УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул.”Хр. Смирненски” №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

П Р Е Д В А Р И Т Е Л Е Н К О Н К У Р С Е Н И З П И Т П О М А Т Е М А Т И К А

3 АПРИЛ 2016 ГОДИНА

Вариант 1.

1. (1 т.) Ако $\log_2 5 = a$ и $\log_4 3 = b$, то $\log_3 5$ е равен на:

а) ab ; б) 2a/b; в) b/a; г) a/2b.

Коментар: $b = \log_4 3 = \log_{2^2} 3 = \frac{1}{2}\log_2 3 \Rightarrow \log_2 3 = 2b$. От друга страна

$$\log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{a}{2b}.$$

2. Ъгъл α е от втори квадрант и $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Стойността на $\mathrm{cotg}\alpha$ е равна на

а) 3; б) $-1/3$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; г) $-2\sqrt{2}$.

Упътване: $\cos\alpha < 0$, ако $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Отг. (г)

3. (1 т.) В триъгълник две от страните са 3 и 5, а ъглополовящата между тях е $\frac{15}{8}$. Третата страна на триъгълника е равна на:

а) 8; б) 7; в) 4; г) 6.

Коментар: $l^2 = ab - mn$, значи $\frac{225}{64} = 15 - mn; mn = \frac{15.49}{64}$. От друга страна $\frac{m}{n} = \frac{3}{5}$ (защо). Умножаваме двете равенства и получаваме $m^2 = \frac{3}{5}.\frac{15.49}{64} = \frac{9.49}{64}$.

Значи $m = \frac{21}{8}$, $n = m\frac{5}{3} = \frac{35}{8}$ и $m + n = 7$.

4 (1 т.) Дадени са три окръжности, k_A, k_B и k_C с центрове съответно A, B и C и с радиуси $r_A=1$, $r_B=2$ и $r_C=3$, всеки две от които се допират външно. Лицето на триъгълника ABC е равно на:

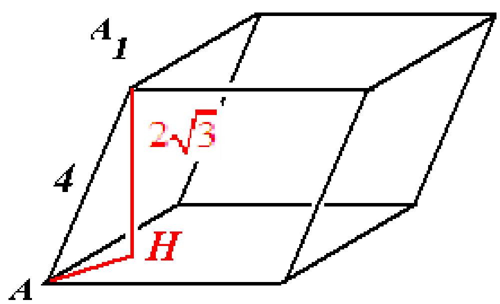
а) 3; б) 4; в) 5; г) 6.

Упътване: Ако две окръжност и се допират външно, то разстоянието между центровете им е сумата на техните радиуси. Следователно ΔABC има страни 3,4 и 5. Отг. (г).

5. (1 т.) Основата на призма с обем 36 е успоредник със страни 3 и 4 и ъгъл 60°. Околният й ръб е 4. Ъгълът между околния ръб и основата е:

а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°.

Коментар: Лицето S на основата е равно на $S = 3.4.\sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$, обемът е 36, следователно височината h е равна на $h = \frac{36}{6\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.



Ясно е от рисунката (A_1H е височината), че $\sin\angle A_1AH = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и значи $\angle A_1AH = 60^\circ$.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
г)	г)	б)	г)	в)

6. (5 т.) Дадено е уравнението $(k+1)\lg^2 x - 3k\lg x + k = 0$, където k е реален параметър.

а) (2 т.) Да се реши за $k=1$.

б) (1,5 т.) За кои стойности на k уравнението има реални корени x_1 и x_2, за които $10x_1x_2 = 10^{4k}$?

в) (1,5 т.) За кои стойности на k уравнението има точно едно решение, по - голямо от 1?

Решение: а) Полагаме $u = \lg x$ и получаваме квадратното уравнение $(k+1)u^2 - 3ku + k = 0$. То има дискриминанта $D = 9k^2 - 4k(k+1) = 5k^2 - 4k$ и корени $u_{1,2} = \dfrac{3k \pm \sqrt{5k^2 - 4k}}{2(k+1)}$. При k=1 се получава $u_1 = \dfrac{1}{2}; u_2 = 1$, съответно $\lg x_1 = \dfrac{1}{2}; \lg x_2 = 1$ и съответно $x_1 = \sqrt{10}; x_2 = 10$.

