УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

КАТЕДРА „ТЕХНИЧЕСКА МЕХАНИКА"

Р Е Ш Е Н И П Р И М Е Р И

НА

КУРСОВИ ЗАДАЧИ

ПО

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНИКА II

(ДИНАМИКА)

Гл. Ас. Д-р Инж. Ангел Младенски

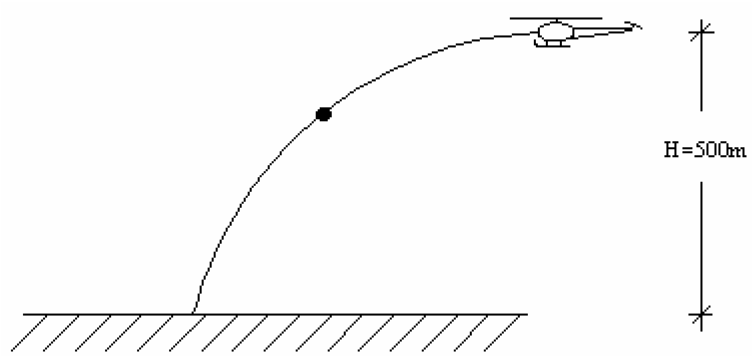
София

2015/2016

КУРСОВА ЗАДАЧА 1: ДИНАМИКА НА МАТЕРИАЛНА ТОЧКА

Задача 1.1

От хоризонтално летящ със скорост $V_0 = 20\,\text{m/s}$ вертолет е пуснато малко кълбо с маса $m = 2\,\text{kg}$ (Фиг.1.1.1). Съпротивлението на въздуха е представено от сила $\vec{F} = -\beta\vec{V}$, $\beta = 0{,}1$ kg/s. Да се определят закона за движение на кълбото и разстоянието от точката, в която кълбото се удря в земята, до положението на вертолета, от което то е пуснато, ако същият лети на височина $H = 500\,\text{m}$.



Фиг. 1.1.1

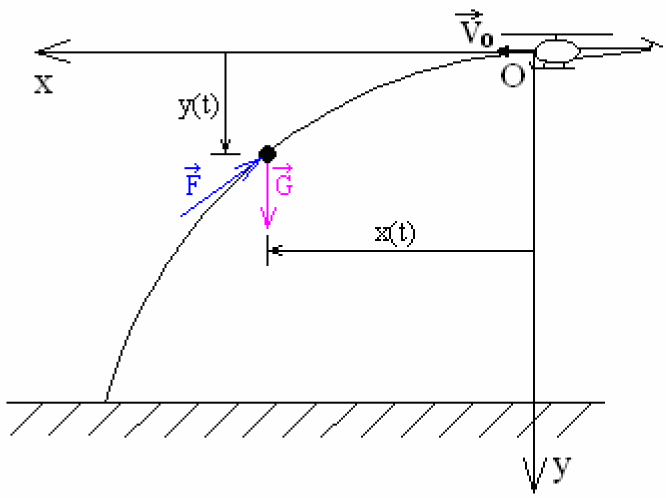
Решение:

1. Определяне на закона за движение на кълбото

Записваме основното уравнение на Динамиката:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i\,. \qquad (1)$$

Въвеждаме координатна система xOy с начало – началното положение на кълбото и осите избрани, така че движението на кълбото да е в положителна посока (Фиг.1.1.2). След това, поставяме действащите върху кълбото сили с техните направления и посоки. Това са силата на тежестта $\vec{G}$ с вертикална директриса и насочена надолу и силата $\vec{F}$, представяща съпротивлението на въздуха, която, тъй като е правопропорционална на скоростта на кълбото, е с направление, съвпадащо с тангентата на траекторията, а заради знака минус е с посока, обратна на посоката на движение на кълбото .



Фиг. 1.1.2

Разлагаме (1) скаларно по двете оси и получаваме:

$$ma_x = -F_x \quad (2) \qquad \text{и} \qquad ma_y = -G - F_y \quad (3).$$

След това заместваме силите в (2) и (3):

$$ma_x = -\beta V_x, \quad (2') \qquad\qquad ma_y = mg - \beta V_y. \quad (3')$$

Но $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $V_x = \dot{x}$ и $V_y = \dot{y}$. Тогава (2') и (3') добиват вида:

$$m\ddot{x} = -\beta\dot{x}, \quad (4) \qquad\qquad m\ddot{y} = mg - \beta\dot{y}. \quad (5)$$

Започваме решението на (4):

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = 0. \quad (4')$$

Това е хомогенно диференциално уравнение от втори ред. То се решава по следния начин:
Записваме характеристичното му уравнение:

$$\rho^2 + \frac{\beta}{m}\rho = 0.$$

Решаваме го и получаваме:

$$\rho\left(\rho + \frac{\beta}{m}\right) = 0,$$

$$\rho_1 = 0 \text{ и } \rho_2 = -\frac{\beta}{m} = -0{,}05.$$

Тогава общото решение на хомогенното уравнение е:

$$x(t) = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t}.$$

В нашия случай то има следния вид:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-0{,}05t}. \quad (6)$$

Първата му производна е:

$$\dot{x}(t) = -0{,}05 C_2 e^{-0{,}05t}. \quad (7)$$

За да определим интеграционните константи C_1 и C_2 използваме известните ни гранични условия за началното положение на кълбото при $t = 0$ s:

$$x(0) = 0,$$

$$\dot{x}(0) = V_0 = 20.$$

Изразите (6) и (7) стават:

$$0 = C_1 + C_2,$$

$$20 = -0{,}05.C_2.$$

Решаваме системата уравнения и получаваме: $C_1 = 400$, $C_2 = -400$.

Окончателно за $x(t)$ получаваме:

$$x(t) = 400(1 - e^{-0{,}05t}).$$

Преминаваме към (5):

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = g. \quad (5')$$

Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред, т.е. първо се решава хомогенното уравнение, а след това се намира частният интеграл. Хомогенното уравнение е:

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} = 0.$$

Решението му е същото като на (4'). Тогава общото решение на (5') има вида:

$$y(t) = C_3 + C_4 e^{-0{,}05t} + \eta(t).$$

Тук $\eta(t)$ е частният интеграл на нехомогенното диференциално уравнение. Той има вида:

$$\eta(t) = t^k Q(t),$$

където k е най-ниската производна в лявата страна на нехомогенното уравнение, а $Q(t)$ е полином, чиято степен отговаря на степента на полинома в дясната част на нехомогенното уравнение.

В случая, k =1, защото най-ниската производна в израза отляво на (5') е първа, а $Q(t) = D$, защото полинома от дясната страна на (5') е от нулева степен. Тогава:

$$\eta(t) = t^1 D = Dt .$$

Определяме първата и втората производна на $\eta(t)$:

$$\dot{\eta}(t) = D \, , \; \ddot{\eta}(t) = 0 .$$

Заместваме ги в (5') като $\ddot{\eta}(t)$ отговаря на $\ddot{y}$, а $\dot{\eta}(t)$ – на $\dot{y}$ и определяме D:

$$\ddot{\eta}(t) + \frac{\beta}{m}\dot{\eta}(t) = g \, ,$$

$$0 + \frac{\beta}{m} D = g \, ,$$

$$D = \frac{gm}{\beta} .$$

Тогава $\eta(t) = \dfrac{gm}{\beta} t$ и общото решение на (5') е:

$$y(t) = C_3 + C_4 e^{-0,05t} + \frac{gm}{\beta} t = C_3 + C_4 e^{-0,05t} + 196{,}2t \, , \qquad (8)$$

а първата му производна е:

$$\dot{y}(t) = -0{,}05 C_4 + 196{,}2 . \qquad (9)$$

За да определим интеграционните константи C_3 и C_4 използваме известните ни гранични условия за началното положение на кълбото при $t = 0$ s:

$$y(0) = 0 \, ,$$

$$\dot{y}(0) = 0 .$$

Изразите (8) и (9) стават:

$$0 = C_3 + C_4 \, ,$$

$$0 = -0{,}05 C_4 + 196{,}2 .$$

Решаваме системата уравнения и получаваме $C_3 = -3924$, $C_4 = 3924$.

Окончателно за $y(t)$ получаваме:

$$y(t) = 196{,}2t - 3924(1 - e^{-0,05t}) .$$

Закон за движение на кълбото:

$$x(t) = 400(1 - e^{-0,05t})$$

$$y(t) = 196{,}2t - 3924(1 - e^{-0,05t})$$

2. Определяне на разстоянието от точката, в която кълбото се удря в земята, до положението на вертолета, от което то е пуснато

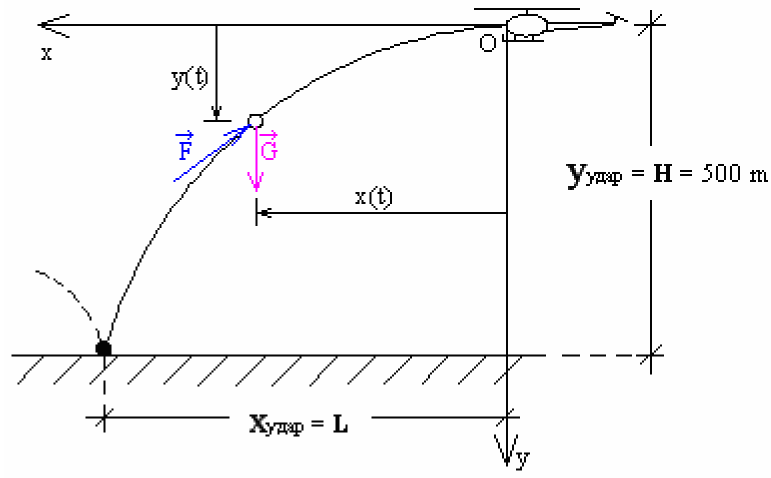
Височината на летене на вертолета е $H = 500$ m. Това означава, че кълбото ще измине същото разстояние преди да се удари в земята (Фиг.1.1.3). Тогава, $y_{удар} = H = 500$ m. Заместваме в закона за движение за $y(t)$ и определяме времето $t_{удар}$, за което кълбото стига до земята:

$$y_{удар} = 196{,}2t_{удар} - 3924(1 - e^{-0,05t_{удар}}) \, ,$$

$$500 = 196{,}2t_{удар} - 3924(1 - e^{-0,05t_{удар}}) . \qquad (10)$$

Това уравнение има точно решение, но то се намира трудно и затова определянето на $t_{удар}$ става с опитване: задава се някаква стойност за $t_{удар}$, например $t_{удар} = 1$ s. В уравнение (10) се получава 500 = 4,824. Както се вижда, разликата е голяма, затова опитваме с друга стойност за $t_{удар}$, например $t_{удар} = 15$ s. В (10) се получава 500 = 872,57. Отново сме далеч, но вече сме намерили интервала, в който се намира $t_{удар}$ – между 1s и 15s. След още няколко опита получаваме окончателно $t_{удар} = 11$ s. Тази стойност се замества в закона за движение за $x(t)$ и за L получаваме:

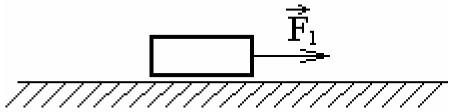
$$x_{удар} = L = 400(1 - e^{-0,05t_{удар}}) = 400(1 - e^{-0,05.11}) = 169{,}2 \text{ m}.$$



Фиг. 1.1.3

Задача 1.2

Тяло с маса $m = 2\,\text{kg}$ се плъзга с триене по хоризонтална повърхност под действие на сила $\vec{F}_1 = 2(x + t^2)$ (Фиг.1.2.1). Съпротивлението на въздуха се представя от сила $\vec{F}_2 = -\beta.\vec{V}$, $\beta = 0{,}5\,\text{kg/s}$. Да се определи законът за движение на тялото, ако началната скорост е $V_0 = 12\,\text{m/s}$ и коефициентът на триене при плъзгане е $\mu = 0{,}18$.



Фиг. 1.2.1

Решение:

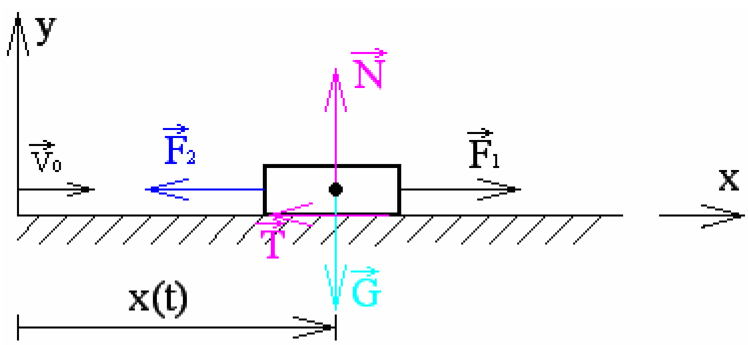
Записваме основното уравнение на Динамиката:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i\,. \qquad (1)$$

Приемаме координатна система xOy с начало – началното положение на тялото и ос x избрана така, че движението на тялото да е в положителната й посока (Фиг.1.2.2). Поставяме действащите върху тялото сили (Фиг.1.2.2):

– по оста x: движещата сила $\vec{F}_1$ /по посока на движението/, силата на триене $T = \mu.N$ и силата на съпротивление на въздуха $\vec{F}_2$ /противоположни на движението/;

– по оста y: силата на тежестта $\vec{G}$ /насочена надолу/ и нормалната реакция $\vec{N}$ /насочена нагоре/.



Фиг. 1.2.2

Разлагаме (1) по двете оси и получаваме:

$$ma_x = F_1 - F_2 - T \,, \quad (2)$$
$$ma_y = -G + N \,, \quad (3)$$

По-нататък,

$$ma_x = 2(x + t^2) - \beta V - \mu N \,, \ (2')$$
$$ma_y = -mg + N \,. \quad (3')$$

Но $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $V_x = \dot{x}$ и $V_y = \dot{y}$. Тогава (2') и (3') добиват вида:

$$m\ddot{x} = 2(x + t^2) - \beta\dot{x} - \mu N \,, \quad (2'')$$
$$m\ddot{y} = -mg + N \,. \quad (3'')$$

Получава се система от две уравнения с три неизвестни – x, y и N, но от схемата се вижда, че движението на тялото е само по ос x. В такъв случай $y = 0$, $\dot{y} = \ddot{y} = 0$. Тогава от (3''):

$$0 = -mg + N \,, \ N = mg \ \text{и} \ T = \mu mg \,.$$

Сега вече в уравнение (2'') неизвестен е само търсения закон за движение $x(t)$. Започваме определянето му:

$$m\ddot{x} = 2x + 2t^2 - \beta\dot{x} - \mu mg \,,$$
$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} - \frac{2}{m}x = \frac{2}{m}t^2 - \mu g \,, \quad (4)$$
$$\ddot{x} + 0{,}25\dot{x} - x = t^2 - 1{,}77 \,. \quad (4')$$

Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред и се решава по следния начин: Първо решаваме хомогенното уравнение:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x = 0 \,.$$

Записваме характеристичното уравнение:

$$\rho^2 + \frac{\beta}{m}\rho - \frac{k}{m} = 0 \,,$$
$$\rho^2 + 0{,}25\rho - 1 = 0 \,.$$

Корените на това уравнение са $\rho_1 = 0{,}88$ и $\rho_2 = -1{,}13$. Тогава общото решение на (4) е:

$$x(t) = C_1 e^{\rho_1 t} + C_2 e^{\rho_2 t} + \eta(t) = C_1 e^{0{,}88t} + C_2 e^{-1{,}13t} + \eta(t) \,.$$

Частният интеграл $\eta(t)$ има следния вид:

$$\eta(t) = t^0 (At^2 + Bt + D) = At^2 + Bt + D \,.$$

Това е така, защото най-ниската производна от дясната страна на (4) е нулева, а изразът вляво на (4) е от втора степен. Определяме първата и втората производна на $\eta(t)$:

$$\dot{\eta}(t) = 2A.t \ + B \,, \ \ddot{\eta}(t) = 2A$$

и ги заместваме в (4'), като $\ddot{\eta}(t)$ отговаря на $\ddot{x}$, $\dot{\eta}(t)$ - на $\dot{x}$, а $\eta(t)$ - на x. Получаваме:

$$2A + 0{,}25(2At + B) - (At^2 + Bt + D) = t^2 - 1{,}77 \,.$$

Групираме коефициентите пред различните степени на t:

$$-At^2 + (0{,}5A - B)t + (2A + 0{,}25B - D) = t^2 - 1{,}77 \,,$$

след което ги сравняваме. Резултатът е:

$-A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1$

$0{,}5A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0{,}5A = 0{,}5.(-1) = -0{,}5$

$2A + 0{,}25B - D = -1{,}77 \quad \Rightarrow \quad D = -1{,}77 - 2A - 0{,}25B = -1{,}77 - 2.(-1) - 0{,}25.(-0{,}5) = 0{,}36$.

За $\eta(t)$ получаваме:

$$\eta(t) = -t^2 - 0{,}5.t + 0{,}36$$

а за общото решение:

$$x(t) = C_1.e^{0{,}88t} + C_2.e^{-1{,}13t} - t^2 - 0{,}5.t + 0{,}36 \,. \quad (5)$$

Следва намирането на константите C_1 и C_2. За целта се записва първата производна на (5):

$$\dot{x}(t) = 0{,}88C_1.e^{0{,}88t} - 1{,}13C_2e^{-1{,}13t} - 2t - 0{,}5 . \qquad (6)$$

След това записваме началните условия: положението и скоростта на тялото в началния момент на движението при $t = 0$ s:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = V_0 = 12 \text{ m/s}.$$

Заместваме с тях в (5) и (6) и получаваме:

$$0 = C_1e^{0{,}88.0} + C_2e^{-1{,}13.0} - 0^2 - 0{,}5.0 + 0{,}36 \quad (5') \qquad 12 = 0{,}88C_1.e^{0{,}88.0} - 1{,}13C_2.e^{-1{,}13.0} - 2.0 - 0{,}5 \quad (6')$$

$$0 = C_1 + C_2 + 0{,}36 \quad (5'') \qquad 12 = 0{,}88.C_1 - 1{,}13.C_2 - 0{,}5 \quad (6'')$$

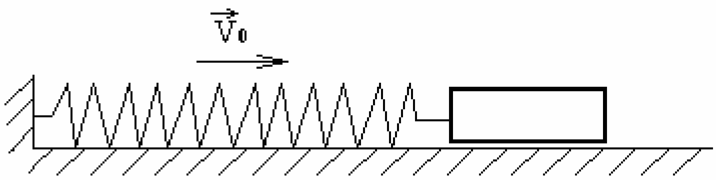
От системата уравнения (5") и (6") намираме $C_1 = 6{,}02$ и $C_2 = -6{,}38$.

Окончателно, **Законът за движение на тялото** е определен като:

$$x(t) = 6{,}02e^{0{,}88t} - 6{,}38e^{-1{,}13t} - t^2 - 0{,}5t + 0{,}36$$

Задача 1.3

Тяло с маса $m = 2$ kg е свързано с пружина с коравина $k = 20$ N/m и започва движение върху грапава хоризонтална равнина (Фиг.1.3.1). Коефициентът на триене при плъзгане е $\mu = 0{,}16$. В началния момент тялото има скорост $V_0 = 5$ m/s, а пружината е ненапрегната. Силата на съпротивление на въздуха е $\vec{F} = -\beta.\vec{V}$, където $\beta = 0{,}6$ kg/s. Да се определи законът за движение на тялото, докато за пръв път промени посоката си на движение.



Фиг. 1.3.1

Решение:

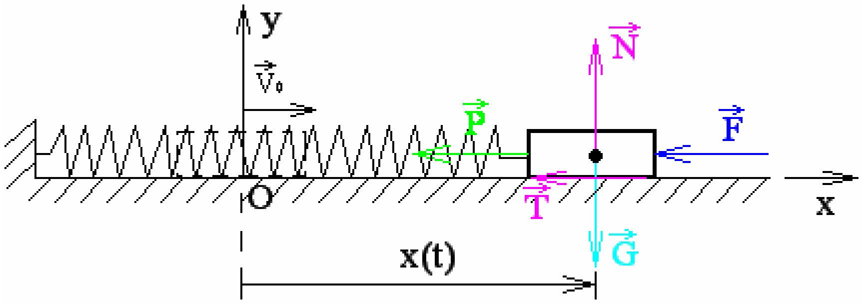
Записваме основното уравнение на Динамиката:

$$m.\vec{a} = \sum \vec{F}_i . \qquad (1)$$

Приемаме координатна система xOy с начало – началното положение на тялото и ос x избрана така, че движението на тялото да е в положителната й посока (Фиг.1.3.2). Поставяме действащите върху тялото сили (Фиг.1.3.2):

– по ос x: силата на триене $T = \mu N$, силата на съпротивление на въздуха $F = \beta V_x$ и пружинната сила $P = kx$, като всички те са противоположни на движението на тялото;

– по ос y: силата на тежестта $\vec{G}$ /насочена надолу/ и нормалната реакция $\vec{N}$ /насочена нагоре/.



Фиг. 1.3.2

Разлагаме (1) по двете оси и получаваме:

$$ma_x = -P - F - T\,, \quad (2)$$
$$ma_y = -G + N\,, \quad (3)$$
$$ma_x = -kx - \beta V - \mu N\,, \quad (2')$$
$$ma_y = -mg + N\,. \quad (3')$$
Но $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$ и $V = \dot{x}$. Тогава (2') и (3') добиват вида:
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} - \mu N\,, \quad (2'')$$
$$m\ddot{y} = -mg + N\,. \quad (3'')$$
Получаваме система от две уравнения с три неизвестни – x, y и N, но от схемата се вижда, че тялото не може да се движи по оста y. В такъв случай $y = 0$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = 0$. Тогава от (3'') получаваме:
$$0 = -mg + N\,,\ N = mg \text{ и } T = \mu mg\,.$$
Сега вече в уравнение (2'') неизвестен е само закона за движение $x(t)$. Започваме определянето му:
$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} - \mu mg\,,$$
$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\mu g\,, \quad (4)$$
$$\ddot{x} + 0{,}3\dot{x} + 10x = -1{,}568\,. \quad (4')$$
Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред и се решава по следния начин:
Първо решаваме хомогенното му уравнение:
$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0\,.$$
Записваме характеристичното уравнение:
$$\rho^2 + \frac{\beta}{m}\rho + \frac{k}{m} = 0\,,$$
$$\rho^2 + 0{,}3\rho + 10 = 0\,.$$
Корените на това уравнение са комплексните числа $\rho_1 = \alpha + \delta i$ и $\rho_2 = \alpha - \delta i$, където $\alpha = -0{,}15$ и $\delta = 3{,}16$. Тогава общото решение на (4) е от вида:
$$x(t) = e^{\alpha t}\left(C_1\cos\delta t + C_2\sin\delta t\right) + \eta(t) = e^{-0{,}15t}\left(C_1\cos 3{,}16t + C_2\sin 3{,}16t\right) + \eta(t)$$
Частният интеграл $\eta(t)$ има следния вид:
$$\eta(t) = t^0 D = D\,.$$
Това е така, защото най-ниската производна от дясната страна на (4) е нулева, а изразът в лявата страна на (4) също е от нулева степен. Определяме първата и втората производна на $\eta(t)$:
$$\dot{\eta}(t) = 0\,,\ \ddot{\eta}(t) = 0$$
и ги заместваме в (4') като $\ddot{\eta}(t)$ отговаря на $\ddot{x}$, $\dot{\eta}(t)$ - на $\dot{x}$, а $\eta(t)$ - на x. Получаваме:
$$10D = -1{,}568 \ \Rightarrow\ D = -0{,}1568 \approx 0{,}16 = \eta(t)$$
За общото решение получаваме:
$$x(t) = e^{-0{,}15t}\left(C_1\cos 3{,}16t + C_2\sin 3{,}16t\right) - 0{,}16\,. \quad (5)$$
Следва намирането на константите C_1 и C_2. За целта определяме производната на (5):
$$\dot{x}(t) = -0{,}15e^{-0{,}15t}\left(C_1\cos 3{,}16t + C_2\sin 3{,}16t\right) + 3{,}16e^{-0{,}15t}\left(C_2\cos 3{,}16t - C_1\sin 3{,}16t\right) \quad (6)$$
След това записваме началните условия: положението и скоростта на тялото в началния момент на движението при $t = 0$:
$$x(0) = 0$$
$$\dot{x}(0) = V_0 = 5 \text{ m/s.}$$
Заместваме с тях в (5) и (6) и получаваме:
$$0 = e^{-0{,}15.0}.\left(C_1.\cos(3{,}16.0) + C_2.\sin(3{,}16.0)\right) - 0{,}16 \quad (5')$$

$0 = C_1 - 0{,}16$ (5")

$5 = -0{,}15e^{-0{,}15.0}\left(C_1\cos 3{,}16.0 + C_2\sin 3{,}16.0\right) + 3{,}16e^{-0{,}15.0}\left(C_2\cos 3{,}16.0 - C_1\sin 3{,}16.0\right)$ (6')

$5 = -0{,}15C_1 + 3{,}16C_2$ (6")

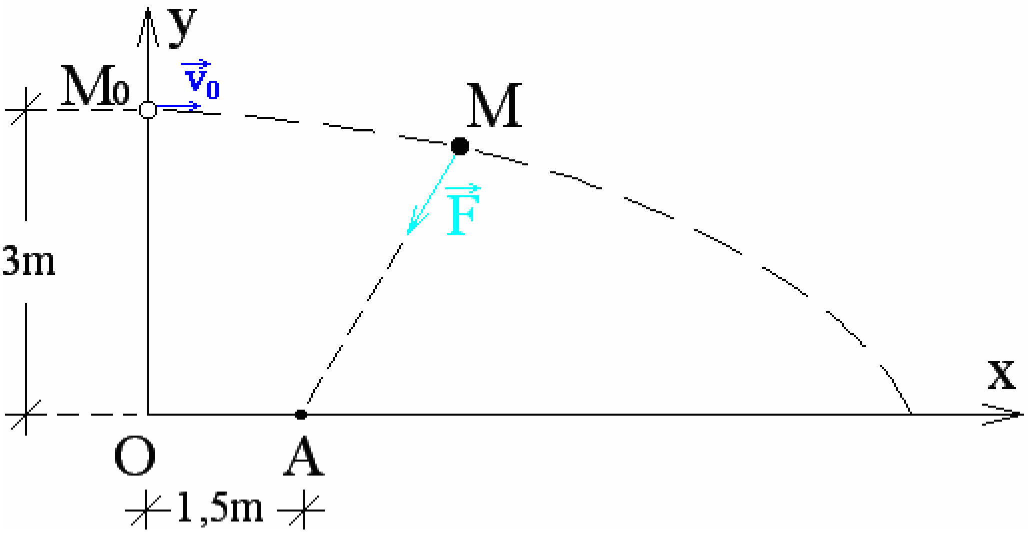
От системата уравнения (5") и (6") намираме $C_1 = 0{,}16$ и $C_2 = 1{,}57$.

Окончателно, **Законът за движение на тялото** е:

$$x(t) = e^{-0{,}15.t}\left(0{,}16\cos 3{,}16t + 1{,}57\sin 3{,}16t\right) - 0{,}16 .$$

Задача 1.4

Материална точка с маса $m = 6$ kg се движи върху гладка хоризонтална равнина xOy под действие на сила $\vec{F} = c.\overrightarrow{MA}$, $c = 1{,}5$ N/m. Да се определи законът за движение материалната точка, ако в началния момент от движението тя е била в т. M_0 и е имала скорост $V_0 = 3$ m/s (Фиг.1.4.1).



