МАТРИЧНО СМЯТАНЕ

доц. Владимир Тодоров Тодоров

Записки на лекции по ЛААГ за специалността Архитектура в УАСГ

кат. МАТЕМАТИКА - УАСГ

Матрица наричаме всяка правоъгълна таблица от числа. В този раздел ще видим как могат да се определят алгебрични операции между матриците, които в много отношения приличат на алгебричните действия с числа. Ще покажем също така с някои примери каква е ползата от това.

По надолу ще означаваме матриците с главни латински букви, а числата от които се състои дадена матрица (тях ще наричаме *елементи* на матрицата) с индексирани малки букви. Елементите на дадена матрица обикновено са снабдени с два индекса, от които първият показва номера на реда на който е записано съответното число, а вторият съответно стълба. Матрица с m реда и n стълба например изглежда така:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (\mathbf{m}, \mathbf{n})$$

Следва да отбележим, че за да се избегне нееднозначното разбиране на текста, би трябвало индексите да се отделят по някакъв начин. Например $a_{2\ 13}$ или $a_{2,13}$, докато в горния запис a_{213} би могло да се тълкува и като $a_{21,3}$. Разбира се, когато няма опасност от недоразумения няма да бъдем абсолютно прецизни и ще използваме най - простия запис.

По - кратък начин да се обозначи горната матрица е $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ или $A = \|a_{ij}\|_{(m,n)}$; тук ще използваме предимно първия запис. Матриците $A = (a_{ij})_{(1,2)}$, $B = (b_{ij})_{(3,2)}$ и $C = (c_{ij})_{(3,1)}$ например изглеждат така:

Пример 1.1

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \end{pmatrix}$$

Двойката от естествени числа (m, n) които означават броя на редовете и стълбовете на A се нарича *тип* на матрицата A Понякога ще казваме, че A е $m \times n$-матрица; чете се "m по n матрица".

1.1.1 Сума на матрици. Нека $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ и $B = (a_{ij})_{(m,n)}$ са еднотипни матрици. *Сума* на A и B се нарича матрицата C, която е еднотипна с A и B и всеки елемент на която е сума на съответните елементи на A и B: $C = (c_{ij})_{(m,n)}$, където $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ за $i = 1, 2, \ldots m$ и $j = 1, 2, \ldots n$. Очевидно никои две матрици от Пример 1.1 не могат да бъдат събрани - те не са еднотипни. Когато събирането на матрици е дефинирано, то има всички свойства, които притежава събирането на числа: $A + B = B + A$ и $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Пример 1.1.2 Пресметнете сумата $A+B$ на матриците:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & \\ -4 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 & 5 \\ 6 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Пресметнете също така и $A+A$ (което, разбира се може да се запише и като $2A$), $(A+A)+B$ (тоест $2A+B$:-) и например това, което сме означили с $2A+3B$.

1.1.3 Произведение на матрица с число. Нека сега λ е число и $A = (a_{ij})$ е матрица, то *произведение* на λ и A ще наричаме матрицата $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Пример 1.2 Ако

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

то

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 8 \\ -4 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix}; \ 2A+B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -8 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \ A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

И така, определени са операциите *сума* на матрици и *произведение* на матрица с число. Нека след това $O_{(m,n)}$ е матрицата от тип (m,n), всички елементи на която са нули (ще я наричаме *нулевата матрица*) и да положим $-A = (-1)A$. Ясно е, че тези действия с числа и матрици по алгебричните си свойства са напълно идентични с действията с числа: $A+O = A$; ако $A+B = O$, то $A = -B$; $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$; $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$; $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ и т.н.

Ще дефинираме сега произведение на матрици. То може да бъде определено по различни начини, например по "естествения" начин подобно на събирането (който ще означим за момент с $\times$): ако $C = A \times B$, то $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, или например можем да положим $c_{ij} = (1+|a_{ij}|)^{b_{ij}}$ или по някой друг начин. Оказва се обаче (и ние ще видим това в следващия текст), че за приложенията на матричното смятане е по - удачна друга дефиниция: нека $A_{(m,n)} = (a_{ij})_{(m,n)}$ и $B_{(n,p)} = (b_{jk})_{(n,p)}$ са матрици от тип (m,n) и (n,p) съответно. Това означава, че всеки *ред* на A и всеки *стълб* на B съдържат по n числа.

Дефиниция 1.3 *Произведение* $C = AB$ на матриците A и B наричаме матрицата $C = (c_{ik})_{(m,p)}$, за която

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

С други думи този елемент на C, който лежи на ред с номер i и стълб с номер j е сума от n числа, всяко от които е произведение на съответните елементи от реда с номер i на A и стълба с номер j на B.

