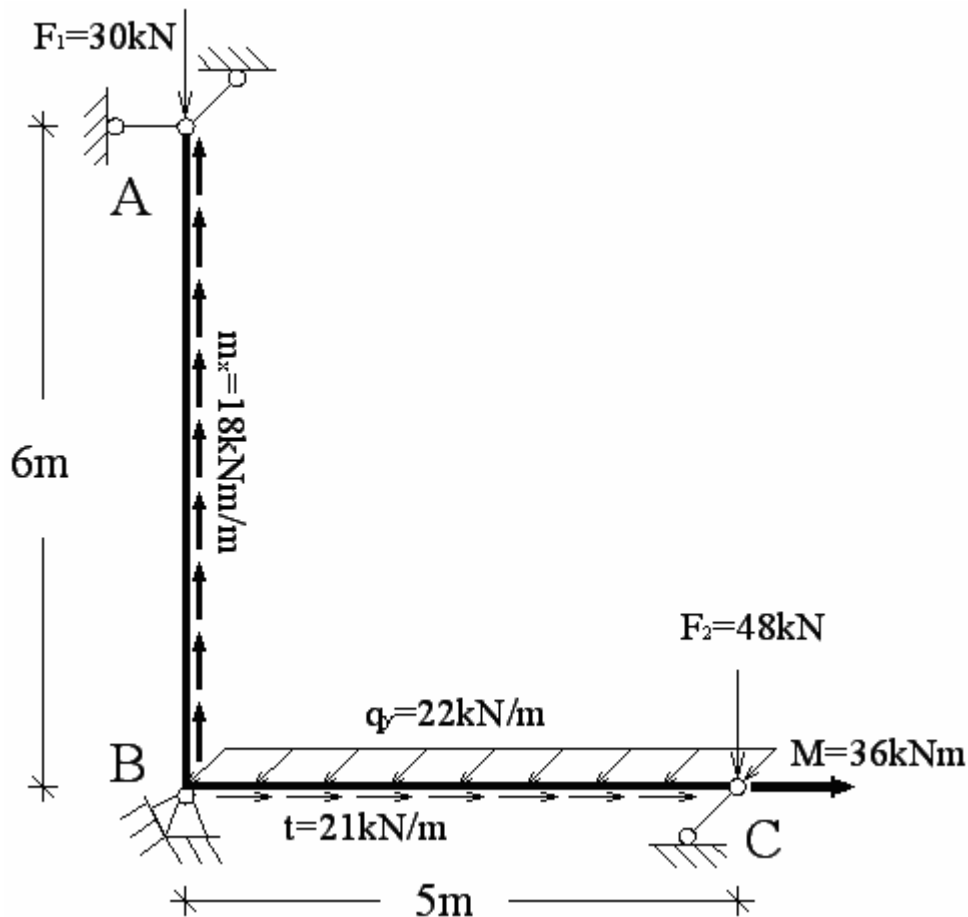


## РАЗРЕЗНИ УСИЛИЯ ПРИ ПРОСТРАНСТВЕНО НАТОВАРВАНЕ

### Задача 1

За показаната на Фиг.1.1 конструкция:

1. Да се определят опорните реакции;
2. Да се определят функциите на разрезните усилия в двата участъка;
3. Да се начертаят диаграмите на разрезните усилия;
4. Да се извършат необходимите проверки.



Фиг. 1.1

### 1. Опорни реакции

Опорните реакции са три в опора  $B$ , две в опора  $A$  и една в опора  $C$ . Тяхното определяне става с шест условия за равновесие като по възможност трябва да бъдат избрани такива, които са независими (всяко едно условие за равновесие да включва само една неизвестна опорна реакция в себе си).

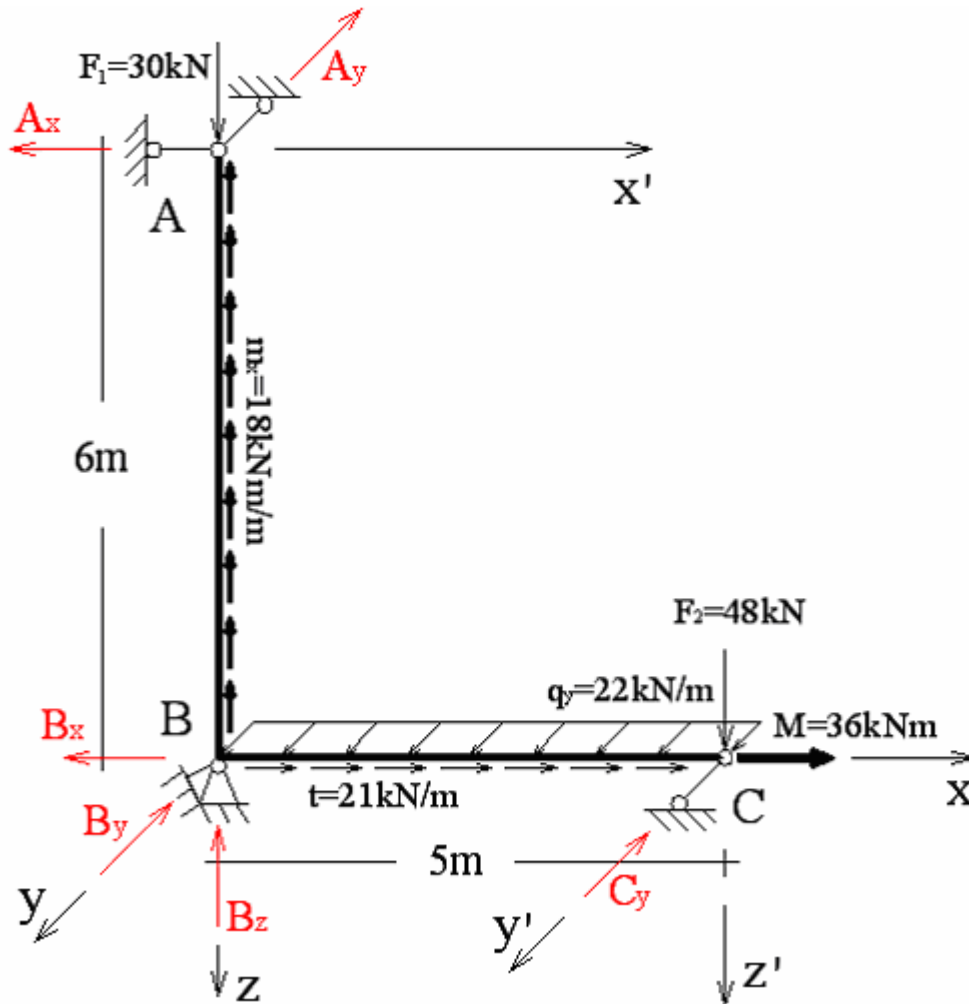
Въвежда се координатна система, която служи само за определяне на опорните реакции. Тук, най-удачно е тя да е с начало в т.  $B$  (Фиг.1.2), защото при записване на трите моментни условия за равновесие, опорните реакции в т.  $B$  се елиминират.

• Определяне на опорните реакции:

$$1) \sum F_{iz} = 0; \quad B_z - 30 - 48 = 0; \quad B_z = 78 \text{ kN};$$

$$2) \sum M_{ix} = 0; \quad A_y \cdot 6 - 36 = 0; \quad A_y = 6 \text{ kN};$$

$$\begin{aligned}
3) \sum M_{iy} &= 0; & A_x \cdot 6 - 48.5 &= 0; & A_x &= 40 \text{ kN}; \\
4) \sum M_{iz} &= 0; & C_y \cdot 5 - 22.5 \cdot 2.5 + 18.6 &= 0; & C_y &= 33.4 \text{ kN}; \\
5) \sum F_{ix} &= 0; & B_x - 21.5 + A_x &= 0; & B_x &= 65 \text{ kN}; \\
6) \sum F_{iy} &= 0; & B_y - 22.5 + A_y + C_y &= 0; & B_y &= 70.6 \text{ kN}.
\end{aligned}$$



Фиг. 1.2

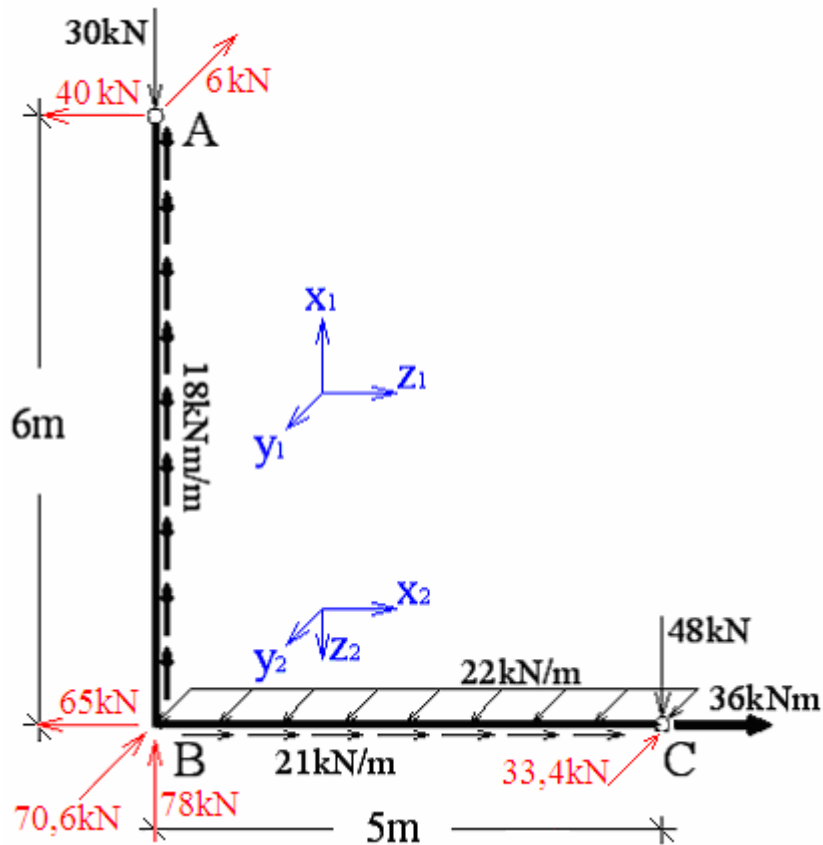
- Проверка на опорните реакции

Използват се три моментни уравнения за оси, които не са използвани при определяне на опорните реакции – в случая  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  (Фиг.1.2):

$$\begin{aligned}
7) \sum M_{ix'} &= 0; & B_y \cdot 6 - 22.5 \cdot 6 + C_y \cdot 6 + 36 &= 0; \\
8) \sum M_{iy'} &= 0; & B_z \cdot 5 - 30.5 - A_x \cdot 6 &= 0; \\
9) \sum M_{iz'} &= 0; & A_y \cdot 5 + B_y \cdot 5 - 18.6 - 22.5 \cdot 2.5 &= 0.
\end{aligned}$$

## 2. Функции на разрезните усилия

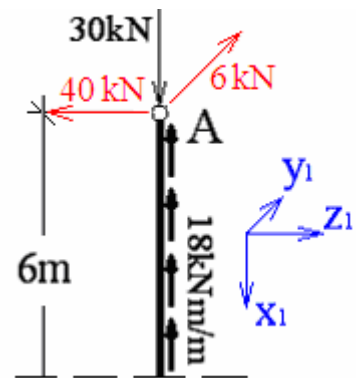
Гредата се състои от два участъка:  $AB$  и  $BC$ . За всеки един от тях се въвежда местна координатна система (МКС) по следното правило: ос  $x$  – и в двата участъка съвпада с оста на гредата; ос  $z$  – за участък  $BC$  е насочена надолу, а за  $AB$  е насочена надясно; ос  $y$  – и за двата участъка се разполага, така че трите оси да образуват дясно ориентирана тройка оси. МКС за двата участъка са показани на Фиг.1.3.