б) От предното подусловие е ясно, че $x_{1,2} = 10^{u_{1,2}}$. Значи $10x_1x_2 = 10.10^{u_1}.10^{u_2} = 10^{1+u_1+u_2}$. И така, $10^{1+u_1+u_2} = 10^{4k}$; $u_1 + u_2 = 4k - 1$ и от формулата на Виет следва, че $\dfrac{3k}{k+1} = 4k - 1$, което след преобразуване дава $4k^2 - 1 = 0; k_{1,2} = \pm\dfrac{1}{2}$. Да отбележим, че при $k_2 = \dfrac{1}{2}$ имаме $D<0$. Значи единственото решение е $k = -\dfrac{1}{2}$.

в) За да имаме точно едно решение, трябва уравнението $(k+1)u^2 - 3ku + k = 0$ да има само един положителен корен. Това означава, че имаме $D>0$ и $u_1 \le 0 < u_2$ или $u_1 = u_2 > 0$.

Ако $u_1 = 0$, то трябва и $u_2 = 0$ (защото тогава k е нула). Значи остава да се разгледа случая $D>0$ и $u_1 < 0 < u_2$. Тоест трябва да са в сила неравенствата $5k^2 - 4k > 0$ и $\dfrac{k}{k+1} < 0$. Решението на тази система е $k \in (-1, 0)$.

Нека $u_1 = u_2 > 0$, тогава $D=0$, тоест $5k^2 - 4k = 0$. Това уравнение има решения $k_1 = 0$ и $k_2 = \dfrac{4}{5}$. При $k=0$ уравнението е $u^2 = 0$, $\lg x = 0; x = 1$ което не удовлетворява условието. За $k = \dfrac{4}{5}$ уравнението е $\dfrac{9}{5}u^2 - \dfrac{12}{5}u + \dfrac{4}{5} = 0;\quad \dfrac{1}{5}(3u-2)^2 = 0$, от където получаваме $\lg x = \dfrac{2}{3}$, $x = \sqrt[3]{100} > 1$. И накрая да отбележим, че ако k=-1, то уравнението става линейно и има решение $k = \sqrt[3]{10} > 1$. Отговор: $k \in [-1, 0) \cup \left\{\dfrac{4}{5}\right\}$.

7 (5 т.) Даден е триъгълникът *ABC*, в който $\angle BAC = \alpha; \angle ABC = \beta; \angle BCA = \gamma$ и $BC = \cos\alpha; CA = \cos\beta; AB = \cos\gamma$.

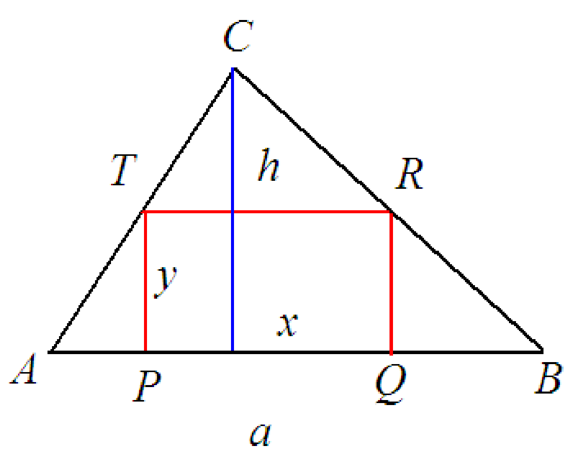
а) (2 т.) Докажете, че *ABC* е равностранен и височината му е равна на $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

б) (2 т.) Нека *PQRT* е правоъгълник, на който върховете *P* и *Q* лежат на отсечката *AB*, *R* е точка от *BC* и *T* лежи на отсечката *AC*. Ако *PQ*=*x*, пресметнете лицето *S* на *PQRT* като функция на *x*.

в) (1 т.) Пресметнете най – голямата стойност на *S*.

Решение: а) Прилагаме синусовате теорема: $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}$. От тук следва, че $\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = 0$ и значи $\sin(\beta-\alpha) = 0;\ \beta-\alpha = k\pi$. Ясно е, че *k*=0, тоест $\alpha = \beta$ защото α и β са ъгли в триъгълник. Аналогично получаваме, че $\alpha = \gamma$. И така, ΔABC е равностранен и страната му е равна на $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Значи височината му е равна на $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

б) Нека *ABC* е произволен тръгълник с основа *AB* = *a* , остри ъгли при върховете *A* и *B* и височина към нея *h*. Да разгледаме правоъгълника *PQRT* със страни *TP* = *y* и *PQ* = *x*, разположен както е показано на следващата рисунка (и както е казано в условието).