Пример 1.4

(1.4.1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 2\cdot 2 + 3\cdot(-3) & 2\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

(1.4.2)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (1)$$

(1.4.3) Пресметнете произведението AB (и когато това е възможно BA), ако:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

1.4.3a.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}; \; B = A$$

Тук A е с размери $n \times n$, а B - с $n \times 1$. Пресметнете тези произведения при $n = 3, 4, 5, \ldots$.

1.4.3 б.) Пресметнете $AB - BA$ и $BA - AB$, ако:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

пресметнете също така $ABA - BAB$, $AB^2 - B^2A$, $(A+B)^2$ и $A^2 + 2AB + B^2$.

1.4.3 в.) Нека A е квадратна матрица и n е естествено число. С A^n означаваме матрицата, която се получава след като умножим A със себе си n пъти. Да забележим, че това понятие (умножена на себе си n пъти) не е толкова безобидно, колкото изглежда на пръв поглед. Наистина, A^3 например може да бъде определена по два начина: $(AA)A$ и $A(AA)$ и не е самоочевидно, че тези две матрици са равни. Тоест ако $A^2 = B$, то вярно ли е, че $AB = BA$? Още по - разнообразна е ситуацията при по - високите степени $A^4 = (AA)(AA) = A(A(AA)) = ((AA)A)A = \cdots$, където скобите означават приоритет на извършване на съответното действие. По - долу ще видим, че ако $B = A^p$ и $C = A^q$ са получени от умножения с A в произволен ред, то $BC = CB$. Пресметнете:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3; \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n; \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n \text{ при } n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \text{ и } \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2;$$

Както може да се види от горните примери, произведението на матрици в общия случай не е *комутативно*. Това означава, че е възможно $AB \neq BA$ дори и когато AB и BA са еднотипни. Не са в сила също така някои "стандартни" тъждества - например в общия случай $A^2B^2 \neq (AB)^2$. Когато $AB = BA$ или $AB - BA = O$, ще казваме, че A и B *комутират*.

Пример 1.5

(1.5.1) Покажете, че следните матрици комутират:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(1.5.2) Намерете всички матрици, които комутират с:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Следната матрица от ред n:

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{\textbf{E}}$$

ще наричаме *единичната* $n-$матрица, или просто единичната матрица. Названието се оправдава от това, че *за всички матрици* A и B, за които произведенията EA и BE съществуват, е изпълнено $EA = A$ и $BE = B$ - проверете това сами.

И така, произведението на матрици притежава единица - матрицата E (от подходящ ред) подобно на числото 1 не променя резултата от произведението. От казаното до тук обаче се вижда, че произведението на матрици не е добър аналог на произведението на числа (въпреки, че очевидно е негово обобщение - всяко число е матрица от тип $(1,1)$). Нистина не всеки две матрици могат да бъдат умножени. Дори и когато това е възможно, например може да умножим A с B, то може да се окаже, че произведението $B \cdot A$ няма смисъл. И накрая, даже ако A и B са еднотипни квадратни матрици, то пак е възможно $A \cdot B$ и $B \cdot A$ да не са равни. Това за щастие бяха по - екзотичните свойства на произведението на матрици. Всички други основни свойства на произведението на числа имат аналози за произведението на матрици. Например то е *дистрибутивно* в двата смисъла. Това означава, че $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ и $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$. Не е чудно, че има два дистрибутивни закона - произведението не е комутативно. Доказателството на последните равенства се свежда до обикновена проверка. Нека например A и B са матрици от тип (m, n), а C е (n, p)-матрица (иначе съответните операции няма да са определени). Ако $D = A + B$, то $D = (d_{ij})_{(m,n)}$ и

$d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Нека след това $X = (A+B)C = DC$. Ясно е, че X е (m,p)-матрица; $X = (x_{ik})_{(m,p)}$ и $x_{ik} = d_{i1}c_{1k} + d_{i2}c_{2k} + \cdots + d_{in}c_{nk}$; $x_{ik} = (a_{i1} + b_{i1})c_{1k} + (a_{i2} + b_{i2})c_{2k} + \cdots + (a_{in} + b_{in})c_{nk} = (a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{in}c_{nk}) + (b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \cdots + b_{in}c_{nk}) = y_{ik} + z_{ik}$, където $y_{ik} = a_{i1}c_{1k} + a_{i2}c_{2k} + \cdots + a_{in}c_{nk}$ е общия елемент на матрицата $Y = AC$, а $z_{ik} = b_{i1}c_{1k} + b_{i2}c_{2k} + \cdots b_{in}c_{nk}$ на матрицата $Z = BC$. Значи $X = Y + Z$, което е всъщност равенстото $(A+B)C = AC+BC$. Докажете сами, че $A(B+C) = AC+BC$. Ето как изглежда същото пресмятане ако използваме свойствата на сумирането:

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})c_{jk} = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{jk} + b_{ij}c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jk} = y_{ik} + z_{ik}$$

Произведението на матрици също така е *асоциативно*. За да поясним какво означава това, да разгледаме матриците A, B и C и да предположим, че произведенията AB и BC са определени. Тогава ако $X = AB$ и $Y = BC$, то са определени произведенията XC и AY и нещо повече $XC = AY$. С други думи, $(AB)C = A(BC)$. Доказателството на това равенство се състои в проверката му. Например ако $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \end{pmatrix}$ то да забележим, че матриците XC и AY имат размер 2 на 2. Нека сега u_{12} и v_{12} са числата, които са разположени на първи ред и втори стълб съответно в $U = XC$ и $V = AY$. За първия ред на $X = AB$ (тя е от тип $(3,1)$) имаме $x_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$ и съответно $u_{12} = x_{11}c_{12} = a_{11}b_{11}c_{12} + a_{12}b_{21}c_{12} + a_{13}b_{31}c_{12}$. Забележете как се променят индексите.

Аналогично $v_{12} = a_{11}y_{12} + a_{12}y_{22} + a_{13}y_{32}$ и $y_{12} = b_{11}c_{12}$; $y_{22} = b_{21}c_{12}$ и $y_{32} = b_{31}c_{12}$. След като заместим получаваме $u_{12} = v_{12}$. Проверете, че $u_{ij} = v_{ij}$ за всички възможни стойности на i и j.

В общия случай проверката на равенството $(AB)C = A(BC)$ изглежда така: ако $A = (a_{ij})_{(m,n)}$; $B = (b_{jk})_{(n,p)}$ и $C = (c_{kl})_{(p,q)}$, то $x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ и $u_{il} = \sum_{k=1}^{p} x_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl}$.

Аналогично $y_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}$ и $v_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right)$ и равенството $u_{il} = v_{il}$ следва от общите свойства на сумите:

$$\sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl})$$

И така, произведението на матрици е дистрибутивно и асоциативно, то освен това добре се съгласува и с произведението с числа: докажете, че ако λ и μ са числа, а A и B матрици, то $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \lambda\mu A$ и $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB) = \lambda AB$. Асоциативността на произведението на матрици показва, че дефиницията за степен на матрица от Пример 1.4.3 в.) е коректна. Наистина да забележим първо, че ако например A, B, C, D са четири матрици, то $A(B(CD)) =$

$(AB)(CD) = ((AB)C)D = \ldots$ за всички възможни разполагания на скоби. От тук непосредствено следва, че A^n е еднозначно определена при всяко n. Например $A^4 = A(A(A\cdot A) = (A\cdot A)\cdot(A\cdot A) = \ldots$ и изобщо $A^n = A\cdot A^{n-1} = A^{n-1}\cdot A$.

Нека A е (m,n) матрица (както е обозначена в $(\mathbf{m},\mathbf{n})$). В доста разсъждения е удобно да описваме структурата на A посредством някои елементи на A; понякога това са редовете или стълбовете на A, понякога са някакви подматрици на A. Те се наричат блокове в A и тогава казваме, че в A има блочна структура. Ето пример на матрица с блочна структура:

Пример 1.6

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ 1 & 4 & 9 & & \\ 1 & 8 & 27 & & \\ & & & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & & & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{matrix} & O \\ O & \begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

където главните букви O означават нулеви блокове, т.е. $B = O_{(3,2)}$ и $C = O_{(2,3)}$ са нулевите матрици от съответния ред, а матриците A и D са написани по - долу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \text{ и } D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

1.6.1 Нека сега $Y = \begin{pmatrix} P_{(3,3)} & O_{(3,2)} \\ O_{(3,2)} & Q_{(2,2)} \end{pmatrix}$ е друга блочна матрица, която се състои от квадратните матрицит P и Q (с указани размери) и нулеви блокове на съответните места. Докажете, че $XY = \begin{pmatrix} AP & O \\ O & BQ \end{pmatrix}$. Пресметнете също така YX.

Друг (важен) пример се получава, ако за всяко $j \le n$ и за всяко $i \le m$ образуваме матрицата състояща се от стълба с номер j и съответно реда с номер i на A:

$$\bar{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ и } A_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

Посредством матриците $\bar{A}_j$ и A_i лесно можем да запишем A:

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \bar{A}_3 & \cdots & \bar{A}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

Краткият начин за означение на матрици често улеснява пресмятанията а също така и разсъжденията, свързани с матрици. Например произведението на матриците

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ и } \bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 & \cdots & \bar{B}_p \end{pmatrix}$$

изглежда така (A е от тип (m, n), а B е (n, p)-матрица):

(rc)
$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 & \cdots & \bar{B}_p \end{pmatrix} = (A_i \cdot \bar{B}_k)_{(m,p)}$$

където $A_i \cdot \bar{B}_k$ е произведение на матрица ред и матрица стълб:

$$A_i\bar{B}_k = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Така, че произведението на матрици може да се сведе само до произведение само на ред със стълб или стълб с ред (наистина, понякога говорим за *матричен* ред или стълб).