Фиг. 1.4.1

Решение:

Записваме основното уравнение на Динамиката:

$$m.\vec{a} = \sum \vec{F}_i . \qquad (1)$$

В тази задача координатната система xOy е зададена и затова директно се пристъпва към поставяне на силите, действащи на частицата. В условието на задачата е казано, че движението е върху гладка хоризонтална равнина: “гладка” означава, че няма триене между материалната точка и повърхността, върху която се движи, а “хоризонтална” – че силата на тежестта не влияе на движението на материалната точка. В такъв случай, единствената действаща сила е дадената $\vec{F}$, която е правопропорционална на вектора $\overrightarrow{MA}$. Тогава, за определяне на нейните компоненти F_x и F_y първо трябва да се получат координатите на вектора $\overrightarrow{MA}$ $(x_A - x_M; y_A - y_M)$. Точка A има координати $x_A = 1{,}5$ m и $y_A = 0$, а координатите на точка M са двете компоненти на закона за движение $x_M = x(t)$ и $y_M = y(t)$ (Фиг.1.4.2). Тогава:

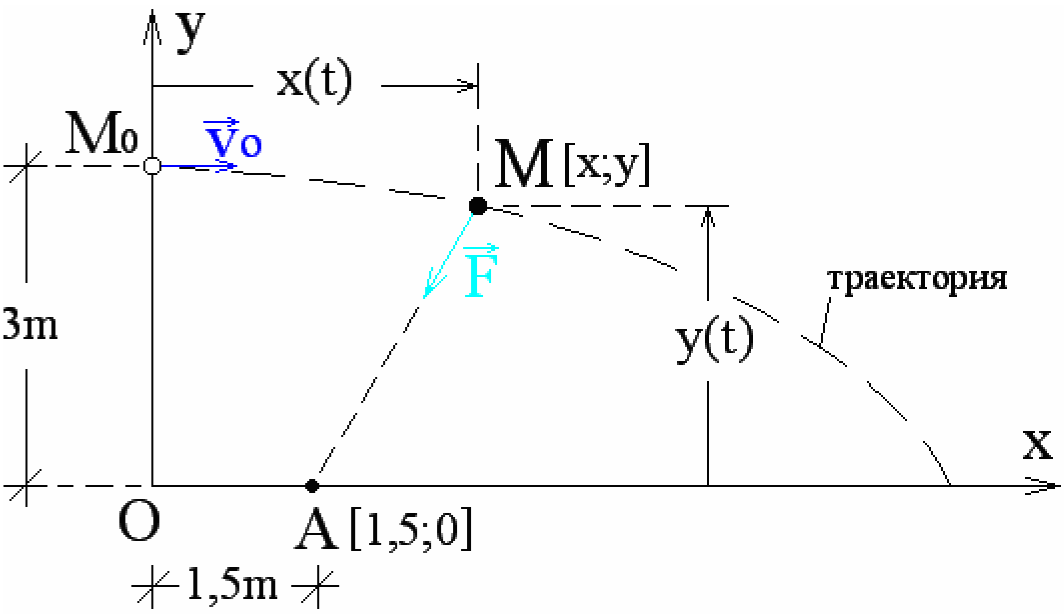
$\overrightarrow{MA}(1{,}5 - x; 0 - y)$,

$\overrightarrow{MA}(1{,}5 - x; -y)$,

а компонентите на силата са:

$F_x = c(1{,}5 - x)$,

$F_y = -cy)$.



Фиг. 1.4.2

След това, разлагаме (1) скаларно по двете оси и получаваме:

$ma_x = F_x = c(1{,}5 - x)$ (2)

$ma_y = F_y = c(-y)$ (3)

<u>Започваме решението на (2):</u>

$m\ddot{x} = 1{,}5c - cx$,

$m\ddot{x} + cx = 1{,}5c$,

$\ddot{x} + \dfrac{c}{m}x = \dfrac{1{,}5c}{m}$,

$\ddot{x} + 0{,}25x = 0{,}375$. (2')

Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред – първо се решава хомогенното му уравнение, а след това се намира частният му интеграл. Хомогенното уравнение е следното:

$\ddot{x} + 0{,}25x = 0$.

Записваме характеристичното му уравнение:

$\rho^2 + 0{,}25 = 0$.

Решаваме го и получаваме:

$\rho_{1,2} = \pm 0{,}5i$.

Тогава общото решение на хомогенното уравнение е:

$x(t) = C_1 \cos 0{,}5t + C_2 \sin 0{,}5t + \eta(t)$

Частното решение $\eta(t)$ има следния вид:

$\eta(t) = A$,

защото най-ниската производна от дясната страна на (2') е нулева, а изразът в лявата страна на (2') също е от нулева степен. Определяме първата и втората производна на $\eta(t)$:

$\dot{\eta}(t) = 0$, $\ddot{\eta}(t) = 0$

и ги заместваме в (2'):

$0 + 0{,}25A = 0{,}375 \Rightarrow A = 1{,}5$.

За общото решение получаваме:

$x(t) = C_1 \cos 0{,}5t + C_2 \sin 0{,}5t + 1{,}5$ (4)

Следва намирането на C_1 и C_2. За целта определяме първата производна на (4):

$\dot{x}(t) = -0{,}5C_1 \sin 0{,}5t + 0{,}5C_2 \cos 0{,}5t$ (5)

След това записваме началните условия: положението и скоростта на тялото в началния момент на движението при $t = 0$ s в т. M_0:

$x(0) = x_{M_0} = 0$;

$\dot{x}(0) = V_0 = 3$ m/s.

Заместваме с тях в (4) и (5) и получаваме:

$x(0) = 0 = C_1 + 1{,}5 \;\Rightarrow\; C_1 = -1{,}5$;

$\dot{x}(0) = V_0 = 3 = 0{,}5C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 6$.

Окончателно за $x(t)$ получаваме:

$$x(t) = -1{,}5\cos 0{,}5t + 6\sin 0{,}5t + 1{,}5.$$

<u>Преминаваме към (3):</u>

$m\ddot{y} + cy = 0$,

$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0$,

$\ddot{y} + 0{,}25y = 0$. (3')

Това е хомогенно диференциално уравнение от втори ред, а общото му решение е същото като на (2'):

$y(t) = C_3 \cos 0{,}5t + C_4 \sin 0{,}5t$. (6)

Първата производна е:

$\dot{y}(t) = -0{,}5C_3 \sin 0{,}5t + 0{,}5C_4 \cos 0{,}5t$. (7)

За да определим интеграционните константи C_3 и C_4 използваме известните ни начални условия при $t = 0$ s в т. M_0:

$y(0) = y_{M_0} = 3$ m,

$\dot{y}(0) = 0$.

Изразите (6) и (7) стават:

$3 = C_3$;

$0 = 0{,}5C_4 \;\Rightarrow\; C_4 = 0$.

Окончателно за $y(t)$ получаваме:

$$y(t) = 3\cos 0{,}5t.$$

Закон за движение:

$$x(t) = -1{,}5\cos 0{,}5t + 6\sin 0{,}5t + 1{,}5;$$

$$y(t) = 3\cos 0{,}5t.$$

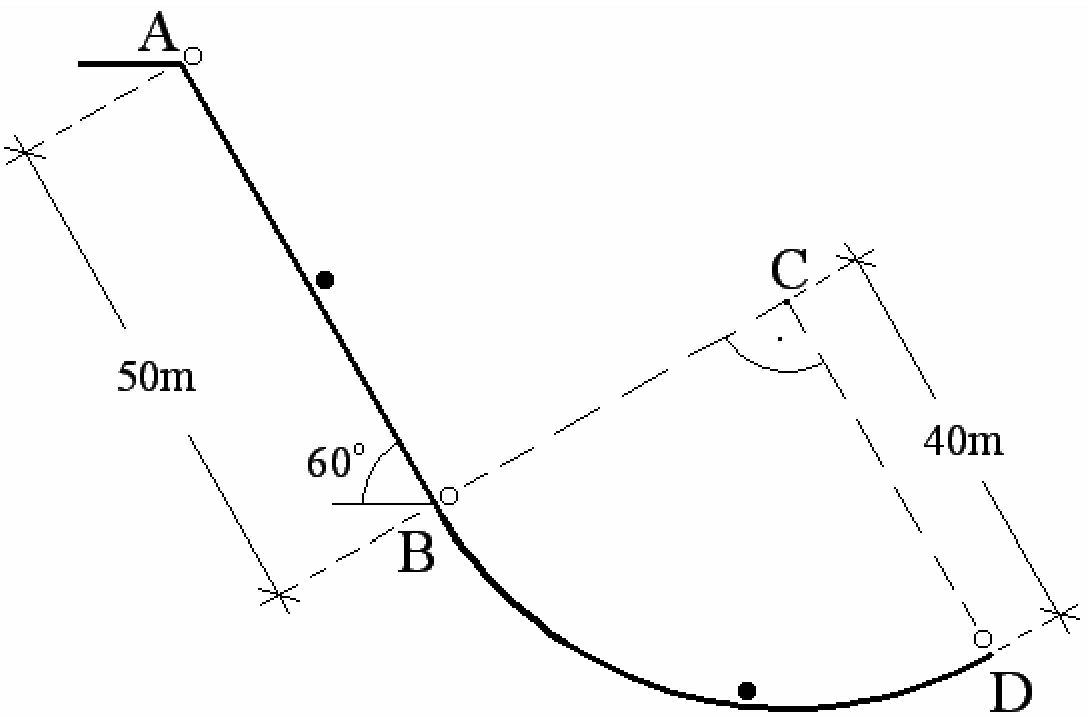
<u>**Задача 1.5**</u>

Материална точка с маса $m = 10$ kg се спуска по идеално гладък участък AB, наклонен под ъгъл 60^0 спрямо хоризонта, а след това продължава движението си по идеално гладък улей BD с форма на четвърт кръг (Фиг.1.5.1). Да се определят:

1. Закона за движение на материалната точка в участък AB, ако в началния момент тя е била в покой;

2.Скоростта, с която материалната точка ще напусне улея BD.

Силата на съпротивление на въздуха $\vec{F} = -\beta\vec{V}$, $\beta = 0{,}5$ kg/s, да се вземе предвид само за участък AB!



Фиг. 1.5.1

Решение:

Записваме основното уравнение на Динамиката:

$$m.\vec{a} = \sum \vec{F}_i \qquad (1)$$

В тази задача движението на материалната точка се осъществява в два участъка, които трябва да бъдат разгледани поотделно.

1. Определяне на закона за движение на частицата в участък AB

Въвеждаме координатна система xOy за първия участък и поставяме действащите сили – силата на тежестта $\vec{G}$, силата на съпротивление на въздуха $\vec{F}$ и нормалната реакция $\vec{N}$ (Фиг.1.5.2). Разлагаме (1) по двете оси:

$$ma_x = G\sin 60^0 - F, \qquad (2)$$

$$ma_y = N - G\cos 60^0, \qquad (3)$$

$$m\ddot{x} = mg\sin 60^0 - \beta\dot{x}, \qquad (2')$$

$$m\ddot{y} = N - mg\cos 60^0. \qquad (3')$$

Първо разглеждаме уравнение (3'), защото материалната точка не може да се движи по оста y. В такъв случай $y = 0$, $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = 0$. Тогава:

$$N = mg\cos 60^0 = 49{,}05\,\text{N}.$$

Продължаваме с (2'):

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} = mg\sin 60^0,$$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = g\sin 60^0,$$

$$\ddot{x} + 0{,}05\dot{x} = 8{,}5.$$

Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред и решението е:

- хомогенно уравнение:

$$\ddot{x} + 0{,}05\dot{x} = 0.$$

- характеристично уравнение:

$$\rho^2 + 0{,}05\rho = 0,$$

$\rho(\rho + 0{,}05) = 0$,

$\rho_1 = 0$; $\rho_2 = -0{,}05$.

- общо решение:

$x(t) = C_1 + C_2 e^{-0{,}05t} + \eta(t)$.

- частен интеграл:

$\eta(t) = At$, $\dot{\eta}(t) = A$, $\ddot{\eta}(t) = 0$,

$0 + 0{,}05A = 8{,}5 \Rightarrow \; A = 170$.

- вид на закона за движението и скоростта:

$x(t) = C_1 + C_2 e^{-0{,}05t} + 170t$,

$\dot{x}(t) = -0{,}05 C_2 e^{-0{,}05t} + 170$.

- интеграционни константи:

$x(0) = 0 = C_1 + C_2 \Rightarrow C_1 = -C_2$.

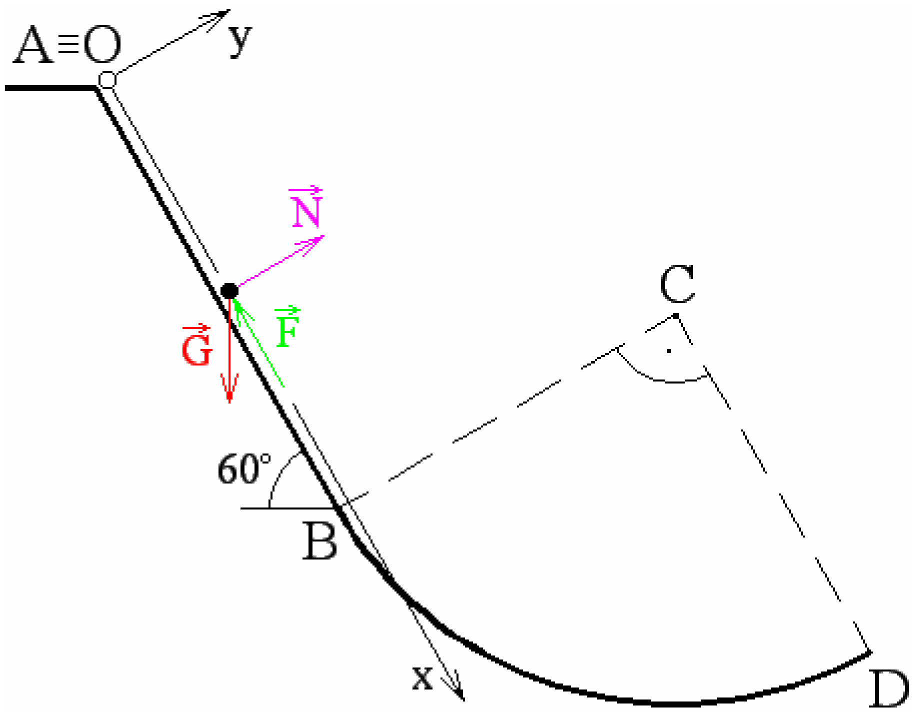
$\dot{x}(0) = 0 = -0{,}05C_2 + 170 \Rightarrow C_2 = 3400 \Rightarrow C_1 = -3400$.

Закон за движение в първи участък:

$x(t) = 3400(e^{-0{,}05t} - 1) + 170t$.

Закон за скоростта в първи участък:

$\dot{x}(t) = 170(1 - e^{-0{,}05t})$.



Фиг. 1.5.2

Преди да продължим с участък BD трябва да се определи скоростта на материалната точка в т. B, тъй като тя ще бъде началната й скорост за втория участък на движение!

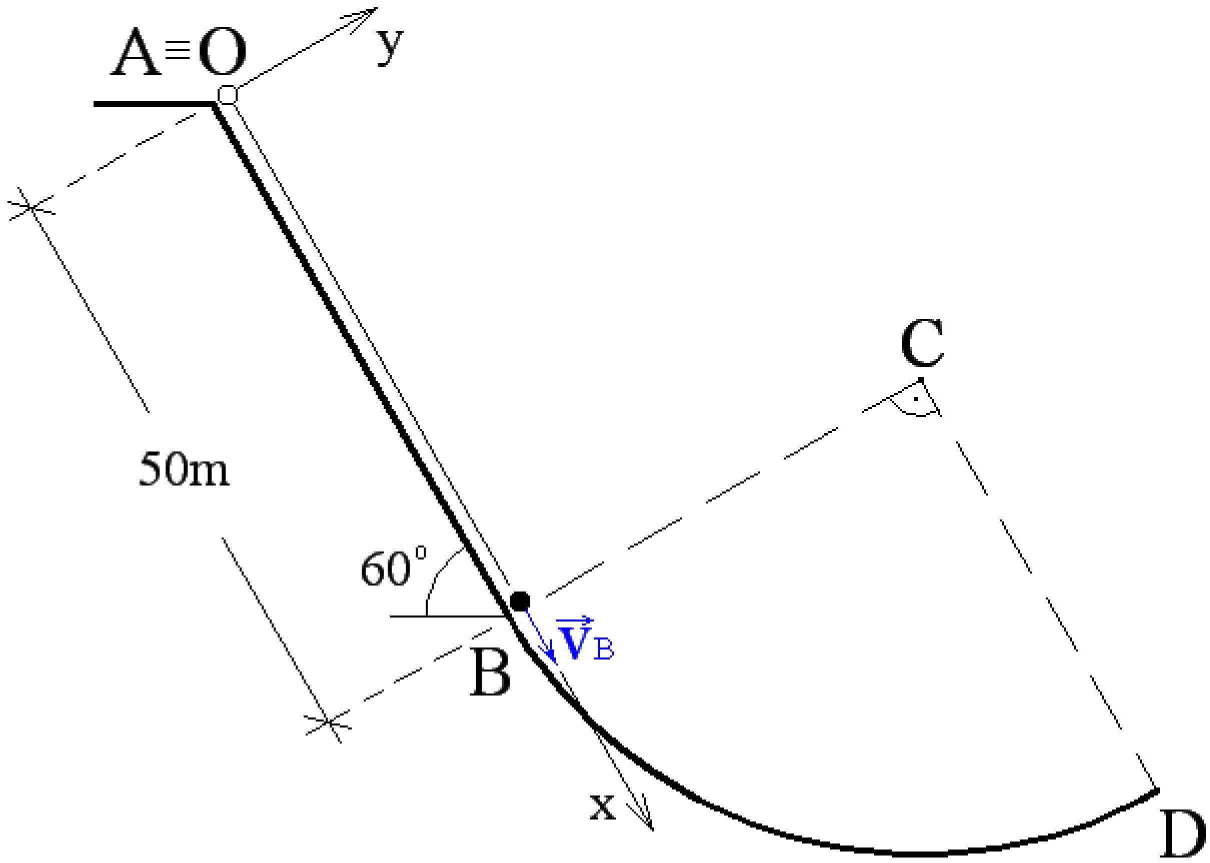
- **Определяне на скоростта на материалната точка в т.** B

Дължината на участък AB е $50\,\mathrm{m}$ (Фиг.1.5.3). С тази стойност се замества в закона за движение и като резултат ще се получи времето, за което частицата стига от т. A до т. B. След това, със същото време се замества в закона за скоростта в първия участък и се получава V_B.

$x(t_B) = AB = 50 = 3400(e^{-0{,}05t_B} - 1) + 170t_B$.

С опитване: $t_B = 3{,}525\,\mathrm{s}$. Тогава:

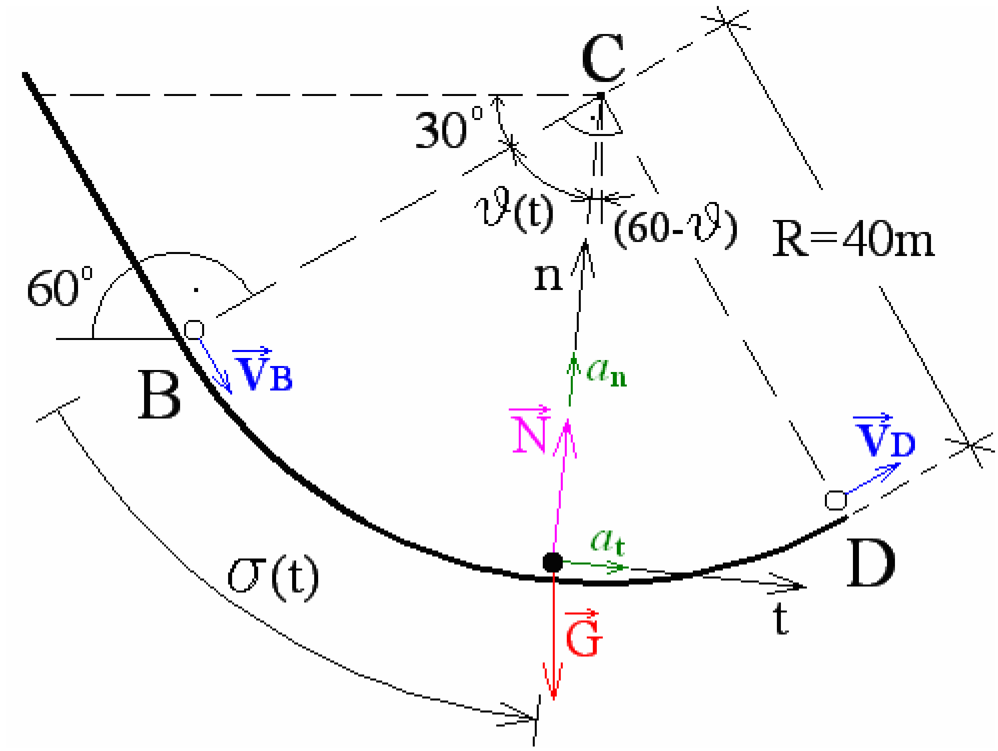
$V_B = \dot{x}(t_B) = 170(1 - e^{-0{,}05t_B}) = 170(1 - e^{-0{,}05.3{,}525}) = 27{,}5\,\mathrm{m/s}$.



Фиг. 1.5.3

2. Определяне на скоростта на материалната точка в т. D

В участък BD движението на материалната точка е в улей с форма на четвърт кръг, т.е. кривата на движение е позната. Тогава, по-удобно е да се използва естествената координатна система, състояща се от тангента и нормала в равнината на движение. Отново поставяме действащите сили: сега това са силата на тежестта $\vec{G}$ и нормалната реакция $\vec{N}$ (Фиг.1.5.4).



Фиг. 1.5.4

След това, определянето на V_D става, както следва. Известно, че при естествен начин на задаване на движението, ускорението на материална точка се състои от две компоненти, нормална и тангенциална, като първата отговаря за изменение на направлението на скоростта, а втората – за изменение на големината на скоростта. В тази задача ние се интересуваме от големината на скоростта и затова разглеждаме движението на материалната точка само по тангентата (Фиг.1.5.4):

$$ma_t = \sum F_{it} \,, \qquad (4)$$

$$ma_t = G\sin(60^0 - \vartheta) \,. \qquad (4')$$

Въвеждаме естествената координата $\sigma(t)$ и централният ъгъл $\vartheta(t)$ (Фиг.1.5.4), като връзката между тях е:

$$\sigma(t) = R\vartheta(t) \,.$$

Продължаваме със зависимостите:

$$V(t) = \dot{\sigma}(t) = R\dot{\vartheta}(t) \,,$$

$$a_t(t) = \dot{V}(t) = \ddot{\sigma}(t) = R\ddot{\vartheta}(t) \,.$$

Използваме познатата субституция:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{d\dot{\vartheta}}{dt}\frac{d\vartheta}{d\vartheta} = \dot{\vartheta}\frac{d\dot{\vartheta}}{d\vartheta} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{\vartheta}^2}{d\vartheta} \,.$$

По-нататък,

$$a_t = \ddot{\sigma}(t) = \frac{R}{2}\frac{d\dot{\vartheta}^2}{d\vartheta} \,,$$

а синуса разлагаме:

$$\sin(60^0 - \vartheta) = \sin 60^0 \cos\vartheta - \cos 60^0 \sin\vartheta \,.$$

След всички преобразувания диференциалното уравнение (4') става с отделящи се променливи:

$$m\frac{R}{2}\frac{d\dot{\vartheta}^2}{d\vartheta} = mg(\sin 60^0 \cos\vartheta - \cos 60^0 \sin\vartheta) \,,$$

$$\frac{R}{2}d\dot{\vartheta}^2 = g(0{,}866\cos\vartheta - 0{,}5\sin\vartheta)d\vartheta \,.$$

То се решава по отношение на V_D по следния начин:

$$\frac{R}{2}\int_{\frac{V_B}{R}}^{\frac{V_D}{R}} d\dot{\vartheta}^2 = g\int_0^{\frac{\pi}{2}} (0{,}866\cos\vartheta - 0{,}5\sin\vartheta)d\vartheta \,,$$

$$\dot{\vartheta}^2\Big|_{\frac{V_B}{R}}^{\frac{V_D}{R}} = \frac{2g}{R}(0{,}866\sin\vartheta + 0{,}5\cos\vartheta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \,,$$

$$\frac{V_D^2}{R^2} - \frac{V_B^2}{R^2} = \frac{2g}{R}(0{,}866 - 0{,}5) \,,$$

$$V_D^2 - V_B^2 = 2gR(0{,}866 - 0{,}5) \,,$$

$$V_D^2 = V_B^2 + 2gR(0{,}866 - 0{,}5) \,.$$

В крайна сметка:

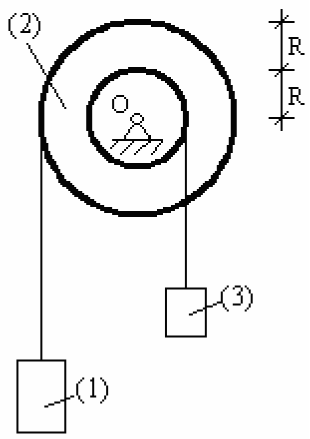
$$V_D = \sqrt{27{,}5^2 + 2.9{,}81.40.0{,}366} = \sqrt{1043{,}5} = 32{,}3 \text{ m/s.}$$

КУРСОВА ЗАДАЧА 2: ТЕОРЕМА ЗА ИЗМЕНЕНИЕ НА КИНЕТИЧНИЯ МОМЕНТ. РАВНИННО ДВИЖЕНИЕ НА ТЯЛО

Задача 2.1

В началния момент, показаната система от тела е в покой (Фиг.2.1.1). Тя се привежда в движение от теглото на тяло 1. Цилиндърът е нехомогенен, а нишките – безтегловни и неразтежими.

Да се определи законът за движение на тяло 1, ако триенето в лагерите на цилиндъра се дава с момента M_1.



Фиг. 2.1.1

Данни:

$m_1 = 55\,\text{kg}$

$m_2 = 25\,\text{kg}$

$m_3 = 20\,\text{kg}$

$R = 0{,}5\,\text{m}$

$M_1 = 6\,\text{Nm}$

$i_2 = 0{,}5\,\text{m}$

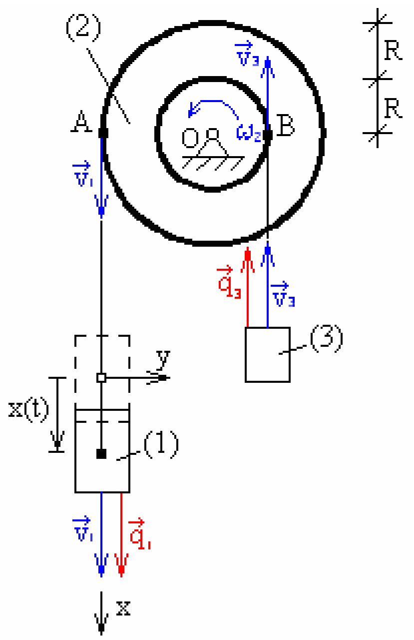
Решение:

Записваме Теоремата за изменение на кинетичния момент:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0 , \qquad (1)$$

където $\vec{K}_0$ е кинетичният момент на системата от тела за т. O, а $\vec{M}_0$ е главният момент на системата сили за същата точка. Последователно определяме $\vec{K}_0$ и $\vec{M}_0$ и след заместване в (1) получаваме закона за движение на тяло 1.