Фиг. 1.3

Трябва да се отбележи, че избраните за двата участъка МКС не са единствените правилно подбрани. Например, възможно и вярно ще бъде ако в участък АВ местната координатна система е с ос  $x_1$  насочена надолу, ос  $y_1$  – навътре към листа и ос  $z_1$  – насочена надясно (Фиг.1.А). По такъв начин тя отново ще е дясно ориентирана, а това е водещото условие!

Забележка: Един от начините за определяне на дясно ориентирана координатна система (дясна тройка вектори) е с трите пръста на дясната ръка, разположени под прав ъгъл един спрямо друг: показалецът сочи оста  $x$ , средният пръст – оста  $y$ , а палецът – оста  $z$ !



Фиг. 1.А

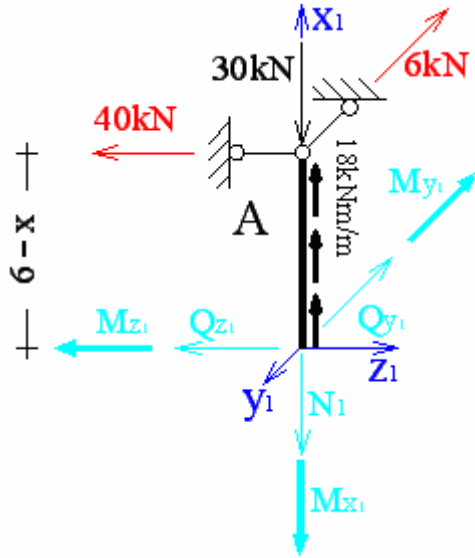
### 2.1 Участък АВ : $0 \leq x \leq 6$ m

Прави се мислен разрез през участък АВ и се отделя цялата горна или долна част на гредата. За определяне на функциите на разрезните усилия се избира частта от гредата, натоварена с по-малко на брой товари – тук това е горната част. След това се определя дали разглежданата част е лява или дясна по следното правило: ако оста  $x_1$  на МКС “излиза” от сечението навън – частта е лява; ако оста  $x_1$  “влиза” в сечението – частта е дясна (Фиг.1.Б).



Фиг. 1.Б

В случая се оказва, че разглежданата част е дясна. Тогава, нейната дължина е  $(6 - x)$  (Фиг.1.4). Освен това, при дясна част на участъка, положителните посоки на разрезните усилия са обратни на положителните посоки на осите на МКС (Фиг.1.4).



Фиг. 1.4

Определянето на функциите на разрезните усилия става с шестте условия за равновесие за отделената част на гредата (Фиг.1.4):

- 1)  $\sum F_{ix_1} = 0; N_1 + 30 = 0; N_1 = -30;$
- 2)  $\sum F_{iy_1} = 0; Q_{y_1} + 6 = 0; Q_{y_1} = -6;$
- 3)  $\sum F_{iz_1} = 0; Q_{z_1} + 40 = 0; Q_{z_1} = -40;$
- 4)  $\sum M_{ix_1} = 0; M_{x_1} - 18(6 - x) = 0;$   
 $M_{x_1} = 108 - 18x;$
- 5)  $\sum M_{iy_1} = 0; M_{y_1} - 40(6 - x) = 0$   
 $M_{y_1} = 240 - 40x;$
- 6)  $\sum M_{iz_1} = 0; M_{z_1} + 6(6 - x) = 0;$   
 $M_{z_1} = 36 - 6x.$

• Диференциална проверка:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = -t_1(x) \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\frac{dQ_{y_1}(x)}{dx} = -q_{y_1}(x) \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\frac{dQ_{z_1}(x)}{dx} = -q_{z_1}(x) \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\frac{dM_{x_1}(x)}{dx} = -m_{x_1}(x) \Rightarrow -18 = -18;$$

$$\frac{dM_{z_1}(x)}{dx} = -Q_{y_1}(x) \Rightarrow 6 = -(-6);$$

$$\frac{dM_{y_1}(x)}{dx} = Q_{z_1}(x) \Rightarrow -40 = -40.$$

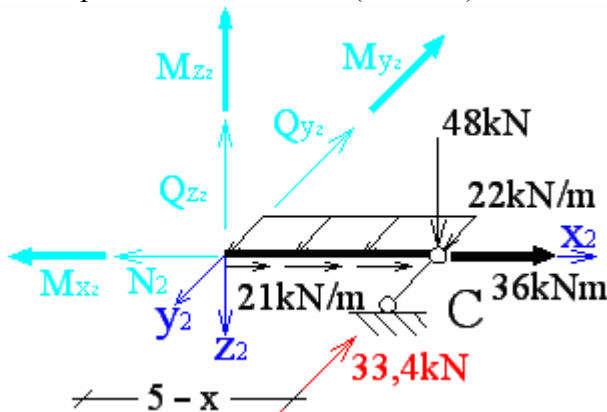
• Подробни точки за изчертаване на диаграмите

Най-високата функция на разрезните усилия е линейна, т.е. необходими са две точки за изчертаването на диаграмите – вземат се началото и края на участъка:

$x$	$N_1$	$Q_{y_1}$	$Q_{z_1}$	$M_{x_1}$	$M_{y_1}$	$M_{z_1}$
0	-30	-6	-40	108	240	-36
6	-30	-6	-40	0	0	0

## 2.2 Участък BC: $0 \leq x \leq 5$ m

При този участък изборът на лява или дясна част е по-лесен: по слабо натоварена е дясната част (Фиг.1.5). Отново се записват шестте равновесни условия:



Фиг. 1.5

- 1)  $\sum F_{ix_2} = 0; N_2 - 21(5 - x) = 0;$   
 $N_2 = 105 - 21x;$
- 2)  $\sum F_{iy_2} = 0; Q_{y_2} - 22(5 - x) + 33,4 = 0$   
 $Q_{y_2} = 76,6 - 22x;$
- 3)  $\sum F_{iz_2} = 0; Q_{z_2} - 48 = 0; Q_{z_2} = 48;$
- 4)  $\sum M_{ix_2} = 0; M_{x_2} - 36 = 0; M_{x_2} = 36;$
- 5)  $\sum M_{iy_2} = 0; M_{y_2} + 48(5 - x) = 0;$   
 $M_{y_2} = 48x - 240;$

$$6) \sum M_{z_2} = 0; \quad M_{z_2} + 33,4(5-x) - 22 \frac{(5-x)^2}{2} = 0; \quad M_{z_2} = 11x^2 - 76,6x + 108.$$

• Диференциална проверка:

$$\frac{dN_2(x)}{dx} = -t_2(x) \Rightarrow -21 = -21; \quad \frac{dM_{x_2}(x)}{dx} = -m_{x_2}(x) \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\frac{dQ_{y_2}(x)}{dx} = -q_{y_2}(x) \Rightarrow -22 = -22; \quad \frac{dM_{z_2}(x)}{dx} = -Q_{y_2}(x) \Rightarrow -76,6 + 22x = -(76,6 - 22x);$$

$$\frac{dQ_{z_2}(x)}{dx} = -q_{z_2}(x) \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{dM_{y_2}(x)}{dx} = Q_{z_2}(x) \Rightarrow 48 = 48.$$

• Определяне на екстремума на функцията  $M_{z_2}$

Функцията  $M_{z_2}$  е от втора степен и има екстремум. Ако той е в границите на участъка, неговото определяне е важно, защото тази стойност може да се окаже максимална за целия участък и при оразмеряването му тя да е определяща.

- определяне на позицията на екстремума:

$$\frac{dM_{z_2}}{dx} = 0 \Rightarrow 22x - 76,6 = 0 \Rightarrow x = 3,482 \text{ m.}$$

-  $M_{z_2}^{extr}$

$$M_{z_2}^{extr} = M_{z_2}(3,482) = 11 \cdot 3,482^2 - 76,6 \cdot 3,482 + 108 = -25,35 \text{ kNm.}$$

• Подробни точки за изчертаване на диаграмите

Отново се вземат началото и края на участъка за подробни точки. Понеже функцията  $M_{z_2}$  е от втора степен, за нейното изчертаване са необходими поне три стойности – в началото и края на участъка и екстремума.

$x$	$N_2$	$Q_{y_2}$	$Q_{z_2}$	$M_{x_2}$	$M_{y_2}$	$M_{z_2}$
0	105	76,6	48	36	-240	108
5	0	-33,4	48	36	0	0

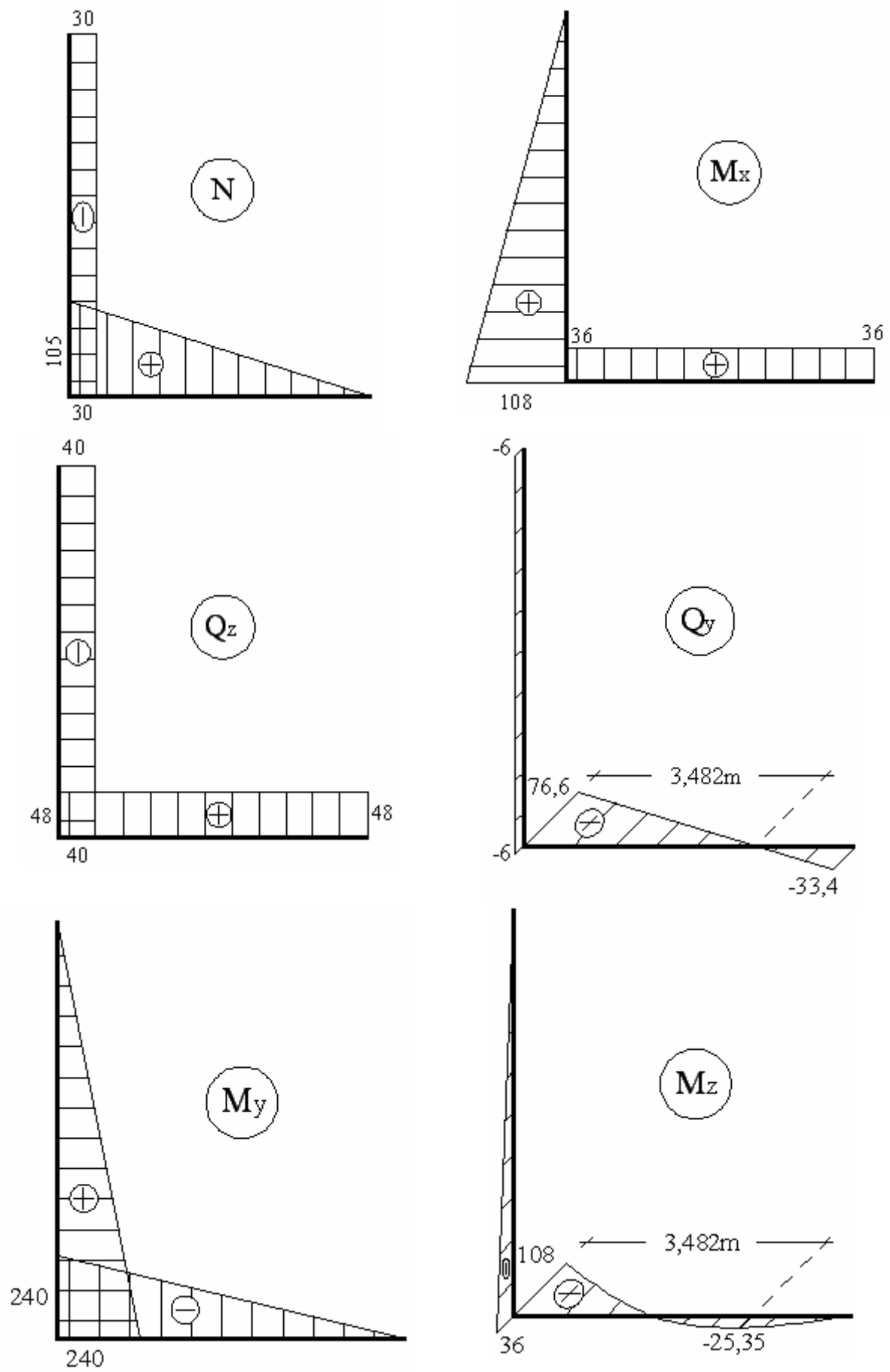
### 3. Диаграми на разрезните усилия (Фиг.1.6.)