Ако $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ е стълб, с A^t ще означаваме матрицата $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ и ще казваме, че A^t е *транспонирана* на A. Аналогично ако B е ред с B^t ще означаваме стълба, който се получава от B като записваме числата вместо отгоре надолу отляво надясно.

Изобщо ако A е произволна (m,n)-матрица; $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}$, то (n,m) матрицата A^t е *транспонирана* на A, ако $A^t = (\, A_1^t \quad A_2^t \quad A_3^t \quad \dots \quad A_m^t \,)$. Транспонираната матрица понякога се означава също и с A^T или с A^* или с A'; тук ще използваме A' или A^t. И така, матрицата A^t изглежда по следния начин:

$$\mathbf{(n,m)} \qquad A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{m,n-1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})_{(n,m)}$$

Ясно е от **(n,m)**, че стълбове на A^t са редовете на A; впрочем вярно е и обратното. Тоест $A^t = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \\ \bar{A}_3 \\ \vdots \\ \bar{A}_n \end{pmatrix}$.

Транспонирането се съгласува добре с алгебричните операции: Нека A и B са матрици, а λ е число. В сила са равенствата $(\lambda A)^t = \lambda A^t$; $(A+B)^t = A^t + B^t$ и $(AB)^t = B^t A^t$ от които ще проверим последното:

$$B^t A^t = \begin{pmatrix} \bar{B}_1 \\ \bar{B}_2 \\ \bar{B}_3 \\ \vdots \\ \bar{B}_p \end{pmatrix} (\, A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad \dots \quad A_m \,) = (\bar{B}_k A_i)_{(p,m)}$$

от където и от **(rc)** се убеждаваме във верността на равенството $(AB)^t = B^t A^t$.

И така, до тук определихме основните операции в *Матричното смятане*. Те превръщат съвкупността на всички матрици в *алгебрична система*; ще я означаваме с $\mathcal{M}$. Следва да отбележим, че $\mathcal{M}$ съдържа като подсистема съвкупността на всички числа - наистина всяко число a може да бъде отъждествено с $(1,1)$ матрицата $A = (a)$. При това действията събиране, изваждане и умножение в множеството на $(1,1)$ матриците $\mathcal{M}_1$ са напълно идентични по свойства със съответните алгебрични операции в числовата ос $\mathbf{R}$. Важни и интересни алгебрични свойства има (за всяко n) множеството $\mathcal{M}_n$ на всички квадратни (n,n) матрици. В частност в $\mathcal{M}_n$ може да се говори и за *делене* на матрици. То е аналог на деленето на числа - обратно действие на умножението (също както *изваждането* - все едно дали на числа или матрици е обратно действие на събирането). Наистина, ако a е някакво число, то *реципрочно* на a е това число d, за което $ad = da = 1$. В този случай пишем $d = \frac{1}{a}$ и тогава частното $\frac{b}{a}$ например може да бъде записано като $\frac{b}{a} = b\frac{1}{a} = bd = db$. Тъй като приехме единичната матрица E_n за аналог на числото 1 в $\mathcal{M}_n$, то е естествено да кажем, че ако $A \in \mathcal{M}_n$, то нейна *обратна* е тази матрица $B \in \mathcal{M}_n$, за която $AB = E_n = E$. Разбира се, при $n \geq 2$ алгебричните свойства на $\mathcal{M}_n$ не са напълно идентични с тези на числовата система, например произведението не е комутативно. Поради това от равенството $AB = E$ не следва автоматично, че $BA = E$. Ето защо ще казваме, че B е *дясна обратна* на A, ако $AB = E$ и аналогично C е *лява обратна* на A, ако $CA = E$. Оказва се, че ако съществуват лява и дясна обратни матрици, те са равни.

Теорема 1.7 Ако матрицата A има дясна обратна B и лява обратна C, то $B = C$. По надолу ще казваме, че дадена матрица е *неособена*, ако тя притежава обратна; в противен сучай ще казваме, че тя е особена. С A^{-1} ще означаваме обратната на A, когато тя съществува.

Доказателство: $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$.