1. Определяне на кинетичния момент на системата за т. *O*



Фиг. 2.1.2

В задачата се търси закона за движение на тяло 1 и затова изразяваме скоростите на тела 2 и 3 чрез тази на тяло 1 (Фиг.2.1.2):

$$\omega_2 = \frac{V_1}{OA} = \frac{V_1}{2R} = \frac{V_1}{2.0{,}5} = V_1 ,$$

$$v_3 = \omega_2 .OB = \omega_2 .R = V_1 .R = 0{,}5V_1 .$$

1.1. Кинетичен момент на тяло 1 за т. O

Тяло 1 извършва транслация, затова кинетичният му момент се определя по формулата:

$$K_{o_1} = q_1 .OA , \qquad (2)$$

където $q_1 = m_1 V_1$ е количеството на движение на тяло 1. Тогава (2) става:

$$K_{o_1} = m_1 .V_1 .OA = m_1 .V_1 .2R = 2m_1 RV_1 .$$

1.2. Кинетичен момент на тяло 2 за т. O

Тяло 2 извършва ротация и затова кинетичният му момент се дава с формулата:

$$K_{o_2} = J_o .\omega_2 ,$$

където J_o е инерционният момент на тяло 2 спрямо т. O /по-коректно е да се каже спрямо оста, минаваща през т. O и перпендикулярна на равнината на движение/.

$$J_o = m_2 .i_c^2 = m_2 .R^2 ,$$

$$K_{o_2} = m_2 .R^2 .\omega_2 = m_2 R^2 V_1 .$$

1.3. Кинетичен момент на тяло 3 за т. O

Тяло 3 извършва транслация и кинетичният му момент се определя по формулата:

$$K_{o_3} = q_3.OB\,, \qquad (3)$$

където $q_3 = m_3V_3$ е количеството на движение на тяло 3. Тогава (3) става:

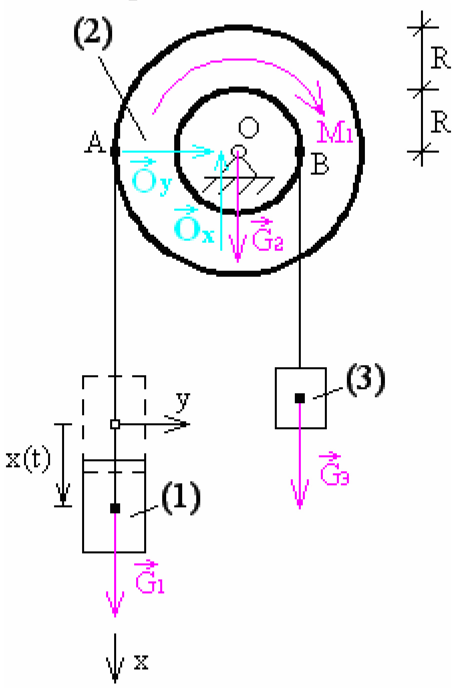
$$K_{o_3} = m_3.V_3.OB = m_3.V_3.R = 0{,}5m_3RV_1\,.$$

1.4 Общ кинетичен момент на системата от тела спрямо т. O

$$K_o = K_{o_1} + K_{o_2} + K_{o_3} = 2m_1RV_1 + m_2R^2V_1 + 0{,}5m_3RV_1 = V_1(2m_1R + m_2R^2 + 0{,}5m_3R)$$

$$K_o = V_1(2.55.0{,}5 + 25.0{,}5^2 + 0{,}5.20.0{,}5) = 66{,}25V_1\ . \qquad (4)$$

2. Определяне на главния момент на външните сили за т.О.



Фиг. 2.1.3

Поставяме действащите върху системата сили и моменти. Това са теглата на трите тела $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ и $\vec{G}_3$, приложени в центровете им на тежестта и насочени вертикално надолу, моментът M_1 с посока, обратна на посоката на въртене и опорните реакции $\vec{O}_x$ и $\vec{O}_y$ в неподвижната опора (Фиг.2.1.3).

Главният момент на системата сили за т. O е:

$$M_o = G_1.OA - M_1 - G_3.OB = m_1.g.2R - M_1 - m_3.g.R\,,$$

като положителната посока е посоката на въртене на цилиндъра. Тук G_2, O_x и O_y не дават момент, защото пресичат т. O (Фиг.2.1.3).

Резултатът е:

$$M_o = 55.9{,}81.2.0{,}5 - 6 - 20.9{,}81.0{,}5 = 435{,}45\ \text{Nm}. \qquad (5)$$

3.Определяне на закона за движение на тяло 1

Замествайки (4) и (5) в (1), получаваме:

$$\frac{d(66{,}25V_1)}{dt} = 435{,}45\ .$$

Решаваме това диференциално уравнение с отделящи се променливи по следния начин:

$$66{,}25\frac{dV_1}{dt} = 435{,}45\ ,$$

$$\int dV_1 = 6{,}57\int dt$$

и като краен резултат получаваме законите за скоростта и движение на тяло 1 с точност до две интеграционни константи:

$$V_1(t) = 6{,}57t + C_1\,,$$

$$x_1(t) = 3{,}285t^2 + C_1t + C_2\,,$$

които определяме от началните условия на движението:

$$V_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = 6{,}57.0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0\,,$$

$$x_1(0) = 0 \Rightarrow 0 = 3{,}285.0^2 + C_1.0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0\,.$$

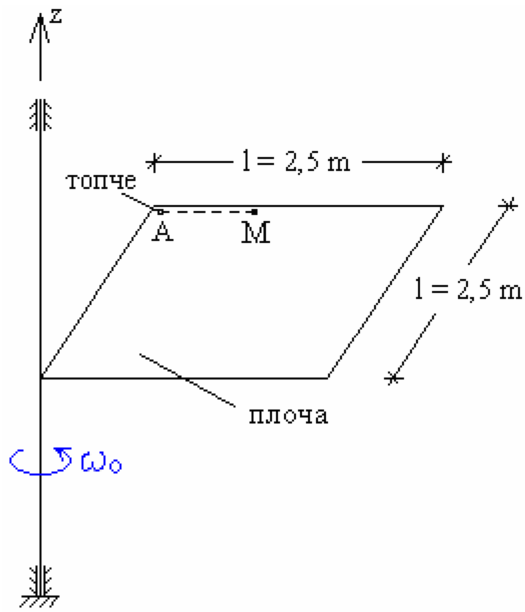
Окончателно, **Законът за движение на тяло 1** е:

$$x_1(t) = 3{,}285t^2\,.$$

Задача 2.2

Квадратна плоча с маса $m_{кв} = 40\,\text{kg}$ и страна $l = 2{,}5\,\text{m}$ е свързана с вертикална ос z и се върти около нея с ъглова скорост $\omega_0 = 3\,\text{s}^{-1}$, докато топче с маса $m_m = 18\,\text{kg}$ е в покой върху нея в т. A (Фиг.2.2.1). В произволен момент, топчето започва движение по закона $S(t) = \overline{AC}(t) = t^2\,[\,S - \text{m},\ t - \text{s}]$.

Пренебрегвайки всички съпротивления на средата, определете ъгловата скорост на плочата във функция на времето $\omega(t)$ след започване на движение на топчето.



Фиг. 2.2.1

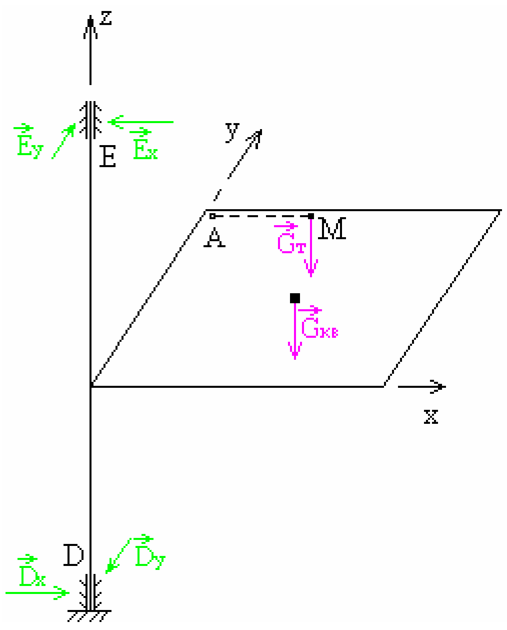
Решение:

Записваме теоремата за изменение на кинетичния момент:

$$\frac{d\vec{K}_z}{dt} = \vec{M}_z\,, \qquad (1)$$

където $\vec{K}_z$ е кинетичния момент на системата от плоча и топче спрямо оста z, а $\vec{M}_z$ е главния момент на системата сили спрямо същата ос.

1. Определяне на M_z



Фиг. 2.2.2

В тази задача решението започва с определяне на $\vec{M}_z$. За целта, първо ще поставим действащите на системата сили – това са теглото на квадрата $\vec{G}_{кв}$, теглото на топчето $\vec{G}_m$ и опорните реакции. Всички сили обаче, не дават момент спрямо оста z – теглата на телата, защото са успоредни на нея, а опорните реакции, защото я пресичат (Фиг.2.2.2).

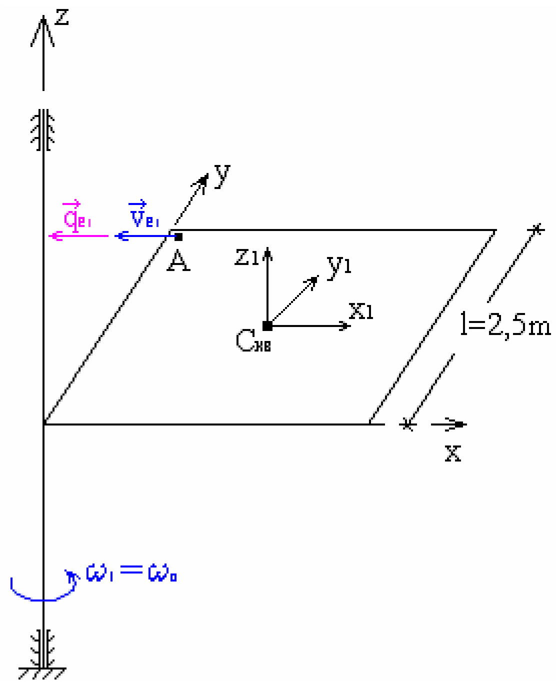
В такъв случай $\vec{M}_z = 0$ и в сила е законът за запазване на кинетичния момент:

$$\frac{d\vec{K}_z}{dt} = 0 \Rightarrow K_{z_1} - K_{z_2} = 0\,,$$

$$K_{z_1} = K_{z_2} \qquad (2)$$

В (2) K_{z_1} е кинетичният момент на системата в първия момент от движението, а K_{z_2} е кинетичния момент на системата в момента, за който търсим $\omega(t)$. Ще определим последователно двата кинетични момента, ще ги заместим в (2) и след решаване на уравнението ще получим $\omega(t)$.

2. Определяне на K_{z_1}



Фиг. 2.2.3

В първия момент от движението, плочата се върти около оста z, а топчето е неподвижно върху нея /топчето е в покой спрямо плочата/ (Фиг.2.2.3).

$$K_{z_1} = K_{z_1}^{кв} + K_{z_1}^{m}$$

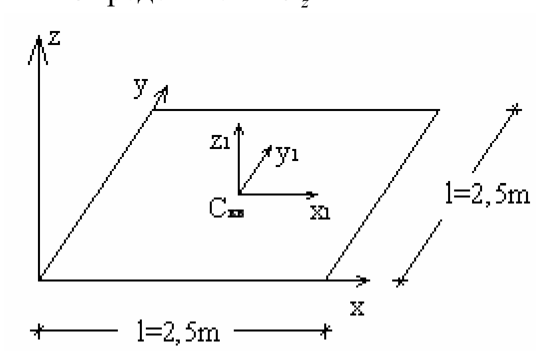
2.1. Определяне на кинетичния момент на плочата $K_{z_1}^{кв}$

Плочата извършва ротационно движение около оста z. Тогава кинетичния й момент е:

$$K_{z_1}^{кв} = J_z^{кв}\omega_1,$$

където $J_z^{кв}$ е инерционния момент на плочата спрямо оста z, а ω_1 е ъгловата скорост на системата в началния момент: $\omega_1 = \omega_0$.

- Определяне на $J_z^{кв}$



Фиг. 2.2.4

Инерционния момент за главна ос z_1 е:

$$J_{z_1} = J_{x_1} + J_{y_1},$$

където $J_{x_1} = \dfrac{m_{кв} l^2}{12}$ и $J_{y_1} = \dfrac{m_{кв} l^2}{12}$.

В случая обаче, оста z, около която се върти плочата, не е главна. В такъв случай инерционният момент се определя с помощта на теоремата на Щайнер.

За инерционните моменти по осите x и y получаваме (Фиг.2.2.4):

$$J_x = J_{x_1} + m_{кв}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_{кв} l^2}{12} + \frac{m_{кв} l^2}{4} = \frac{1}{3} m_{кв} l^2,$$

$$J_y = J_{y_1} + m_{кв}\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m_{кв} l^2}{12} + \frac{m_{кв} l^2}{4} = \frac{1}{3} m_{кв} l^2,$$

а за инерционния момент по z:

$$J_z^{кв} = J_x + J_y = \frac{1}{3} m_{кв} l^2 + \frac{1}{3} m_{кв} l^2 = \frac{2}{3} m_{кв} l^2 = 166{,}67\ \text{kgm}^2.$$

- $K_{z_1}^{кв}$

$$K_{z_1}^{кв} = J_z^{кв}\omega_1 = \frac{2}{3} m_{кв} l^2 \omega_0 = \frac{2}{3}.10.2{,}5^2.3 = 500\,\text{kgm}^2/\text{s}.$$

2.2. Определяне на кинетичния момент на топчето $K_{z_1}^{m}$

Движението на топчето се състои от две компоненти – релативна и преносна. Релативният закон за движение е $S = AC = t^2$, а релативната скорост $V_r = \dot{S} = 2t$. Това означава, че в момент $t = 0$ релативната скорост на топчето също е нула, т.е. единствената скорост на топчето е преносната V_{e_1}.

Тогава, кинетичният му момент е:

$$K_{z_1}^m = q_{e_1} l \,,$$

където q_{e_1} е количеството на движение на топчето в първия момент, а l е най-краткото разстояние от направлението на q_{e_1} до оста на ротация. За q_{e_1} се получава:

$$q_{e_1} = m_m V_{e_1} \,,$$
$$V_{e_1} = \omega_1 l = \omega_0 l \,,$$
$$q_{e_1} = m_m \omega_0 l \,.$$

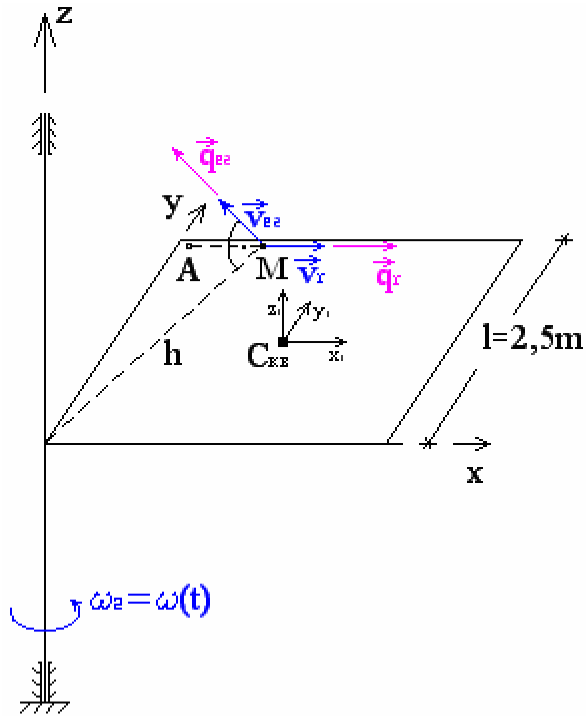
Тогава кинетичният момент на топчето е изчислен:

$$K_{z_1}^m = (m_m \omega_0 l) l = (18.3.2,5).2,5 = 337,5 \, \text{kgm}^2/\text{s}.$$

2.3. Определяне на K_{z_1}

$$K_{z_1} = K_{z_1}^{кв} + K_{z_1}^m = 500 + 337,5 = 837,5 \, \text{kgm}^2/\text{s}.$$

3. Определяне на K_{z_2}



Фиг. 2.2.5

В следващия момент от движението, плочата продължава да се върти около ос z, но топчето вече се движи праволинейно върху нея по едната й страна (Фиг.2.2.5). Кинетичният момент се дава с формулата:

$$K_{z_2} = K_{z_2}^{кв} + K_{z_2}^m$$

3.1. Определяне на $K_{z_2}^{кв}$

Плочата извършва ротационно движение около оста z. Тогава кинетичния й момент е:

$$K_{z_2}^{кв} = J_z^{кв} \omega_2 \,,$$

където $J_z^{кв}$ е инерционния момент на плочата спрямо оста z, а ω_2 е търсената ъглова скорост на системата: $\omega_2 = \omega(t)$. Инерционният момент на плочата не се променя: $J_z^{кв} = \dfrac{2}{3} m_{кв} l^2$.

Тогава:

$$K_{z_2}^{кв} = \frac{2}{3} m_{кв} l^2 \omega(t) = \frac{2}{3}.40.2,5^2.\omega = 166,67\omega \,.$$

3.2. Определяне на $K_{z_2}^m$

В разглеждания момент топчето вече се движи върху едната страна на плочата. Това означава, че скоростта му има две компоненти – релативна V_r и преносна V_{e_2}. Тогава:

$$K_{z_2}^m = -K_{zr}^m + K_{ze_2}^m \,,$$

като знакът пред K_{zr}^m е минус, тъй като движението на топчето спрямо плочата е обратно на въртенето й.

- Определяне на K_{zr}^m

Релативното движение на топчето е праволинейно по страната на плочата. Релативната му скорост е успоредна на тази страна, а кинетичният момент от това движение е:

$$K_{zr}^m = q_r l \,,$$

където q_r е количеството на движение на топчето, дължащо се на релативното движение, а l е най-краткото разстояние от направлението на q_r до оста на ротация. По-нататък:

$$q_r = m_m V_r .$$

Релативната скорост V_r е първата производна на закона за релативно движение:

$$V_r = \dot{S} = 2t ,$$

$$q_r = m_m .2t = 18.2t = 36t .$$

В крайна сметка:

$$K_{zr}^m = (m_m .2t)l = 36t.2{,}5 = 90t .$$

- Определяне на $K_{ze_2}^m$

Кинетичният момент от преносното движение е:

$$K_{ze_2}^m = q_{e_2} h ,$$

където q_{e_2} е количеството на движение на топчето, дължащо се на преносното движение, а h е най-краткото разстояние от направлението на q_{e_2} до оста на ротация (Фиг.2.2.5). За количеството на движение имаме:

$$q_{e_2} = m_m V_{e_2} ,$$

$$V_{e_2} = \omega_2 h = \omega h ,$$

$$q_{e_2} = m_m \omega h .$$

Преносната компонента на кинетичният момент на топчето се получава:

$$K_{ze_2}^m = (m_m \omega h)h = m_m \omega h^2 .$$

По теоремата на Питагор (Фиг.2.2.5):

$$h^2 = l^2 + AC^2 = 2{,}5^2 + (t^2)^2 = 6{,}25 + t^4 .$$

В такъв случай:

$$K_{ze_2}^m = m_m \omega h^2 = 18\omega(6{,}25 + t^4) = (112{,}5 + 18t^4)\omega .$$

- Определяне на $K_{z_2}^m$

$$K_{z_2}^m = -K_{zr}^m + K_{ze_2}^m = -90t + (112{,}5 + 18t^4)\omega .$$

3.3. Определяне на K_{z_2}

$$K_{z_2} = K_{z_2}^{кв} + K_{z_2}^m = 166{,}67\omega + \left[(-90t) + (112{,}5 + 18t^4)\omega\right]$$

4. Определяне на $\omega(t)$

Заместваме в уравнение (2) със стойностите за K_{z_1} и K_{z_2}:

$$837{,}5 = 166{,}67\omega - 90t + (112{,}5 + 18t^4)\omega ,$$

след което преработваме полученото уравнение:

$$837{,}5 + 90t = (166{,}67 + 112{,}5 + 18t^4)\omega ,$$

$$837{,}5 + 90t = (279{,}17 + 18t^4)\omega , \qquad /:18$$

$$46{,}5 + 5t = (15{,}5 + t^4)\omega .$$

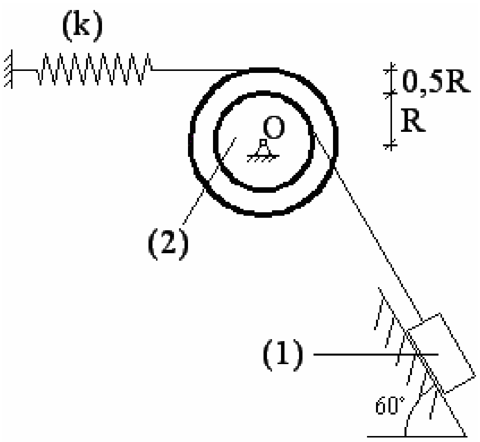
В крайна сметка, резултатът е:

$$\omega(t) = \frac{46{,}5 + 5t}{15{,}5 + t^4}$$

Зад. 3

В началния момент, показаната система от тела е в покой, а пружината е ненапрегната (Фиг.2.3.1). Системата се привежда в движение от теглото на тяло 1, което се плъзга върху грапава наклонена равнина. Цилиндърът е нехомогенен, а нишките – безтегловни и неразтежими.

Да се определи законът за движение на тяло 1, докато за пръв път промени посоката си на движение, ако триенето в лагерите на цилиндъра се представя с момент M_1.



Фиг. 2.3.1

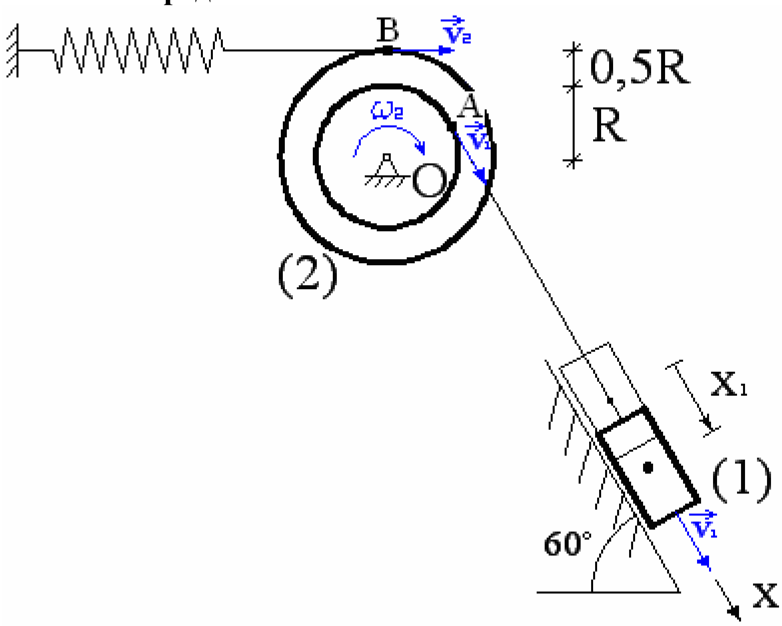
Данни:
$m_1 = 60\,\text{kg}$
$m_2 = 32\,\text{kg}$
$R = 0{,}35\,\text{m}$
$i_2 = 2R = 0{,}7\,\text{m}$
$\mu = 0{,}22$
$k = 100\,\text{N/m}$
$M_1 = 110\,\text{Nm}$

Решение:

Записваме теоремата за изменение на кинетичния момент за т.O:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0 . \qquad (1)$$

1. Определяне на кинетичния момент на системата за т.*O*



Фиг. 2.3.2

Понеже търсим закона за движение на тяло 1, изразяваме скоростите на всички тела чрез V_1 (Фиг.2.3.2):

$$\omega_2 = \frac{V_1}{OA} = \frac{V_1}{R} .$$

1.1. Кинетичен момент на тяло 1 за т.O

Тяло 1 извършва транслация затова кинетичния му момент се определя по формулата:

$$K_{o_1} = q_1.OA , \qquad (2)$$

където $q_1 = m_1.V_1$ е количеството на движение на 1. Тогава (2) става:

$$K_{o_1} = m_1.V_1.OA = m_1 V_1 R .$$

1.2. Кинетичен момент на тяло 2 за т.O

Тяло 2 извършва ротация около т.O и кинетичният му момент се дава с формулата:

$$K_{o_2} = J_o.\omega_2 ,$$

където J_o е инерционния момент на тяло 2 за т.O.

$$J_o = m_2 i_c^2 = m_2 (2R)^2 = m_2 4R^2 ,$$

$$K_{o_2} = m_2 4R^2 \omega_2 = 4m_2 R^2 \frac{V_1}{R} = 4m_2 V_1 R .$$

1.3. Общ кинетичен момент на системата от тела

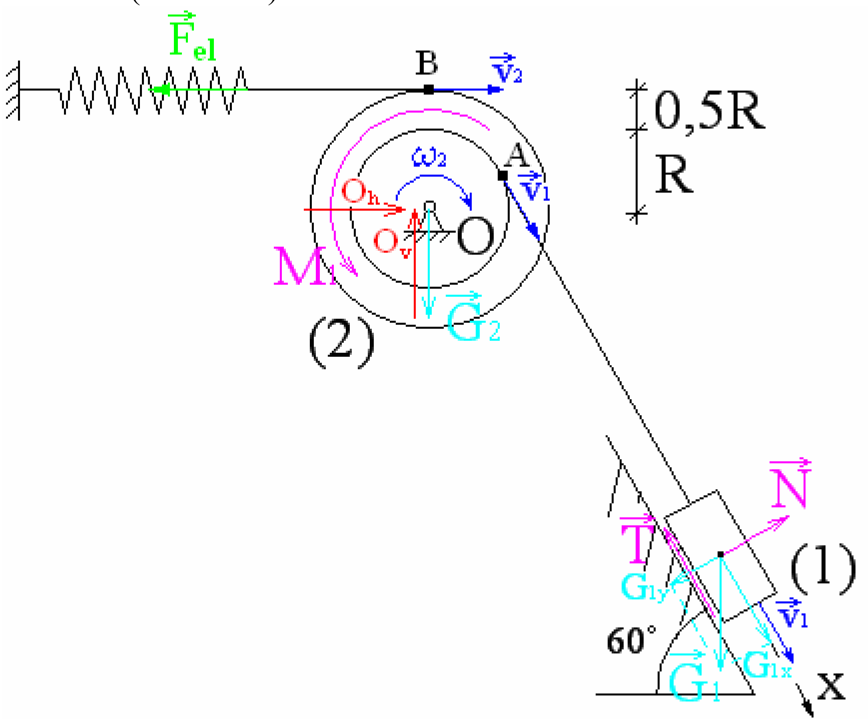
$$K_o = K_{o_1} + K_{o_2} = m_1 V_1 R + 4m_2 V_1 R = V_1 (m_1 R + 4m_2 R)$$

$$K_o = V_1 (60.0{,}35 + 25.0{,}5^2 + 4.32.0{,}35) .$$

$$K_o = 65{,}8 V_1 \qquad (3)$$

2. Определяне на главния момент на външните сили за т. *O*

Поставяме действащите върху системата от тела сили и моменти. Това са теглата на двете тела $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ */вертикални сили, насочени надолу/*, приложени в центровете на тежестта, момента M_1 */обратен на посоката на въртене/*, даващ триенето в лагерите, опорните реакции $\vec{O}_h$ и $\vec{O}_v$ в неподвижната опора, силата на триене $\vec{T}$, нормалната реакция $\vec{N}$ и пружинната сила $\vec{F}_{el}$ */обратни на посоката на движение/* (Фиг.2.3.3).



Фиг. 2.3.3

Пружинната сила $\vec{F}_{el}$ трябва да се изрази във функция на преместването на тяло 1, което е свързано с пружината посредством барабана 2 (Фиг.2.3.3). Тогава, за да определим пружинната сила, трябва да намерим предавателното отношение на цилиндър 2. За целта е необходимо да определим отношението между скоростта V_1 в т. A */точката на свързване на тяло 1 с барабана/* и скоростта V_2 в т. B */точката на свързване на пружината с барабана/*: това е търсеното предавателно отношение. Изразяваме V_2:

$$V_2 = \omega_2 OB = \frac{V_1}{R} 1{,}5R = 1{,}5V_1 .$$

Предавателното отношение е 1,5. Това означава, че ако тяло 1 се премести на разстояние x_1, то пружината ще се разтегне с дължина $1{,}5x_1$. Тогава за пружинната сила се получава:

$$F_{el} = 1{,}5kx_1 .$$

- Определяне на M_0

Главният момент на системата за т. O е:

$$M_o = G_{1x}.OA - T.OA - M_1 - F_{el}.OB = m_1 g \sin 60^0 R - \mu mg \cos 60^0 R - M_1 - 1{,}5kx_1 1{,}5R ,$$

$$M_o = 60.9{,}81.\sin 60^0.0{,}35 - 0{,}22.60.9{,}81.\cos 60^0.0{,}35 - 110 - 1{,}5.100.x_1.1{,}5.0{,}35 ,$$

$$M_o = 45{,}7 - 78{,}75x_1 , \qquad (4)$$

където положителната посока на момента е посоката на въртене на цилиндър 2. Силите $\vec{G}_2$, $\vec{O}_h$ и $\vec{O}_v$ не дават момент, защото пресичат т. O, а понеже $N = G_{1y}$, а двете сили са с противоположни посоки, общият им момент за т. O е нула.