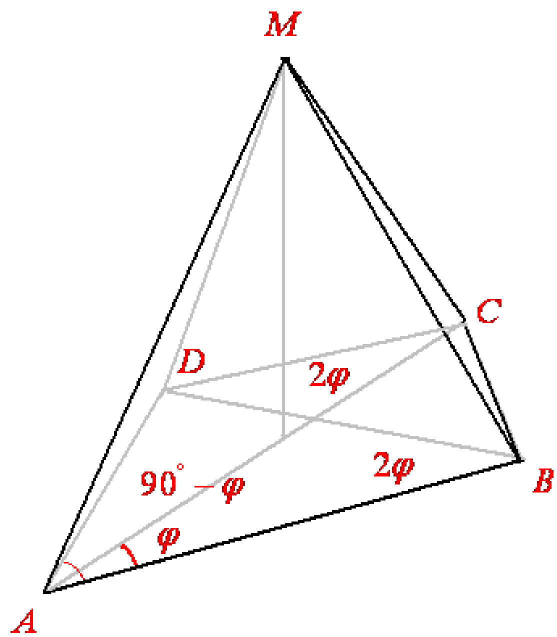


От подобието на триъгълниците ABC и TRC следва, че $\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$, откъдето $y = h - \frac{h}{a}x$. Лицето S на *PQRT* е равно на $xy = x\left(h - \frac{h}{a}x\right)$.

в) От $S = x\left(h - \frac{h}{a}x\right)$ лесно следва, че $S = \frac{h}{a}\left(\frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right)$. Сега е ясно, че най - голямата стойност на *S* е $\frac{ah}{4}$. В нашия случай $S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{32}$.

8. Дадена е четириъгълна пирамида $ABCDM$, такава че $AB = BD$, $\angle ABC = \angle ADC = 90^0$, $\angle ACD = 2\varphi$ и $AC = a$. Всички околни стени на пирамидата сключват с равнината *ABCD* на основата ъгъл α.

а) (2,5 т.) Пресметнете обема на пирамидата.
б) (1,5 т.) Пресметнете пълната повърхнина на пирамидата.
в) (1 т.) Пресметнете радиуса на вписаната сфера.



Решение: а) От условието лесно следва, че около основата на пирамидата се описва окръжност с диаметър AC и тогава $\angle ABD = \angle ACD = 2\varphi$. От $AB = BD$ следва, че $\angle BAD = 90^\circ - \varphi$, от където $\angle BAC = \angle BAD - \angle CAD = \varphi$.

Така получаваме:
$CD = a\cos 2\varphi$, $AD = a\sin 2\varphi$, $AB = a\cos\varphi$, $BC = a\sin\varphi$.

За лицето на основата се получава
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \dfrac{a^2}{2}(\sin 2\varphi\cos 2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)$. Очевидно полупериметърът p на $ABCD$ е равен на $\dfrac{a}{2}(\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi)$. Следователно радиусът r на вписаната в ABCD окръжност е равен на $r = \dfrac{S}{p} = a\dfrac{\sin 2\varphi\cos 2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}{\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi}$. Тъй като е даден двустенния ъгъл α между околна стена и основа, за височината H на пирамидата имаме $H = r.\mathrm{tg}\alpha$. Окончтелно за обема се получава

$$V_{ABCDM} = \frac{1}{3}SH = \frac{a^3}{6}\frac{(\sin 2\varphi\cos 2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)^2}{\sin 2\varphi + \cos 2\varphi + \sin\varphi + \cos\varphi}.\mathrm{tg}\alpha .$$

б) Пълната повърхнина на пирамидата е равна на $S_{\text{пп}} = S_{ABCD}\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$.

в) Радиусът R на вписаната сфера се получва по добре известната формула $R = \dfrac{3V_{ABCDM}}{S_{\text{пп}}}$.

Коментар: В предложеното решение не е използван по същество факта, че в основата *ABCD* може да се впише окръжност. Тази допълнителна информация води до равенството *AB*+*CD*=*BC*+*AD*, от което (вижте по – горе) се получава следното тригонометрично уравнение за φ: $\cos\varphi + \cos 2\varphi = \sin\varphi + \sin 2\varphi$.

Лесно се вижда, че то има единствено решение с геометричен смисъл и то е $\varphi = 30^\circ$. От това се получава, че обемът на *ABCDM* е равен на $\dfrac{a^3}{16}\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{tg}\alpha$ (подуслвие а). Съответно $S_{\text{пп}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)$ (подусловие б). Радиусът на вписаната сфера е равен на $R = \dfrac{a(3-\sqrt{3})\cos\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$ (подусловие в).