И така, ако някоя матрица има лява и дясна обратни, то те са равни. Не е много по трудно разсъждението, което показва, че ако някоя квадратна матрица има например лява обратна, то тя има и дясна (и тогава те разбира се са равни). От друга страна, не всяка матрица има обратна (аналогично, нулата няма реципрочно число). Въпроса за съществуването обратна матрица и пресмятането на обратни матрици ще бъде проучен по подробно в следващия текст. Следва да отбележим все пак, че в него няма нищо принципно сложно. Следващите примери поясняват ситуацията. Измежду матриците, които нямат обратна е например нулевата матрица O, защото за всяка матрица A имаме $AO = O$ или $OA = O$. Не само нулевите матрици нямат обратни. Примерите 1.9 показват различни възможни случаи. Междувременно тук показваме как може да се пресметне обратната матрица в някои конкретни случаи.

Пример 1.8 Ще изследваме въпроса дали матрицата $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ има обратна и ще я открием, ако съществува. За тази цел търсим неизвестна матрица $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$, за която $XA = E$. От това равенство получаваме

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 & x_1 + x_3 & x_1 + x_2 \\ y_2 + y_3 & y_1 + y_3 & y_1 + y_2 \\ z_2 + z_3 & z_1 + z_3 & z_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

което е равносилно на следните три системи от три уравнения с по три неизвестни:

$$\begin{cases} x_2+x_3=1 \\ x_1+x_3=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y_2+y_3=0 \\ y_1+y_3=1 \\ y_1+y_2=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} z_2+z_3=0 \\ z_1+z_3=0 \\ z_1+z_2=1 \end{cases}$$

Тези системи се решават без усилие, всяка от тях има единствено решение и за обратната матрица получаваме $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Проверете, че $AX = XA = E$. По подобен начин може да се изследва въпроса за съществуването на обратна матрица в общия случай; разбира се има и по - кратки и общи методи, които са изложени по - долу.

(1.8.1) Намерете обратната матрица на A, ако

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.8.2) Матриците A и B са с размер $n \times n$. Намерете техните обратни при $n = 2, 3, 4, 5, \cdots$; при произволно n.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} & & & & & a_6 \\ & & & & a_5 & \\ & & & a_4 & & \\ & & a_3 & & & \\ & a_2 & & & & \\ a_1 & & & & & \end{pmatrix}$$

(1.8.3) Докажете, че ако $X = \begin{pmatrix} E_p & A \\ & E_q \end{pmatrix}$ е блочна матрица (незапълнените места означават нулеви блокове), съставена от две единични матрици (E_p и E_q) и $p \times q$-матрицата $A = A_{(p,q)}$, то $X^{-1} = \begin{pmatrix} E_p & -A \\ & E_q \end{pmatrix}$. Проверете например, че

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\cdot(-a)+a\cdot 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1\cdot(-b)+b\cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1\cdot(-c)+c\cdot 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_4$$

Пример 1.9 Матрицата $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ няма обратна, защото за произволна матрица $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ имаме $AX = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, където на първия ред са разположени някакви (възможно ненулеви) числа. Каквито и да са те обаче, $AX \neq E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Също така, $XA \neq E$ - наистина, $XA = \begin{pmatrix} ax & bx \\ az & bz \end{pmatrix}$ и ако $XA = E$ бихме получили $ax = 1, bx = 0, az = 0, bz = 1$, което е невъзможно, защото ако умножим първото и последното равенство получаваме $abxz = 1$, а второто и третото - $abxz = 0$.

(1.9.1) Докажете, че ако някоя матрица съдържа ред или стълб, който се състои от нули, то тя няма обратна.

(1.9.2) Докажете, че следната матрица няма обратна:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.10 Елементарни преобразувания. Нека $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & \bar{A}_2 & \cdots & \bar{A}_n \end{pmatrix}$.

Елементарно преобразувание на A по редове (или по стълбове) се нарича всяко от следните действия над матрицата:

(1.10.1) Разместване на два реда или два стълба (с номера i и j; $i < j$):

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$(\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}_i \quad \cdots \quad \bar{A}_j \quad \cdots \quad \bar{A}_m\,) \longrightarrow (\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}_j \quad \cdots \quad \bar{A}_i \quad \cdots \quad \bar{A}_m\,)$$

Ето как изглежда например смяната на първи и втори ред и съответно първи и втори стълб:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.10.2) Умножаване на ред (или стълб) с число:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$$

Ето един пример с горната матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2\lambda & 3\lambda & 0 & \lambda \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.10.3) Прибавяне на числата от някой ред (стълб) съответните числа от някой друг ред (или стълб), евентуално умножени с различна от нула константа:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j + \lambda A_i \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} \text{ или}$$

$$(\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}_i \quad \cdots \quad \bar{A}_j \quad \cdots \quad \bar{A}_m\,) \longrightarrow (\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}_i \quad \cdots \quad \bar{A}_j + \lambda A_i \quad \cdots \quad \bar{A}_m\,)$$

В следващия пример заменяме реда A_2 с $A_2 - 2A_1$ и стълба $\bar{A}_1$ с $\bar{A}_1 + \bar{A}_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

В текста по - надолу ще пишем $A \approx B$, ако B се получава от A посредством елементарни преобразувания. Впрочем, лесно е да се види, че всяко от описаните по горе преобразувания е обратимо. Това показва, че ако $A \approx B$, то и $B \approx A$.

