УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

# П Р Е Д В А Р И Т Е Л Е Н  К О Н К У Р С Е Н  И З П И Т  П О  М А Т Е М А Т И К А

## 26 АПРИЛ 2015 ГОДИНА

### ПЪРВИ ВАРИАНТ-ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

**1.** (1 т.) Графиките на функциите $f(x)=x^3+x-a$ и $g(x)=x^3+ax^2-x$ имат единствена пресечна точка $M(x_0,y_0)$ със строго положителни координати. Координатите на т. $M$ са:

а) (1, 1) б) (2, 1) в) (1/2, 1/2) г) (3/2, 2)

**Коментар:** Ясно е, че трябва $y_0=f(x_0)=g(x_0)$, тоест уравнението $f(x)=g(x)$ трябва да има единствено положително решение. Получава се последователно $x^3+x-a=x^3+ax^2-x;\ ax^2-2x+a=0$, а ако последното уравнение има корен(и), то те са положителни (защо?). За да има само един корен, трябва дискриминантата $1-a^2=0$, значи $a=1$ ( защо?) и $x_0=y_0=1$. **Отг. а)**

**2.** (1 т.) Височината на конус е 2 пъти по-голяма от височината на цилиндър, а диаметърът на основата му е 2 пъти по-малък от диаметъра на основата на цилиндъра. Тогава отношението на обема на цилиндъра към обема на конуса е:

а) 1 б) 2 в) 8/3 г) 6

**Коментар:** Разгледайте справочника с формули. **Отг. г)**

**3.** (1 т.) Ако $a_n$ и $b_n$ са числови редици и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}$ е равно на:

а) 0 б) -1 в) 1 г) $\infty$

**Коментар:** Ясно е, че $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$ . Значи $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{b_n}+1}{\frac{a_n}{b_n}-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$. **Отг. б)**

**4.** (1 т.) Основата на пирамида е правоъгълен триъгълник, а всички околни ръбове образуват равни ъгли с основата. Тогава върхът на пирамидата се проектира в:

а) средата на хипотенузата на триъгълника б) върха на правия ъгъл на триъгълника в) центъра на вписаната окръжност в триъгълника г) ортоцентъра на триъгълника

**Коментар:** В справочниците с формули е включен фактът, че ако околните ръбове сключват равни ъгли с основата на някоя пирамида, то върхът на пирамидата се проектира в центъра на описаната окръжност, който е средата на хипотенузата, ако основата е правоъгълен триъгълник. **Отг. а)**

**5.** (1 т.) Най-голямата стойност на функцията $\cos x - \sin x$ е равна на

а) 2 б) $\sqrt{2}$ в) 1 г) -1

**Коментар:** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, което означава, че най – голямата стойност на функцията $\cos x - \sin x$ е равна на $\sqrt{2}$ (защо?). **Отг. б).**

**6.** (5 т.) Дадена е функцията $f(x) = 4^x - 2^{x+1} + a$.

а) (2 т.) За кои стойности на параметъра "$a$" графиката на $f(x)$ отсича от абсцисата $Ox$ отсечка с дължина 1.
б) (1 т.) Пресметнете най – малката стойност на функцията $f(x)$.
в) (2 т.) Ако $x_1$ и $x_2$ са корените на уравнението $f(x) = 0$, пресметнете стойността на израза $A = 8^{x_1} + 8^{x_2}$.

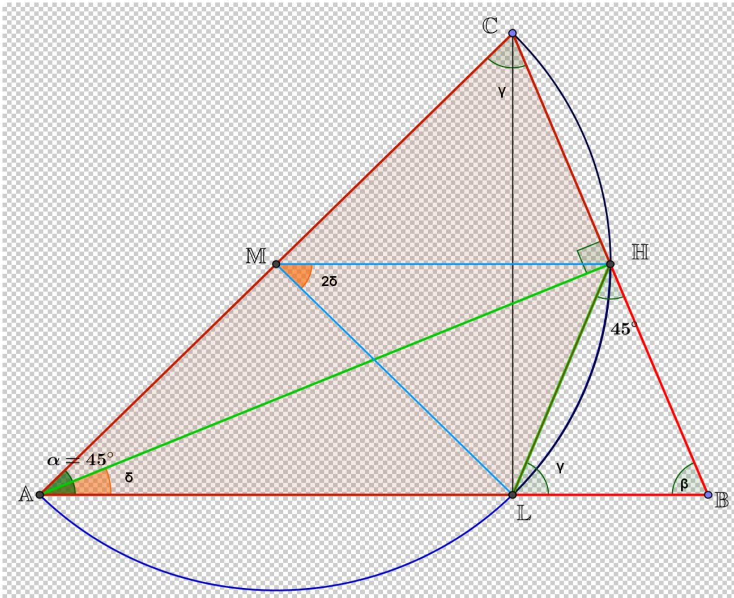
**Решение:** а) Нека $g(u) = u^2 - 2u + a$. Съобразете самостоятелно, че $g\left(2^x\right) = f(x)$. Това позволява лесно да се реши уравнението $f(x) = 0$:
$0 = u^2 - 2u + a = u^2 - 2u + 1 - 1 + a = (u-1)^2 + a - 1$; значи $u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-a}$; $2^{x_{1,2}} = 1 \pm \sqrt{1-a}$ и съответно $x_2 = \log_2\left(1 + \sqrt{1-a}\right) > \log_2\left(1 - \sqrt{1-a}\right) = x_1$. Следва да отбележим, че очевидно $a < 1$ и по условие $x_2 - x_1 = 1$. Значи $1 = \log_2\left(1 + \sqrt{1-a}\right) - \log_2\left(1 - \sqrt{1-a}\right) = \log_2 \frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}}$,
$\frac{1+\sqrt{1-a}}{1-\sqrt{1-a}} = 2$ окончателно $\sqrt{1-a} = \frac{1}{3}$ и $a = \frac{8}{9}$.