След определяне на функциите на разрезните усилия, те се изобразяват графично. Оста на гредата се избира за реперна линия и стойностите на усилията се нанасят спрямо нея по следния начин:

Стойностите в диаграмите на  $N$ ,  $M_x$ ,  $Q_z$  и  $M_y$  се нанасят успоредно на локалната ос  $z$  за всеки участък, а тези на  $Q_y$  и  $M_z$  - успоредно на локалната ос  $y$  за всеки участък.

Положителните стойности в диаграмите на  $N$ ,  $M_x$  и  $Q_z$  се нанасят откъм отрицателната страна на локалната ос  $z$  за всеки участък, а положителните стойности в диаграмата на  $M_y$  - откъм положителната страна на локалната ос  $z$  за всеки участък. Положителните стойности в диаграмите на  $Q_y$  и  $M_z$  се нанасят откъм отрицателната страна на локалната ос  $y$  за всеки участък.

**Задължително е така да се разположат диаграмите, че  $Q_z$  да бъде до/над  $M_y$  и  $Q_y$  до/над  $M_z$ !**



Фиг.1.6

#### 4. Проверки на функциите и диаграмите на разрезните усилия

##### 4.1 Диференциална проверка

Извършена е при определяне на функциите на разрезните усилия.

##### 4.2 Проверка за вида на диаграмите

- Участък  $AB$  :

$$t_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) = const ;$$

$$q_{y_1}(x) = 0 \Rightarrow Q_{y_1}(x) = const \Rightarrow M_{z_1}(x) = \text{линейна функция};$$

$$q_{z_1}(x) = 0 \Rightarrow Q_{z_1}(x) = const \Rightarrow M_{y_1}(x) = \text{линейна функция};$$

$$m_{x_1}(x) = const \Rightarrow M_{x_1}(x) = \text{линейна функция}.$$

- Участък  $BC$  :

$$t_2(x) = const \Rightarrow N_2(x) = \text{линейна функция};$$

$$q_{y_2}(x) = const \Rightarrow Q_{y_2}(x) = \text{линейна функция} \Rightarrow M_{z_2}(x) = \text{квадратна функция};$$

$$q_{z_2}(x) = 0 \Rightarrow Q_{z_2}(x) = const \Rightarrow M_{y_2}(x) = \text{линейна функция};$$

$$m_{x_2}(x) = 0 \Rightarrow M_{x_2}(x) = const .$$

##### 4.3 Площна проверка

Извършва се по участъци, само за диаграмите, в които функцията на разрезното усилие е от първа или по-висока степен.

- Участък  $AB$  :

$$- M_x \text{-диаграма} - M_{x_1}^A - M_{x_1}^B = -R_{m_{x1}} \Rightarrow 0 - 108 = -18.6 \Rightarrow -108 = -108;$$

$$- M_y \text{-диаграма} - M_{y_1}^A - M_{y_1}^B = A_{Q_{z1}} \Rightarrow 0 - 240 = -40.6 \Rightarrow -240 = -240;$$

$$- M_z \text{-диаграма} - M_{z_1}^A - M_{z_1}^B = -A_{Q_{y1}} \Rightarrow 0 - (-36) = -(-6).6 \Rightarrow 36 = 36 .$$

- Участък  $BC$  :

$$- N \text{-диаграма} - N_2^C - N_2^B = -R_{t_2} \Rightarrow 0 - 105 = -21.5 \Rightarrow -105 = -105;$$

$$- Q_y \text{-диаграма} - Q_{y_2}^C - Q_{y_2}^B = -R_{q_{y2}} \Rightarrow -33,4 - 76,6 = -22.5 \Rightarrow -110 = -110;$$

$$- M_y \text{-диаграма} - M_{y_2}^C - M_{y_2}^B = A_{Q_{z2}} \Rightarrow 0 - (-240) = 48.5 \Rightarrow 240 = 240;$$

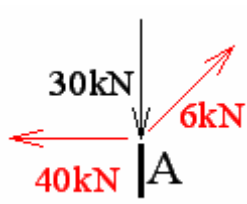
$$- M_z \text{-диаграма} - M_{z_2}^C - M_{z_2}^B = -A_{Q_{y2}} \Rightarrow 0 - 108 = -\frac{1}{2}(76,6 - 33,4).5 \Rightarrow -108 = -108 .$$

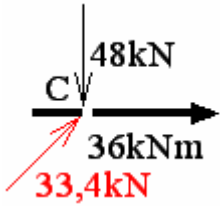
- Проверка за локален екстремум:

$$M_{z_2}^C - M_{z_2}^{extr} = -A_{Q_{y2}}(x_{extr} \div C) \Rightarrow 0 - (-25,35) = -\frac{1}{2}(-33,4).(5 - 3,482) \Rightarrow 25,35 = 25,35 .$$

##### 4.4 Проверка с правилата за скоковете

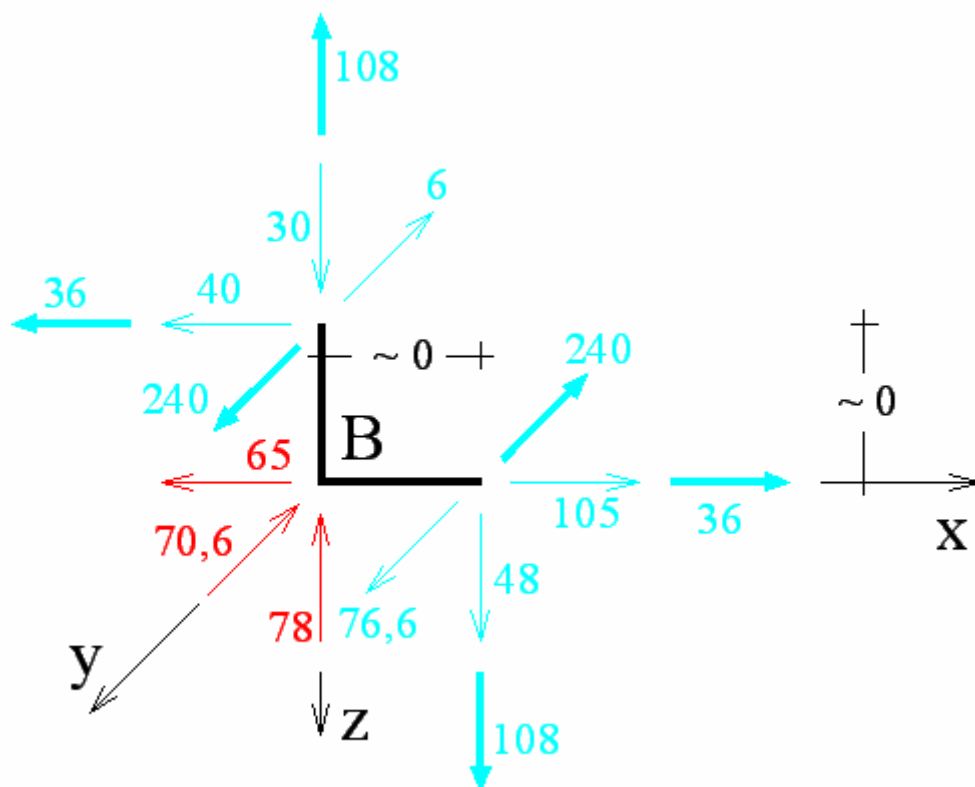
Извършва се на границите на участъците, където няма промяна в направлението на оста на гредата. В този случай това са т.  $A$  и т.  $C$  .

	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Приложена е концентрирана осова сила 30 kN, която дава скок в <math>N</math>-диаграмата с големина 30 kN и посока – завъртяната на <math>90^\circ</math> по часовата стрелка посока на силата при движение отляво надясно.</li><li>2. Приложена е концентрирана сила 40 kN по направление на локална ос <math>z</math>. Тя дава скок в <math>Q_z</math>-диаграмата с големина 40 kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</li><li>3. Приложена е концентрирана сила 6 kN по направление на локална ос <math>y</math>. Тя дава скок в <math>Q_y</math>-диаграмата с големина 6 kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</li></ol>
---	---

	<p>1. Приложена е концентрирана сила 48 kN по направление на локална ос <math>z</math>. Тя дава скок в <math>Q_z</math>-диаграмата с големина 48 kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p> <p>2. Приложена е концентрирана сила 33,4 kN по направление на локална ос <math>y</math>. Тя дава скок в <math>Q_y</math>-диаграмата с големина 33,4 kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p> <p>3. Приложен е концентриран осов момент 36 kNm, който дава скок в <math>M_x</math>-диаграмата с големина 36 kNm и посока – завъртаната на <math>90^\circ</math> по часовата стрелка посока на момента при движение отляво надясно.</p>
---	--

#### 4.5 Проверка с изрязване на възел (Фиг.1.7)

Извършва се на мястото, където гредата сменя направлението на оста си – в нашия случай това е т.  $B$ . Прави се мислен разрез, безкрайно близко до коравия възел, нанасят се само концентрираните сили и моменти във възела и от шестте диаграми се отчитат големините и посоките на разрезните усилия. След това се записват шестте условия за равновесие за избрана координатна система и се проверяват дали сумата на усилията е нула.



Фиг. 1.7

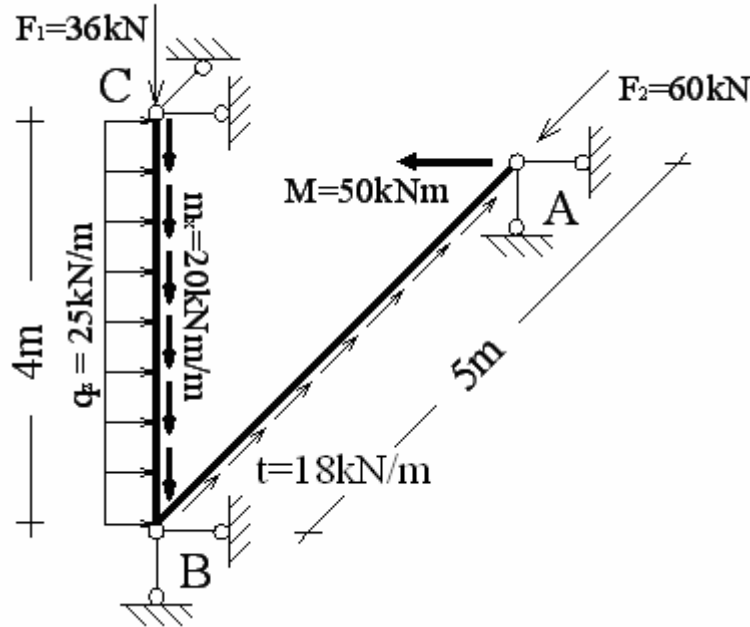
- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| 1) $\sum F_{ix} = 0; -40 - 65 + 105 = 0;$   | 4) $\sum M_{ix} = 0; -36 + 36 = 0;$   |
| 2) $\sum F_{iy} = 0; -6 + 70,6 - 70,6 = 0;$ | 5) $\sum M_{iy} = 0; 240 - 240 = 0;$  |
| 3) $\sum F_{iz} = 0; 30 - 78 + 48 = 0;$     | 6) $\sum M_{iz} = 0; -108 + 108 = 0.$ |



## Задача 2

За показаната на Фиг.2.1. конструкция:

1. Да се определят опорните реакции;
2. Да се определят функциите на разрезните усилия в двата участъка;
3. Да се начертаят диаграмите на разрезните усилия;
4. Да се извършат необходимите проверки.



