $\frac{4}{27}$, която се достига при $t_0=\sin\alpha_0=\frac{2}{3}$.

в) $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha\left(1-\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\sin^2\alpha\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}$.

За да пресметнем последната граница, полагаме $\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$. Тогава $\beta\to 0$ и

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\beta\to 0}\frac{\left(1-\cos\beta\right)}{\beta^2}=\lim_{\beta\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{\beta^2}=\lim_{\beta\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\beta}{2}}{4\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Разбира се, може да се разсъждава и по – различно; например така:

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma(\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sigma(\alpha)}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\frac{\sin^2\frac{\pi}{2}}{\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\lim_{\beta\to 0}\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}=\frac{1}{2};\quad \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

Ще отбележим, че по принцип всяка задача допуска *безброй много* формално различни решения. Тук предлагаме версия, която по мнение на комисията е „типична”.

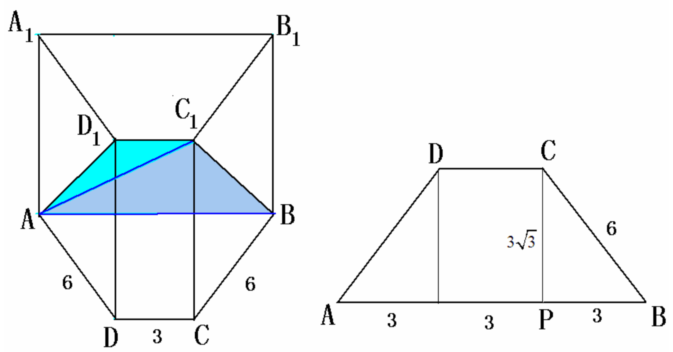
8. (5 т.) Основата на права призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е равнобедрен трапец $ABCD$ с основи $AB=9$ и $CD=3$. В трапеца може да се впише окръжност. Дължината на телесният диагонал AC_1 е равна на 9.
а) (2 т.) Пресметнете обемът на призмата.
б) (1 т.) Пресметнете дължините на страните на AC_1D_1
г) (2 т.) Пресметнете лицето на сечението, на равнината (AC_1D_1) с призмата.

Решение:
а) Първо намираме лицето на трапеца $ABCD$. Тъй като в него може да се впише окръжност, то $AB+CD=AD+BC$, т.е. $3+9=2AD$, откъдето $AD=BC=6$. Нека CP е височината на трапеца $ABCD$. Тогава $PB=3$ и от правоъгълния триъгълник PBC намираме $CP^2=6^2-3^2=27$, т.е. $CP=3\sqrt{3}$. За лицето на основата намираме

$$S_{ABCD}=\frac{(AB+CD)}{2}CP=\frac{(3+9)}{2}3\sqrt{3}=18\sqrt{3}.$$

Имаме $AC^2=AP^2+CP^2=6^2+27=63$ и от от правоъгълния триъгълник ACC_1 намираме височината на призмата $CC_1=\sqrt{AC_1^2-AC^2}=\sqrt{81-63}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. Тогава обемът на призмата е

$$V=S_{ABCD}.CC_1=18\sqrt{3}.3\sqrt{2}=54\sqrt{6}.$$



б) По условие $AC_1 = 9$ и $C_1D_1 = 3$, остава да намерим AD_1. От правоъгълника ADA_1D_1 имаме $AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{6^2 + 18} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

в) Търсеното сечение е равнобедрения трапец ABC_1D_1. Ако D_1M е височината му, имаме $D_1M^2 = AD_1^2 - AM^2 = 54 - 9 = 45$, откъдето $D_1M = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.
Следователно лицето на сечението е

$$S_{ABC_1D_1} = \frac{(AB + C_1D_1)}{2}.D_1M = \frac{(9+3)}{2}.3\sqrt{5} = 18\sqrt{5}.$$

ПОПЪЛНЕНА ТАБЛИЦА

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
в	б	в	г	а

Окончателната оценка – на база получен брой точки – се определя по методика, приета от УАСГ.