б) Най – малката стойност на $f(x)$ е най – малка стойност и на $g(u)$ в интервала $(0,\infty)$, $u = 2^x$. Тъй като $g(x) = (u-1)^2 + a - 1$, то най – малката стойност е равна на $a - 1$ и се достига при $u = 1; x = 0$.

в) $8^{x_1} + 8^{x_2} = u_1^3 + u_2^3 = \left(u_1 + u_2\right)^3 - 3u_1u_2\left(u_1 + u_2\right)$ и от формулите на Виет се получава $8^{x_1} + 8^{x_2} = 8 - 6a$.

**7.** (5 т.) В остроъгълния $\Delta ABC$ $AH$ е височина, $HL$ е ъглополовяща в $\Delta AHB$. Известно е, че $AC = b$ и $\angle ACB = \angle BLH = \gamma$.
а) (2 т.) Пресметнете лицето на четириъгълника $ACHL$.
б) (1 т.) За коя стойност на $\gamma$ лицето на $ACHL$ е най-голямо?
в) (2 т.) Нека $M$ е среда на $AC$. Докажете, че дължината на диаметъра на описаната около $\Delta LMH$ окръжност е равен на дължината на радиуса на описаната около $\Delta ABC$ окръжност.

**Решение:** а) Да отбележим, че около четириъгълника $ACHL$ може да се опише окръжност $\kappa$, защото по условие $\angle ALH = 180^\circ - \gamma$, а срещуположният му ъгъл е $\gamma$. Окръжността $\kappa$ е описана и около триъгълника $ACH$, който е правоъгълен с хипотенуза $AC = b$. Значи $AC$ е диаметър на $\kappa$. Но тогава $\angle CLA = 90^\circ$, защото хордата $AC$ е диаметър. И така, диагоналите $AH$ и $CL$ са височини в $\Delta ABC$. За да пресметнем лицето, трябва да пресметнем диагоналите и ъгъла между тях. Това не е трудно – достатъчно е да забележим, че $\Delta ABC \simeq \Delta BHL$, защото имат два равни ъгъла – $\beta$ (общ) и $\gamma$ (по условие). Следователно $\angle BAC = 45^\circ$.




След това можем лесно да пресметнем диагоналите: $AH = b\sin\gamma$ (от $\Delta ACH$) и $CL = b\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (от $\Delta ACL$). Ъгълът между $AH$ и $CL$ е равен на $\angle ABC = \beta = 135^\circ - \gamma$, защото са ъгли с перпендикулярни рамене. От казаното до тук е ясно, че $S_{ACHL} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}b^2 \sin\gamma \sin\left(135^\circ - \gamma\right)$.

б) Лесно се вижда (пише го в таблиците), че

$\sin\gamma\sin\left(135^\circ - \gamma\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right) - \cos 135^\circ\right)$. Значи максималната стойност на нашето произведение се достига, когато $\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right)$, тоест когато $\cos\left(2\gamma - 135^\circ\right) = 1$ и значи $2\gamma - 135^\circ = 0, \gamma = 67^\circ 30'$.

в) Страната $LM$ на $\Delta LMH$ е равна на $\dfrac{b}{2}$, защото е медиана в правоъгълния триъгълник $ALC$ с хипотенуза $b$. $\angle AHM = \angle HAC = 90^\circ - \gamma$, защото $\Delta AHM$ е равнобедрен. Значи $\angle LHM = \angle LHA + \angle AHM = 45^\circ + 90^\circ - \gamma = \beta$. От синусовата теорема непосредствено получаваме, че $2R_{\Delta LHM} = R_{\Delta ABC}$.