3. Определяне на закона за движение на тяло 1

Заместваме (3) и (4) в (1) и получаваме:

$$\frac{d(65{,}8V_1)}{dt} = 45{,}7 - 78{,}75x_1 \ .$$

Пред V_1 имаме константа, затова я изнасяме отпред:

$$65{,}8\frac{dV_1}{dt} = 45{,}7 - 78{,}75x_1 \,.$$

Знаем, че $\frac{dV_1}{dt} = \ddot{x}_1$. Тогава горното уравнение добива вида:

$$65{,}8\ddot{x}_1 = 45{,}7 - 78{,}75x_1 \,.$$

Преработваме го и получаваме:

$$\ddot{x}_1 + 1{,}2x_1 = 0{,}7 \,. \qquad (5)$$

Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред. То се решава, както следва. Първо решаваме хомогенното уравнение:

$$\ddot{x}_1 + 1{,}2x_1 = 0 \,.$$

Характеристичното му уравнение е:

$$\rho^2 + 1{,}2 = 0 \,,$$

а корени са комплексните числа: $\rho_{1,2} = \pm 1{,}1i$.

Тогава общото решение на нехомогенното диференциално уравнение (5) има вида:

$$x_1(t) = C_1 \cos 1{,}1t + C_2 \sin 1{,}1t + \eta(t) \,,$$

където $\eta(t)$ е частното решение:

$\eta(t) = t^0 A = A$, защото най-ниската производна от лявата страна на (5) е нулева, а полиномът вдясно е от нулева степен. Определяме първата и втората производна на $\eta(t)$: $\dot{\eta}(t) = 0$ и $\ddot{\eta}(t) = 0$, след което ги заместваме в (5) като $\ddot{\eta}(t)$ отговаря на $\ddot{x}_1$, а $\eta(t)$ на x_1. Получаваме:

$$0 + 1{,}2A = 0{,}7 \quad \Rightarrow \quad A = 0{,}58 \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = 0{,}58 \,.$$

Тогава:

$$x_1(t) = C_1 \cos 1{,}1t + C_2 \sin 1{,}1t + 0{,}58 \,,$$

$$\dot{x}_1(t) = 1{,}1(C_2 \cos 1{,}1t - C_1 \sin 1{,}1t) \,.$$

Сега трябва да определим интеграционните константи C_1 и C_2. Това става с помощта на началните условия на движение. В задачата е казано, че в началния момент системата е била в покой . Това означава, че $x_1(0) = 0$ и $\dot{x}_1(0) = 0$.

В такъв случай:

$$x_1(0) = 0 = C_1.\cos 0 + C_2.\sin 0 + 0{,}58 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 + 0{,}58 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -0{,}58 \,,$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 = 1{,}1(C_2.\cos 0 - C_1.\sin 0) \quad \Rightarrow \quad 0 = 1{,}1.C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \,.$$

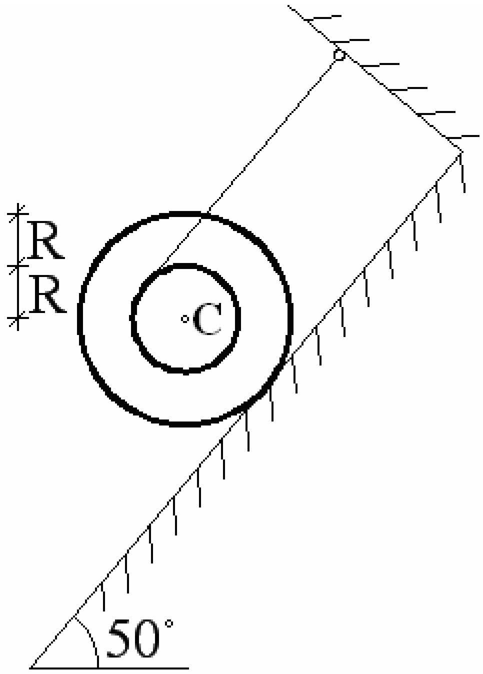
Окончателно, **законът за движение на тяло 1** е получен като:

$$x_1(t) = 0{,}58(1 - \cos 1{,}1t) \,.$$

Задача 2.4

Нехомогенна макара с маса $m = 52\,\mathrm{kg}$ и радиус $R = 0{,}35\,\mathrm{m}$ е захваната с безтегловна неразтежима нишка към стена (Фиг.2.4.1). Под действие на теглото си макарата се търкаля с плъзгане по грапава наклонена равнина. Инерционният радиус на макарата е $i = R$, а коефициентът на триене при плъзгане е $\mu = 0{,}3$. Да се определят:

1) Законът за движение на макарата, ако в началния момент тя е била в покой;
2) Усилието в нишката.



Фиг. 2.4.1

<u>Решение:</u>

1. Определяне на закона за движение на макарата

Макарата извършва равнинно движение – центърът й на тежестта се премества праволинейно със скорост V_C, а самата тя се върти с ъглова скорост ω. Въвеждаме с начало центъра на тежестта на макарата координатна система xCy и записваме диференциалните уравнения на движението й:

$$m.\ddot{x}_C = \sum F_{ix} \qquad (1)$$

$$m.\ddot{y}_C = \sum F_{iy} \qquad (2)$$

$$J_C.\ddot{\varphi} = M_C \ \underline{\text{или}}\ J_P.\ddot{\varphi} = M_P \qquad (3)$$

Първите две уравнения ни дават транслационното движение на макарата – тук $\ddot{x}_C$ и $\ddot{y}_C$ са проекциите на ускорението на т.C по двете оси, а $\sum F_{ix}$ и $\sum F_{iy}$ са сумите от проекциите на действащите върху макарата сили по същите оси.

Третото уравнение ни дава ротацията на макарата – то е записано по два начина. Първият е за центъра на тежестта като J_C е инерционния момент на макарата за т.C, $\ddot{\varphi}$ е ъгловото ускорение, а M_C е сумата от моментите на действащите върху макарата сили за т.C. Вторият запис е за моментния център на скоростите – тук J_P е инерционния момент на макарата за т.P, $\ddot{\varphi}$ отново е ъгловото ускорение, а M_P е сумата от моментите на действащите върху макарата сили за т.P. С кой от двата начина на записване на (3) ще се работи зависи от това в кой от тях има по-малко неизвестни – записваме и двата и преценяваме. Важно е само да се помни, че законът за движение на равнинно движещо се тяло се състои от три компоненти – две за транслацията и една за ротацията, така че използваните уравнения трябва да бъдат три.

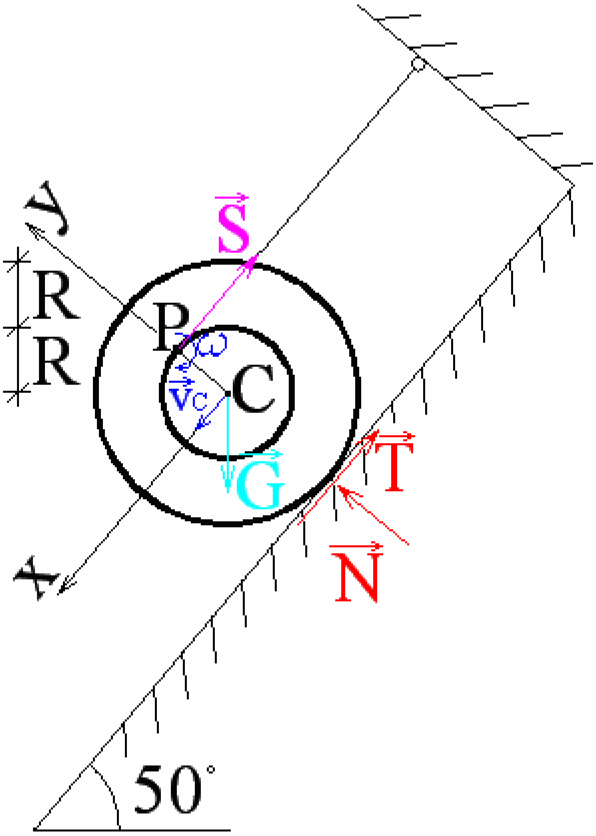
Продължаваме решението на задачата с поставяне на силите, действащи върху макарата (Фиг.2.4.2):

- силата на тежестта $\vec{G}$: вертикална, насочена надолу сила, приложена в центъра на тежестта на цилиндъра;

- нормалната реакция $\vec{N}$: насочена по y, перпендикулярно на равнината, по която се движи цилиндъра, приложена в точката на допир до земята;

- силата на триене $\vec{T}$: понеже търкалянето е с плъзгане, посоката на T е известна – обратна на посоката на скоростта на точката, в която цилиндъра докосва равнината, по която се движи; приложната й точка е точката на допир до земята

- усилието в нишката S: прието е на опън, т.е. обратно на посоката на движение на цилиндъра, приложено в т. P – точката, в която макарата е свързана с нишката.



Фиг. 2.4.2

С тези сили заместваме в (1), (2) и (3) и получаваме:

$$m\ddot{x}_C = G\sin 50^0 - T - S, \qquad (1')$$

$$m\ddot{y}_C = N - G\cos 50^0, \qquad (2')$$

$$J_C\ddot{\varphi} = SR - T.2R \ \underline{\text{или}}\ J_P\ddot{\varphi} = G\sin 50^0 R - T.3R. \qquad (3')$$

Да разгледаме (3') и да преценим с кое от двете уравнения да работим. В първото имаме две неизвестни - $\ddot{\varphi}$ и S, а във второто само една - $\ddot{\varphi}$. В такъв случай, логично е да изберем второто уравнение. Системата уравнения добива вида:

$$m\ddot{x}_C = G.\sin 50^0 - T - S, \qquad (1')$$

$$m\ddot{y}_C = N - G.\cos 50^0, \qquad (2')$$

$$J_P\ddot{\varphi} = G\sin 50^0 R - T.3R. \qquad (3')$$

Имаме три уравнения с четири неизвестни: $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{\varphi}$ и S. Трябва ни връзка между някои от неизвестните, която да използваме за четвърто уравнение. Такава връзка е отношението между ъгловата скорост на макарата и линейната скорост на центъра й (Фиг.2.4.2):

$$\omega = \frac{V_C}{R} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_C}{R} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{R} \qquad (4')$$

Решаването на системата уравнения започваме с (2'). От схемата се вижда, че центърът на тежестта на макарата се движи само по ос x, а това означава, че $y_C(t) = 0$, $\dot{y}_C = 0$ и $\ddot{y}_C = 0$. Тогава,

$$0 = N - G\cos 50^0 \qquad \Rightarrow \qquad N = G\cos 50^0,$$

откъдето следва, че $T = \mu N = \mu G\cos 50^0$.

Продължаваме с уравнение (3') като първо определяме J_P:

$$J_P = J_C + m(CP)^2 = mi^2 + m(CP)^2 = m[i^2 + (CP)^2] = m[R^2 + R^2] = 2mR^2.$$

В уравнение (3') се получава:

$$2mR^2\ddot{\varphi} = G\sin 50^0 R - T.3R,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{G\sin 50^0 - 3T}{2mR} = \frac{g\sin 50^0 - 3\mu g\cos 50^0}{2R},$$

$$\ddot{\varphi} = 2{,}63\ \text{s}^{-2}.$$

Интегрираме два пъти и получаваме закона за ротацията на макарата с точност до две интеграционни константи:

$$\dot{\varphi}(t) = 2{,}63t + C_1,$$

$$\varphi(t) = 1{,}315t^2 + C_1 t + C_2,$$

които определяме от началните условия на движението:

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 2{,}63.0 + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0,$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 1{,}315.0^2 + C_1.0 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0.$$

В крайна сметка $\varphi(t) = 1{,}315t^2$.

От (4') определяме $\ddot{x}_C$:

$$\ddot{x}_C = \ddot{\varphi}R = 2{,}63.0{,}35 = 0{,}92\ \text{m/s}^2,$$

а след интегриране два пъти получаваме и x_C:

$$\dot{x}_C(t) = 0{,}92t + C_3,$$

$$x_C(t) = 0{,}46t^2 + C_3 t + C_4.$$

Понеже граничните условия са същите получено е $C_3 = 0$ и $C_4 = 0$. Тогава: $x_C(t) = 0{,}46t^2$.

Окончателно, **законът за движение на макарата** е:

$$x_C(t) = 0{,}46t^2$$

$$y_C = 0$$

$$\varphi(t) = 1{,}315t^2$$

2. Определяне на усилието в нишката

В уравнение (1') заместваме с $\ddot{x}_C = 0{,}92\ \text{m/s}^2$ и получаваме:

$$S = G\sin 50^0 - T - m\ddot{x}_C,$$

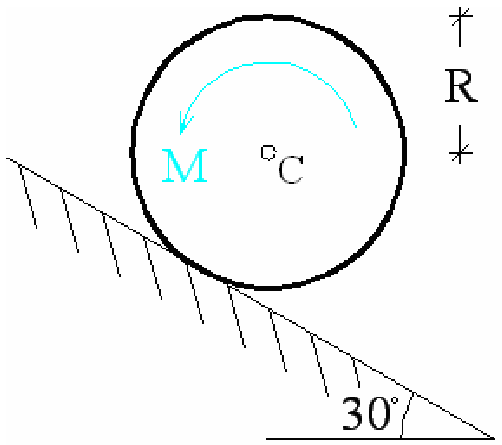
$$S = 52.(9{,}81.\sin 50^0 - 0{,}3.9{,}81.\cos 50^0 - 0{,}92) = 244{,}56\ \text{N}.$$

<u>Задача 2.5</u>

Под действието на въртящ момент $M = 32\,\text{Nm}$ хомогенно колело с маса $m = 8\,\text{kg}$ и радиус $R = 0{,}5\,\text{m}$ се търкаля без плъзгане по наклонена равнина (Фиг.2.5.1). Да се определят:

1) Законът за движение на колелото, ако в началния момент то е било в покой;

2) Опорните реакции *(в този случай – силата на триене T и нормалната реакция N)*



Фиг. 2.5.1

Решение:

1. Определяне на закона за движение на колелото

Колелото извършва равнинно движение. Въвеждаме с начало центъра му на тежестта координатна система xCy и записваме диференциалните уравнения на движението:

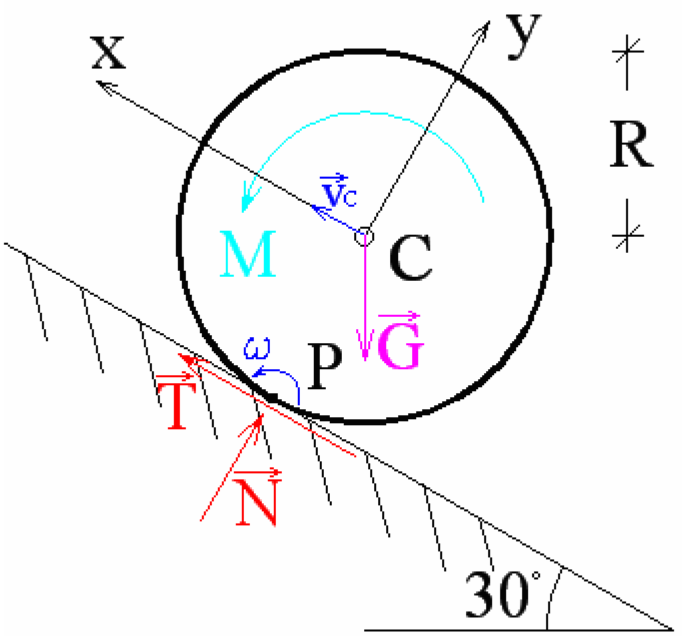
$$m\ddot{x}_C = \sum F_{ix} \qquad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = \sum F_{iy} \qquad (2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = M_C \ \underline{\text{или}}\ J_P\ddot{\varphi} = M_P \qquad (3)$$

След това поставяме силите, действащи върху колелото (Фиг.2.5.2):

- задвижващия момент M;
- силата на тежестта $\vec{G}$;
- силата на триене $\vec{T}$ *(понеже имаме търкаляне без плъзгане – посоката на $\vec{T}$ е неизвестна и затова я избираме)*;
- нормалната реакция $\vec{N}$.



Фиг. 2.5.2

С тези сили заместваме в (1), (2) и (3) и получаваме:

$$m\ddot{x}_C = T - G\sin 30^0, \qquad (1')$$

$$m\ddot{y}_C = N - G\cos 30^0, \qquad (2')$$

$$J_C\ddot{\varphi} = M - TR \ \underline{\text{или}}\ J_P\ddot{\varphi} = M - G\sin 30^0 R. \qquad (3')$$

Да разгледаме (3') и да преценим с кое от двете уравнения да работим. В първото имаме две неизвестни: $\ddot{\varphi}$ и $\vec{T}$, а във второто само една: $\ddot{\varphi}$. В такъв случай, логично е да изберем второто уравнение. Тогава:

$$m\ddot{x}_C = T - G\sin 30^0, \qquad (1')$$

$$m\ddot{y}_C = N - G\cos 30^0, \qquad (2')$$

$$J_P\ddot{\varphi} = M - G\sin 30^0 R. \qquad (3')$$

Имаме три уравнения с пет неизвестни: $\ddot{x}_C$, $\ddot{y}_C$, $\ddot{\varphi}$, $\vec{N}$ и $\vec{T}$. От уравнение (2') обаче, можем да определим $\vec{N}$, защото центърът на тежестта на макарата извършва движение само по x, а това означава, че $y_C = 0$, $\dot{y}_C = 0$ и $\ddot{y}_C = 0$. Тогава:

$0 = N - G\cos 30^0 \;\Rightarrow\; N = G\cos 30^0 = mg\cos 30^0 = 8.9{,}81.0{,}866 = 68\,\text{N}.$

Остават ни две уравнения с три неизвестни: $\ddot{x}_C$, $\ddot{\varphi}$ и $\vec{T}$ *($\vec{T}$ вече не е функция на $\vec{N}$, защото имаме търкаляне без плъзгане и законът на Кулон $T = \mu N$ не е в сила).* За да определим неизвестните ни трябва връзка между някои от тях, която да използваме за четвърто уравнение. За целта използваме отношението между ъгловата и линейната скорост:

$$\omega = \frac{V_C}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{\dot{x}_C}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_C}{R} \qquad (4')$$

Продължаваме решението с уравнение (3') като първо определяме J_P:

$$J_P = J_C + m.(CP)^2 = \frac{1}{2}.m.R^2 + m.R^2 = 1{,}5.m.R^2 .$$

Уравнение (3') добива вида:

$$1{,}5mR^2\ddot{\varphi} = M - G\sin 30^0 R ,$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M - G\sin 30^0 R}{1{,}5mR^2} = \frac{M - mg\sin 30^0 R}{1{,}5mR^2} = \frac{32 - 8.9{,}81.\sin 30^0.0{,}5}{1{,}5.8.0{,}5^2},$$

$$\ddot{\varphi} = 4{,}13\,\text{s}^{-2}.$$

Интегрираме два пъти и получаваме закона за въртене с точност до две константи:

$$\dot{\varphi}(t) = 4{,}13t + C_1 ,$$

$$\varphi(t) = 2{,}065t^2 + C_1 t + C_2 ,$$

които определяме от началните условия на движението:

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 4{,}13.0 + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0,$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = 2{,}065.0^2 + C_1.0 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0 .$$

В крайна сметка: $\varphi(t) = 2{,}065t^2$.

От (4') определяме $\ddot{x}_C$:

$$\ddot{x}_C = \ddot{\varphi}.R = 4{,}13.0{,}5 = 2{,}065\,\text{m/s}^2,$$

а след интегриране два пъти получаваме и x_C:

$$\dot{x}_C(t) = 2{,}065t + C_3 ,$$

$$x_C(t) = 1{,}03t^2 + C_3 t + C_4 .$$

Понеже началните условия са същите резултатът е $C_3 = 0$ и $C_4 = 0$.

Тогава: $x_C(t) = 1{,}03t^2$.

Окончателно, **законът за движение на колелото** е:

$$x_C(t) = 1{,}03t^2$$

$$y_C = 0$$

$$\varphi(t) = 2{,}065t^2$$

2. Определяне на опорните реакции

По-горе определихме $N = 68\,\text{N}$.

Сега ще определим и T като в уравнение (1') заместим с $\ddot{x}_C = 2{,}065\,\text{m/s}^2$:

$$T = G\sin 30^0 + m\ddot{x}_C ,$$

$$T = m(g\sin 30^0 + \ddot{x}_C)$$

$$T = 8.(9{,}81.\sin 30^0 + 2{,}065)$$

$$T = 55{,}76\,\text{N}$$

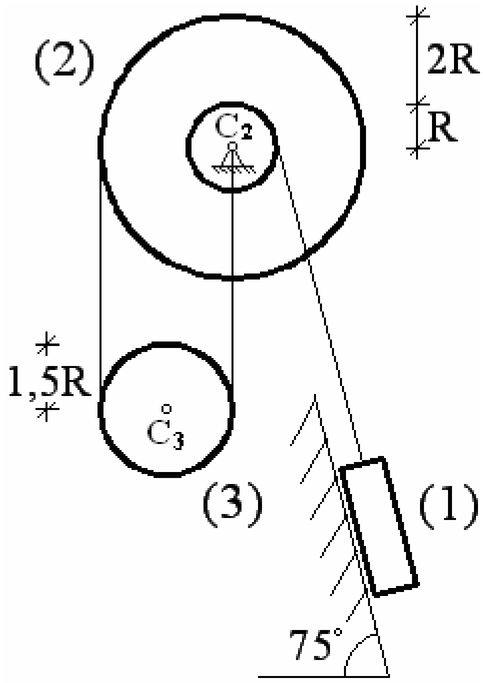
Знакът е положителен, което означава, че избраната посока на T е вярна!

КУРСОВА ЗАДАЧА 3: ТЕОРЕМА ЗА ИЗМЕНЕНИЕ НА КИНЕТИЧНАТА ЕНЕРГИЯ

Задача 3.1

В началния момент показаната система от тела е в покой (Фиг.3.1.1). Тя се привежда в движение от теглото на тяло 1, което се плъзга върху грапава наклонена равнина. Цилиндър 2 е нехомогенен, а цилиндър 3 – хомогенен. Коефициентът на триене между тяло 1 и равнината е $\mu = 0{,}3$. Нишките са безтегловни и неразтежими.

Да се определи законът за движение на тяло 1.



Фиг. 3.1.1

Данни: $m_1 = 48\,\text{kg}$, $m_2 = 30\,\text{kg}$, $m_3 = 22\,\text{kg}$,
$R = 0{,}4\,\text{m}$, $i_2 = 2R = 0{,}8\,\text{m}$.

Решение:

Записваме диференциалната форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия:

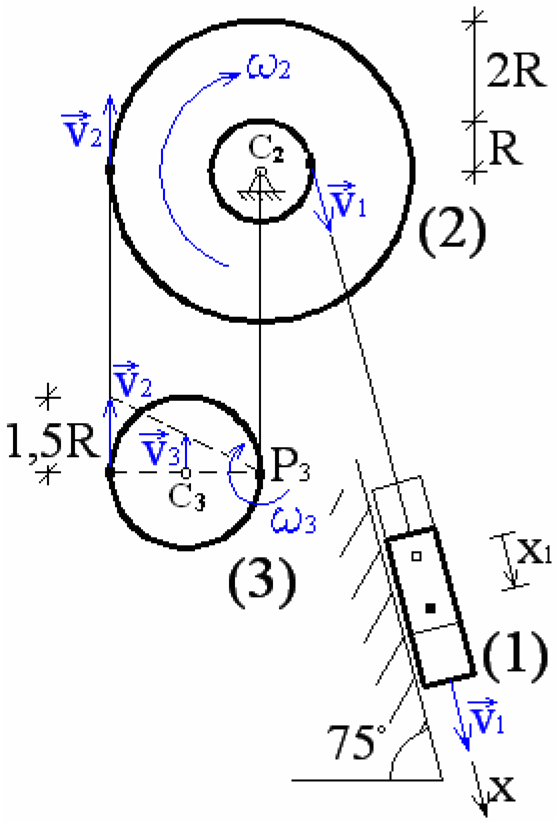
$$\frac{dE_к}{dt} = P\,, \qquad (1)$$

където E_k е кинетичната енергия на системата от тела, а P е мощността на системата сили.

1. Определяне на кинетичната енергия на системата от тела

Системата се състои от три тела, затова кинетичната й енергия ще бъде сумата от кинетичните енергии на трите тела:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}\,. \qquad (2)$$



Фиг. 3.1.2

Кинетичната енергия е функция на скоростта и понеже търсим закона за движение на тяло 1, ще изразим скоростите на всички тела чрез V_1:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R}\,; \qquad V_2 = \omega_2.3R = \frac{V_1}{R}3R = 3V_1\,;$$

$$\omega_3 = \frac{V_2}{3R} = \frac{3V_1}{3R} = \frac{V_1}{R}\,; \quad V_3 = \omega_3.1{,}5R = \frac{V_1}{R}1{,}5R = 1{,}5V_1\,.$$

1.1. Определяне на E_{k1}

Тяло 1 извършва транслационно движение. Тогава кинетичната му енергия е:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1V_1^2\,. \qquad (2')$$

1.2. Определяне на E_{k2}

Тяло 2 извършва ротационно движение и кинетичната му енергия е:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2\,,$$

където J_2 е инерционният момент за центъра на тежестта:

$$J_2 = m_2 i_2^2 = m_2(2R)^2 = 4m_2R^2\,.$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2}4m_2R^2(3V_1)^2 = 18m_2R^2V_1^2. \quad (2'')$$

1.3. Определяне на E_{k3}

Тяло 3 извършва равнинно движение и кинетичната енергия е:

$$E_{k3} = \frac{1}{2}m_3V_3^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2,$$

където J_3 е инерционният момент за центъра на тежестта:

$$J_3 = \frac{1}{2}m_3(1{,}5R)^2 = \frac{1}{2}m_3.2{,}25.R^2 = 1{,}125m_3.R^2$$

$$E_{k3} = \frac{1}{2}m_3(1{,}5V_1)^2 + \frac{1}{2}.1{,}125m_3R^2\left(\frac{V_1}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}m_3.2{,}25V_1^2 + \frac{1}{2}1{,}125m_3R^2\frac{V_1^2}{R^2}$$

$$E_{k3} = 1{,}125m_3V_1^2 + 0{,}5625m_3V_1^2 = 1{,}7m_3V_1^2. \quad (2''')$$

1.4. Определяне на E_k

Заместваме (2'), (2'') и (2''') в (2) и получаваме за общата кинетична енергия:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + 18m_2R^2V_1^2 + 1{,}7m_3V_1^2,$$

$$E_k = \frac{1}{2}.48.V_1^2 + 18.30.0{,}4^2.V_1^2 + 1{,}7.22.V_1^2,$$

$$E_k = 147{,}8V_1^2. \quad (3)$$

2. Определяне на мощността на системата сили

Поставяме действащите върху системата сили. Това са теглата на трите тела $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ и $\vec{G}_3$, приложени в центровете им на тежестта, силата на триене $\vec{T}$, нормалната реакция $\vec{N}$ и опорните реакции $\vec{R}_h$ и $\vec{R}_v$ в неподвижната опора (Фиг.3.1.3). Както е известно, мощността на една сила е произведението на големината й със скоростта на приложната й точка. Тогава в нашия случай мощност ще имат само G_{1x}, G_3 и T. Останалите сили няма да дават мощност, защото: N и G_{1y} са перпендикулярни на движението на тяло 1, т.е. перпендикулярни на скоростта; G_2, R_h и R_v са приложени в неподвижната опора, където скоростта е нула. Тогава, мощността на силите е:

$$P = P(\vec{G}_{1x}) - P(\vec{T}) - P(\vec{G}_3). \quad (4)$$

Знаците пред $P(\vec{T})$ и $P(\vec{G}_3)$ са минуси, защото посоките на силите и скоростите на приложните им точки са противоположни.

