УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046, **Р. България**

тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63

e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

# КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

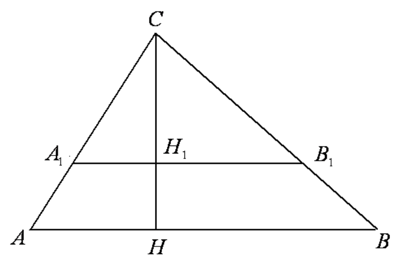
## 13 Юли 2016 ГОДИНА

## Вариант 1

**Задача 1.** $\Delta ABC$ има височина $CH = 4$. На какво разстояние от връх $C$ трябва да се прекара права,успоредна на $AB$, която разделя лицето на $\Delta ABC$ на две равни части?

а) $2\sqrt{2}$ б) $2$ в) $\sqrt{3}$ г) $\frac{5}{2}$.

**Коментар**. Нека правата е $A_1B_1$ и пресича $CH$ в $H_1$. От подобието на триъгълниците $A_1B_1C$ и $ABC$ следва, че $\left(\frac{h_1}{h}\right)^2 = \frac{1}{2}$ и $h_1 = \frac{h}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. Отговор: а).

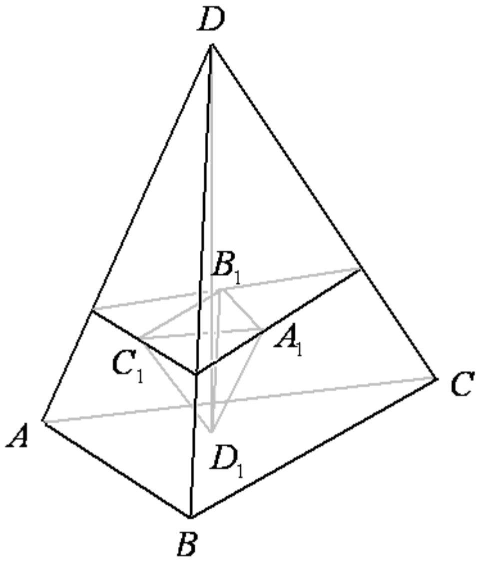



**Задача 2.** Дефиниционното множество на функцията $y = \log_2\left(2 - \sqrt{x}\right)$ е:

а) $[0,4)$ б) $(0,\infty)$ в) $[0,2]$ г) $(4,\infty)$.

**Коментар.** Ясно е, че трябва $2 - \sqrt{x} > 0$; значи $x \in [0,4)$.

**Задача 3.** Даден е правилен тетраедър с обем $V$. Центровете на стените му са върхове на друг тетраедър с обем $V_1$. Тогава отношението $\frac{V}{V_1}$ е равно на:

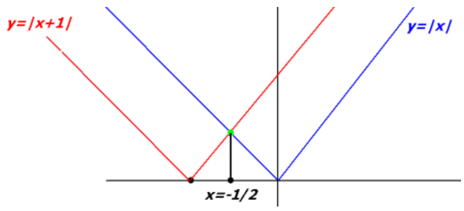



**Коментар:** Пирамидите $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ са подобни и $A_1B_1=\frac{1}{3}AB$ (защо?). От това следва, че обемите имат отношение $3^3=27$.

а) 27 б) 8 в) 18 г) Никое от посочените.

**Задача 4.** Броят на решенията на уравнението $|x+1|=|x|$ в интервала $[-1,0]$ е:

а) 0 б) 1 в) 2 г) 3.




**Коментар:** Както е видно от горната рисунка, уравнението има точно един корен $x=-\frac{1}{2}$, който за щастие е от интервала $\left[-1,0\right]$.

**Задача 5.** Корените на уравнението $x^3-kx^2-x=0$ образуват аритметична прогресия. Тогава $k$ е равно на:

а) -1 б) 1 в) 0 г) 2.

**Коментар:** Очевидно един от корените е равен на 0. Съкращаваме на $x$ и се получава $x^2-kx-1=0$. Това уравнение има два различни корена (защо ?). Значи за корените $x_1$ и $x_2$ е изпълнено $x_1x_2=-1$, тоест те са с противоположни знаци. Значи 0 е средният член на прогресията $x_1,0,x_2$. За аритметичата прогресия знаем, че $x_1+x_2=2.0=0$. От друга страна $x_1+x_2=k$.

Отговори на задачи 1 – 5:

| Задача 1 | Задача 2 | Задача 3 | Задача 4 | Задача 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| а | а | а | б | в |

**Задача 6.** Дадена е функцията $f(x)=\sqrt{2}\sin 2x-\sin x-\cos x+a+\sqrt{2}$, където $a$ е параметър.

а) (1 т.) Нека $\sin x+\cos x=t$. Изразете $f$ като функция на $t$.

