УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул.”Хр. Смирненски” №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

П Р Е Д В А Р И Т Е Л Е Н К О Н К У Р С Е Н И З П И Т П О М А Т Е М А Т И К А

24 АПРИЛ 2016 ГОДИНА

Вариант 2

Примерни решения

Задача 1. (1 т.) Прав кръгов конус има височина 4 и радиус на основата 3. Развивката на околната му повърхнина като сектор има ъгъл:

а) $\frac{3\pi}{5}$ б) $\frac{4\pi}{5}$ в) π г) $\frac{6\pi}{5}$.

Коментар: Дължината на дъгата, отсечена от сектор с ъгъл α (радиана) и радиус R е равна на αR. В тази задача R е дължината на образуващата на конуса: $R=\sqrt{3^2+4^2}=5$. От друга страна, дължината на окръжността на основата е равна на $2\pi r$, където r е радиусът на основата (r=3). Значи $5\alpha=6\pi$ и съответно $\alpha=\frac{6\pi}{5}$.

Задача 2. (1 т.) Най-голямото цяло число, удовлетворяващо неравенството $\log_{\frac{1}{7}}(\log_3 x)\geq 0$ е:

а) 3 б) 1 в) 7 г) 0.

Упътване: За x = 1 или 0 изразът няма смисъл (защо?). Остават отговорите 3 или 7. Ясно е, че $\log_{\frac{1}{7}}(\log_3 3)=\log_{\frac{1}{7}}1=0$. Остава да се забележи, че $\log_3 7>\log_3 3=1$, от където следва, че $\log_{\frac{1}{7}}\left(\log_3 7\right)<0$.

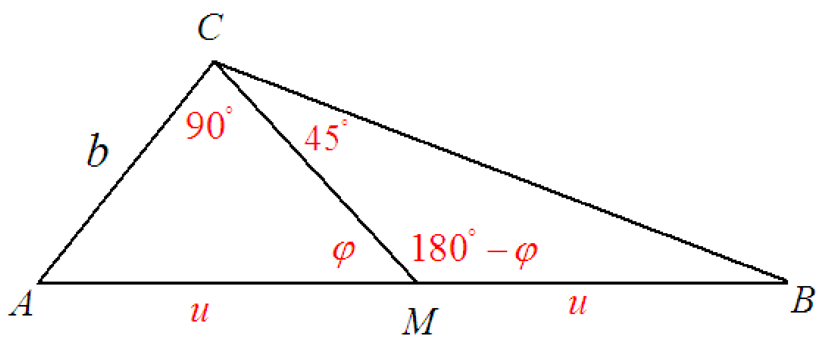
Задача 3. (1 т.) Решенията на уравнението $\sqrt{x^2-6x+9}=3-x$ са числата от интервала:

а) $[3,+\infty)$ б) $[3,3]$ в) $(-\infty,+\infty)$ г) $(-\infty,3]$.

Упътване: $x^2-6x+9=(x-3)^2$**.** Отговор: г)

Задача 4. (1 т.) В триъгълника ABC медианата CM е перпендикулярна на страната AC. Ако $AC=b$ и $\angle ACB=135^\circ$, страната BC е равна на:

а) $b\sqrt{3}$ б) $b\sqrt{2}$ в) $\dfrac{b\sqrt{2}}{2}$ г) $2b$.



Коментар: От правоъгълия триъгълник ACM следва, че $u=\dfrac{b}{\sin\varphi}$. Прилагаме синусовата теорема за триъгълника CMB и получаваме

$\dfrac{u}{\sin 45^\circ}=\dfrac{BC}{\sin\left(180^\circ-\varphi\right)}=\dfrac{BC}{\sin\varphi}$. Значи $BC=\dfrac{u\sin\varphi}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=b\sqrt{2}$.

Задача 5. (1 т.) Ако α е остър ъгъл, за който $4\sin^2\alpha+5\cos\alpha-5=0$, то α е от интервала:

а) $(0^\circ,15^\circ)$ б) $(45^\circ,60^\circ)$ в) $(60^\circ,75^\circ)$ г) $(75^\circ,90^\circ)$.