Фиг. 2.1

### 1. Опорни реакции

Опорните реакции са по две във точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  (Фиг.2.2.). Въвежда се координатна система с начало в т. $B$ , защото част от опорните реакции в точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  ще бъдат елиминирани при записване на трите моментови условия за равновесие.

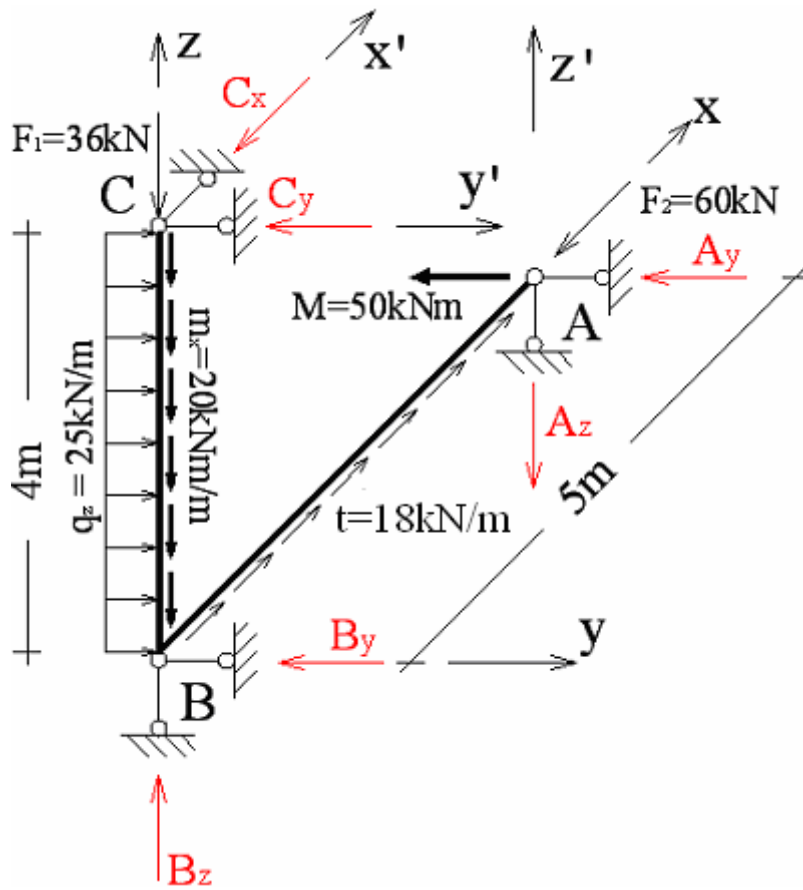
#### • Определяне на опорните реакции

$$\begin{aligned}
 1) \sum M_{ix} = 0; & \quad C_y \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0; & \quad C_y = -50 \text{ kN}; \\
 2) \sum M_{iz} = 0; & \quad A_y \cdot 5 - m_x \cdot 4 = 0; & \quad A_y = 16 \text{ kN}; \\
 3) \sum M_{iy'} = 0; & \quad A_z \cdot 5 - M + t \cdot 4 \cdot 5 - F_2 \cdot 4 = 0; & \quad A_z = -14 \text{ kN}; \\
 4) \sum F_{ix} = 0; & \quad C_x - t \cdot 5 + F_2 = 0; & \quad C_x = 30 \text{ kN}; \\
 5) \sum F_{iz} = 0; & \quad -F_1 + B_z + A_z = 0; & \quad B_z = 50 \text{ kN}; \\
 6) \sum F_{iy} = 0; & \quad -B_y + q \cdot 4 - A_y + C_y = 0; & \quad B_y = 34 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

#### • Проверка

Използват се три моментови уравнения за оси  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  (Фиг.2.2.):

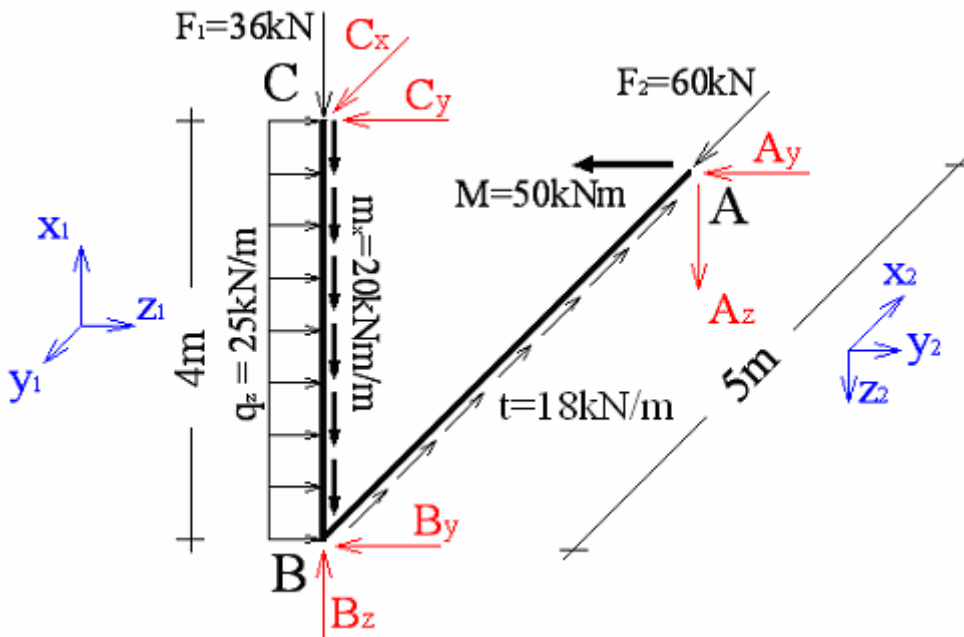
$$\begin{aligned}
 \sum M_{ix'} = 0; & \quad q \cdot 4 \cdot 2 - B_y \cdot 4 - A_y \cdot 4 = 200 - 200 = 0; \\
 \sum M_{iy'} = 0; & \quad C_x \cdot 4 - M - A_z \cdot 5 = 120 - 120 = 0; \\
 \sum M_{iz'} = 0; & \quad q \cdot 4 \cdot 5 - C_y \cdot 5 - B_y \cdot 5 - m_x \cdot 4 = 500 - 500 = 0.
 \end{aligned}$$



Фиг.2.2

## 2. Функции на разрезните усилия

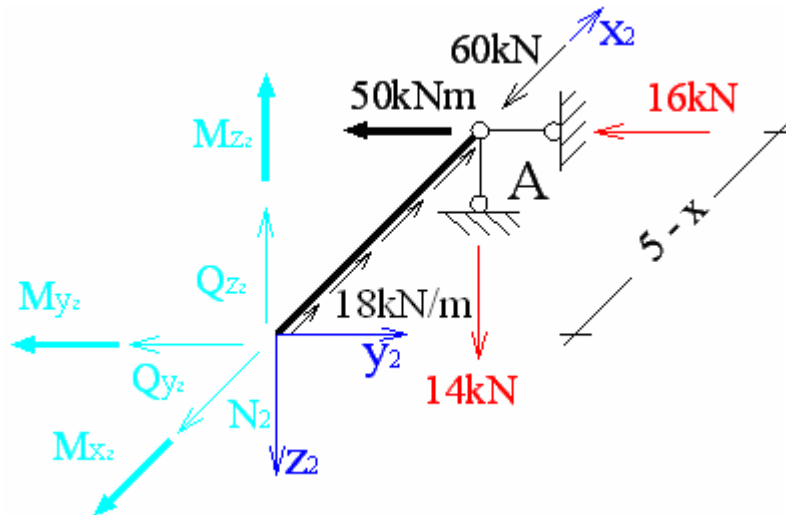
Гредата е съставена от два участъка:  $AB$  и  $BC$ . За всеки един от тях се въвежда МКС, съгласно правилата, споменати в Зад.1 (Фиг.2.3).



Фиг. 2.3

## 2.1 Участък $AB : 0 \leq x \leq 5 \text{ m}$

Прави се мислен разрез през участъка и се отделя цялата „предна“ или „задна“ част на гредата. Логично е да бъде избрана „задната“ част на участък  $AB$  като по-слабо натоварена, след което се определя дали тя е лява или дясна. В случая, оста  $x_2$  „влиза“ в сечението, т.е. разглежданата част е дясна – нейната дължина тогава е  $5-x$ . Определянето на функциите на разрезните усилия става с шестте условия за равновесие (Фиг.2.4):



Фиг. 2.4

- 1)  $\sum F_{ix_2} = 0; N_2 - 18(5-x) + 60 = 0; N_2 = 30 - 18x;$
- 2)  $\sum F_{iy_2} = 0; Q_{y_2} + 16 = 0; Q_{y_2} = -16;$
- 3)  $\sum F_{iz_2} = 0; Q_{z_2} - 14 = 0; Q_{z_2} = 14;$
- 4)  $\sum M_{ix_2} = 0; M_{x_2} = 0;$
- 5)  $\sum M_{iy_2} = 0; M_{y_2} + 50 + 14(5-x) = 0; M_{y_2} = 14x - 120;$
- 6)  $\sum M_{iz_2} = 0; M_{z_2} + 16(5-x) = 0; M_{z_2} = 16x - 80.$

• Диференциална проверка:

$$\frac{dN_2(x)}{dx} = -t_2(x) \Rightarrow -18 = -18; \quad \frac{dM_{x_2}(x)}{dx} = -m_{x_2}(x) \Rightarrow 0 = 0;$$

$$\frac{dQ_{y_2}(x)}{dx} = -q_{y_2}(x) \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{dM_{z_2}(x)}{dx} = -Q_{y_2}(x) \Rightarrow 16 = -(-16);$$

$$\frac{dQ_{z_2}(x)}{dx} = -q_{z_2}(x) \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{dM_{y_2}(x)}{dx} = Q_{z_2}(x) \Rightarrow 14 = 14.$$

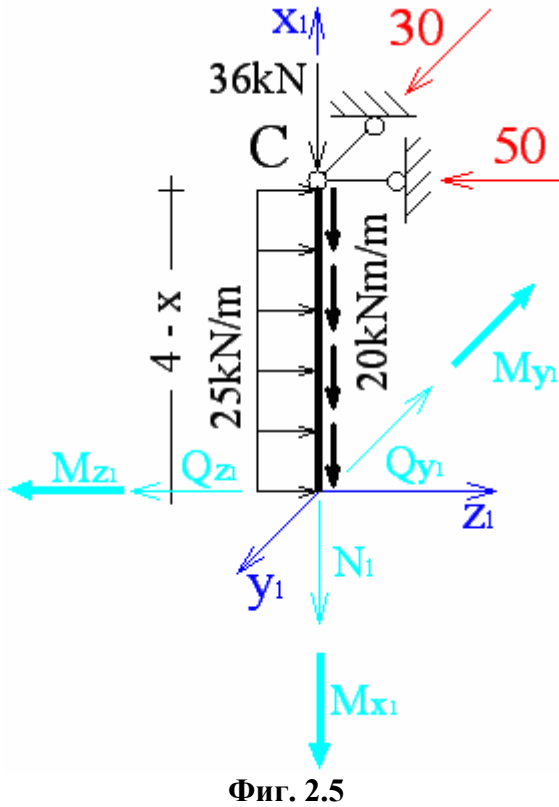
• Подробни точки за изчертаване на диаграмите

Взема се началото и края на участъка за подробни точки, понеже най-голямата функция е линейна.