б) (2 т.) Да се реши уравнението $f(x)=0$ за $a=-\sqrt{2}$.

в) (2 т.) За кои стойности на $a$ неравенството $f(x)<0$ е изпълнено за всяко $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$?

**Решение:** а) $t^2=\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+\sin 2x$; значи $\sin 2x=t^2-1$ и $f(t(x))=g(t)=\sqrt{2}\left(t^2-1\right)-t+a+\sqrt{2}$.

б) Ако $a=-\sqrt{2}$, то уравнението е $\sqrt{2}\left(t^2-1\right)-t=0$ или $t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t-1=0$. Корените са

$t_{1,2}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}+4}}{2}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}$; $t_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $t_2=\sqrt{2}$. Тъй като $t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$, то $\sin(x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$ или $\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$. От това следва, че $x=-\frac{5\pi}{12}+2l\pi$, $x=\frac{11\pi}{12}+2m\pi$ или $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.

в) Неравенството $f(x)<0$ при $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ е еквивалентно на $t^2\sqrt{2}-t+a<0$ за всяко $t\in\left[0,\sqrt{2}\right]$. Следователно числата $0$ и $\sqrt{2}$ са между корените на уравнението $t^2\sqrt{2}-t+a=0$. От теоремите за разположение корените на квадратно уравнение следва, че едновременно са изпълнени неравенствата $g(0)\leq 0$ и $g(\sqrt{2})\leq 0$. Решението на системата е $a\in(-\infty,-\sqrt{2}]$.

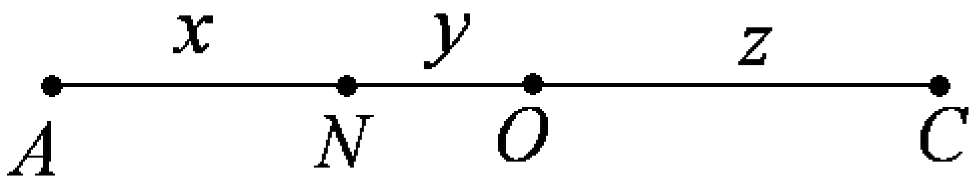
**Задача 7.** Основите на трапеца $ABCD$ са $AB = a$ и $CD = b$ ($a > b$). Диагоналите на $ABCD$ се пресичат в точката $O$. Права успоредна на $AB$ пресича отсечките $AD, AO, BO$ и $BC$ съответно в точките $M, N, P$ и $Q$. Дадено е, че $\dfrac{AM}{MD} = k$.

а) (2 т.) Пресметнете дължините на отсечките $MN, NP$ и $PQ$.

б) (1 т.) Пресметнете отношението $\dfrac{AN}{NO}$.

в) (2 т.) Пресметнете отношението на лицата на $\Delta NOP$ и трапеца $ABCD$.

**Решение:** Следващата рисунка пояснява нещата. Разглеждаме диагонала $OC$ и означаваме отсечките както е показано на рисунката.