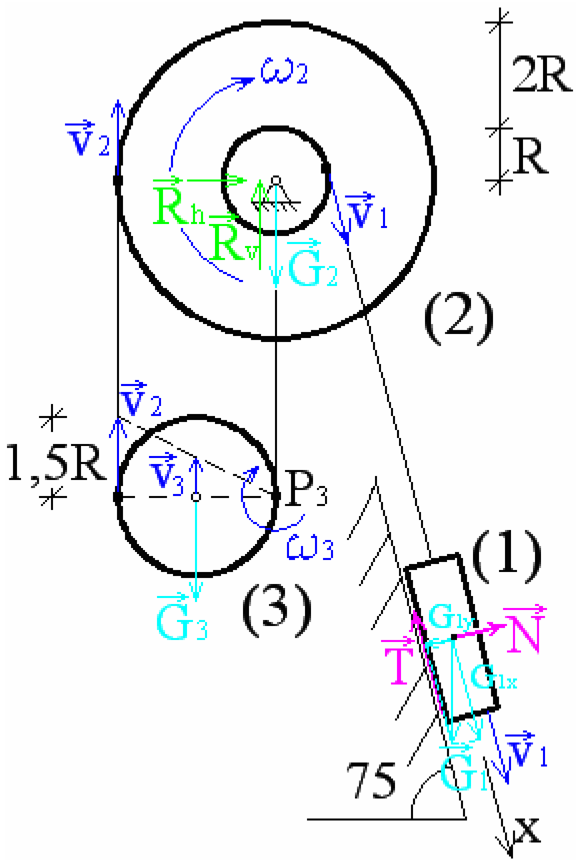
$$P(\vec{G}_{1x}) = G_{1x}.V_1 = m_1.g.\sin 75^0.V_1 =$$
$$= 48.9{,}81.\sin 75^0.V_1 = 454{,}84.V_1 \quad (4')$$

$$P(\vec{T}) = T.V_1 = \mu.m_1.g.\cos 75^0.V_1$$
$$= 0{,}3.48.9{,}81.\cos 75^0.V_1 = 36{,}56.V_1 \quad (4'')$$

$$P(\vec{G}_3) = G_3.V_3 = m_3.g.1{,}5V_1$$
$$= 22.9{,}81.1{,}5V_1 = 323{,}73.V_1 \quad (4''')$$

Заместваме (4'), (4'') и (4''') в (4):

$$P = 454{,}84V_1 - 36{,}56V_1 - 323{,}73V_1 = 94{,}55V_1 \quad (5)$$



Фиг. 3.1.3

3. Определяне на закона за движение на тяло 1

Заместваме (3) и (5) в (1) и получаваме:

$$\frac{d(147{,}8V_1^2)}{dt} = 94{,}55V_1 .$$

Знаем, че $\frac{dV_1^2}{dt} = 2V_1\frac{dV_1}{dt}$. Тогава:

$$2.147{,}8V_1\frac{dV_1}{dt} = 94{,}55V_1$$

$$295{,}6\frac{dV_1}{dt} = 94{,}55$$

$$\frac{dV_1}{dt} = 0{,}32 .$$

$$dV_1 = 0{,}32dt ,$$

$$\int dV_1 = 0{,}32\int dt$$

$$V_1 = 0{,}32t + C_1 ,$$

$$x_1 = 0{,}16t^2 + C_1t + C_2 .$$

За определянето на C_1 и C_2 ще използваме условията в началния момент от движението:

$$V_1(0) = \dot{x}_1(0) = 0 \quad \text{и} \quad x_1(0) = 0 .$$

Заместваме с тях и получаваме:

$$V_1(0) = 0 = 0{,}32.0 + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 0 ,$$

$$x_1(0) = 0 = 0{,}16.0^2 + C_1.0 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = 0 .$$

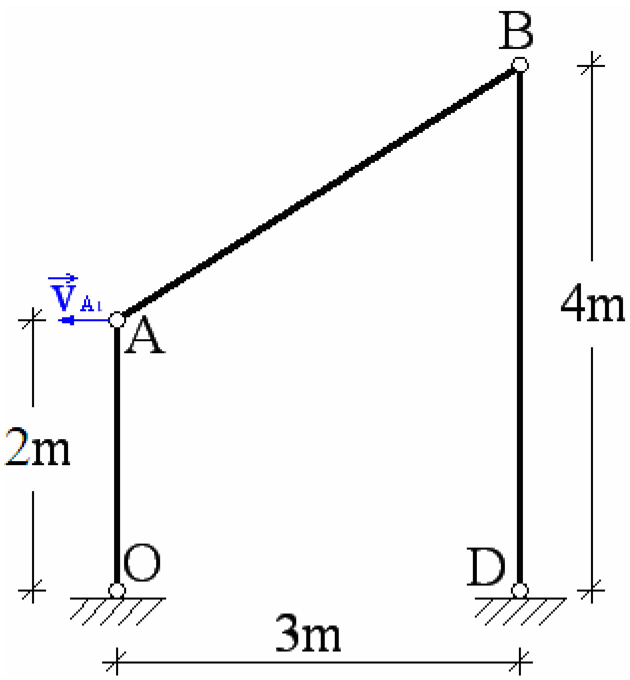
Окончателно, **законът за движение на тяло 1** е:

$$x_1(t) = 0{,}16t^2 .$$

Задача 3.2

В началния момент, трипрътова система $OABD$ заема положението, показано на Фиг.3.2.1. Скоростта на т. A е $V_{A1} = 4$ m/s. Да се определи ъгловата скорост на тяло OA, когато то се намира в хоризонтално положение.

Данни: $m_{OA} = 60$ kg, $m_{AB} = 41$ kg, $m_{BD} = 27$ kg.



Фиг. 3.2.1

Решение:

Записваме интегралната форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия:

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{1-2} , \qquad (1)$$

където E_{k1} е кинетичната енергия на системата в началния момент на движението (позиция "1" на $OABD$), E_{k2} е кинетичната енергия на системата в момента от движението, за който търсим ъгловата скорост $\omega_{OA,2}$ (позиция "2" на $OABD$), а W_{1-2} е работата на външните сили за преминаване на системата от позиция "1" в позиция "2".

1. Определяне на кинетичната енергия на системата в началния момент на движение, при позиция "1" на $OABD$

1.1. Определяне на скоростите в началния момент (Фиг.3.2.2)

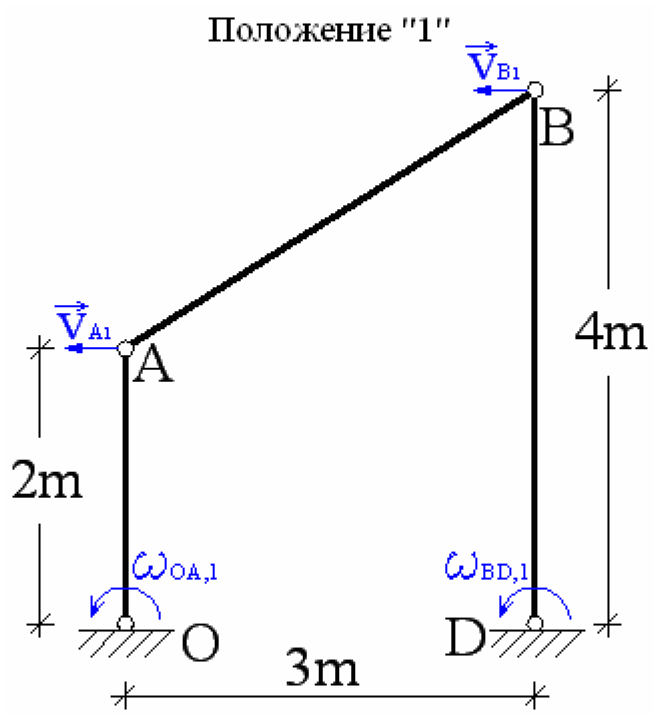
• Вид на движението на телата
- тяло OA извършва ротация около т. O
- тяло AB извършва равнинно движение
- тяло BD извършва ротация около т. D
• Скорости

$$\omega_{OA,1} = \frac{V_{A1}}{OA} = \frac{4}{2} = 2\,\text{s}^{-1}; \qquad V_{B1} = V_{A1} = 4\,\text{m/s}; \qquad \omega_{BD,1} = \frac{V_{B1}}{BD} = \frac{4}{4} = 1\,\text{s}^{-1}.$$

1.2. Определяне на E_{k1}

Кинетичната енергия на системата е сума от енергиите на телата в началния момент:

$$E_{k1} = E_{k1}^{OA} + E_{k1}^{AB} + E_{k1}^{BD}.$$



Фиг. 3.2.2

• Определяне на E_{k1}^{OA}

Тяло OA извършва ротация. Тогава:

$$E_{k1}^{OA} = \frac{1}{2} J_0 \omega_{OA,1}^2,$$

където $J_0 = \frac{1}{3} m_{OA} l_{OA}^2$ е инерционния момент на OA спрямо т. O.

Резултатът е:

$$E_{k1}^{OA} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} m_{OA} l_{OA}^2 \omega_{OA,1}^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.60.2^2 2^2$$

$$E_{k1}^{OA} = 160\,\text{J}$$

• Определяне на E_{k1}^{AB}

Тяло AB извършва равнинно движение, но в конкретния момент $\omega_{AB,1} = 0$. В такъв случай:

$$E_{k1}^{AB} = \frac{1}{2}.m_{AB}.V_{C_{AB},1}^2 = \frac{1}{2}.m_{AB}.V_{A1}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}.41.4^2 = 328\ \text{J}$$

• Определяне на E_{k1}^{BD}

Тяло BD извършва ротация, Тогава:

$$E_{k1}^{BD} = \frac{1}{2} J_D \omega_{BD,1}^2,$$

където $J_D = \frac{1}{3} m_{BD} l_{BD}^2$ е инерционния момент на BD спрямо т. D.

$$E_{k1}^{BD} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} m_{BD} l_{BD}^2 \omega_{BD,1}^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.27.4^2 1^2 = 72\ \text{J}$$

• Определяне на E_{k1}

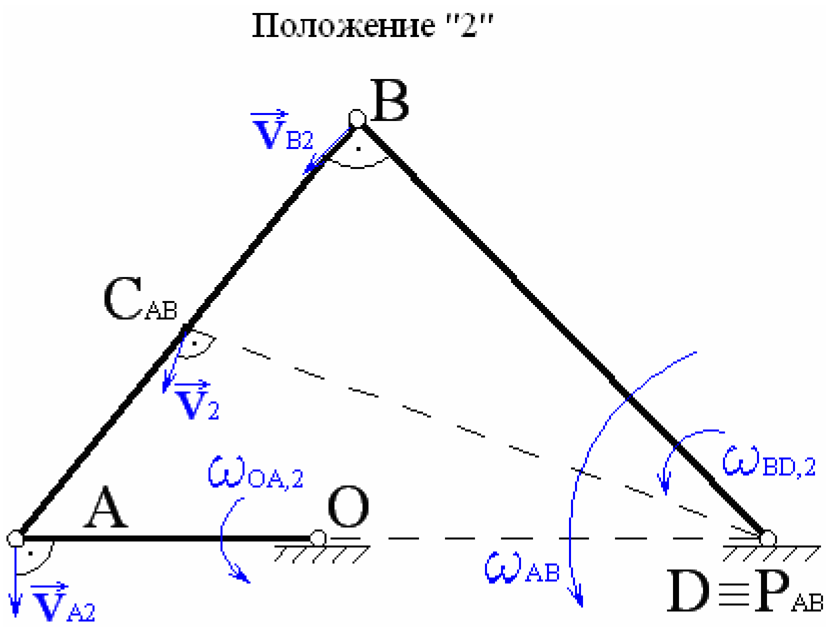
$$E_{k1} = E_{k1}^{OA} + E_{k1}^{AB} + E_{k1}^{BD} = 160 + 328 + 72 = 560\ \text{J}$$

2. Определяне на кинетичната енергия на системата при положение “2” на $OABD$

2.1. Определяне на скоростите във втория момент

• Вид на движението на телата
- тяло OA извършва ротация около т. O
- тяло AB извършва равнинно движение
- тяло BD извършва ротация около т. D

• Скорости



Фиг. 3.2.3

Сега, скоростите на характерните точки и телата се изразяват във функция на $\omega_{OA,2}$, понеже това е търсената скорост (Фиг.5.2.3):

$V_{A2} = \omega_{OA,2} l_{OA} = 2\omega_{OA,2}$, $\omega_{AB} = \dfrac{V_{A2}}{AD} = \dfrac{2\omega_{OA,2}}{5} = 0{,}4\omega_{OA,2}$, $V_2 = \omega_{AB} DC_{AB} = 0{,}4.\omega_{OA,2}.4{,}15 = 1{,}66\omega_{OA,2}$,

$V_{B2} = \omega_{AB} l_{BD} = 0{,}4.\omega_{OA,2}.4 = 1{,}6\omega_{OA,2}$, $\omega_{BD,2} = \dfrac{V_{B2}}{l_{BD}} = \dfrac{1{,}6\omega_{OA,2}}{4} = 0{,}4\omega_{OA,2}$.

2.2. Определяне на E_{k2}

Кинетичната енергия на системата е сума от енергиите на телата във втория момент:

$$E_{k2} = E_{k2}^{OA} + E_{k2}^{AB} + E_{k2}^{BD}.$$

- Определяне на E_{k2}^{OA}

Тяло OA извършва ротация. Тогава:

$$E_{k2}^{OA} = \frac{1}{2} J_0 \omega_{OA,2}^2,$$

където $J_0 = \dfrac{1}{3} m_{OA} l_{OA}^2$ отново е инерционния момент на OA спрямо т. O. По-нататък:

$$E_{k2}^{OA} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} m_{OA} l_{OA}^2 \omega_{OA,2}^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.60.2^2.\omega_{OA,2}^2 = 40\omega_{OA,2}^2.$$

- Определяне на E_{k2}^{AB}

Тяло AB извършва равнинно движение:

$$E_{k2}^{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} V_2^2 + \frac{1}{2} J_{C_{AB}} \omega_{AB}^2,$$

където $J_{C_{AB}} = \dfrac{1}{12} m_{AB} l_{AB}$ е инерционния момент на тяло AB спрямо центъра му на тежестта, а $l_{AB} = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3{,}61$ m. В такъв случай:

$$E_{k2}^{AB} = \frac{1}{2} m_{AB} (1{,}66\omega_{OA,2})^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{12} m_{AB} l_{AB}^2 (0{,}4\omega_{OA,2})^2,$$

$$E_{k2}^{AB} = \frac{1}{2}.41.1{,}66^2.\omega_{OA,2}^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{12}.41.3{,}61^2.0{,}4^2.\omega_{OA,2}^2 = 60{,}05\omega_{OA,2}^2.$$

- Определяне на E_{k2}^{BD}

Тяло BD извършва ротация. Тогава:

$$E_{k2}^{BD} = \frac{1}{2} J_D \omega_{BD,2}^2 ,$$

където $J_D = \frac{1}{3} m_{BD} l_{BD}^2$ отново е инерционния момент на BD спрямо т. D. Окончателно:

$$E_{k2}^{BD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_{BD} l_{BD}^2 \omega_{BD,2}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} .27.4^2.(0,4.\omega_{OA,2})^2 = 11,52 \omega_{OA,2}^2 .$$

- Определяне на E_{k2}

$$E_{k2} = E_{k2}^{OA} + E_{k2}^{AB} + E_{k2}^{BD} = 40\omega_{OA,2}^2 + 60,05\omega_{OA,2}^2 + 11,52\omega_{OA,2}^2 = 111,57\omega_{OA,2}^2 .$$

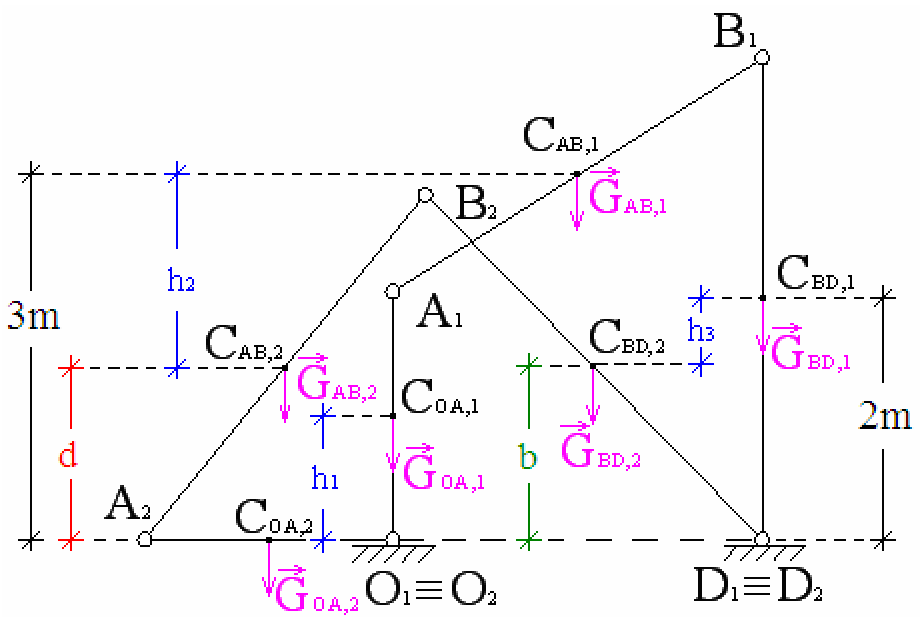
3. Определяне на работата на външните сили W_{1-2} за преминаване на системата $OABD$ от положение “1” в положение “2”

Работата на една сила е произведението на големината й с преместването на приложната й точка по направление на силата. В нашия случай, външните сили са теглата на трите тела $\vec{G}_{OA}$, $\vec{G}_{AB}$ и $\vec{G}_{BD}$ и опорните реакции, но за преминаване на системата $OABD$ от положение “1” в положение “2”, работа дават само $\vec{G}_{OA}$, $\vec{G}_{AB}$ и $\vec{G}_{BD}$, защото преместването на приложните точки O и D на опорните реакции е нула.

Определяме поотделно работите на силите на тежестта на телата и след сумирането им получаваме общата работа:

$$W_{1-2} = W_{1-2}(\vec{G}_{OA}) + W_{1-2}(\vec{G}_{AB}) + W_{1-2}(\vec{G}_{BD}) .$$

Преди това, за наше улеснение, предварително ще определим преместването на центровете на тежестта на OA, AB и BD по направление на силите $\vec{G}_{OA}$, $\vec{G}_{AB}$ и $\vec{G}_{BD}$, т.е. вертикалните премествания h_1, h_2 и h_3 (Фиг.3.2.3).



Фиг. 3.2.3

- Определяне на h_1

❖ $h_1 = \frac{l_{OA}}{2} = 1\,\text{m}$ (Фиг.3.2.3)

- Определяне на h_2 и h_3

❖ $h_2 = 3\,\text{m} - d$ (Фиг.3.2.3)

С използване на косинусовата теорема определяме ъглите в триъгълника $A_2B_2D_2$:

$$(A_2B_2)^2 = (A_2D_2)^2 + (B_2D_2)^2 - 2.A_2D_2.B_2D_2.\cos\angle(A_2D_2B_2),$$

$$3{,}61^2 = 5^2 + 4^2 - 2.5.4.\cos\angle(A_2D_2B_2),$$

$$\cos\angle(A_2D_2B_2) = \frac{5^2 + 4^2 - 3{,}61^2}{2.5.4} = 0{,}6992,$$

$$\angle(A_2D_2B_2) = 45{,}64^0.$$

$$(B_2D_2)^2 = (A_2B_2)^2 + (A_2D_2)^2 - 2.A_2B_2.A_2D_2.\cos\angle(B_2A_2D_2),$$

$$4^2 = 3{,}61^2 + 5^2 - 2.3{,}61.5.\cos\angle(B_2A_2D_2),$$

$$\cos\angle(B_2A_2D_2) = \frac{3{,}61^2 + 5^2 - 4^2}{2.3{,}61.5} = 0{,}6103,$$

$$\angle(B_2A_2D_2) = 52{,}39^0.$$

Тогава:

$$\frac{d}{A_2C_{AB,2}} = \sin\angle(B_2A_2D_2),$$

$$d = A_2C_{AB,2}.\sin 52{,}39^0 = \frac{l_{AB}}{2}\sin 52{,}39^0 = \frac{3{,}61}{2}.\sin 52{,}39^0,$$

$$d = 1{,}43\ \text{m}.$$

Окончателно:

$$h_2 = 3 - d = 3 - 1{,}43 = 1{,}57\ \text{m}.$$

❖ $h_3 = 2\,\text{m} - b$ (Фиг.3.2.3)

$$\frac{b}{D_2C_{BD,2}} = \sin\angle(A_2D_2B_2),$$

$$b = D_2C_{BD,2}.\sin 45{,}64^0 = \frac{l_{BD}}{2}\sin 45{,}64^0 = \frac{4}{2}.\sin 45{,}64^0,$$

$$b = 1{,}43\ \text{m}.$$

В такъв случай:

$$h_3 = 2 - EC_{BD,2} = 2 - 1{,}43 = 0{,}57\ \text{m}.$$

3.1. Определяне на работите на силите на тежестта

$$W_{1-2}(\vec{G}_{OA}) = G_{OA}h_1 = m_1gh_1 = 60.9{,}81.1 = 588{,}6\ \text{J}$$

$$W_{1-2}(\vec{G}_{AB}) = G_{AB}h_2 = m_2gh_2 = 41.9{,}81.1{,}57 = 631{,}47\ \text{J}$$

$$W_{1-2}(\vec{G}_{BD}) = G_{BD}h_3 = m_3gh_3 = 27.9{,}81.0{,}57 = 150{,}98\ \text{J}$$

3.2. Определяне на W_{1-2}

$$W_{1-2} = W_{1-2}(\vec{G}_{OA}) + W_{1-2}(\vec{G}_{AB}) + W_{1-2}(\vec{G}_{BD}) = 588{,}6 + 631{,}47 + 150{,}98 = 1371{,}05\ \text{J}$$

4. Определяне на ъгловата скорост на тяло *OA* във втория момент от движението

Заместваме в (1) с получените по-горе стойности за E_{k1}, E_{k2} и W_{1-2}. Резултатът е:

$$111{,}57\omega_{OA,2}^2 - 560 = 1371{,}05$$

$$111{,}57\omega_{OA,2}^2 = 1931{,}05$$

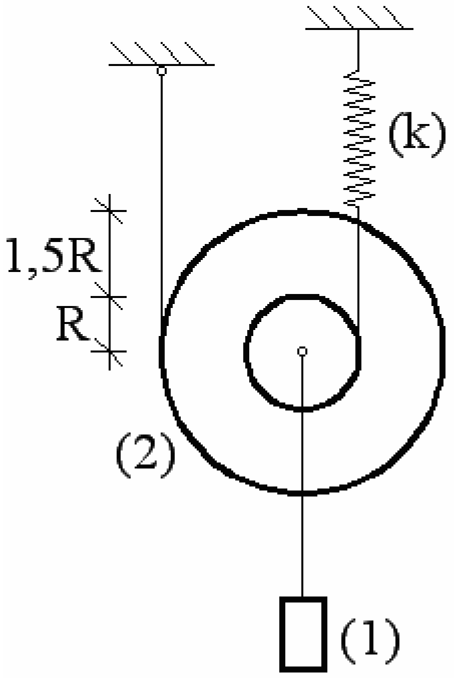
$$\omega_{OA,2}^2 = 17{,}31$$

$$\omega_{OA,2} = 4{,}16\ \text{s}^{-1}$$

Задача 3.3

В началния момент, показаната система от тела е в покой, а пружината е ненапрегната (Фиг.3.3.1). Системата се привежда в движение от теглото на тяло 1. Цилиндър 2 е нехомогенен. Нишката е безтегловна и неразтежима. Да се определи законът за движение на тяло 1, докато за пръв път промени посоката си на движение.

Данни: $m_1 = 28\,\text{kg},\ m_2 = 42\,\text{kg},\ R = 0{,}3\,\text{m},$
$i_2 = 1{,}6R = 0{,}48\,\text{m},\ k = 180\,\text{N/m}.$



Фиг. 3.3.1

Решение:

Записваме диференциалната форма на теоремата за изменение на кинетичната енергия:

$$\frac{dE_к}{dt} = P. \qquad (1)$$

където E_k е кинетичната енергия на системата от тела, а P е мощността на силите, действащи върху системата.

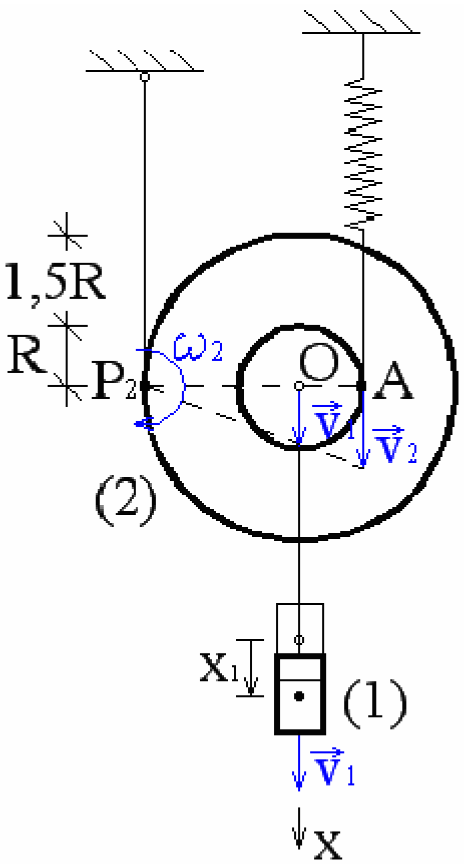
1. Определяне на E_k

Системата се състои от две тела и кинетичната ѝ енергия е сумата от енергиите им:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2}. \qquad (2)$$

Кинетичната енергия се изразява във функция на скоростта. Тъй като търсената характеристика е законът за движение на тяло 1, всички скорости се изразяват чрез V_1 (Фиг.3.3.2):

$$\omega_2 = \frac{V_1}{OP_2} = \frac{V_1}{2{,}5R} = 1{,}333V_1, \qquad V_2 = \omega_2.AP_2 = \frac{V_1}{2{,}5R}.3{,}5R = 1{,}4V_1.$$



Фиг. 3.3.2

1.1. Определяне на E_{k1}

Тяло 1 се движи транслационно със скорост V_1 затова кинетичната му енергия е:

$$E_{k1} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 = \frac{1}{2}28V_1^2 = 14V_1^2.$$

1.2. Определяне на E_{k2}

Движението на тяло 2 може да бъде разгледано по два начина:

- Равнинно движение: в такъв случай кинетичната му енергия е:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}m_2V_1^2 + \frac{1}{2}J_0\omega_2^2,$$

където J_0 е инерционния момент на тяло 2 спрямо центъра му на тежестта т. O.

- Ротация около т. P_2, МЦС за тяло 2: тогава кинетичната му енергия е:

$$E_{k2} = \frac{1}{2}J_{P_2}\omega_2^2,$$

където J_{P_2} е инерционния момент на тяло 2 за моментния му център на скоростите – т. P_2.

С кой от двата начина ще се работи е въпрос на избор. Нека изберем втория, т.е. разглеждаме движението на тяло 2 като ротация около т. P_2. Определяме инерционния момент:

$$J_{P_2} = J_0 + m_2(OP_2)^2 = m_2 i_2^2 + m_2(OP_2)^2 = m_2[i_2^2 + (OP_2)^2],$$

$$J_{P_2} = m_2[(1{,}6R)^2 + (2{,}5R)^2] = 8{,}81 m_2 R^2,$$

след което и кинетичната енергия на тяло 2:

$$E_{k2} = \frac{1}{2} J_{P_2}\omega_2^2 = \frac{1}{2} 8{,}81 m_2 R^2 (1{,}333V_1)^2 = \frac{1}{2}.8{,}81.42.0{,}3^2.(1{,}333V_1)^2 = 29{,}6V_1^2.$$

1.3. Определяне на E_k

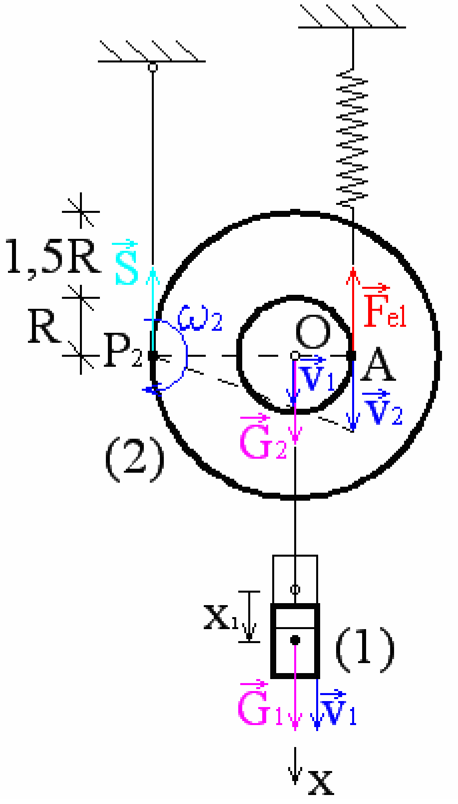
$$E_k = E_{k1} + E_{k2} = 14V_1^2 + 29{,}6V_1^2 = 43{,}6V_1^2.$$

2. Определяне на мощността P на системата сили

Поставяме действащите върху системата сили (Фиг.3.3.3). Това са теглата на двете тела $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$, пружинната сила $\vec{F}_{el}$ (насочена по направление на пружината, обратна на посоката на разтягането ѝ) и усилието $\vec{S}$ в нишката (прието на опън). Както знаем, мощността на една сила е произведението на големината ѝ със скоростта на приложната ѝ точка. В нашия случай мощност дават $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ и $\vec{F}_{el}$. Усилието в нишката не дава мощност, защото приложната му точка е в моментния център на скоростите на тяло 2, чиято скорост е нула. Цялата мощност на системата сили ще бъде сумата от мощностите на отделните сили:

$$P = P(\vec{G}_1) + P(\vec{G}_2) - P(\vec{F}_{el}),$$

където знакът пред $P(\vec{F}_{el})$ е минус, защото силата е обратна на скоростта на приложната ѝ точка.