$x$	$N_2$	$Q_{y_2}$	$Q_{z_2}$	$M_{x_2}$	$M_{y_2}$	$M_{z_2}$
0	30	-16	14	0	-120	-80
5	-60	-16	14	0	-50	0

## 2.2 Участък BC: $0 \leq x \leq 4$ m

Тук е избрана горната част на участъка, защото тя е по-слабо натоварена. Това е дясна част и дължината ѝ е  $4 - x$  (Фиг.2.5).



Фиг. 2.5

- 1)  $\sum F_{ix_1} = 0; N_1 + 36 = 0; N_1 = -36;$
- 2)  $\sum F_{iy_1} = 0; Q_{y_1} - 30 = 0; Q_{y_1} = 30;$
- 3)  $\sum F_{iz_1} = 0; Q_{z_1} - 25(4 - x) + 50 = 0;$   
 $Q_{z_1} = -25x + 50;$
- 4)  $\sum M_{ix_1} = 0; M_{x_1} + 20(4 - x) = 0;$   
 $M_{x_1} = 20x - 80;$
- 5)  $\sum M_{iy_1} = 0;$   
 $M_{y_1} + 25 \frac{(4 - x)^2}{2} - 50(4 - x) = 0;$   
 $M_{y_1} = -12,5x^2 + 50x;$
- 6)  $\sum M_{iz_1} = 0; M_{z_1} - 30(4 - x) = 0;$   
 $M_{z_1} = -30x + 120.$

- Определяне на екстремума на  $M_{y_1}$

Функцията  $M_{y_1}$  е от втора степен и има екстремум. Ако той е в границите на участъка, неговото определяне е важно, защото тази стойност може да се окаже максимална за целия участък и при измерването му тя да е определяща.

- определяне на положението на екстремума

$$\frac{dM_{y_1}}{dx} = 0 \Rightarrow -25x + 50 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ m.}$$

-  $M_{y_1}^{extr}$

$$M_{y_1}^{extr} = M_{y_1}(2) = -12,5 \cdot 2^2 + 50 \cdot 2 = 50 \text{ kNm.}$$

- Диференциална проверка:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = -t_1(x) \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{dM_{x_1}(x)}{dx} = -m_{x_1}(x) \Rightarrow 20 = -(-20);$$

$$\frac{dQ_{y_1}(x)}{dx} = -q_{y_1}(x) \Rightarrow 0 = 0; \quad \frac{dM_{z_1}(x)}{dx} = -Q_{z_1}(x) \Rightarrow -30 = -30;$$

$$\frac{dQ_{z_1}(x)}{dx} = -q_{z_1}(x) \Rightarrow -25 = -25; \quad \frac{dM_{y_1}(x)}{dx} = Q_{y_1}(x) \Rightarrow -25x + 50 = -25x + 50.$$

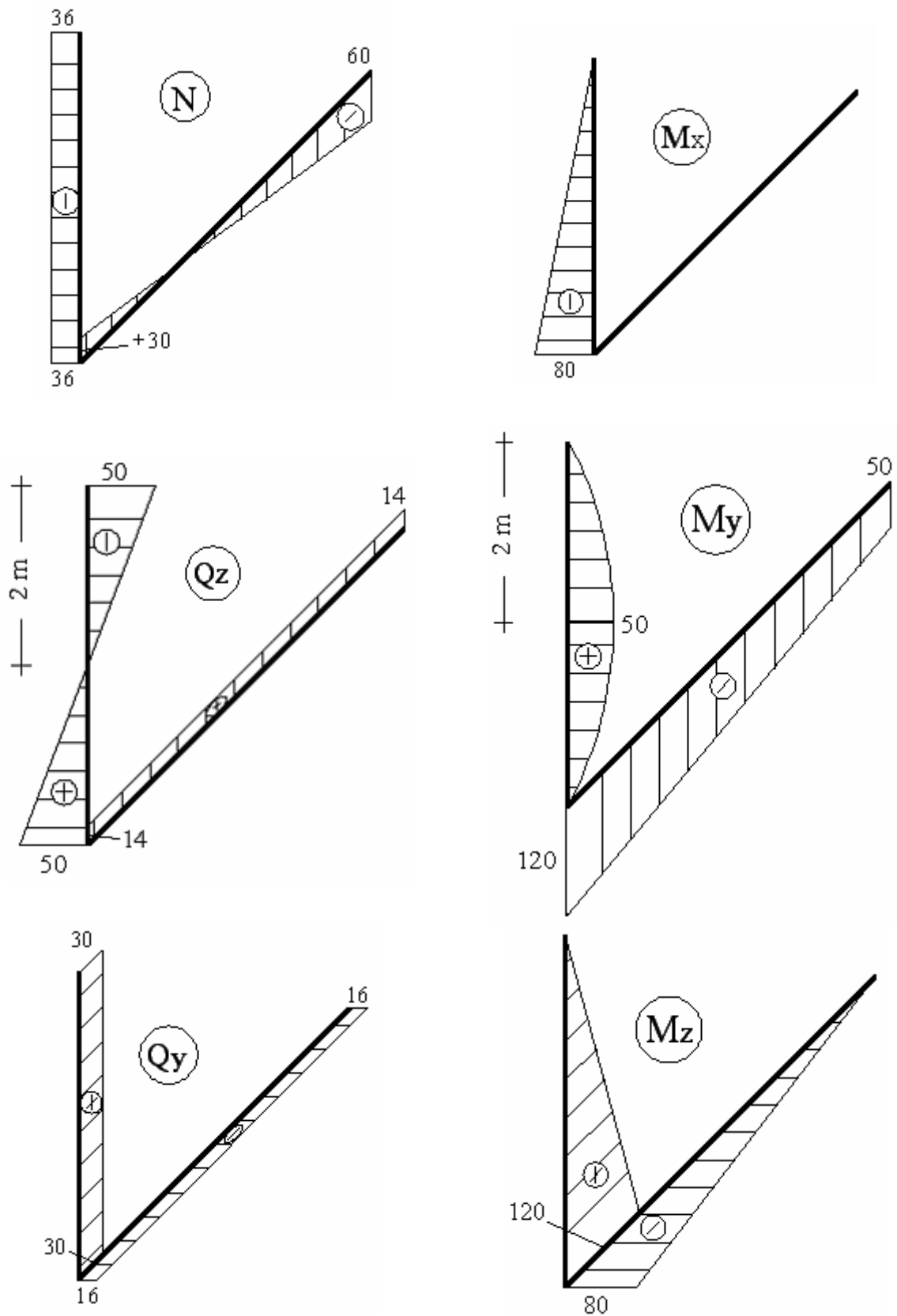
- Подробни точки за изчертаване на диаграмите

Отново вземаме началото и края на участъка за подробни точки. Понеже функцията  $M_{y_1}$  е от втора степен, за нейното изчертаване са ни необходими поне три стойности – в началото и края на участъка и екстремума.

$x$	$N_1$	$Q_{y_1}$	$Q_{z_1}$	$M_{x_1}$	$M_{y_1}$	$M_{z_1}$
0	-36	30	50	-80	0	120
4	-36	30	-50	0	0	0

### 3. Диаграми на разрезните усилия (Фиг.2.6)

Правилата за построяването на ДРУ са същите, както в Зад.1!



Фиг. 2.6

#### 4. Проверки на функциите и диаграмите на разрезните усилия

##### 4.1 Диференциална проверка

Извършена е при определяне на функциите на разрезните усилия в 2-та участъка

##### 4.2 Проверка за вида на диаграмите

Тази проверка следва от диференциалните зависимости на разрезните усилия от разпределените товари:

- Участък  $BC$

$$t_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) = \text{const};$$

$$q_{y_1}(x) = 0 \Rightarrow Q_{y_1}(x) = \text{const} \Rightarrow M_{z_1}(x) = \text{линейна функция};$$

$$q_{z_1}(x) = \text{const.} \Rightarrow Q_{z_1}(x) = \text{линейна функция} \Rightarrow M_{y_1}(x) = \text{квадратна функция};$$

$$m_{x_1}(x) = \text{const} \Rightarrow M_{x_1}(x) = \text{линейна функция}.$$

- Участък  $AB$

$$t_2(x) = \text{const} \Rightarrow N_2(x) = \text{линейна функция};$$

$$q_{y_2}(x) = 0 \Rightarrow Q_{y_2}(x) = \text{const} \Rightarrow M_{z_2}(x) = \text{линейна функция};$$

$$q_{z_2}(x) = 0 \Rightarrow Q_{z_2}(x) = \text{const} \Rightarrow M_{y_2}(x) = \text{линейна функция};$$

$$m_{x_2}(x) = 0 \Rightarrow M_{x_2}(x) = \text{const}.$$

##### 4.3 Площна проверка

Извършва се по участъци, само за диаграмите, в които функцията на разрезното усилие е от първа или по-висока степен.

- Участък  $BC$

$$- M_x \text{-диаграма} - M_{x_1}^C - M_{x_1}^B = -R_{m_{x_1}} \Rightarrow 0 - (-80) = -(-20) \cdot 4 \Rightarrow 80 = 80;$$

$$- Q_z \text{-диаграма} - Q_{z_1}^C - Q_{z_1}^B = -R_{q_{z_1}} \Rightarrow -50 - 50 = -25 \cdot 4 \Rightarrow -100 = -100;$$

$$- M_y \text{-диаграма} - M_{y_1}^C - M_{y_1}^B = A_{Q_{z_1}} \Rightarrow 0 - 0 = \frac{1}{2}(-50 + 50) \cdot 4 \Rightarrow 0 = 0;$$

$$- M_z \text{-диаграма} - M_{z_1}^C - M_{z_1}^B = -A_{Q_{y_1}} \Rightarrow 0 - 120 = -30 \cdot 4 \Rightarrow -120 = -120.$$

- Проверка за локален екстремум:

$$M_{y_1}^C - M_{y_1}^{extr} = A_{Q_{z_1}}(x_{extr} \div C) \Rightarrow 0 - 50 = \frac{1}{2}(-50) \cdot 2 \Rightarrow -50 = -50.$$

- Участък  $AB$

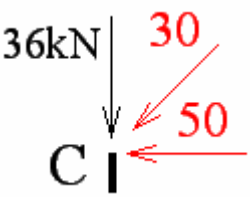
$$- N \text{-диаграма} - N_2^A - N_2^B = -R_{t_2} \Rightarrow -60 - 30 = -18 \cdot 5 \Rightarrow -90 = -90;$$