Използвайки елементарни преобразувания можем да променим всяка матрица до матрица, различните от нула елементи на която са разположени върху главния диагонал и са равни на единица. Това наистина се вижда лесно; впрочем достатъчно е да се убедите в това с примери. Тук ще дадем схемата, по която може да се действа в общия случай (ще забележим, че тя не е единствена). Ако A е квадратна $n \times n$-матрица, то можем да допуснем, че $a_{11} \neq 0$; в противен случай ще го осигурим посредством разместване на редове или стълбове (всеки ненулев елемент на A с 2 разместввания може да бъде разположен на първи ред и първи стълб). Това не може да се осигури само ако A е нулевата матрица, но тогава няма какво да доказваме. И така, предполагаме, че $a_{11} \neq 0$. Тогава

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_{n2} & \bar{a}_{n3} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

и след това на място $(1, j)$; $j \geq 2$ получаваме 0 като умножим първия стълб с $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ и го прибавим към j-тия стълб. По този начин получаваме

$$\textbf{(1.10.3.1)} \qquad A \approx \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ 0 & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & \bar{a}_{n2} & \bar{a}_{n3} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & O \\ O & \bar{A} \end{pmatrix}$$

Ясно е, че за $i \geq 2$ имаме $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$. Продължаваме след това по същия начин с $(n-1) \times (n-1)$-подматрицата $\bar{A}$:

$$\textbf{(1.10.3.2)} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ \bar{a}_{n2} & \bar{a}_{n3} & \cdots & \bar{a}_{nn} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \bar{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}'_{33} & \cdots & \bar{a}'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & \bar{a}'_{n3} & \cdots & \bar{a}'_{nn} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \bar{a}_{22} & O \\ O & \bar{A}' \end{pmatrix}$$

и получаваме, че $A \approx \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & O \\ 0 & \bar{a}_{22} & O \\ O & O & \bar{A}' \end{pmatrix}$, където O е блок от нули. Записано по - подробно последното равенство изглежда така:

$$A \approx \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{a}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{a}'_{33} & \cdots & \bar{a}'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}'_{n3} & \cdots & \bar{a}'_{nn} \end{pmatrix}$$

И така, посредством елементарни преобразувания всяка матрица може да бъде приведена в *диагонална форма*. Да забележим след това, че *всяко елементарно преобразувание по редове* над дадена матрица A е еквивалентно на умножението на A със специална матрица *отляво*, а всяко преобразувание по *стълбове* е равносилно на умножението на A с матрица от специален вид *отдясно*. Наистина умножението отляво с матрицата $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ предизвиква разместването на първия и втория ред в десния множител, както се вижда от примерите по - долу:

1.11 Пример.

(1.11.1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} \text{ и}$$

(1.11.2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

следващият пример показва как се разместват първия и третия редове:

(1.11.3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ p & q & r \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \text{ и}$$

(1.11.3′) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

а това произведение предизвиква умножението на третия ред с константата λ

$$(\mathbf{1.11.4}) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \lambda z_1 & \lambda z_2 & \lambda z_3 & \lambda z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

Този пример показва как можем да прибавим към първия ред третия, умножен с константата λ

$$(\mathbf{1.11.5}) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda z_1 & x_2 + \lambda z_2 & x_3 + \lambda z_3 & x_4 + \lambda z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix}$$

а тук виждаме как действува умножението отдясно върху левия множител:

$$(\mathbf{1.11.6}) \qquad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_3 & x_2 & \mathbf{x}_1 & x_4 \\ \mathbf{y}_3 & y_2 & \mathbf{y}_1 & y_4 \\ \mathbf{z}_3 & z_2 & \mathbf{z}_1 & z_4 \\ \mathbf{t}_3 & t_2 & \mathbf{t}_1 & t_4 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{1.11.7}) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \lambda b_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 + \lambda c_3 & c_2 & c_3 \\ d_1 + \lambda d_3 & d_2 & d_3 \\ e_1 + \lambda e_3 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{1.11.8}) \qquad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & \lambda b_3 \\ c_1 & c_2 & \lambda c_3 \\ d_1 & d_2 & \lambda d_3 \end{pmatrix}$$

И така, след *всяко елементарно преобразувание* матрицата A се модифицира до матрица, която е резултат от произведението на A с матрици от специален тип. Не е трудно след като се проучат горните примери да се съобрази вида на специалните матрици. Това са матриците, които се получават от единичната матрица E, след като *върху нея* се извършат същите преобразувания. Например, ако искаме да разменим местата на два *реда* в A, разменяме същите редове в E и умножаваме A с новополоучената матрица *отляво*.