Фиг. 3.3.3

- Определяне на $P(\vec{G}_1)$ и $P(\vec{G}_2)$ (Фиг.3.3.3):

$$P(\vec{G}_1) = G_1V_1 = m_1gV_1 = 28.9{,}81V_1 = 274{,}68V_1$$

$$P(\vec{G}_2) = G_2V_1 = m_2gV_1 = 42.9{,}81V_1 = 412{,}02V_1$$

- Определяне на $P(\vec{F}_{el})$:

Знаем, че пружинната сила е функция на преместването x_1. Тогава, за да определим големината ѝ ни е необходимо предавателното отношение на тяло 2. По-горе намерихме скоростта V_2 във функция на скоростта V_1, а коефициентът 1,4 пред V_1 е точно предавателното отношение. Това означава, че ако тяло 1 се премести на разстояние x_1, то пружината ще се разтегне с дължина $1{,}4x_1$. В такъв случай, големината на пружинната сила е:

$$F_{el} = 1{,}4kx_1,$$

а мощността ѝ (Фиг.3.3.3):

$$P(\vec{F}_{el}) = F_{el}V_2 = 1{,}4kx_1 1{,}4V_1 = 1{,}4.180x_1.1{,}4V_1 = 352{,}8x_1V_1$$

- Определяне на P

$$P = 274{,}68V_1 + 412{,}02V_1 - 352{,}8x_1V_1$$

$$P = (686{,}7 - 352{,}8x_1)V_1$$

3. Определяне на закона за движение на тяло 1

Заместваме в (1) с получените стойности за E_k и P и получаваме:

$$\frac{d(43{,}6V_1^2)}{dt} = (686{,}7 - 352{,}8x_1)V_1$$

$$43{,}6\frac{dV_1^2}{dt} = (686{,}7 - 352{,}8x_1)V_1$$

Знаем, че $\frac{dV_1^2}{dt} = 2V_1\frac{dV_1}{dt}$. Тогава:

$$2.43{,}6V_1\frac{dV_1}{dt} = (686{,}7 - 352{,}8x_1)V_1$$

$$87{,}2\frac{dV_1}{dt} = 686{,}7 - 352{,}8x_1$$

След като заместим с $\frac{dV_1}{dt} = \ddot{x}_1$, разделим на $87{,}2$ и прехвърлим израза, съдържащ x_1 отляво, имаме:

$$\ddot{x}_1 + 4{,}045x_1 = 7{,}875.$$

Това е нехомогенно диференциално уравнение от втори ред. Първо решаваме хомогенното уравнение:

$$\ddot{x}_1 + 4{,}045x_1 = 0,$$

чието характеристично уравнение е:

$$\rho^2 + 4{,}045 = 0,$$

с корени – комплексните числа:

$$\rho_{1,2} = \pm 2{,}01i.$$

Тогава, общото решение на нехомогенното диференциално уравнение има вида:

$$x_1(t) = C_1\cos 2{,}01t + C_2\sin 2{,}01t + \eta(t),$$

където $\eta(t)$ е частното решение.

$\eta(t) = t^0.A = A$, защото най-ниската производна от лявата страна на нехомогенното уравнение е нулева и полиномът вдясно е от нулева степен.

Определяме първата и втората производна на $\eta(t)$: $\dot{\eta}(t) = 0$ и $\ddot{\eta}(t) = 0$, след което ги заместваме в нехомогенното уравнение като $\ddot{\eta}(t)$ отговаря на $\ddot{x}_1$, а $\eta(t)$ на x_1. Получаваме:

$$0 + 4{,}045.A = 7{,}875 \quad \Rightarrow \quad A = 1{,}95 \quad \Rightarrow \quad \eta(t) = 1{,}95$$

В крайна сметка:

$$x_1(t) = C_1\cos 2{,}01t + C_2\sin 2{,}01t + 1{,}95$$

$$\dot{x}_1(t) = 2{,}01(C_2\cos 2{,}01t - C_1\sin 2{,}01t).$$

Сега трябва да определим интеграционните константи C_1 и C_2. Това става с помощта на началните условия на движението, когато системата от тела е била в покой . Това означава, че $x_1(0) = 0$ и $\dot{x}_1(0) = 0$. В такъв случай:

$$x_1(0) = 0 = C_1\cos 0 + C_2\sin 0 + 1{,}95 \quad \Rightarrow \quad 0 = C_1 + 1{,}95 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -1{,}95,$$

$$\dot{x}_1(0) = 0 = 2{,}01(C_2\cos 0 - C_1\sin 0) \quad \Rightarrow \quad 0 = 2{,}01C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

Окончателно, **законът за движение на тяло 1** е:

$$x_1(t) = 1{,}95(1 - \cos 2{,}01t).$$

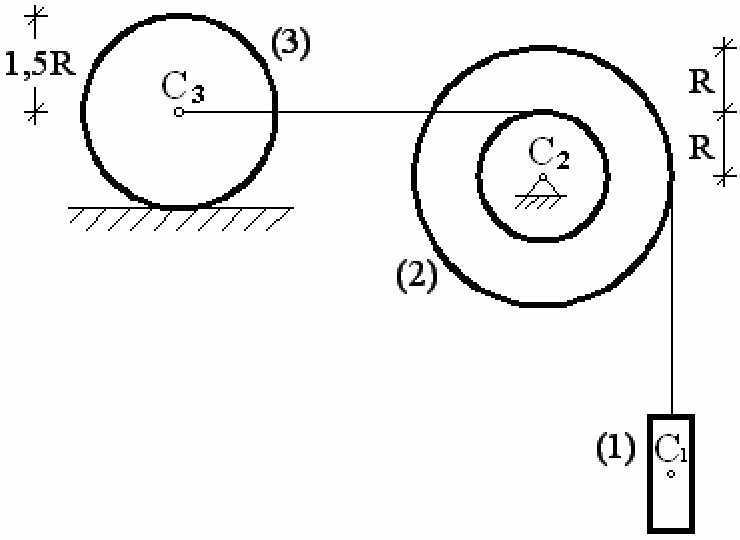
КУРСОВА ЗАДАЧА 4: ПРИНЦИП НА ДАЛАМБЕР (КИНЕТОСТАТИКА)

Задача 4.1

Показаната система от три тела се движи равноускорително под действие на теглото на тяло 1 (Фиг.4.1.1). Цилиндър 2 е нехомогенен, а цилиндър 3 – хомогенен, търкалящ се без плъзгане. Нишките са безтегловни и неразтежими. Да се определят опорните реакции и усилията в нишките.

Данни: $m_1 = 48\,\text{kg},\ m_2 = 32\,\text{kg},\ m_3 = 18\,\text{kg},$

$R = 0{,}3\,\text{m},\ i_2 = R$.



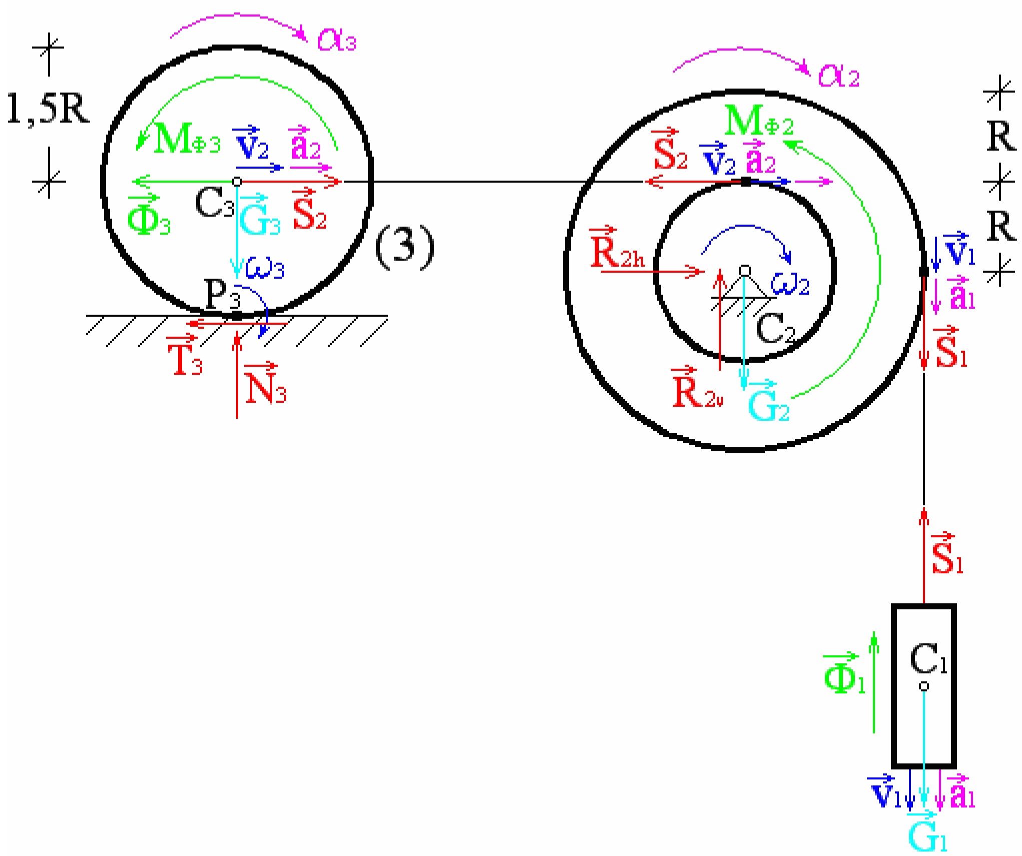
Фиг. 4.1.1

Решение:

1. Определяне на силите и моментите, действащи върху системата от тела

1.1. Силите на тежестта (Фиг.4.1.2):

$$G_1 = m_1 g = 48.9{,}81 = 470{,}88\,\text{N},$$
$$G_2 = m_2 g = 32.9{,}81 = 313{,}92\,\text{N},$$
$$G_3 = m_3 g = 18.9{,}81 = 176{,}58\,\text{N}.$$



Фиг. 4.1.2

1.2. Сили на връзките:

- Опорни реакции (Фиг.4.1.2)

- тяло 2 – $\vec{R}_{2h}$ и $\vec{R}_{2v}$
- тяло 3 – $\vec{T}_3$ и $\vec{N}_3$

- Усилия в нишките – $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ (Фиг.4.1.2)

1.3. Фиктивни (инерционни) сили

- Тяло 1 – движи се транслационно, т.е. прилагаме фиктивна сила $\vec{\Phi}_1$, насочена обратно на движението и големина:

$$\Phi_1 = m_1.a_1,$$

като $\vec{a}_1$ е ускорението на тяло 1 (Фиг.4.1.2).

- Тяло 2 – извършва ротация около т. C_2 – прилагаме фиктивен момент $M_{\Phi 2}$ с посока обратна на въртенето и големина:

$$M_{\Phi 2} = J_{C_2}.\alpha_2,$$

където J_{C_2} е инерционния момент на тяло 2 за т. C_2, а α_2 е ъгловото му ускорение (Фиг.1.2).

- Тяло 3 – извършва равнинно движение – прилагаме фиктивна сила $\vec{\Phi}_3$ (насочена обратно на преместването на тялото) и фиктивен момент $M_{\Phi 3}$ (насочен обратно на въртенето) с големини:

$$\Phi_3 = m_3.a_3,$$
$$M_{\Phi 3} = J_{C_3}.\alpha_3,$$

където $\vec{a}_3$ е ускорението на центъра на тежестта на тяло 3, J_{C_3} е инерционния му момент за т. C_3, а α_3 е ъгловото му ускорение (Фиг.4.1.2).

Както се вижда, фиктивните сили и моменти, действащи върху отделните тела, зависят от техните ускорения, но понеже трите тела са свързани помежду си, можем да изразим всички ускорения посредством едно, например $\vec{a}_1$.

1.3.1. Определяне на ускоренията на трите тела във функция на $\vec{a}_1$

Движението е равноускорително, затова отношението на ускоренията е същото както отношението на скоростите на телата:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_2 = \frac{a_1}{2R}$$

$$V_2 = \omega_2 R = \frac{V_1}{2R}R = \frac{V_1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad a_2 = \frac{a_1}{2}$$

$$\omega_3 = \frac{V_2}{1{,}5R} = \frac{V_1}{2.1{,}5R} = \frac{V_1}{3R} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_3 = \frac{a_1}{3R}$$

1.3.2. Определяне на фиктивните сили и моменти във функция на $\vec{a}_1$:

$$\Phi_1 = m_1 a_1,$$

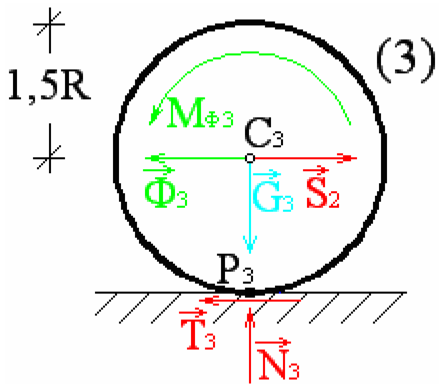
$$M_{\Phi 2} = J_{C_2}\alpha_2 = m_2 i_2^2 \frac{a_1}{2R} = m_2 R^2 \frac{a_1}{2R} = \frac{1}{2} m_2 R a_1,$$

$$\Phi_3 = m_3 a_3 = m_3 \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2} m_3 a_1,$$

$$M_{\Phi 3} = J_{C_3}\alpha_3 = \frac{1}{2} m_3 (1{,}5R)^2 \frac{a_1}{3R} = \frac{3}{8} m_3 R a_1.$$

2. Определяне на опорните реакции и усилията в нишките

В задачата имаме седем неизвестни. Това са опорните реакции $\vec{R}_{2h}$ и $\vec{R}_{2v}$, опорните реакции $\vec{T}_3$ и $\vec{N}_3$, усилията в нишките $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ и ускорението $\vec{a}_1$. Да видим колко условия за равновесие имаме. На първо място това са трите условия за равновесие за цялата система. Освен тях, имаме едно условие за равновесие на тяло 1 и по три за тела 2 и 3, защото когато една система е в равновесие, то всяка нейна част също трябва да е в равновесие. Това ни дава 10 условия, от които ние ще използваме най-подходящите, за да определим неизвестните.



Фиг. 4.1.3

2.1. Определяне на T_3 и N_3 – мислено отделяме тяло 3 от системата и поставяме действащите върху него сили и моменти, след което записваме най-подходящите условия за равновесие (Фиг.4.1.3):

$$\sum V_i^{"3"} = 0 \Rightarrow N_3 - G_3 = 0 \Rightarrow N_3 = G_3 = m_3 g = 176{,}58\,\text{N};$$

$$\sum M_{C_3}^{"3"} = 0 \Rightarrow T_3.1{,}5R - M_{\Phi 3} = 0 \Rightarrow$$

$$T_3 = \frac{M_{\Phi 3}}{1{,}5R} = \frac{3m_3 R a_1}{8.1{,}5R} = \frac{1}{4} m_3 a_1 .$$

Спираме дотук, защото големината на $\vec{a}_1$ все още е неизвестна и трябва да я определим преди да продължим.

За целта трябва да изберем такова условие за равновесие, при което другите неизвестни да отпаднат. Такова условие е моментово на цялата система за т. C_2. В него $\vec{R}_{2h}$ и $\vec{R}_{2v}$ не участват, защото пресичат точката, $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ също не участват, защото те са вътрешни за системата сили и не съществуват, когато тя е цяла. Тогава:

$$\sum M_{C_2}^{ц.с.} = 0 \quad \Rightarrow \qquad G_1.2R - \Phi_1.2R - M_{\Phi 2} - \Phi_3.R - M_{\Phi 3} + T_3.0{,}5R = 0\,,$$

$$m_1 g 2R - m_1 a_1 2R - \frac{1}{2} m_2 a_1 R - \frac{1}{2} m_3 a_1 .R - \frac{3}{8} m_3 a_1 R + \frac{1}{4} m_3 a_1 0{,}5R = 0\,,$$

$$m_1 g 2R = a_1 (m_1 2R + \frac{1}{2} m_2 R + \frac{1}{2} m_3 R + \frac{3}{8} m_3 R - \frac{1}{4} m_3 0{,}5R)\,,$$

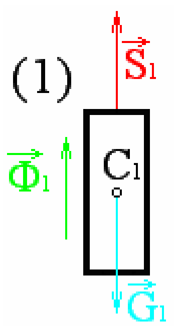
$$m_1 g.2 = a_1 (m_1 .2 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{2} m_3 + \frac{3}{8} m_3 - \frac{1}{4} m_3 .0{,}5)\,,$$

$$a_1 = \frac{2m_1 g}{2m_1 + 0{,}5m_2 + 0{,}5m_3 + 0{,}375m_3 - 0{,}125m_3}\,,$$

$$a_1 = \frac{941{,}76}{125{,}5} = 7{,}5\,\text{m/s}^2.$$

Сега се връщаме горе и определяме големината на $\vec{T}_3$:

$$T_3 = \frac{1}{4} m_3 a_1 = \frac{1}{4}.18.7{,}5 = 33{,}75\,\text{N}.$$



Фиг. 4.1.4

2.2. Определяне на S_1 и S_2

За определянето на S_1, разглеждаме тяло 1 с действащите върху него сили (Фиг.4.1.4). Условието е:

$$\sum V_i^{"1"} = 0 \Rightarrow \; S_1 + \Phi_1 - G_1 = 0 \Rightarrow S_1 = G_1 - \Phi_1 \Rightarrow$$

$$S_1 = G_1 - \Phi_1 = m_1 g - m_1 a_1 = m_1 (g - a_1) = 110{,}88\,\text{N}$$

За определянето на S_2 се връщаме към тяло 3 (Фиг.4.1.3):

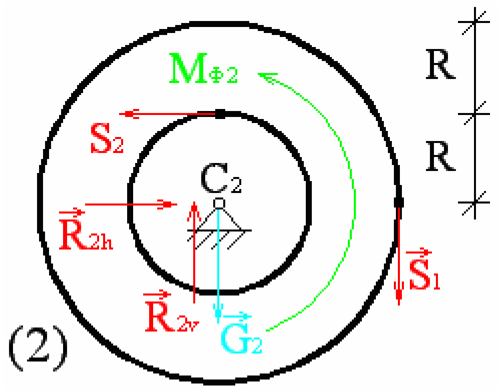
$$\sum H_i^{"3"} = 0 \Rightarrow S_2 - T_3 - \Phi_3 = 0 \Rightarrow S_2 = T_3 + \Phi_3 = 101{,}25\,\text{N}$$

2.3. Определяне на R_{2h} и R_{2v}

Разглеждаме цялата система и записваме двете силови условия за равновесието й:

$$\sum V_i^{"ц.с."} = 0; \; G_1 - R_{2v} + G_2 + G_3 - N_3 - \Phi_1 = 0,$$
$$R_{2v} = G_1 + G_2 + G_3 - N_3 - \Phi_1,$$
$$R_{2v} = 424{,}8\,\mathrm{N}.$$
$$\sum H_i^{"ц.с."} = 0; \; R_{2h} - \Phi_3 - T_3 = 0,$$
$$R_{2h} = \Phi_3 + T_3,$$
$$R_{2h} = 101{,}25\,\mathrm{N}.$$

3. Проверка



Фиг. 4.1.5

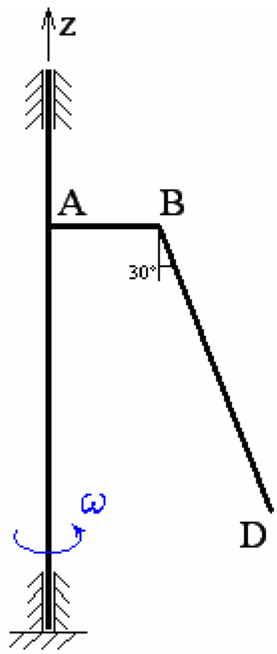
За проверка ще използваме двете силови условия за равновесие на тяло 2 (Фиг.4.1.5):

$$\sum H_i^{"2"} = 0 \Rightarrow \; R_{2h} - S_2 = 0 \Rightarrow 101{,}25 - 101{,}25 = 0\,!$$
$$\sum V_i^{"2"} = 0 \; \Rightarrow \; R_{2v} - G_2 - S_1 = 0 \; \Rightarrow \; 424{,}8 - 313{,}92 - 110{,}88 = 0\,!$$

Задача 4.2

Прът ABD е свързан с приета за безтегловна вертикална ос z и се върти с постоянна ъглова скорост $\omega = 1{,}8\,\mathrm{s}^{-1}$ (Фиг.4.2.1). Частта AB от пръта е с маса $m_{AB} = 12\,\mathrm{kg}$ и дължина $l_{AB} = 1{,}2\,\mathrm{m}$, а частта BD е с маса $m_{BD} = 32\,\mathrm{kg}$ и дължина $l_{BD} = 3\,\mathrm{m}$.

Да се определят разрезните усилия в сечение A.



Фиг. 4.2.1

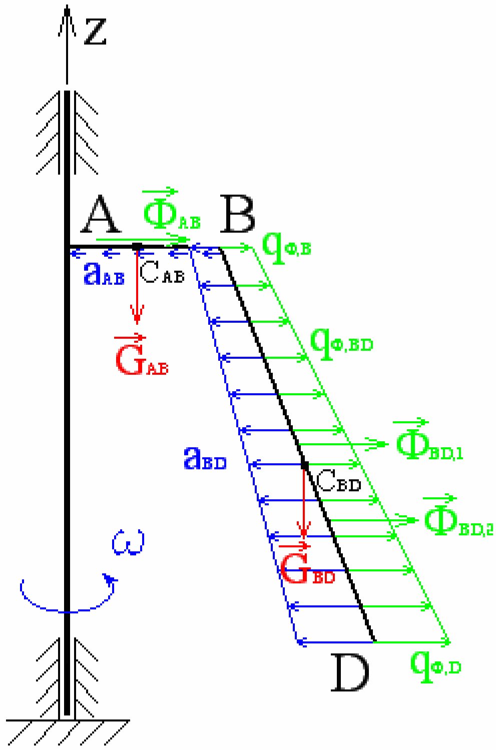
Решение:

В тази задача отново ще приложим принципа на Даламбер. Тук действащите върху системата сили са теглата на AB и BD, опорните реакции и инерционните сили. Ще се спрем по-подробно на определянето на инерционните сили, защото то е малко по-особено.

1. Определяне на инерционните сили

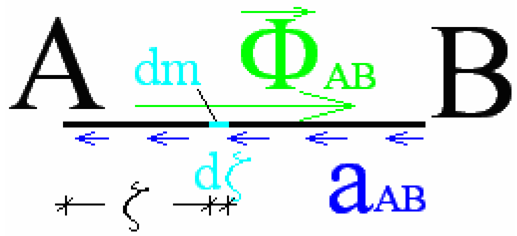
Както е известно, инерционните сили се получават във функция на ускоренията. В тази задача имаме ротация на прът ABD около оста z.

В общия случай, трябва да имаме и центростремително, и въртящо ускорения на точките от пръта. Тук обаче, в условието на задачата е казано, че ъгловата скорост ω е постоянна. Това означава, че ъгловото ускорение α е равно на нула. В такъв случай, въртеливото ускорение на всяка точка от пръта също е равно на нула. Тогава, фиктивните сили ще лежат в равнината на пръта и ще бъдат функция само на центростремителното ускорение (Фиг.4.2.2). Освен това, фиктивният момент, като функция на ъгловото ускорение, също е равен на нула.



Фиг. 4.2.2

1.1. Определяне на инерционната сила за прът AB



Фиг. 4.2.3

Центростремителното ускорение е линейна функция на разстоянието от оста на въртене, което означава, че фиктивната сила ще бъде разпределен товар (Фиг.4.2.3). За определянето й ще разгледаме частица от пръта с дължина $d\zeta$, на разстояние ζ от оста z. За тази частица определяме фиктивната сила $d\Phi_{AB}$ и след интегриране по цялата дължина на AB, ще получим цялата фиктивна сила Φ_{AB}. Формулата е:

$$\Phi_{AB} = \int_0^{l_{AB}} a(\zeta)dm \,,$$

където dm е масата на частица от пръта с дължина $d\zeta$.

Масата dm е:

$$dm = \frac{m_{AB}}{l_{AB}} d\zeta \;,$$

а ускорението:

$$a(\zeta) = \omega^2 \zeta \,.$$

Тогава:

$$d\Phi_{AB} = \frac{m_{AB}}{l_{AB}} \omega^2 \zeta d\zeta \,.$$

Окончателно:

$$\Phi_{AB} = \int_0^{l_{AB}} \left(\frac{m_{AB}}{l_{AB}} \omega^2 \zeta \right) d\zeta = \frac{m_{AB}}{l_{AB}} \omega^2 \int_0^{1,2} \zeta d\zeta = \frac{m_{AB}}{l_{AB}} \omega^2 \left. \frac{\zeta^2}{2} \right|_0^{1,2} = \frac{12}{1,2} . 1,8^2 . \left(\frac{1,2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right),$$

$$\Phi_{AB} = 23,33 \text{ N}.$$

1.2. Определяне на инерционната сила за прът BD (Фиг.4.2.4)

Повтаряйки процедурата,

$$\Phi_{BD} = \int_0^{l_{BD}} a(\eta)dm\,,$$

където $dm = \dfrac{m_{BD}}{l_{BD}} d\eta$ е масата на частица от пръта с дължина $d\eta$.

Изразът за ускорението обаче, е различен, а именно (Фиг.4.2.4):

$$a(\eta) = a_B^n + \omega^2 \eta \sin 30^0 = \omega^2 l_{AB} + \omega^2 \eta \sin 30^0 = \omega^2 (l_{AB} + 0{,}5\eta)\,.$$

Тогава:

$$d\Phi_{BD} = \frac{m_{BD}}{l_{BD}} \omega^2 (l_{AB} + 0{,}5\eta) d\eta\,.$$

В случая на наклонен спрямо оста на ротация прът, по-удобно е да се работи с разпределен фиктивен товар (Фиг.4.2.4). Интензивността е:

$$q_{\Phi,BD} = \frac{d\Phi_{BD}}{d\eta} = \frac{m_{BD}}{l_{BD}} \omega^2 (l_{AB} + 0{,}5\eta)$$

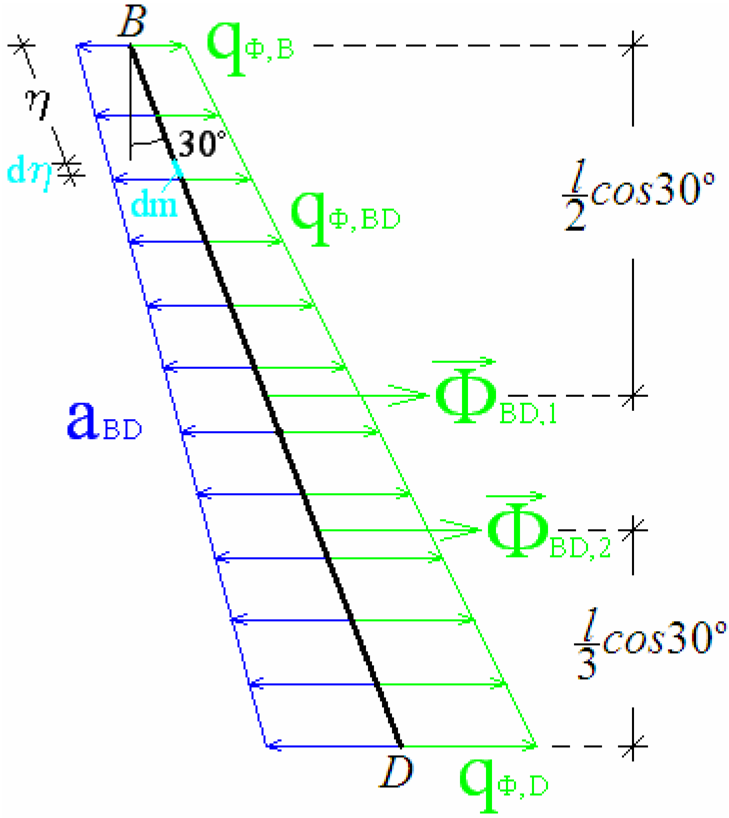
Понеже разпределеният товар е трапецовиден, необходимо е да се определи интензивността в началото и края на пръта:

$$q_{\Phi,B} = q(\eta = 0) = \frac{m_{BD}}{l_{BD}} \omega^2 l_{AB}$$

$$q_{\Phi,B} = \frac{32}{3}.1{,}8^2.1{,}2 = 41{,}47\ \text{N/m},$$

$$q_{\Phi,D} = q(\eta = 3) = \frac{m_{BD}}{l_{BD}} \omega^2 (l_{AB} + 0{,}5.3)$$

$$q_{\Phi,D} = \frac{32}{3}.1{,}8^2.2{,}7 = 93{,}31\ \text{N/m}.$$



Фиг. 4.2.4

След това се определят двете равнодействащи на фиктивния товар. Резултатът е:

$$\Phi_{BD,1} = q_{\Phi,B}.l_{BD} = 41{,}47.3 = 124{,}41\ \text{N}$$

$$\Phi_{BD,2} = (q_{\Phi,D} - q_{\Phi,B})\frac{l_{BD}}{2} = (93{,}31 - 41{,}47)\frac{3}{2} = 77{,}76\ \text{N},$$

като те са приложени, както е показано на Фиг.4.2.4.