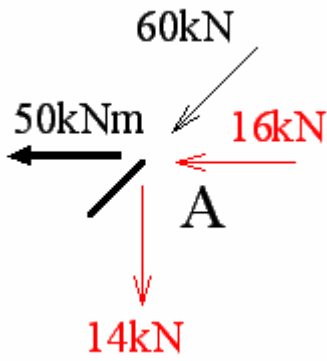
$$- M_y \text{-диаграма} - M_{y_2}^A - M_{y_2}^B = A_{Q_{z_2}} \Rightarrow -50 - (-120) = 14 \cdot 5 \Rightarrow 70 = 70;$$

$$- M_z \text{-диаграма} - M_{z_2}^A - M_{z_2}^B = -A_{Q_{y_2}} \Rightarrow 0 - (-80) = -(-16) \cdot 5 \Rightarrow 80 = 80.$$

##### 4.4 Проверка с правилата за скоковете

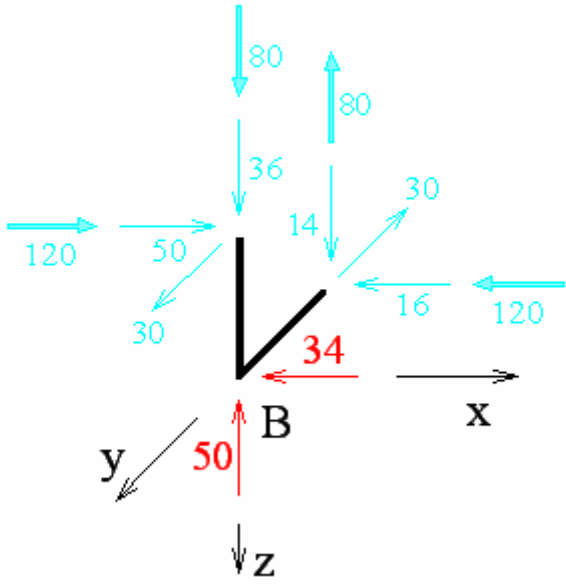
Извършва се на границите на участъците, където няма промяна в направлението на оста на гредата. В нашия случай това са т.  $A$  и т.  $C$ .

	<ol style="list-style-type: none"><li>1. Приложена е концентрирана осова сила 36 kN, която дава скок в <math>N</math>-диаграмата с големина 36 kN и посока – завъртяната на <math>90^\circ</math> по часовата стрелка посока на силата при движение отляво надясно.</li><li>2. Приложена е концентрирана сила 50 kN по направление на локална ос <math>z</math>. Тя дава скок в <math>Q_z</math>-диаграмата с големина 50 kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</li></ol>
---	---

	<p>3. Приложена е концентрирана сила 30kN по направление на локална ос <math>y</math>. Тя дава скок в <math>Q_y</math>-диаграмата с големина 30kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p>
	<p>1. Приложена е концентрирана осова сила 60kN, която дава скок в <math>N</math>-диаграмата с големина 60kN и посока – завъртяната на <math>90^\circ</math> по часовата стрелка посока на силата при движение отляво надясно.</p> <p>2. Приложена е концентрирана сила 14kN по направление на локална ос <math>z</math>. Тя дава скок в <math>Q_z</math>-диаграмата с големина 14kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p> <p>3. Приложена е концентрирана сила 16kN по направление на локална ос <math>y</math>. Тя дава скок в <math>Q_y</math>-диаграмата с големина 16kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p> <p>4. Приложен е концентриран осов момент 50kNm, който дава скок в <math>M_y</math>-диаграмата с големина 50kNm и посока, такава че да затваря <math>M_y</math>-диаграмата при движение отляво надясно.</p>

**4.6 Проверка с изрязване на възел (Фиг. 2.7)**

Извършва се на мястото, където гредата сменя направлението на оста си – в нашия случай това е т. „B”. Прави се мислен разрез, безкрайно близко до коравия възел, нанасят се само концентрираните сили и моменти във възела и от шестте диаграми се отчитат големините и посоките на разрезните усилия. След това се записват шестте условия за равновесие за избрана координатна система и се проверяват дали сумата на усилията е нула.



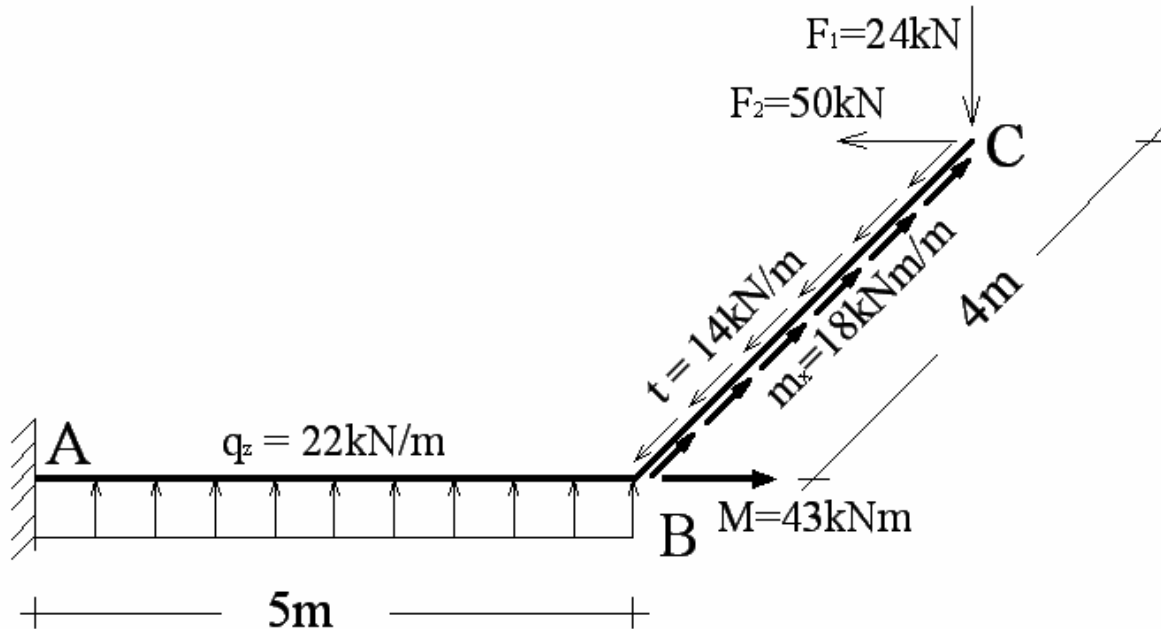
- 1)  $\sum F_{ix} = 0 ; -16 - 34 + 50 = 0 ;$
- 2)  $\sum F_{iy} = 0 ; -30 + 30 = 0 ;$
- 3)  $\sum F_{iz} = 0 ; -36 - 14 + 50 = 0 ;$
- 4)  $\sum M_{ix} = 0 ; 120 - 120 = 0 ;$
- 5)  $\sum M_{iy} = 0 ; 0 = 0 ;$
- 6)  $\sum M_{iz} = 0 ; -80 + 80 = 0 .$

Фиг. 2.7

### Задача 3

За показаната на Фиг.3.1 конструкция:

1. Да се определят опорните реакции;
2. Да се определят функциите на разрезните усилия в двата участъка;
3. Да се начертаят диаграмите на разрезните усилия;
4. Да се извършат необходимите проверки.



Фиг. 3.1

#### 1. Опорни реакции

Шестте опорни реакции (три силиви и три момента) са приложени в т. А (Фиг.3.2). Въвежда се координатна система с начало в т. А, защото по този начин ще елиминираме силивите опорни реакции, когато запишем трите моментни условия за равновесие.

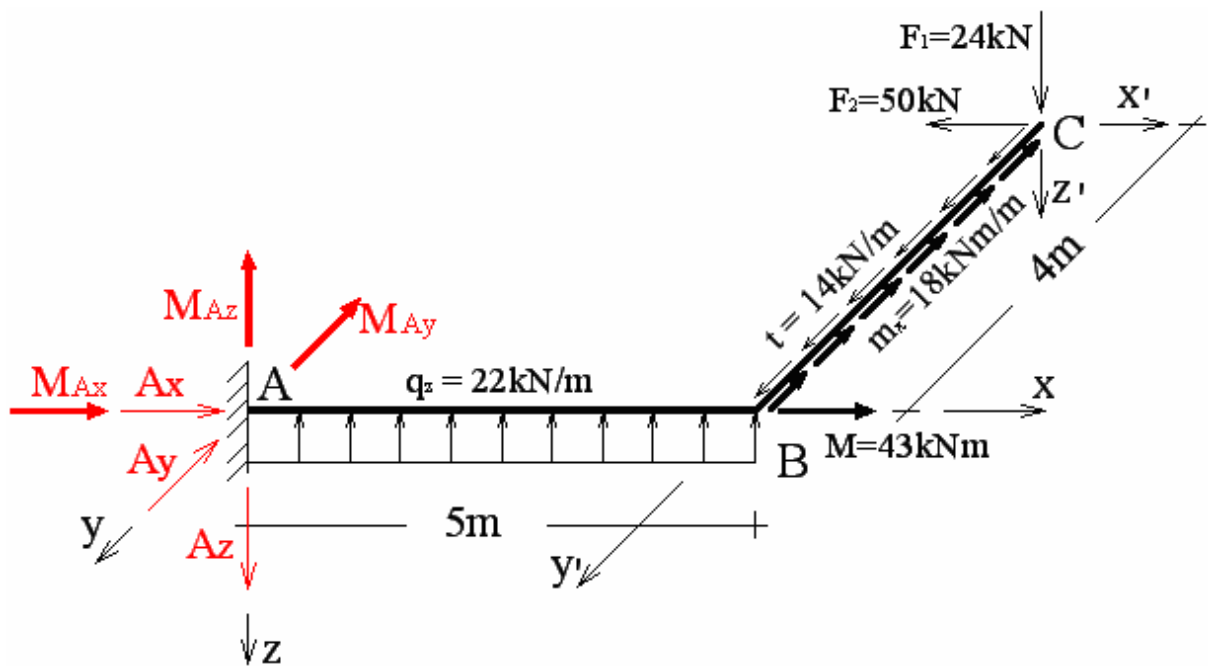
• Определяне на опорните реакции:

1) $\sum F_{ix} = 0;$	$A_x - F_2 = 0;$	$A_x = 50 \text{ kN};$
2) $\sum F_{iy} = 0;$	$A_y - t \cdot 4 = 0;$	$A_y = 56 \text{ kN};$
3) $\sum F_{iz} = 0;$	$A_z - q_z \cdot 5 + F_1 = 0;$	$A_z = 86 \text{ kN};$
4) $\sum M_{ix} = 0;$	$M_{Ax} - F_1 \cdot 4 + M = 0;$	$M_{Ax} = 53 \text{ kNm};$
5) $\sum M_{iy} = 0;$	$M_{Ay} - q_z \cdot 5 \cdot 2,5 + F_1 \cdot 5 + m_x \cdot 4 = 0;$	$M_{Ay} = 83 \text{ kNm};$
6) $\sum M_{iz} = 0;$	$M_{Az} + F_2 \cdot 4 - t \cdot 4 \cdot 5 = 0;$	$M_{Az} = 80 \text{ kNm}.$

• Проверка – три моментни уравнения за оси  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  (Фиг.3.2):

7) $\sum M_{ix'} = 0;$	$M_{Ax} + A_z \cdot 4 - q_z \cdot 5 \cdot 4 + M = 440 - 440 = 0;$
8) $\sum M_{iy'} = 0;$	$-M_{Ay} + A_z \cdot 5 - q_z \cdot 5 \cdot 2,5 - m_x \cdot 4 = 430 - 430 = 0;$
9) $\sum M_{iz'} = 0;$	$M_{Az} + A_x \cdot 4 - A_y \cdot 5 = 280 - 280 = 0.$