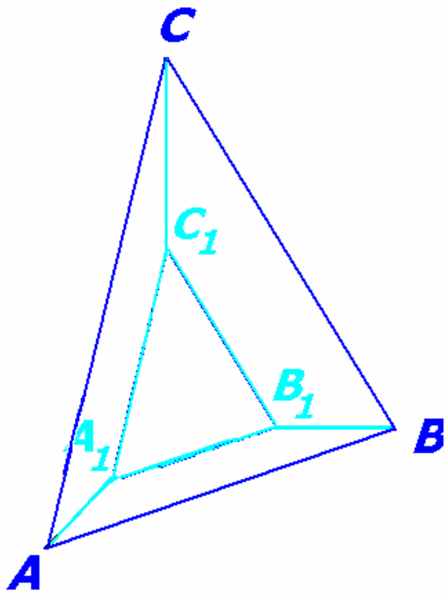
**8.** (5т.) Дадена е пресечена триъгълна пирамида $ABCA_1B_1C_1$, такава че околните ръбове $AA_1, BB_1, CC_1$ са два по два взаимно перпендикулярни и $AA_1 = BB_1 = 1, CC_1 = 2$. Дадено е, че лицата на двете основи се отнасят както 4:1.

а) (2 т.) Докажете, че обемът на пирамидата е равен на $\dfrac{7}{3}$, а височината на пирамидата е $\dfrac{2}{3}$.

б) (2 т.) Пресметнете разстоянието от връх $C_1$ до равнината $ABA_1B_1$.

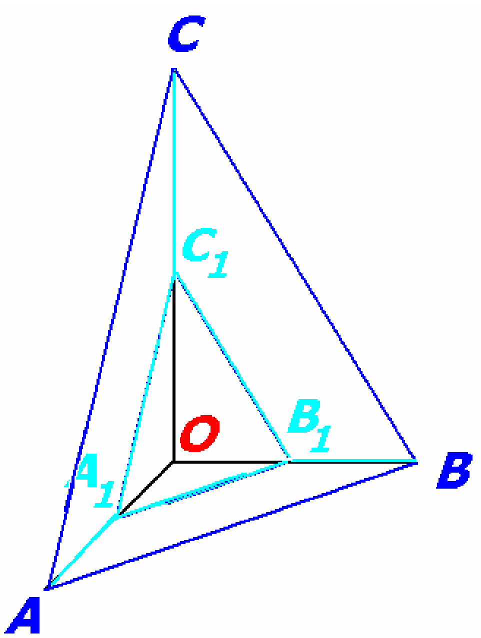
в) (1. т.) Пресметнете косинуса на ъгъла между околните стени, съдържащи околния ръб $BB_1$.

**Решение:** а) Добре е да изобразим пресечената пирамида, както е показано на рисунката по – долу.

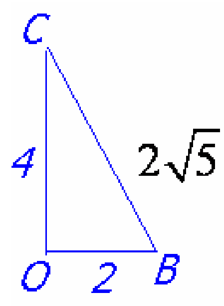



Продължението на пресечената пирамида до непресечена е пирамида с прав тристенен ъгъл при върха $O$. От условието следва, че $A_1$, $B_1$ и $C_1$ са среди на $OA$, $OB$ и $OC$. Значи $OA$=$OB$=2 и $OC$=4.

Сега следват лесни сметки: $V_{OABC}=\dfrac{1}{3}S_{AOB}.OC=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}.2.2.4=\dfrac{8}{3}$ и $V_{OA_1B_1C_1}=\dfrac{1}{8}V_{OABC}=\dfrac{1}{3}$, защото пирамидите $OABC$ и $OA_1B_1C_1$ са подобни с коефициент на подобие $\dfrac{1}{2}$. Окончателно получаваме $V_{ABCA_1B_1C_1}=V_{OABC}-V_{OA_1B_1C_1}=\dfrac{7}{3}$. След това от рисунките е ясно, че височината на $ABCA_1B_1C_1$ е половината от височината $h$ на $OABC$. Тя се пресмята лесно: $h=\dfrac{3V_{OABC}}{S_{ABC}}=\dfrac{8}{S_{ABC}}$.




Лицето на $ABC$ се пресмята лесно, тъй като страните му се пресмятат стандартно с теоремата на Питагор; тук показваме един пример.




Аналогично се вижда, че $CA = 2\sqrt{5}$ и $AB = 2\sqrt{2}$ . Лесно се пресмята след това, че лицето на триъгълника $ABC$ е равно на 6. Значи $h = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, а височината на пресечената пирамида е $\frac{2}{3}$ .

б) От втората рисунка се вижда, че търсеното разстояние е равно на 2, защото $C_1O \perp (ABB_1A_1)$ съгласно теоремата за трите перпендикуляра.

в) Равнините, които се пресичат по $BB_1$ са перпендикулярни като стени на прав тристенен ъгъл.