Упътване: От $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ следва, че $-4\cos^2\alpha+5\cos\alpha-1=0$ и значи $\cos\alpha=1$ или $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$. От условието следва, че или $\alpha=0^\circ$ (*което не е от посочените отговори*) или $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$. Тъй като $\cos x$ е намаляваща функция и $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$, то $\alpha>60^\circ$. Остава да видим дали $\alpha>75^\circ$. Това не е трудно: $\cos 75^\circ=\cos\left(30^\circ+45^\circ\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ и не е трудно да се съобрази, че $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>\dfrac{1}{4}$. Значи $\alpha\in(75^\circ,90^\circ)$.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
г	а	г	б	г

Задача 6. (5 т) Квадратното уравнение $kx^2+(1-k)x+k=0$ има реални корени x_1 и x_2.

а) (1 т,) За кои стойности на k корените са отрицателни?
б) (2 т.) Намерете минималната стойност на израза $A=2^{|x_1-x_2|}$ и при кои стойности на k тя се достига.
в) (2 т.) Ако $k=-\frac{1}{2}$, пресметнете стойността на израза

$$B=2^{x_1}(2^{x_2}-2^{-x_1})+\lg x_1+\lg x_2 .$$

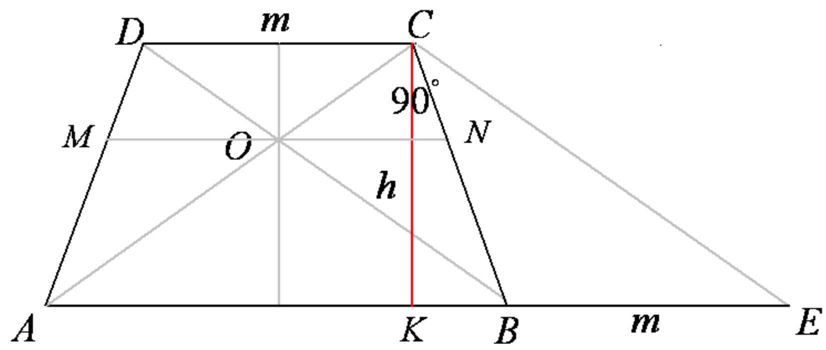
Решение: а) Да отбележим преди всичко, че условието изисква дискриминантата на уравнението $D=1-2k-3k^2$ да е неотрицателна, т.е. k трябва да е от интервала $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$ (При $k=0$ уравнението има корен $x=0$). Изискването за отрицателност сега е равносилно на $x_1+x_2<0$ и $x_1x_2>0$, което по формулите на Виет означава $\frac{k-1}{k}<0$ и $\frac{k}{k}=1>0$. Оттук $k\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$ (При $k=0$ коренът не е отрицателен).

б) Тъй като по дефиниция абсолютната стойност е неотрицателно число (тук дава разстоянието между x_1 и x_2) изразът A ще е най малък, когато $x_1=x_2$, т.е. когато $D=0$, откъдето $A=2^0=1$, а k е -1 или $\frac{1}{3}$.

в) Получаваме с формулите на Виет:
$B=2^{x_1+x_2}-2^0+\lg(x_1x_2)=2^{\frac{k-1}{k}}-1+\lg 1=2^3-1+0=7$ за $k=-\frac{1}{2}$ (да отбележим, че за $k=-\frac{1}{2}$ x_1 и x_2 са положителни).

Задача 7. (5 т) Диагоналите на равнобедрен трапец $ABCD$ са взаимно перпендикулярни, а височината му е h.

а) (1 т.) Пресметнете лицето на трапеца
б) (2 т.) Ако $CD=m$ (и височината е h), намерете AB и AD.
в) (2 т.) При условието на т. б). През пресечната точка на диагоналите е прекарана права успоредна на основите, отсичаща от бедрата отсечка MN . Намерете дължината на MN .