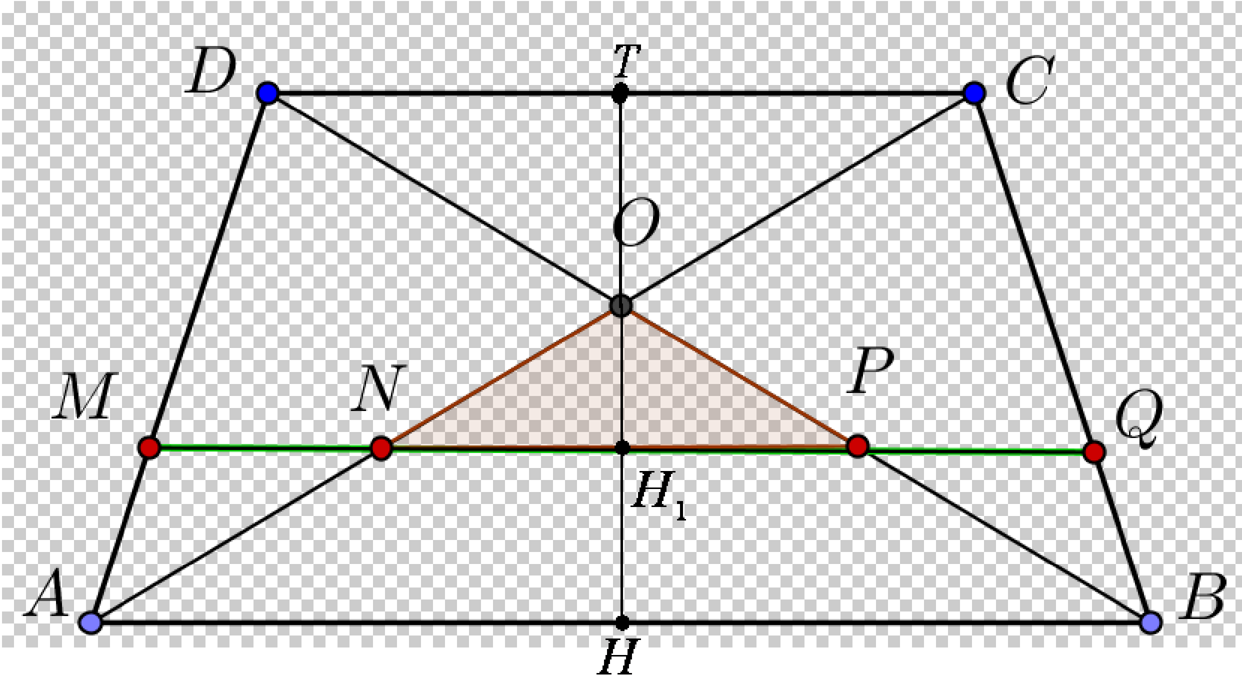



По ловие $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{x}{y+z} = k$ (теорема на Талес) и $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{a}{b}$ ($\Delta AOB \approx \Delta COD$). Така получаваме системата $\begin{cases} \dfrac{x}{y+z} = k \\ \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$; $\begin{cases} x = ky + kz \\ bx + by = az \end{cases}$. Ще я решим относно $x$ и $y$:

$x = \dfrac{k(a+b)}{b+kb} z$ и $y = \dfrac{a-kb}{b+kb} z$

а) Ясно е, че $\dfrac{MN}{b} = \dfrac{PQ}{b} = \dfrac{x}{x+y+z} = \dfrac{1}{1+\dfrac{y+z}{x}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{k}} = \dfrac{k}{k+1}$. Значи $PN = PQ = \dfrac{k}{k+1} b$. След това $\dfrac{NP}{AB} = \dfrac{y}{x+y} = \dfrac{a-kb}{a+ak}$, откъдето $NP = \dfrac{a-kb}{1+k}$.

б) $\dfrac{AN}{NO} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{k(a+b)}{a-kb}$.