В следващия текст с $E(i, j)$ ще означаваме матрицата, която се получава от E след разместването на редове с номера i и j. Действието на матриците $E(1, 2)$

и $E(1,3)$ е показано в Примери **(1.11.1) - (1.11.3)**. Съответно с $\bar{E}(i,j)$ ще означаваме матрицата, която се получава след размяната на i - тия и j - стълбове н E (Пример **(1.11.6)**).

Аналогично $E_\lambda(i,j)$ е матрицата, която се получава от E след като към ред с номер i прибавим j - тия ред, умножен с λ; $\bar{E}_\lambda(i,j)$ е получена от E след аналогична манипулация със стълбове (Примери **(1.11.5), (1.11.7)**).

И накрая $E_\lambda(i)$ е матрицата, която се получава от E след като заменим в E единицата на място номер i с λ (Например **(1.11.8)**). Следва да отбележим, че *всички споменати по - горе специални матрици са обратими.* Наистина, проверете самостоятелно, че $E^{-1}(i,j) = E(i,j)$; т.е. $E(i,j)E(i,j) = E = \bar{E}(ij)\bar{E}(i,j)$; $E_\lambda(i)^{-1} = E_{\frac{1}{\lambda}}(i)$ и съответно $E_\lambda(i,j)^{-1} = E_{-\lambda}(i,j)$ и $\bar{E}_\lambda(i,j)^{-1} = \bar{E}_{-\lambda}(i,j)$ - последните две равенства следват от Пример **(1.8.3)**.

От горните забележки се получава метод за пресмятане на обратни матрици. Той се състои в това, с помощта на елементарни преобразувания да получим от *A единичната матрица.* Това, както видяхме по - горе, е равносилно на умножението на A (отляво или отдясно) с няколко *обратими* матрици.

Теорема 1.12 Произведението на обратими матрици е обратима матрица.

Доказателство: Нека $X_1, X_2, \dots X_p$ са $n \times n$ матрици, всяка от които е обратима и да положим $X = X_1X_2 \cdots X_{p-1}X_p$. Лесно се проверява, че матрицата $Y = X_p^{-1}X_{p-1}^{-1} \cdots X_2^{-1}X_1^{-1}$ е обратна на X. Ще проверим това например при $p = 4$, читателят би трябвало да съобрази сам, че същото е в сила и за общия случай като използва, че произведението на матрици е асоциативно:

$$XY = (X_1X_2X_3X_4)(X_4^{-1}X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}) = (X_1X_2X_3)(X_4X_4^{-1})(X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}) =$$

$$(X_1X_2X_3)(E)(X_3^{-1}X_2^{-1}X_1^{-1}) = (X_1X_2)(X_3X_3^{-1})(X_2^{-1}X_1^{-1}) = \cdots = X_1X_1^{-1} = E$$

Аналогично се вижда, че $YX = E$.

Да се върнем сега към горния текст. Ако от дадена матрица A посредством елемнтарни преобразувания е получена единичната матрица, то това означава, че съществуват матрици (от специален вид) $B_1, B_2, \dots B_p$ и $C_1, C_2, \dots C_q$, за които $(B_1B_2 \cdots B_p)A(C_q \cdots C_2C_1) = E$. От Теорема **1.12** следва, че матриците $B = B_1B_2 \cdots B_p$ и $C = C_q \cdots C_2C - 1$ са обратими. И така, $BAC = E$. Умножаваме последното равенство отляво с B^{-1} и отдясно с C^{-1} и получаваме $B^{-1}(BAC)C^{-1} = B^{-1}EC^{-1} = B^{-1}C^{-1}$; $B^{-1}C^{-1} = (B^{-1}B)A(CC^{-1}) = EAE = A$. Значи A е произведение на обратими матрици и както се вижда от Теорема **1.12**, $A^{-1} = (B^{-1}C^{-1})^{-1} = (C^{-1})^{-1}(B^{-1})^{-1} = CB$. Тук за произволна матрица X използваме очевидното равенство $(X^{-1})^{-1} = X$ (докажете го самостоятелно).

1.12.1 Пример. Този пример пояснява горните разсъждения. Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$. Умножаваме A отляво с $E_{-1}(3,1)$ и отдясно първо с $\bar{E}_2(2,1)$ и

$\bar{E}_{-3}(3,1)$ (в посочената последователност), за да получим матрицата

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и след това $\bar{A}$ от ляво с $E(2,3)$, за да се получи $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. По нататък умножете A' отляво с $E_3(3,2)$ и получете $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ от където с умножение на $E_{-1}(2)$ и $E_{-\frac{1}{5}}(3)$ се получава единичната матрица. Ясно е, че $B = E_3(3,2)E(2,3)E_{-1}(3,1)$ и $C = \bar{E}_2(2,1)\bar{E}_{-3}(3,1)E_{-1}(2)E_{-\frac{1}{5}}(3)$ и съгласно казаното по - горе, $A^{-1} = CB$.