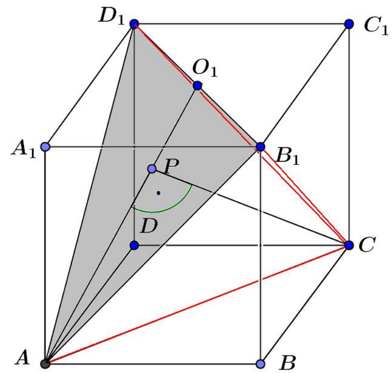
Решение: а) Да прекараме отсечката CE , успоредна и равна на диагонала BD, $E \in AB$. В получения триъгълник AEC ъгъл ACE е прав, страната AE е равна на сбора от основите на трапеца, а височината му през C е h и понеже е и медиана, $AE = 2h$. Тогава лицето на трапеца (което е равно на лицето на триъгълника ACE) е $\frac{2h}{2}.h = h^2$.

б) Тъй като $BE = CD = m$ то $AB = 2h - m$. От друга страна ако CK е височина в трапеца $(K \in AB)$ отсечката BK е равна на $h - m = KE - BE$. Сега от правоъгълния триъгълник BKC получаваме, че $BC = AD = \sqrt{2h^2 - 2hm + m^2}$.

в) Да означим с O пресечната точка на диагоналите на трапеца. От подобието на триъгълниците ACD и AOM (считаме, че M е от AD) следва:
$\frac{CD}{OM} = \frac{AC}{AO} = \frac{AO + OC}{AO} = 1 + \frac{OC}{AO} = 1 + \frac{CD}{AB}$ (ABO и CDO също са подобни триъгълници).
Оттук лесно следва, че $OM = \frac{AB.CD}{AB + CD} = \frac{m(2h - m)}{2h}$. Същото се получава и за ON.
Окончателно $MN = \frac{m(2h - m)}{h}$.

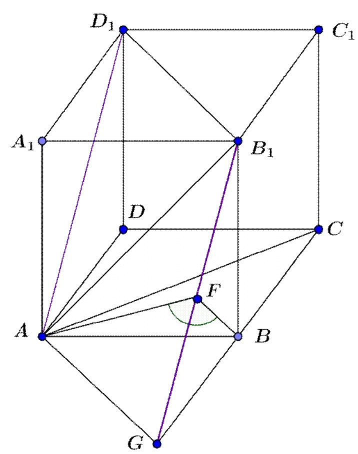
Задача 8. (5 т.) Кубът $ABCDA_1B_1C_1D_1$ има дължина на страната a.
(а) (2т.) Пресметнете разстоянието от точка C до равнината (AB_1D_1).
(б) (3т.) Пресметнете косинуса на ъгъла между равнините (AB_1D_1) и (BCC_1B_1).

Решение: а) Ясно е, че търсеното разстояние d е височината през върха C на пирамидата AB_1D_1C , всичките ръбове на която са равни на $a\sqrt{2}$ като диагонали в стени на куба. На следващата рисунка тази пирамида е означена със „затъмнена” основа и червени „околни” ръбове.



Нека P е центърът на $\triangle AB_1D_1$. Тогава $d = CP$ (пирамидата е правилна) и

$$d^2 = AC^2 - AP^2 = (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{12}{9}a^2, \text{ т.е. } d = \frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$



б) Тъй като правите BC_1 и AD_1 (съответно от равнините BCC_1B_1 и AB_1D_1) са успоредни, те ще са успоредни и на ръба на търсения двустенен ъгъл. Затова прекарваме B_1G успоредна и равна на BC_1 (и на AD_1), като точката G лежи на BC. Ясно е, че правата B_1G е ръбът на двустенния ъгъл. Тъй като триъгълниците AGB_1 и BGB_1 са равнобедрени (всъщност AGB_1 е равностранен – защо?) с обща основа B_1G, ако точката F е средата на B_1G, то AF и BF са перпендикулярни на B_1G и двустенният ъгъл се измерва с ъгъл $\varphi = \sphericalangle APB$. Сега AF и BF като височини са съответно равни на $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ и $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ и с косинусова теорема за $\triangle ABF$ (да напомним, че $AB = a$) получаваме $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Забележка: Разбира се, задачата може да бъде по различни начини. Например Ако S е лицето на триъгълика AB_1D_1, а σ на BB_1C_1, то по добре известната формула $\sigma = S\cos\varphi$ незабавно получваме $\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{\left(a\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}\cos\varphi$ и $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.