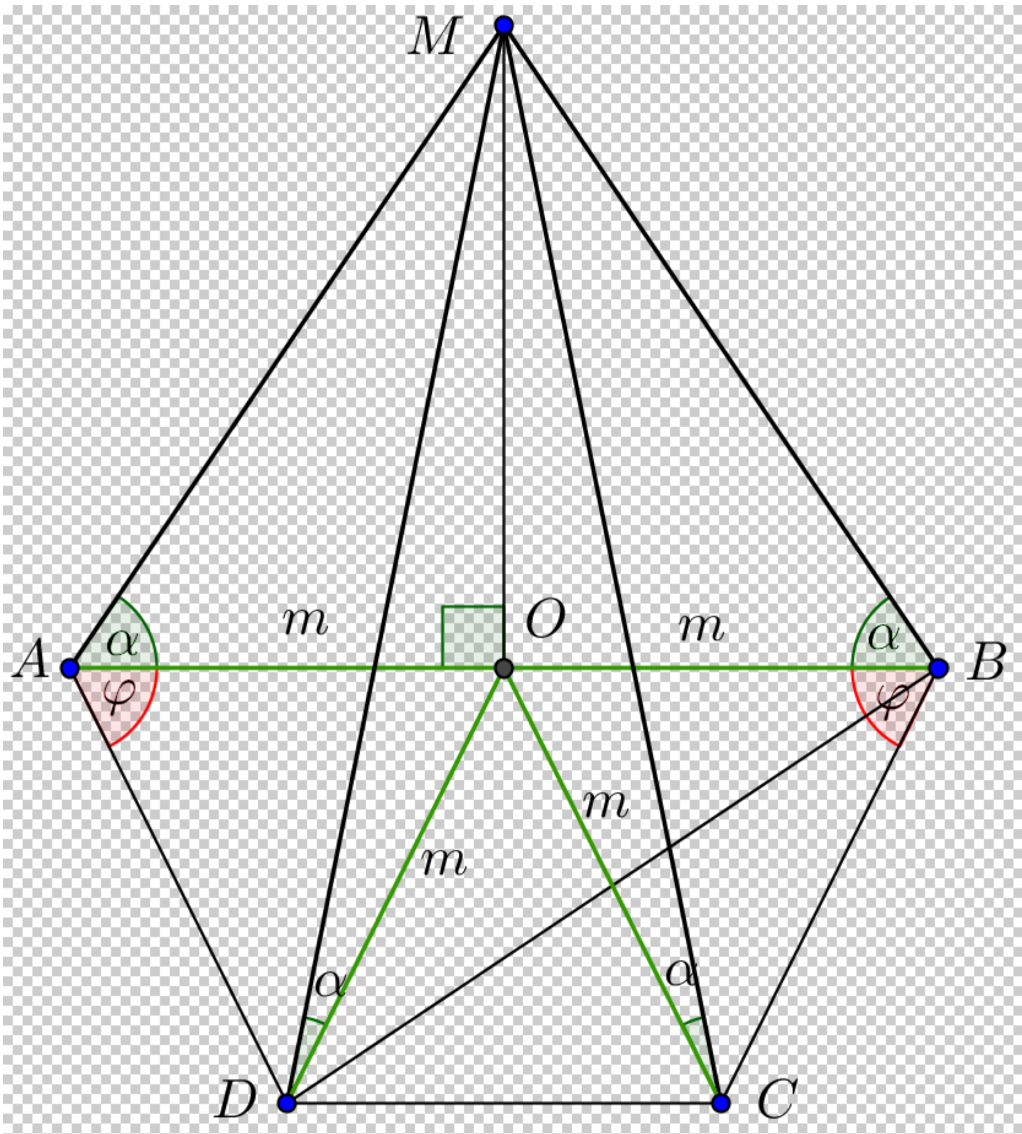

в) Нека $h = TH$ е височината на трапеца през $O$. Ясно е, че $\frac{S_{ABGD}}{S_{AOB}} = \frac{\frac{a+b}{2}h}{\frac{1}{2}a.OH} = \frac{a+b}{a}\frac{h}{OH} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^2$ (следва от подобието на триъгълниците $DOC$ и $AOB$). Сега $\frac{S_{NPO}}{S_{ABCD}} = \frac{S_{NPO}}{S_{AOB}}\frac{S_{AOB}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{y}{x+y}\right)^2\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{(a-kb)^2}{(a+b)^2(k+1)^2}$.

**Задача 8.** Основата на пирамида $ABCDM$ е трапец с голяма основа $AB = 2m$ и остър ъгъл $\varphi$. Всички околни ръбове сключват с равнината на основата ъгъл $\alpha$, а върхът $M$ се проектира в средата на страната $AB$.

а) (2 т.) Пресметнете обема на пирамидата

б) (1 т.) При фиксирани $m$ и $\alpha$ покажете, че максималната стойност на обема на пирамидата се достига при $\varphi = 60^\circ$.

в) (2 т.) Пресметнете разстоянието от върха $B$ до околната стена $ADM$.




**Решение.** а) Основата е равнобедрен трапец, защото около него може да се опише окръжност. Височината на пирамидата е $h = m\operatorname{tg}\alpha$. Нека т. $O$ е средата на $AB$, тя е център на описаната окръжност. Тогава лесно се намира, че $\measuredangle DOC = 4\varphi - \pi$ и лицето на основата е $S = 2.\dfrac{m^2}{2}\sin(\pi - 2\varphi) + \dfrac{1}{2}m^2\sin(4\varphi - \pi) = \dfrac{m^2}{2}(2\sin 2\varphi - \sin 4\varphi)$. Обемът е $V = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{6}m^3(2\sin 2\varphi - \sin 4\varphi)\operatorname{tg}\alpha$.

б) От това че $\measuredangle DOC = 4\varphi - \pi$ заключаваме, че $\varphi \geq \dfrac{\pi}{4}$. За да намерим максималната стойност на обема на пирамидата, достатъчно е да намерим максималната стойност на функцията $f(t) = 2\sin 2t - \sin 4t$ в интервала $t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Решаваме

$f'(t) = 4\cos 2t - 4\cos 4t = 0$, $\cos 4t = \cos 2t \Rightarrow t = k\pi$ или $t = \dfrac{k\pi}{3}$. Ясно е, че единственото решение в горния интервал е $t = \dfrac{\pi}{3}$. По-нататък, $f''(t) = -8\sin 2t + 16\sin 4t$ и тъй като

$f''(\pi/3)<0$, то функцията $f(t)$ има локален (и абсолютен) максимум при $t=\dfrac{\pi}{3}$, т.е. при $\varphi=60^\circ$.

в) Ако $d$ е търсеното разстояние, $V_{ABDM}=\dfrac{1}{3}S_{ADM}d$. От друга страна лесно намираме $S_{ABD}=m^2\sin 2\varphi$, значи $V_{ABDM}=\dfrac{1}{3}S_{ABD}h=\dfrac{1}{3}m^3\sin 2\varphi\operatorname{tg}\alpha$. Триъгълник $ADM$ е равнобедрен, $AD=2m\cos\varphi$, $AM=\dfrac{m}{\cos\alpha}$ и за лицето му намираме $S_{ADM}=m^2\dfrac{\cos\varphi}{\cos\alpha}\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}$.

Окончателно имаме $d=\dfrac{3V_{ABDM}}{S_{ADM}}=\dfrac{2m\sin\varphi\sin\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\cos^2\varphi}}$.