2. Определяне на разрезните усилия в сечение A

След определянето на фиктивните сили, пристъпваме към определяне на разрезните усилия в сечение A. Прави се мислен разрез през сечение A и се разглежда дясната част на системата, като към фиктивните сили се добавят силите на тежестта и разрезните усилия (Фиг.4.2.5). Записват се трите условия за равновесие на отделената част. Резултатът е (Фиг.4.2.5):

1) $\sum F_{i\bar{x}} = 0\,;\quad -N + \Phi_{AB} + \Phi_{BD,1} + \Phi_{BD,2} = 0$

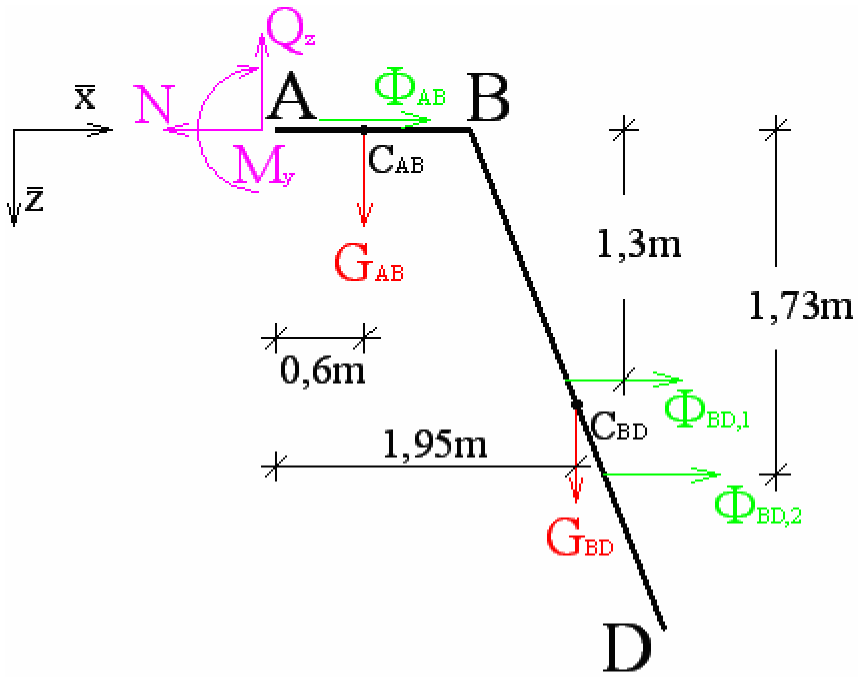
$$N = \Phi_{AB} + \Phi_{BD,1} + \Phi_{BD,2} = 225{,}5\ \text{N}$$

2) $\sum F_{i\bar{z}} = 0\,;\quad -Q_z + G_{AB} + G_{BD} = 0$

$$Q_z = G_{AB} + G_{BD} = 431{,}64\ \text{N}$$

3) $\sum M_A = 0 \quad M_y + G_{AB}.0{,}6 + G_{BD}.1{,}95 - \Phi_{BD,1}.1{,}3 - \Phi_{BD,2}.1{,}73 = 0$

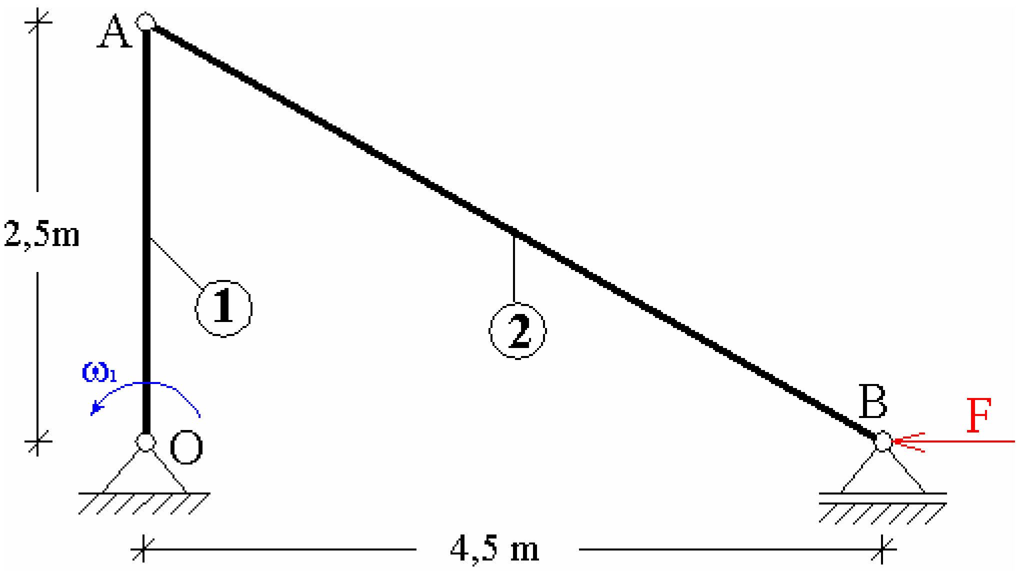
$$M_y = -386{,}52\ \text{Nm}.$$



Фиг. 4.2.5

Задача 4.3

Когато механизмът заема положението, показано на Фиг.4.3.1, прът OA с маса $m_1 = 20\,\text{kg}$ има ъглова скорост $\omega_1 = 3\,\text{s}^{-1}$ и ъглово ускорение $\alpha_1 = 0$. Масата на прът AB е $m_2 = 34\,\text{kg}$. Да се определят опорните реакции и силата F за това положение.

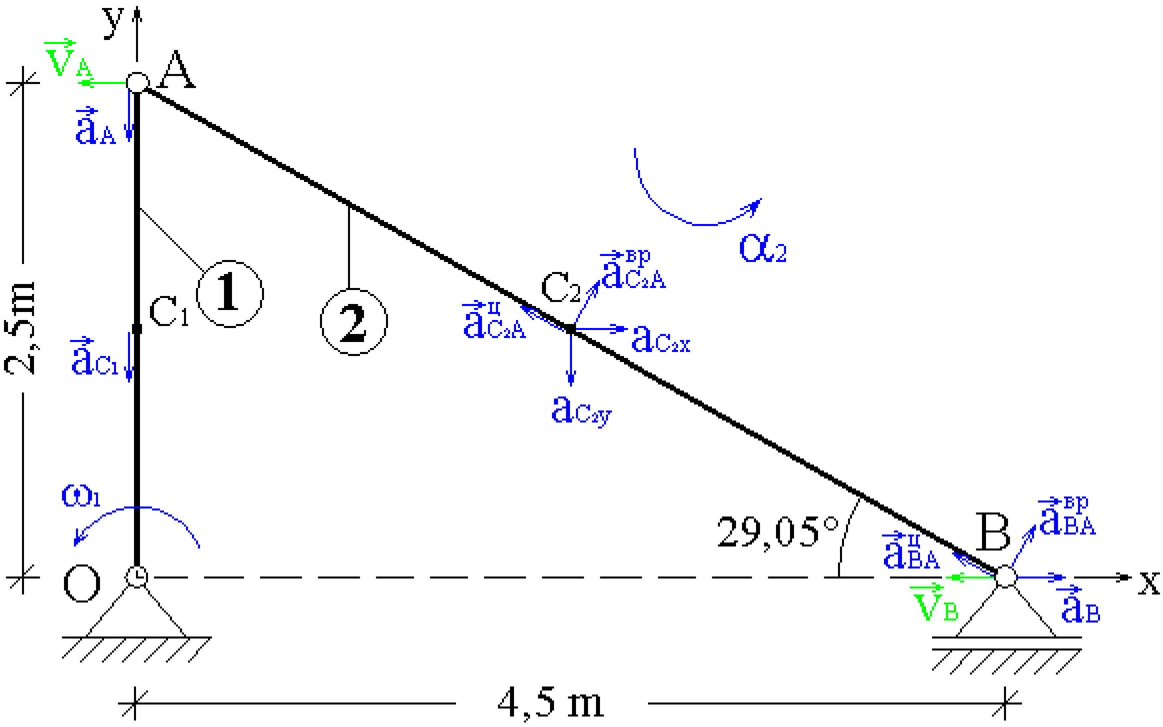


Фиг. 4.3.1

Решение:

1. Кинематичен анализ

Тяло 1 извършва ротация около т. O (Фиг.4.3.2). Тяло 2 извършва равнинно движение, но в разглеждания момент скоростите на точки A и B са успоредни (Фиг.4.3.2), от което следва, че неговият МЦС е в безкрайността, т.е. ъгловата му скорост ω_2 е равна на нула. Същото обаче, не може да се каже за ъгловото ускорение α_2, а то е необходимо за определяне на инерционните усилия.



Фиг. 4.3.2

Определяме α_2 по начин, познат от Кинематиката (Фиг.4.3.2):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{ц} + \vec{a}_A^{вр},$$

$$a_A^{ц} = \omega_1^2.OA = 3^2.2{,}5 = 22{,}5\ \mathrm{m/s^2},$$

$$a_A^{вр} = \alpha_1.OA = 0,$$

$$a_A = a_A^{ц} = 22{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

По-нататък:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{ц} + \vec{a}_{BA}^{вр} \qquad (1)$$

$$a_{BA}^{ц} = \omega_2^2.AB = 0^2.AB = 0$$

$$a_{BA}^{вр} = \alpha_2.AB$$

Проектираме (1) по y (Фиг.4.3.2):

$$0 = -a_A + a_{BA}^{вр}.\cos 29{,}05^0,$$

$$a_{BA}^{вр} = \frac{a_A}{\cos 29{,}05^0} = 25{,}74\ \mathrm{m/s^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{a_{BA}^{вр}}{AB} = \frac{25{,}74}{5{,}14} = 5\ \mathrm{s^{-2}}.$$

След като α_2 е определено, компонентите на ускорението на центъра на тежестта на тяло 2 по осите x и y се намират, както следва:

$$\vec{a}_{C_2} = \vec{a}_A + \vec{a}_{C_2A}^{ц} + \vec{a}_{C_2A}^{вр} \qquad (2)$$

$$a_{C_2A}^{ц} = \omega_2^2.C_2A = 0^2.C_2A = 0$$

$$a_{C_2A}^{вр} = \alpha_2.C_2A = 5.\frac{5{,}14}{2} = 12{,}87\ \mathrm{m/s^2}$$

Проектираме (2) по x и y и получаваме (Фиг.4.3.2):

$$a_{C_2x} = a_{C_2A}^{вр}.\sin 29{,}05^0 = 6{,}25\ \mathrm{m/s^2},$$

$$a_{C_2y} = -a_A^{ц} + a_{C_2A}^{вр}.\cos 29{,}05^0 = -11{,}25\ \text{m/s}^2,$$

като знакът минус показва, че a_{C_2y} е с посока, обратна на посоката на ос y (Фиг.4.3.2).

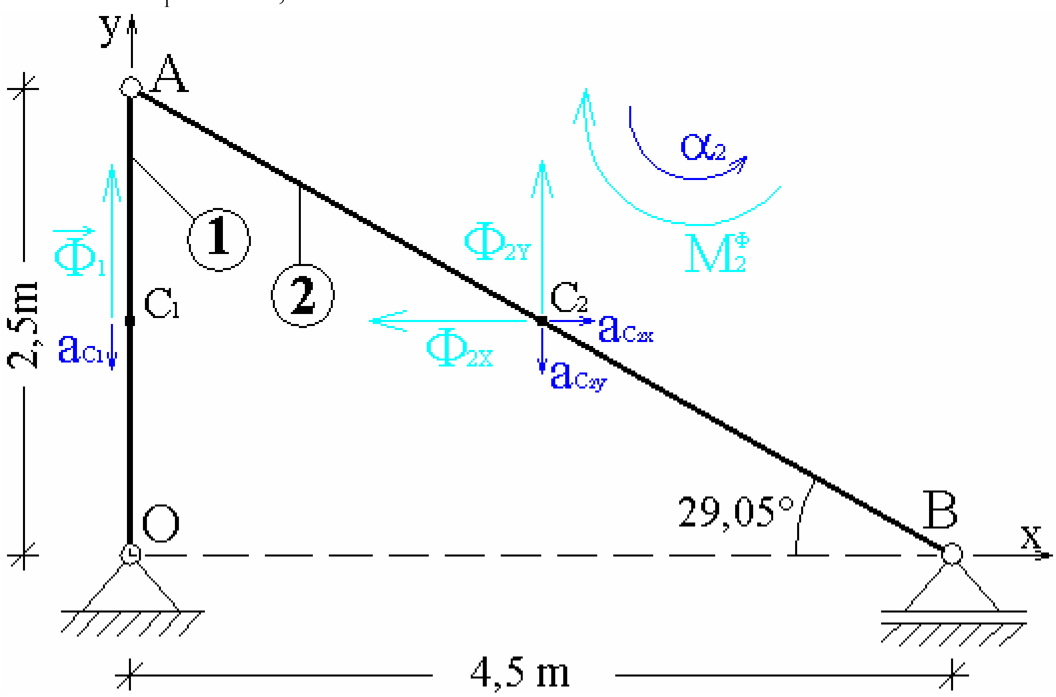
2. Определяне на инерционните сили и моменти

В центъра на тежестта на тяло 1 се прилага фиктивна сила $\vec{\Phi}_1$ с посока, обратна на посоката на ускорението и с големина (Фиг.4.3.3):

$$\Phi_1 = m_1.a_{C_1},$$

$$a_{C_1} = \omega_1^2.OC_1 = 3^2.\frac{2{,}5}{2} = 11{,}25\ \text{m/s}^2,$$

$$\Phi_1 = 20.11{,}25 = 225\ \text{N}.$$



Фиг. 4.3.3

В центъра на тежестта на тяло 2 действа фиктивна сила $\vec{\Phi}_2$ със своите компоненти Φ_{2x} и Φ_{2y} с посоки, обратни на посоките на a_{C_2x} и a_{C_2y} (Фиг.4.3.3) и големини:

$$\Phi_{2x} = m_2.a_{C_2x} = 34.6{,}25 = 212{,}5\ \text{N},$$

$$\Phi_{2y} = m_2.a_{C_2y} = 34.11{,}25 = 382{,}5\ \text{N}.$$

Освен това, върху тяло 2 се прилага и фиктивен инерционен момент M_2^{Φ} обратен като посока на α_2 (Фиг.4.3.3) и с големина:

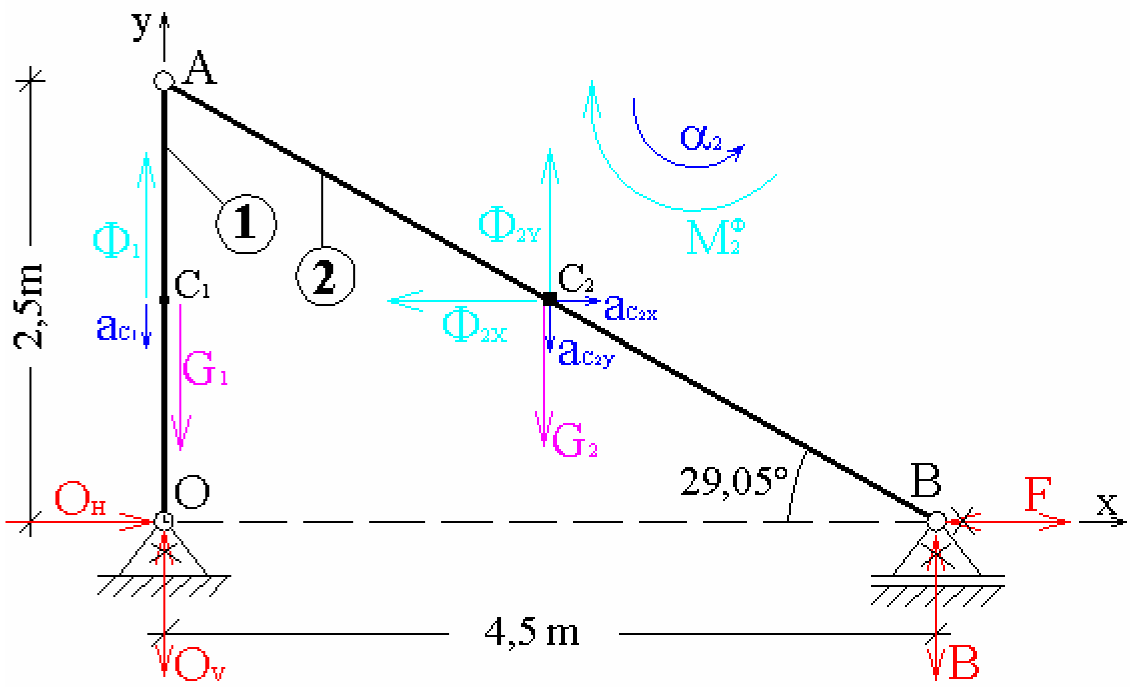
$$M_2^{\Phi} = J_{C_2}.\alpha_2,$$

където $J_{C_2} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2$ е инерционният момент на тяло 2 за т. C_2. Тогава:

$$M_2^{\Phi} = J_{C_2}.\alpha_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \alpha_2 = \frac{1}{12}.34.5{,}14^2.5 = 375{,}42\ \text{Nm}.$$

3. Определяне на опорните реакции и силата F

Опорните реакции са три: O_V, O_H, B и заедно със силата F неизвестните стават четири. Определяме ги като използваме най-подходящите условия за равновесие на системата сили, която освен от тях, се състои и от теглата на двете тела – G_1 и G_2, инерционните сили Φ_1, Φ_{2x}, Φ_{2y} и инерционния момент M_2^{Φ} (Фиг.4.3.4).



Фиг. 4.3.4

Започваме с определянето на O_V. Подходящото условие е:

$$\sum M_B^{цс} = 0\,;\; O_V.4{,}5 - G_1.4{,}5 + \Phi_1.4{,}5 + \Phi_{2y}.2{,}25 - \Phi_{2x}.1{,}25 + M_2^{\Phi} - G_2.2{,}25 = 0\,;\; O_V = -77{,}7\,\mathrm{N}.$$

Знакът минус означава, че приетата посока е грешна, затова я променяме (Фиг.4.3.4).
Продължаваме с определяне на B :

$$\sum F_{i,y}^{цс} = 0 \;\Rightarrow\; -O_V - G_1 + \Phi_1 + \Phi_{2y} + B - G_2 = 0\,;\; B = -0{,}1\,\mathrm{N}.$$

След това, за O_H се получава: $\sum M_A^{T.1} = 0 \;\Rightarrow\; O_H = 0$.

Накрая, големината на силата F е определена като:

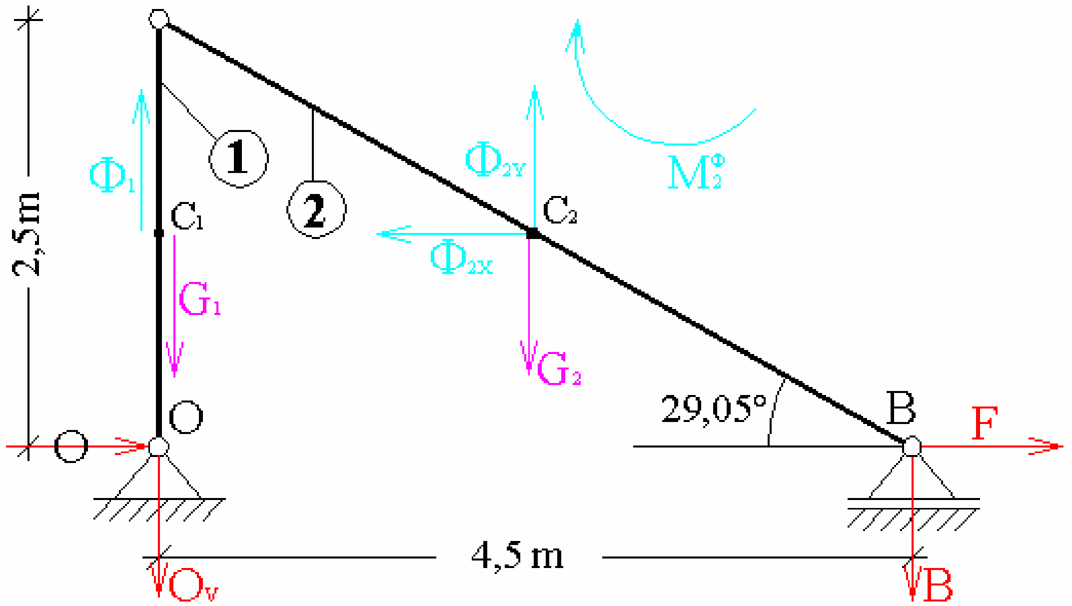
$$\sum F_{i,x}^{цс} = 0 \;\Rightarrow\; F + \Phi_{2x} = 0\,;\; F = -\Phi_{2x} = -212{,}5\,\mathrm{N}.$$

4. Проверка

Подходящото условие за проверка е (Фиг.3.5):

$$\sum M_{C_2}^{цс} = 0 \;\Rightarrow\; O_V.2{,}25 + G_1.2{,}25 - \Phi_1.2{,}25 - B.2{,}25 + F.1{,}25 - M_2^{\Phi} = 0$$

$$174{,}48 + 441{,}45 - 506{,}25 - 0{,}23 + 265{,}63 - 375{,}42 = 0{,}005 \approx 0\,!$$



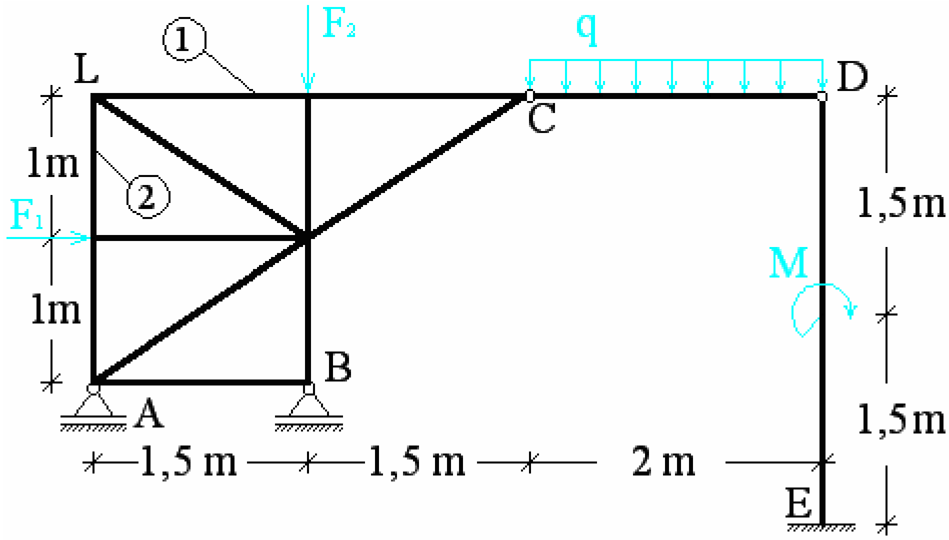
Фиг. 4.3.5

КУРСОВА ЗАДАЧА 5: ПРИНЦИП НА ВЪЗМОЖНИТЕ ПРЕМЕСТВАНИЯ

Задача 5.1

Равнинна конструкция е закрепена и натоварена, както е показано на Фиг.5.1.1.

Приложете принципа на възможните премествания, за да определите опорните реакции и усилията в пръти 1 и 2.



Фиг. 5.1.1

Решение:

I. Въведение

Записваме принципа на възможните премествания във векторен вид:

$$\sum \vec{F}_i \vec{V}_i + \sum \vec{M}_i \vec{\omega}_i = 0 . \qquad (1)$$

Методът се състои в следното: Премахва се връзката, възпрепятстваща търсеното усилие и на нейно място се поставя сила или момент – конструкцията се превръща в механизъм. Определят се скоростите на всички тела, от които се състои системата и се замества в (1). Единственото неизвестно остава търсеното усилие, което се намира след решаване на уравнението.

II. Определяне на опорните реакции

1. Определяне на опорната реакция в т. *A*

Премахваме опората и на нейно място поставяме опорната реакция A – системата се превръща в механизъм (Фиг.5.1.2).