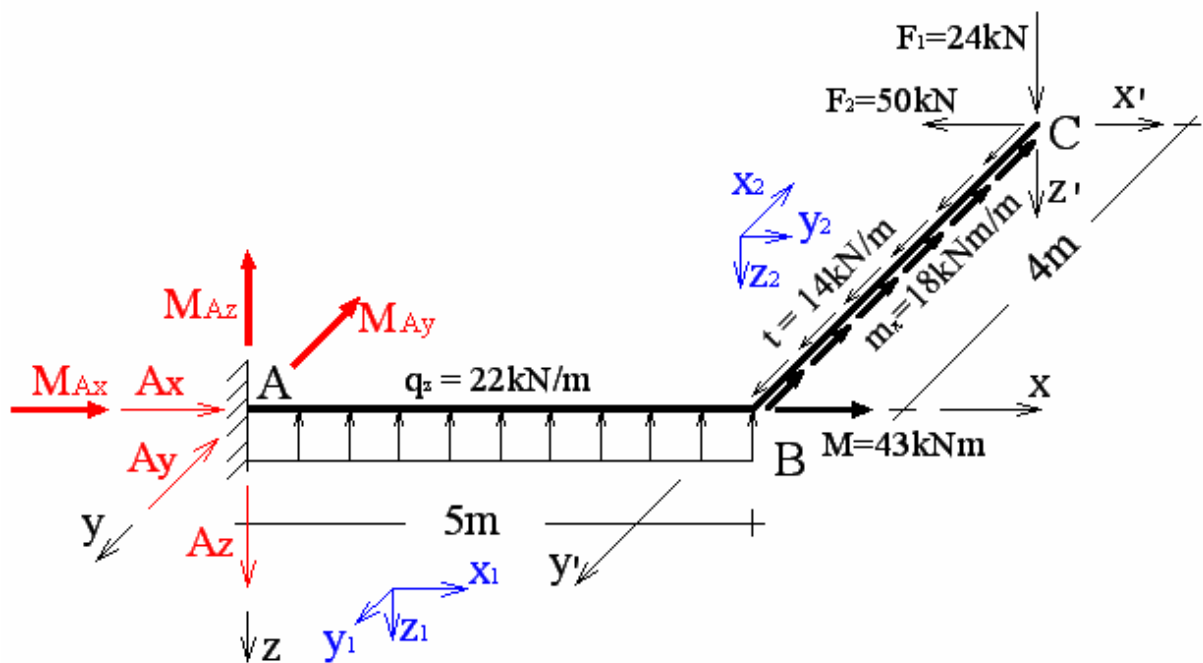




Фиг. 3.2

## 2. Функции на разрезните усилия

Гредата се състои от два участъка:  $AB$  и  $BC$ . За всеки се въвежда МКС (Фиг.3.3).

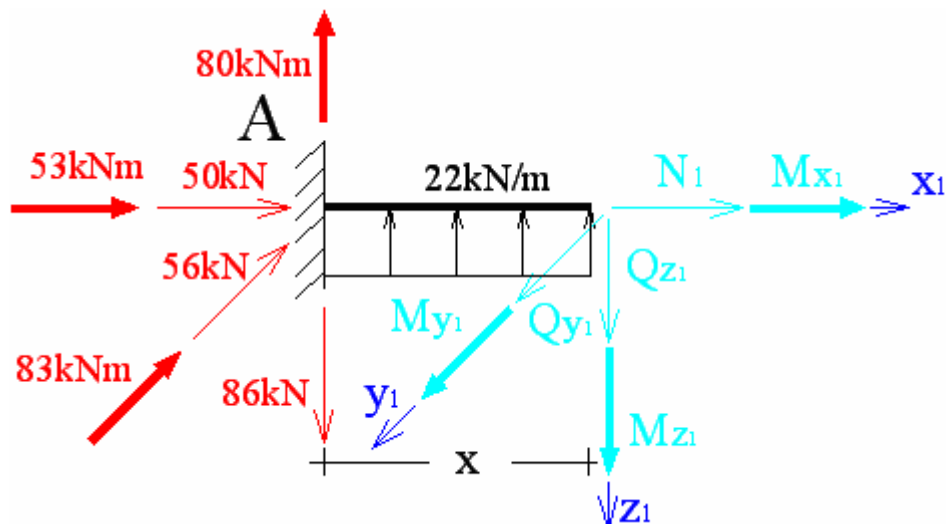


Фиг. 3.3

### 2.1 Участък $AB$ : $0 \leq x \leq 5$ m

Прави се мислен разрез през участъка и се отделя цялата лява или дясна част на гредата.

Тук е избрана лявата част на участък  $AB$  като по-слабо натоварена. Тогава, нейната дължина е  $x$  (Фиг.3.4).



Фиг. 3.4

Определянето на функциите на разрезните усилия става е:

$$\begin{aligned}
 1) \sum F_{ix_1} &= 0; N_1 + 50 = 0; & N_1 &= -50; \\
 2) \sum F_{iy_1} &= 0; Q_{y_1} - 56 = 0; & Q_{y_1} &= 56; \\
 3) \sum F_{iz_1} &= 0; Q_{z_1} + 86 - 22x = 0; & Q_{z_1} &= 22x - 86; \\
 4) \sum M_{ix_1} &= 0; M_{x_1} + 53 = 0; & M_{x_1} &= -53; \\
 5) \sum M_{iy_1} &= 0; M_{y_1} - 83 + 86x - 22 \frac{x^2}{2} = 0; & M_{y_1} &= 11x^2 - 86x + 83; \\
 6) \sum M_{iz_1} &= 0; M_{z_1} + 56x - 80 = 0; & M_{z_1} &= -56x + 80.
 \end{aligned}$$

• Диференциална проверка:

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1(x)}{dx} &= -t_1(x) \Rightarrow 0 = 0; & \frac{dM_{x_1}(x)}{dx} &= -m_{x_1}(x) \Rightarrow 0 = 0; \\
 \frac{dQ_{y_1}(x)}{dx} &= -q_{y_1}(x) \Rightarrow 0 = 0; & \frac{dM_{z_1}(x)}{dx} &= -Q_{y_1}(x) \Rightarrow 56 = -(-56); \\
 \frac{dQ_{z_1}(x)}{dx} &= -q_{z_1}(x) \Rightarrow 22 = 22; & \frac{dM_{y_1}(x)}{dx} &= Q_{z_1}(x) \Rightarrow 22x - 86 = 22x - 86.
 \end{aligned}$$

• Определяне на екстремума на функцията  $M_{y_1}$

Функцията  $M_{y_1}$  е от втора степен и има екстремум. Ако той е в границите на участъка, неговото определяне е важно, защото тази стойност може да се окаже максимална за целия участък и при оразмеряването му тя да е определяща.

- определяне на положението на екстремума

$$\frac{dM_{y_1}}{dx} = 0 \Rightarrow 22x - 86 = 0 \Rightarrow x = 3,91 \text{ m.}$$

-  $M_{y_1}^{extr}$

$$M_{y_1}^{extr} = M_{y_1}(3,91) = 11 \cdot 3,91^2 - 86 \cdot 3,91 + 83 = -85,1 \text{ kNm.}$$

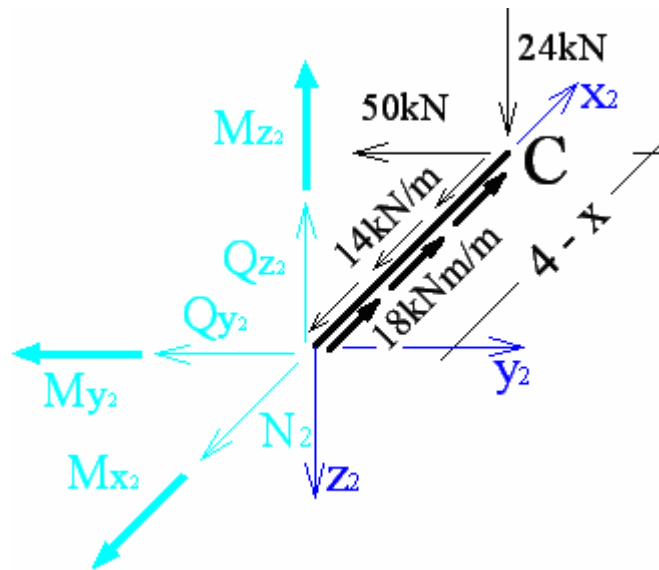
• Подробни точки за изчертаване на диаграмите

Взема се началото и края на участъка за подробни точки. Понеже функцията  $M_{y_1}$  е от втора степен, за нейното изчертаване са необходими поне три стойности – в началото и края на участъка и екстремума.

$x$	$N_1$	$Q_{y_1}$	$Q_{z_1}$	$M_{x_1}$	$M_{y_1}$	$M_{z_1}$
0	-50	56	-86	-53	83	80
5	-50	56	24	-53	-72	-200

## 2.2 Участък BC : $0 \leq x \leq 4$ m

Избира се „задната“ част на участъка, защото тя е по-слабо натоварена. По споменатото по рано правило тя се оказва дясна част и дължината ѝ е  $4 - x$  (Фиг.3.5).



Фиг. 3.5

$$\begin{aligned}
 1) \sum F_{ix_2} &= 0; & N_2 + 14(4-x) &= 0; & N_2 &= 14x - 56; \\
 2) \sum F_{iy_2} &= 0; & Q_{y_2} + 50 &= 0; & Q_{y_2} &= -50; \\
 3) \sum F_{iz_2} &= 0; & Q_{z_2} - 24 &= 0; & Q_{z_2} &= 24; \\
 4) \sum M_{ix_2} &= 0; & M_{x_2} - 18(4-x) &= 0; & M_{x_2} &= 72 - 18x; \\
 5) \sum M_{iy_2} &= 0; & M_{y_2} + 24(4-x) &= 0; & M_{y_2} &= 24x - 96; \\
 6) \sum M_{iz_2} &= 0; & M_{z_2} + 50(4-x) &= 0; & M_{z_2} &= 50x - 200.
 \end{aligned}$$

• Диференциална проверка:

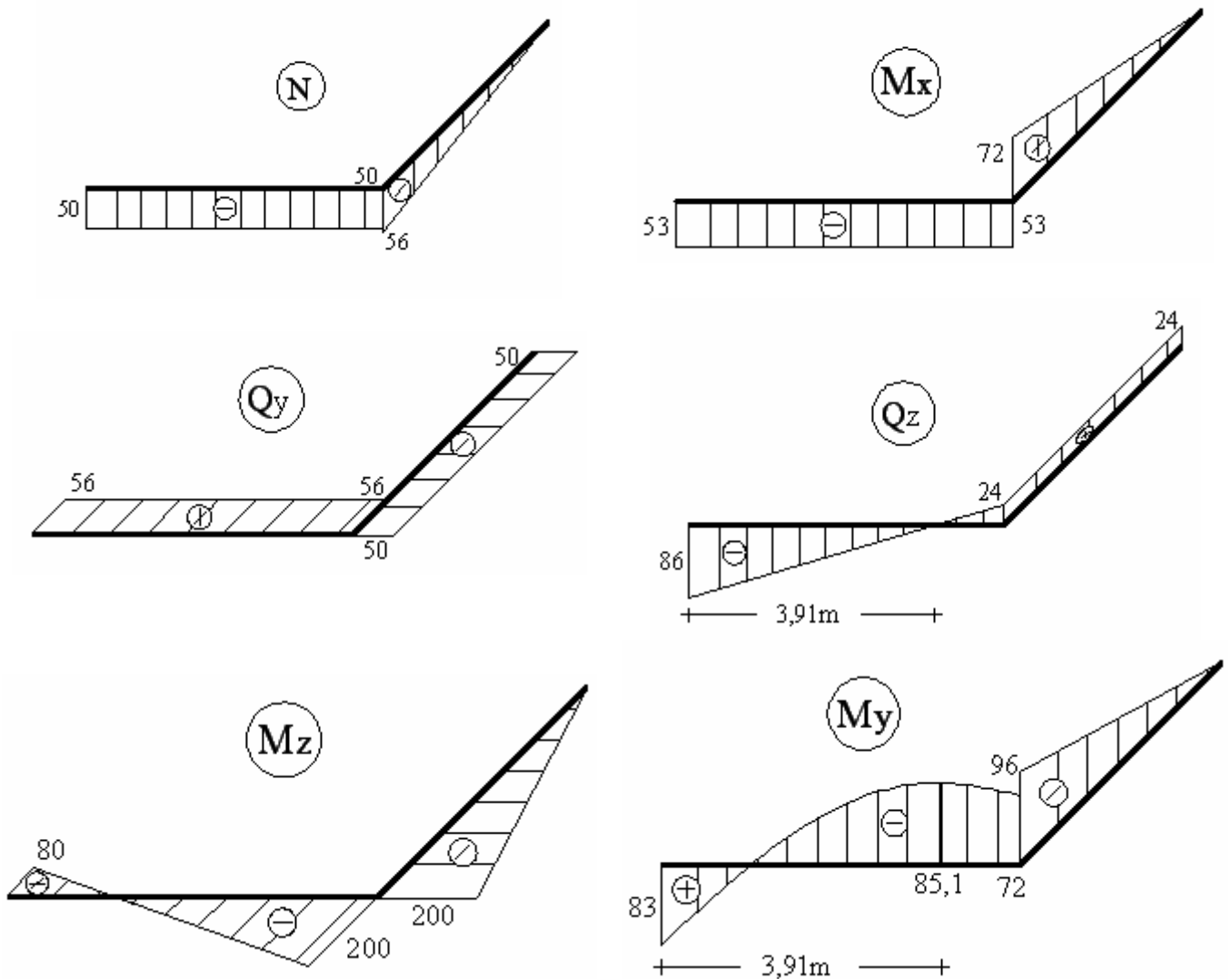
$$\begin{aligned}
 \frac{dN_2(x)}{dx} &= -t_2(x) \Rightarrow 14 = -(-14); & \frac{dM_{x_2}(x)}{dx} &= -m_{x_2}(x) \Rightarrow -18 = -18; \\
 \frac{dQ_{y_2}(x)}{dx} &= -q_{y_2}(x) \Rightarrow 0 = 0; & \frac{dM_{z_2}(x)}{dx} &= -Q_{y_2}(x) \Rightarrow -50 = -50; \\
 \frac{dQ_{z_2}(x)}{dx} &= -q_{z_2}(x) \Rightarrow 0 = 0; & \frac{dM_{y_2}(x)}{dx} &= Q_{z_2}(x) \Rightarrow 24 = 24.
 \end{aligned}$$

• Подробни точки за изчертаване на диаграмите

Отново се взема началото и края на участъка за подробни точки.

$x$	$N_2$	$Q_{y_2}$	$Q_{z_2}$	$M_{x_2}$	$M_{y_2}$	$M_{z_2}$
0	-56	-50	24	36	-96	-200
4	0	-50	24	36	0	0

### 3. Диаграми на разрезните усилия (Фиг.3.6)



Фиг. 3.6

## 4. Проверки на функциите и диаграмите на разрезните усилия

### 4.1 Диференциална проверка

Извършена е при определяне на функциите на разрезните усилия в участъците.

### 4.2 Проверка за вида на диаграмите

- Участък  $AB$

$$t_1(x) = 0 \Rightarrow N_1(x) = const;$$

$$q_{y_1}(x) = 0 \Rightarrow Q_{y_1}(x) = const \Rightarrow M_{z_1}(x) = \text{линейна функция};$$

$$q_{z_1}(x) = const \Rightarrow Q_{z_1}(x) = \text{линейна функция} \Rightarrow M_{y_1}(x) = \text{квадратна функция};$$

$$m_{x_1}(x) = 0 \Rightarrow M_{x_1}(x) = const.$$

- Участък  $BC$

$t_2(x) = const \Rightarrow N_2(x) = \text{линейна функция};$

$q_{y_2}(x) = 0 \Rightarrow Q_{y_2}(x) = const \Rightarrow M_{z_2}(x) = \text{линейна функция};$

$q_{z_2}(x) = 0 \Rightarrow Q_{z_2}(x) = const \Rightarrow M_{y_2}(x) = \text{линейна функция};$

$m_{x_2}(x) = const \Rightarrow M_{x_2}(x) = \text{линейна функция}.$

#### 4.3 Площна проверка

Извършва се по участъци, само за диаграмите, в които функцията на разрезното усилие е от първа или по-висока степен.

##### • Участък AB

-  $Q_z$ -диаграма -  $Q_{z_1}^B - Q_{z_1}^A = -R_{q_{z1}} \Rightarrow 24 - (-86) = 22.5 \Rightarrow 110 = 110;$

-  $M_y$ -диаграма -  $M_{y_1}^B - M_{y_1}^A = A_{Q_{z1}} \Rightarrow -72 - 83 = \frac{1}{2}(-86 + 24).5 \Rightarrow -155 = -155;$

-  $M_z$ -диаграма -  $M_{z_1}^B - M_{z_1}^A = -A_{Q_{y1}} \Rightarrow -200 - 80 = -56.5 \Rightarrow -280 = -280.$

##### ▪ Проверка за локален екстремум:

$M_{y_1}^B - M_{y_1}^{extr} = A_{Q_{z2}}(x_{extr} \div B) \Rightarrow -72 - (-85,1) = \frac{1}{2}24.(5 - 3,91) \Rightarrow 13,1 = 13,1.$

##### • Участък BC

-  $N$ -диаграма -  $N_2^C - N_2^B = -R_{t_2} \Rightarrow 0 - (-56) = -(-14).4 \Rightarrow 56 = 56;$

-  $M_x$ -диаграма -  $M_{x_2}^C - M_{x_2}^B = -R_{m_{x2}} \Rightarrow 0 - 72 = -18.4 \Rightarrow -72 = -72;$

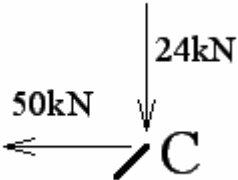
-  $M_y$ -диаграма -  $M_{y_2}^C - M_{y_2}^B = A_{Q_{z2}} \Rightarrow 0 - (-96) = 24.4 \Rightarrow 96 = 96;$

-  $M_z$ -диаграма -  $M_{z_2}^C - M_{z_2}^B = -A_{Q_{y2}} \Rightarrow 0 - (-200) = -\frac{1}{2}(-50).4 \Rightarrow 200 = 200.$

#### 4.4 Проверка с правилата за скоковете

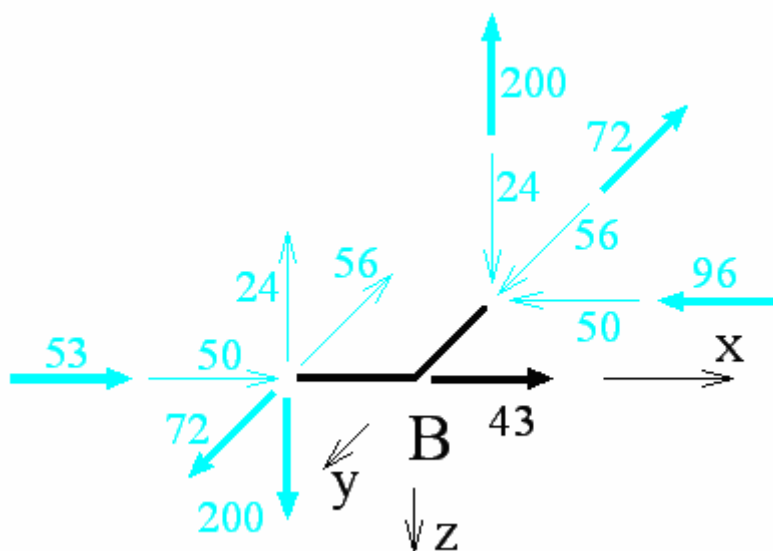
Извършва се на границите на участъците, където няма промяна в направлението на оста на гредата. Тук, това са т. А и т. С.

	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Приложена е концентрирана осова сила 50kN, която дава скок в <math>N</math>-диаграмата с големина 50kN и посока – завъртяната на <math>90^\circ</math> по часовата стрелка посока на силата при движение отляво надясно.</li> <li>2. Приложена е концентрирана сила 86kN по направление на локална ос <math>z</math>. Тя дава скок в <math>Q_z</math>-диаграмата с големина 86kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</li> <li>3. Приложена е концентрирана сила 56kN по направление на локална ос <math>y</math>. Тя дава скок в <math>Q_y</math>-диаграмата с големина 56kN и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</li> <li>4. Приложен е концентриран осов момент 53kNm, който дава скок в <math>M_x</math>-диаграмата с големина 53kNm и посока – завъртяната на <math>90^\circ</math> по часовата стрелка посока на момента при движение отляво надясно.</li> </ol>
--	--

	<p>5. Приложен е концентриран осов момент <math>83\text{kNm}</math> по направление на локална ос <math>y</math>, който дава скок в <math>M_y</math>-диаграмата с големина <math>83\text{kNm}</math> и посока надолу.</p> <p>6. Приложен е концентриран осов момент <math>80\text{kNm}</math> по направление на локална ос <math>z</math>, който дава скок в <math>M_z</math>-диаграмата с големина <math>80\text{kNm}</math> и посока „назад“.</p>
	<p>1. Приложена е концентрирана сила <math>24\text{kN}</math> по направление на локална ос <math>z</math>. Тя дава скок в <math>Q_z</math>-диаграмата с големина <math>24\text{kN}</math> и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p> <p>2. Приложена е концентрирана сила <math>50\text{kN}</math> по направление на локална ос <math>y</math>. Тя дава скок в <math>Q_y</math>-диаграмата с големина <math>50\text{kN}</math> и посока – посоката на силата при движение отляво надясно.</p>

#### 4.5 Проверка с изрязване на възел (Фиг.3.7)

Извършва се на мястото, където гредата сменя направлението на оста си – в случая, т.В. Прави се мислен разрез, безкрайно близо до коравия възел, нанасят се само концентрираните сили и моменти във възела и от шестте диаграми се отчитат големините и посоките на разрезните усилия. След това се записват шестте условия за равновесие за избрана координатна система и се проверяват дали сумата на усилията е нула.



Фиг. 3.7

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| 1) $\sum F_{ix} = 0; -50 + 50 = 0;$ | 4) $\sum M_{ix} = 0; 53 + 43 - 96 = 0;$ |
| 2) $\sum F_{iy} = 0; -56 + 56 = 0;$ | 5) $\sum M_{iy} = 0; 72 - 72 = 0;$      |
| 3) $\sum F_{iz} = 0; 24 - 24 = 0;$  | 6) $\sum M_{iz} = 0; 200 - 200 = 0.$    |