1.1. Кинематичен анализ

Механизмът се състои от три тела, затова определяме вида на движение на всяко от тях: тяло 1 (цялата ферма) – равнинно движение, тяло 2 – ротация около т. C, тяло 3 – неподвижно (Фиг.5.1.2). Поставяме ъгловите скорости на телата и линейните скорости на характерни точки и ги определяме във функция на ъгловата скорост ω_1:

$$V_C = \omega_1 . CP_1 = 1{,}5\omega_1 ; \quad \omega_2 = \frac{V_C}{CD} = \frac{\omega_1 . CP_1}{CD} = \frac{1{,}5.\omega_1}{2} = 0{,}75\omega_1 .$$

1.2. Заместваме в (1):

$$- A.1{,}5.\omega_1 + F_1.1.\omega_1 - R.1.\omega_2 = 0 ,$$

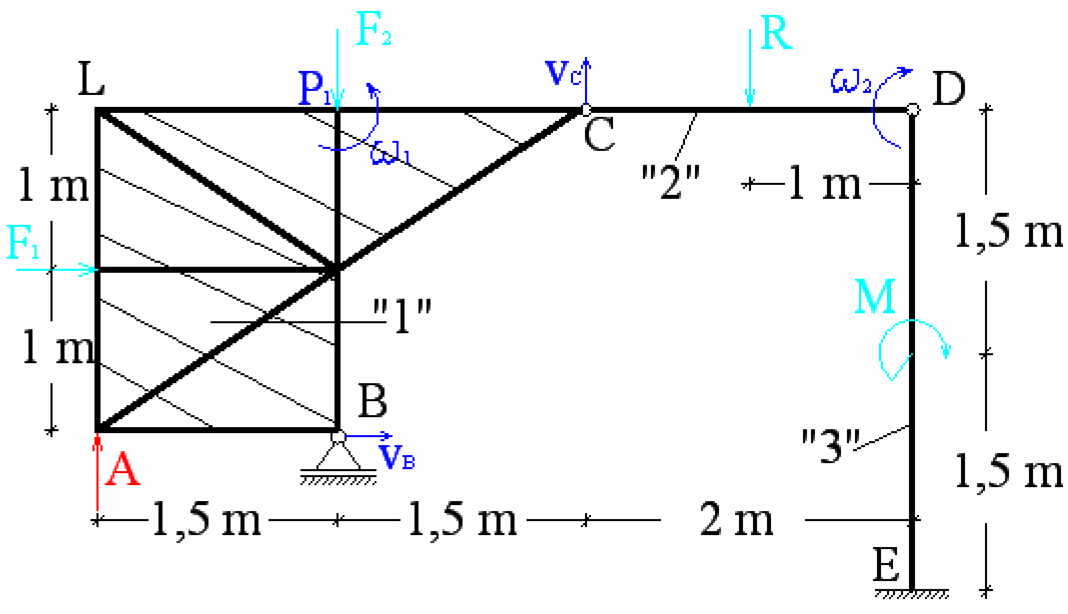
$$- A.1{,}5.\omega_1 + F_1.1.\omega_1 - R.1.0{,}75.\omega_1 = 0 .$$

Съкращаваме ω_1 и получаваме:

$$- A.1{,}5 + F_1.1 - R.1.0{,}75 = 0 ,$$

$$-1{,}5.A + 40.1 - 20.1.0{,}75 = 0 ,$$

$$A = 16{,}667 \,\text{kN}.$$



Фиг. 5.1.2

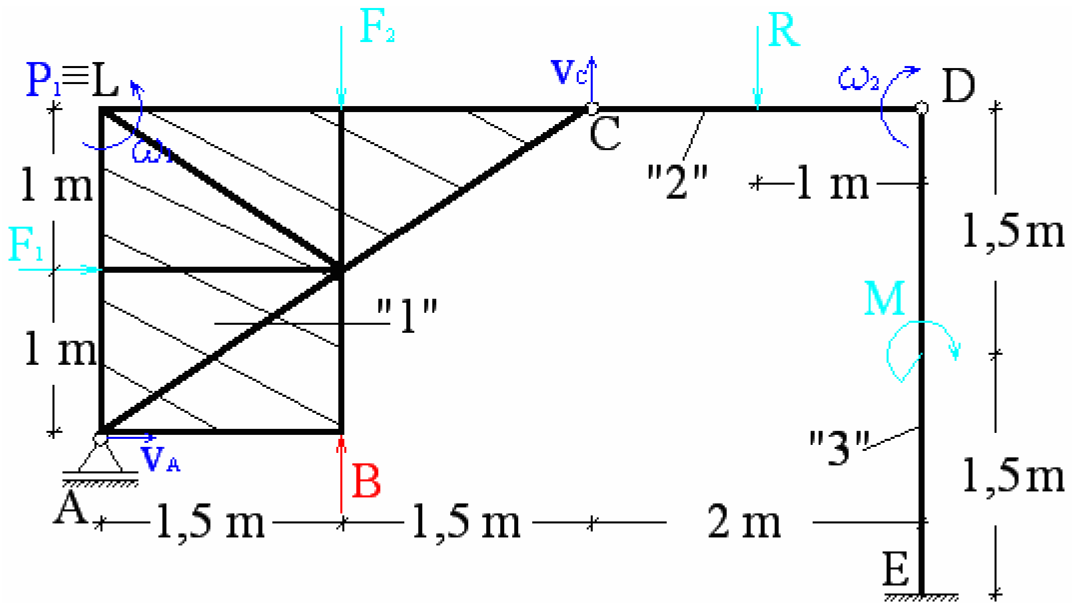
2. Определяне на опорната реакция в т. *B*

Премахваме опората и на нейно място поставяме опорната реакция *B* – системата се превръща в механизъм (Фиг.5.1.3).

2.1. Кинематичен анализ

Механизмът се състои пак от три тела, затова определяме вида на движение на всяко от тях: тяло 1 (цялата ферма) – равнинно движение, тяло 2 – ротация около т. С, тяло 3 – неподвижно (Фиг.5.1.3). Поставяме ъгловите и линейните скорости и ги определяме във функция на една скорост – отново ω_1:

$$V_C = \omega_1.CL = 3\omega_1; \qquad \omega_2 = \frac{V_C}{CD} = \frac{\omega_1.CL}{CD} = \frac{3.\omega_1}{2} = 1{,}5\omega_1 .$$



Фиг. 5.1.3

2.2. Заместваме в (1):

$$B.1{,}5.\omega_1 + F_1.1.\omega_1 - F_2.1{,}5.\omega_1 - R.1.\omega_2 = 0,$$

$$B.1{,}5.\omega_1 + F_1.1.\omega_1 - F_2.1{,}5.\omega_1 - R.1.1{,}5.\omega_1 = 0 .$$

Съкращаваме ω_1 и получаваме:

$$B.1{,}5+F_1.1-F_2.1{,}5-R.1.1{,}5=0,$$
$$1{,}5.B+40.1-25.1{,}5-20.1.1{,}5=0,$$
$$B=18{,}333\,\text{kN}.$$

3. Определяне на момента в т. *E*

Премахваме връзката, възпрепятстваща завъртането на т. E и на нейно място поставяме момента M_E – системата се превръща в механизъм (Фиг.5.1.4).

3.1. Кинематичен анализ

Механизмът се състои отново от три тела, затова определяме вида на движение на всяко от тях: тяло 3 – ротация около т. E, тяло 1 (цялата ферма) – транслация, тяло 2 – транслация. Поставяме скоростите и ги определяме във функция на една от тях, този път V_C:

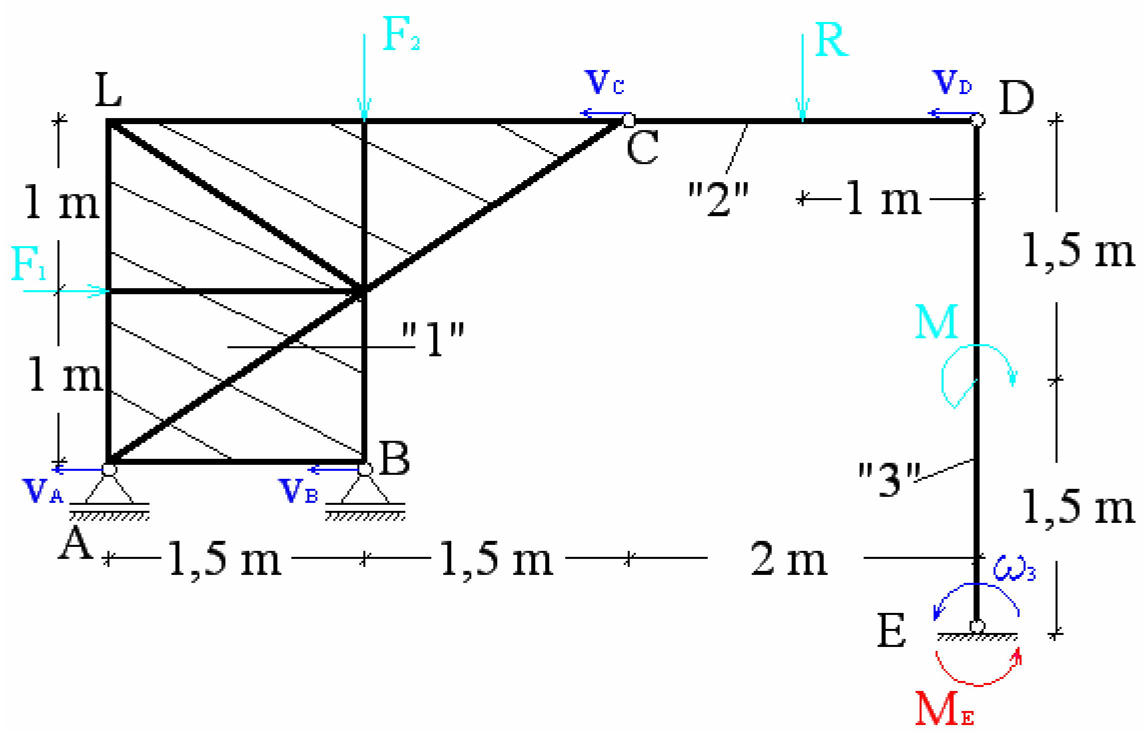
$$V_D=V_C\,;\qquad \omega_3=\frac{V_D}{DE}=\frac{V_C}{DE}=\frac{V_C}{3}.$$

3.2. Заместваме в (1):

$$M_E.\omega_3-M.\omega_3-F_1.V_C=0,$$
$$M_E.\frac{V_C}{3}-M.\frac{V_C}{3}-F_1.V_C=0.$$

Съкращаваме V_C и получаваме:

$$\frac{1}{3}M_E-\frac{1}{3}M-F_1=0,$$
$$\frac{1}{3}M_E-\frac{1}{3}.32-40=0,$$
$$M_E=152\,\text{kNm}.$$



Фиг. 5.1.4

4. Определяне на хоризонталната опорна реакция в т. *E*

Премахваме връзката, възпрепятстваща хоризонталното преместване на т. E и на нейно място поставяме опорната реакция E_H – системата се превръща в механизъм (Фиг.5.1.5).

4.1. Кинематичен анализ

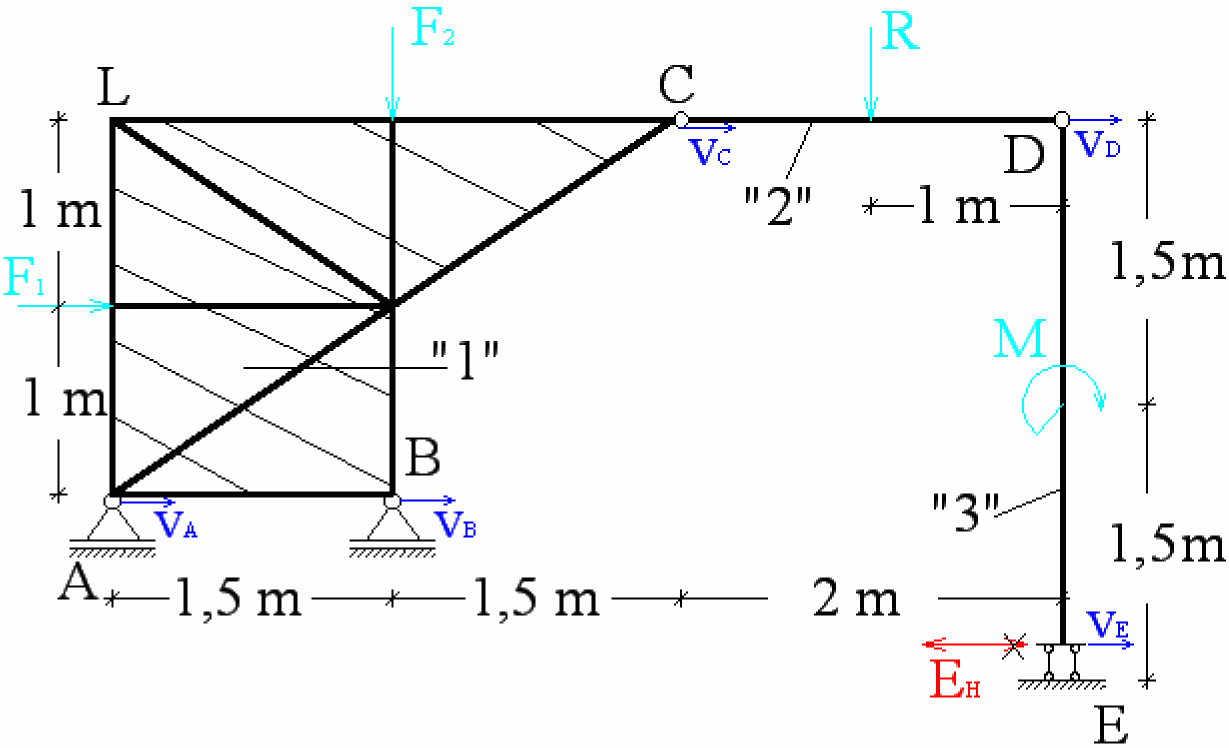
Механизмът се състои пак от три тела, като и трите се движат транслационно (Фиг.5.1.5).

Изразяваме скоростите им във функция на една скорост, в случая V_C.

$$V_D = V_C\,; \qquad V_E = V_D = V_C\,.$$

4.2. Заместваме в (1):

$$E_H.V_E + F_1.V_C = 0\,,$$
$$E_H.V_C + F_1.V_C = 0\,,$$
$$E_H = -F_1 = -40\ kN\,.$$



Фиг. 5.1.5

5. Определяне на вертикалната опорна реакция в т. *E*

Премахваме връзката, възпрепятстваща вертикалното преместване на т. *E* и на нейно място поставяме опорната реакция E_V – системата се превръща в механизъм (Фиг.5.1.6).

5.1. Кинематичен анализ

Механизмът се състои отново от три тела, затова определяме вида на движение на всяко едно. Оказва се, че тяло 3 извършва транслация, тяло 1 (цялата ферма) е неподвижно, а тяло 2 извършва ротация около т. *C* (Фиг.5.1.6). Поставяме ъгловите и линейните скорости и ги определяме във функция на една от тях, този път V_E:

$$V_D = V_E\,; \qquad \omega_2 = \frac{V_D}{DC} = \frac{V_E}{DC} = \frac{V_E}{2}\,.$$

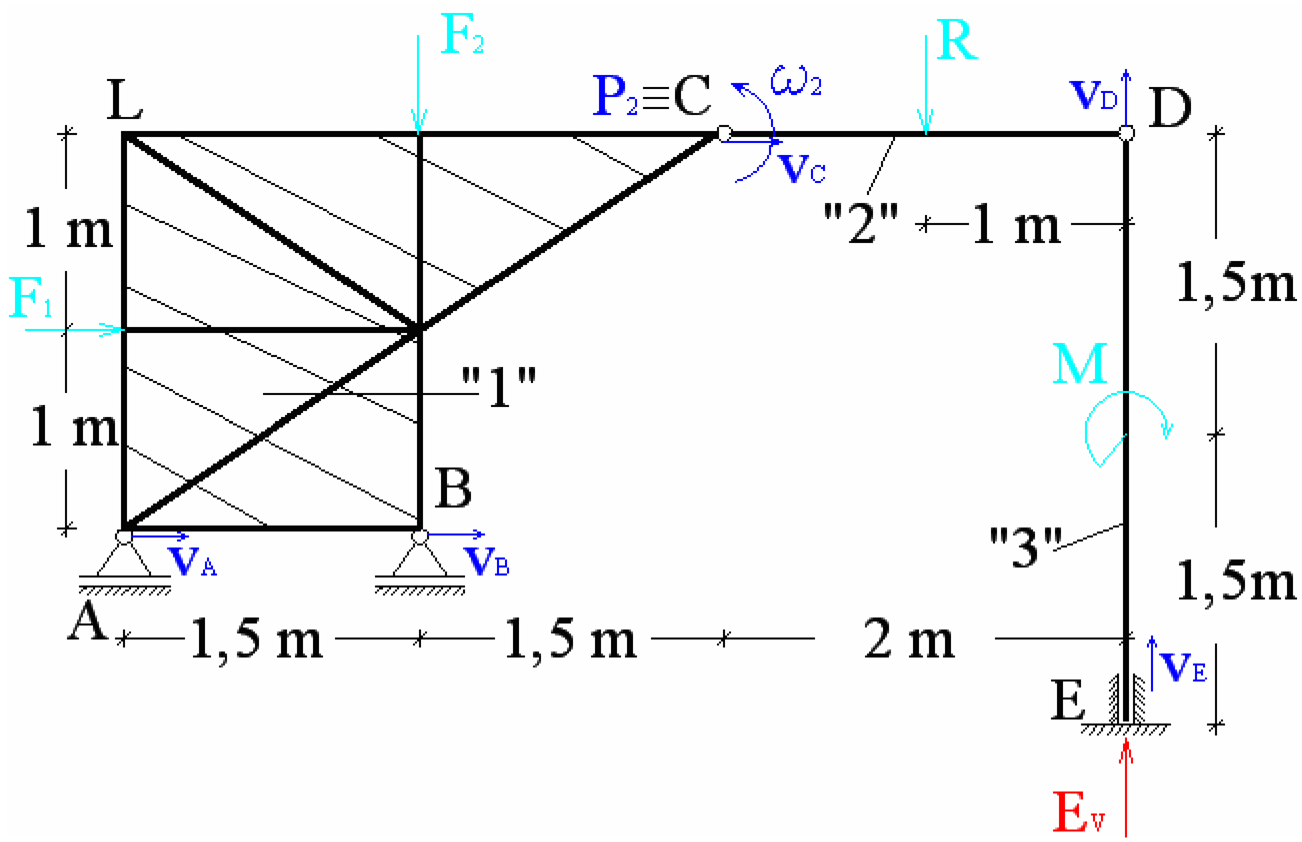
5.2. Заместваме в (1):

$$E_V.V_E - R.1.\omega_2 = 0\,,$$

.

Съкращаваме V_E и получаваме:

$$E_V - \frac{1}{2}.R.1 = 0\,,$$
$$E_V - \frac{1}{2}.20.1 = 0\,,$$
$$E_V = 10\,\text{kN}.$$

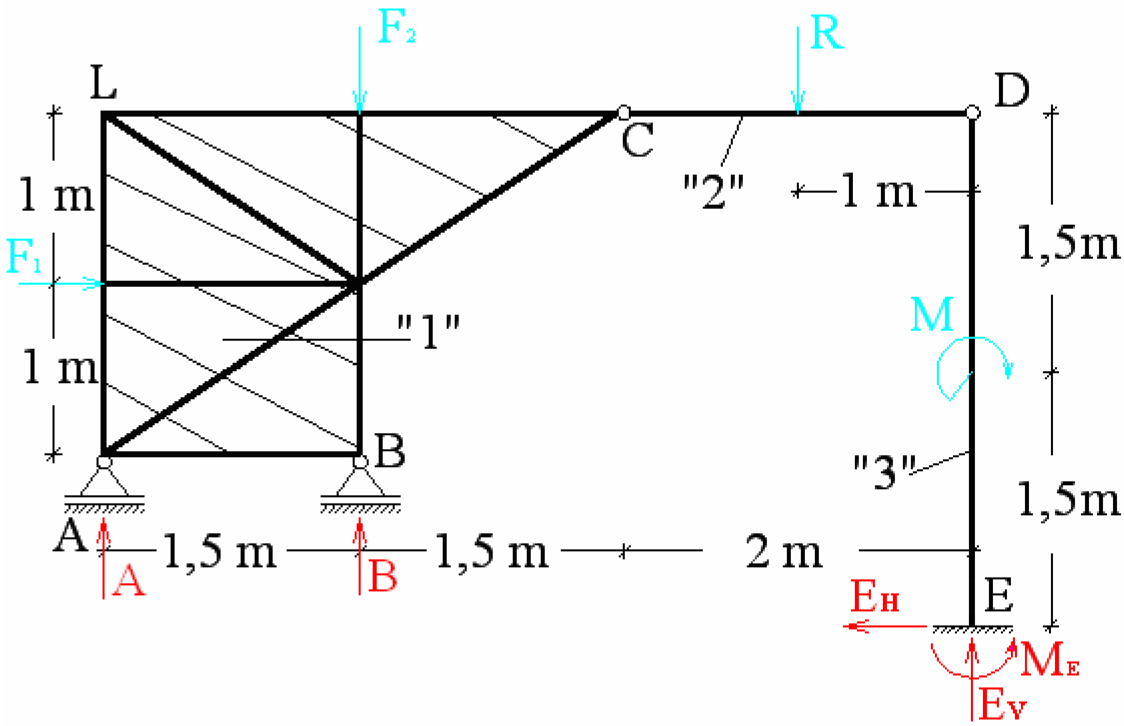


Фиг. 5.1.6

6. Проверка

Поставяме определените вече опорни реакции с техните правилни посоки (Фиг.5.1.7) и за проверка използваме уравнение, в което участват всички неизвестни.

$$\sum M_C = 0;\ A.3 + B.1{,}5 + F_1.1 + F_2.1{,}5 - R.1 - M - E_H.3 + E_V.2 + M_E = 0;$$
$$16{,}667.3 + 18{,}333.1{,}5 - 40.1 - 25.1{,}5 + 20.1 + 32 + 40.3 - 10.2 - 152 = 0;$$
$$249{,}5 - 249{,}5 = 0 = 0\,!$$



Фиг. 5.1.7

III. Определяне на усилията в указаните пръти

1. Определяне на S_1

Срязваме мислено пръта и на негово място поставяме усилието S_1 на опън – системата отново се превръща в механизъм (Фиг.5.1.8).

1.1. Кинематичен анализ

Конструкцията вече се състои от четири тела, затова определяме вида на движение на всяко от тях: тяло 1 – транслация, тяло 2 – равнинно движение, тяло 3 – ротация около т. *C* и тяло 4 – неподвижно (Фиг.5.1.8). Поставяме ъгловите и линейните скорости и ги определяме във функция на една скорост, например ъгловата скорост ω_3:

$$V_C = \omega_3.CD = 2\omega_3\,;\ \omega_2 = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{2.\omega_3}{1{,}5} = 1{,}333\omega_3\,;\ V_K = \omega_2.KP_2 = 1{,}333.\omega_3.1 = 1{,}333\omega_3\,.$$

1.2. Заместваме в (1):

$$-S_1.V_K - F_1.V_K + R.1.\omega_3 = 0\,,$$

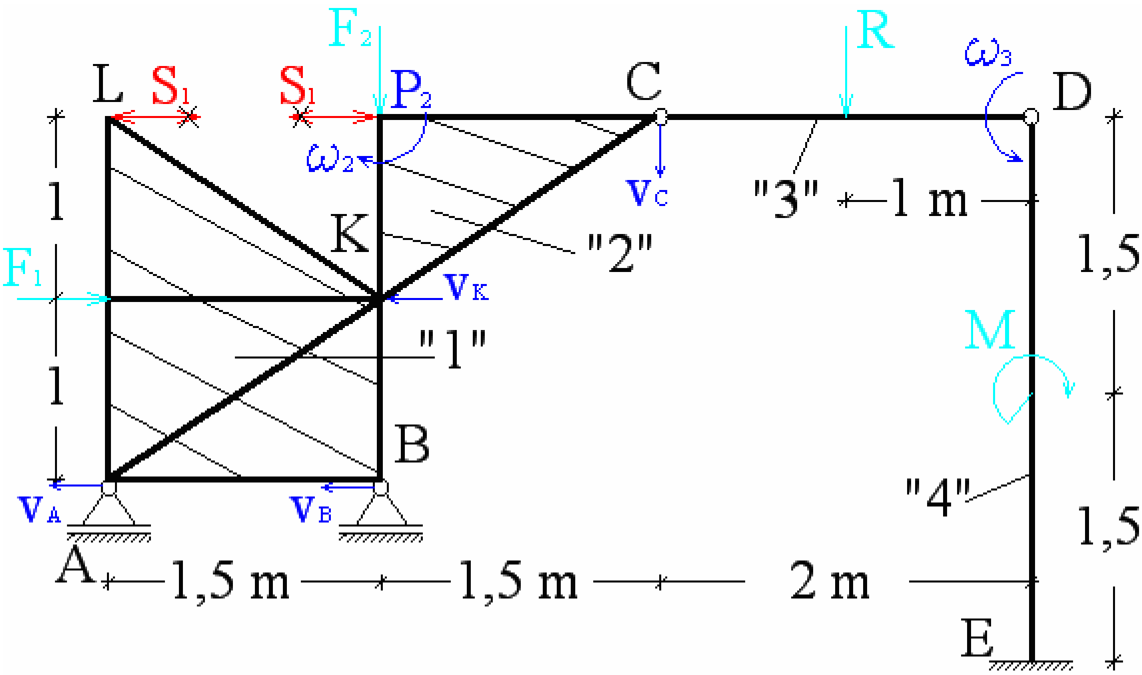
$$-S_1.1{,}333.\omega_3 - F_1.1{,}333.\omega_3 + R.1.\omega_3 = 0\,.$$

Съкращаваме ω_3 и получаваме:

$$-1{,}333.S_1 - 1{,}333.F_1 + R.1 = 0\,,$$

$$-1{,}333.S_1 - 1{,}333.40 + 20.1 = 0\,,$$

$S_1 = -25$ kN – прътът работи на натиск!



Фиг. 5.1.8

2. Определяне на S_2

Срязваме мислено пръта и на негово място поставяме усилието S_2 на опън – системата отново се превръща в механизъм (Фиг.5.1.9).

2.1. Кинематичен анализ

Конструкцията пак се състои от четири тела, затова определяме вида на движение на всяко от тях: тяло 1 – транслация, тяло 2 – равнинно движение, тяло 3 – ротация около т. *C* и тяло 4 – неподвижно (Фиг.5.1.9). Поставяме ъгловите и линейните скорости и ги определяме във функция на ω_2, както следва:

$$V_K = \omega_2.KP_2 = \omega_2\,;\ V_C = \omega_2.CP_2 = 1{,}5\omega_2 \quad \omega_3 = \frac{V_C}{CD} = \frac{1{,}5.\omega_2}{2} = 0{,}75\omega_2\,.$$

2.2. Заместваме в (1):

$$-F_1.V_K - S_2.1,5.\omega_2 + R.1.\omega_3 = 0\,,$$

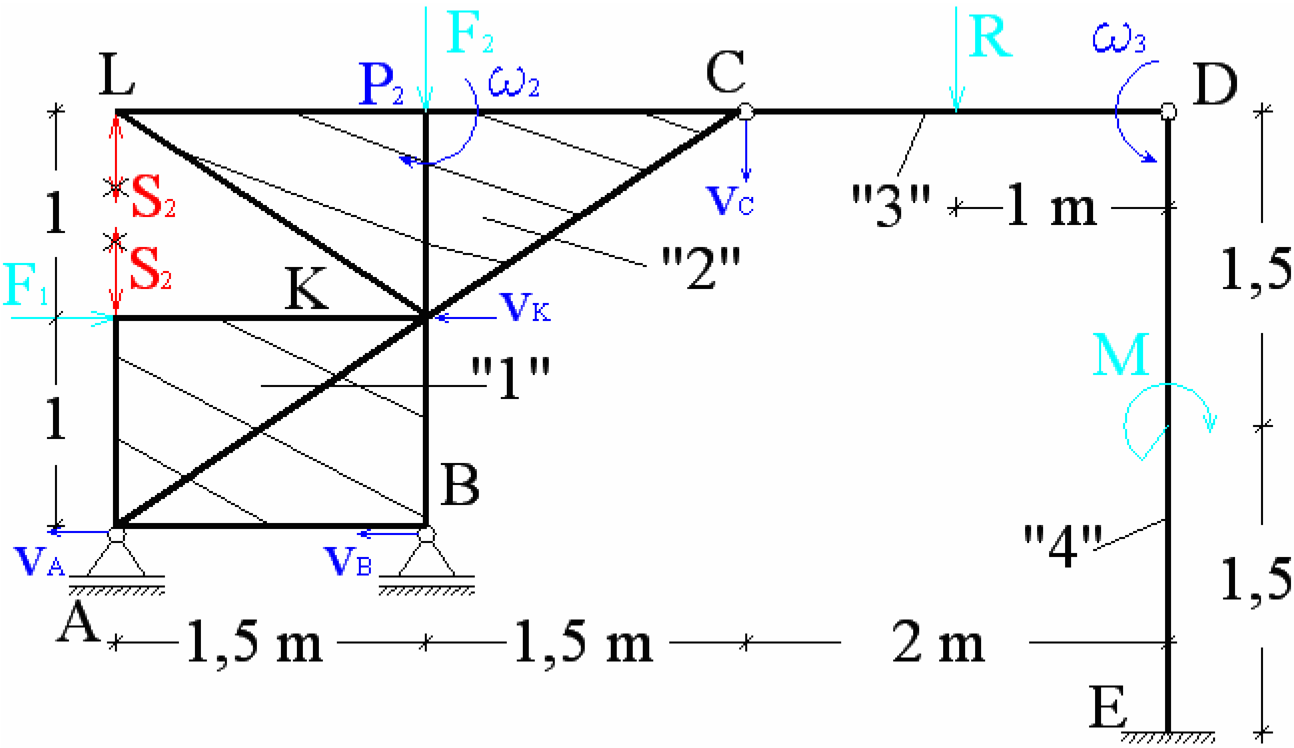
$$-F_1.\omega_2 - S_2.1,5.\omega_2 + R.1.0,75.\omega_2 = 0\,.$$

Съкращаваме ω_2 и получаваме:

$$-F_1 - 1,5.S_2 + 0,75.R = 0\,,$$

$$-40 - 1,5.S_2 + 0,75.20 = 0\,,$$

$S_2 = -16,667\,\text{kN}$ – прътът работи на натиск!



Фиг. 5.1.9