Възможно е описаната по - горе процедура да обезкуражи някой читател: тя изглежда малко хаотична и матриците B и C като че ли са избрани малко произволно. И това е така. Матриците B и C *не са определени еднозначно*. Например матриците

$$\textbf{(R)} \quad B' = E_{\frac{1}{5}}(1)E_{\frac{1}{5}}(2)E_{-\frac{1}{5}}E_2(1,2)E_3(1,3)E_5(1)E_1(2,3)E_{-5}(2)E_3(3,2)E(2,3)E_{-1}(3,1)$$

и $C' = E$ вършат същата работа (проверете това самостоятелно). Това всъщност означава, че $B' = A^{-1}$, защото $A^{-1} = C'B' = EB' = B'$. Фактически тук извършихме преобразувания *само по редовете на* A (този начин на действие е известен като *Метод на Гаус* за намиране на обратна матрица). Той може лесно да се автоматизира и в действителност е много по - малко трудоемък, отколкото изглежда на пръв поглед. За да използваме удобно метода на Гаус, образуваме *разширената матрица* $(A|E)$ и извършваме над нея елементарни преобразувания *само по редове*, докато в лявата част не се получи единичната матрица. Тогава в дясно се получава обратната на A. Това е така, защото всяко преобразувание на $(A|E)$, което се извършва по редове е еквивалентно на умножението на A и E отляво със специална матрица. С други думи, $(A|E) \approx (E|A^{-1})$, ако преобразуванията са само по редове. Всъщност по същия начин се вижда, че ако A и B са съответно $n \times n$ и $n \times p$ матрици и от тях образуваме както се казва "разширената" матрица $(A|B)$, то (когато съществува A^{-1}) имаме $(A|B) \approx (E|A^{-1}B)$. Да разгледаме няколко примера:

1.13 Пример. Ще пресметнем обратната матрица на $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

За тази цел образуваме разширената матрица и разменяме в нея местата на първите два реда; получаваме

$$(A|E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

след което в последната матрица умножаваме първия ред последователно с -2 и 1 и го прибавяме към втория и третия; в така получената матрица разместваме втория и третия редове

$$(A|E) \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и в последната матрица умножаваме втория ред с -4 и го прибавяме към третия; резултатът е написан долу вляво. В левия блок под диагонал вече има само нули. След това действуваме "нагоре" по четвъртия стълб посредством четвъртия ред:

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -13 & 1 & -6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -6 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

който умножен последователно с 13, -3 и -1 и е прибавен съответно към третия, втория и първи редове. В последната матрица прибавяме третия ред към втория и след това втория към първия и накрая умножаваме третия ред с -1, за да получим A^{-1}:

$$(A|E) \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -6 & -4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 6 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Разбира се, възможно е преобразувания да се правят и само по стълбове. В този случай съответната матрица очевидно трябва да се разшири вертикално. Тоест, ако A е квадратна матрица, за да пресметнем A^{-1} образуваме "разширената" матрица $\begin{pmatrix} A \\ - \\ E \end{pmatrix}$ и използваме преобразувания *само по стълбове.*

(1.13.1) Ще пресметнем обратната матрица на $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. За тази цел разширяваме A вертикално.

$$\begin{pmatrix} A \\ - \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \\ - & - & - \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ - & - & - \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ - & - & - \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ - & - & - \\ -5 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразованията на горния ред са равносилни на последователното умножение на матрицата A отдясно на матриците $\bar{E}_{-2}(2,1)$, $\bar{E}_{-3}(3,1)$, $\bar{E}(2,3)$, $\bar{E}_{-3}(2,3)$ и $\bar{E}_3(1,3)$ (убедете се в това с непосредствена проверка). След това е ясно, че е достатъчно да умножим втория стълб с 2 и да го прибавим към първия и след това да умножим втория и третия стълб с -1. С други думи, трябва да умножим отдяснос матриците $\bar{E}_2(1,2)$, $E_{-1}(2)$ и $E_{-1}(3)$. Проверете, че по този начин получаваме, че $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1.13.2) Ако матрицата A има обратна, можем да говорим за *отрицателни степени на* A: дефинираме $A^0 = E$, а за всяко естествено n полагаме $A^{-n} = B^n$, където $B = A^{-1}$. Дефиницята е коректна, защото произведението на матрици е асоциативно. Поради това можем например да пресмятаме отрицателните степени и по следния начин: $A^{-n} = (A^n)^{-1}$. Пресметнете степените на следните матрици:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-2} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-3} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-10}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-4} ; \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-5} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$$

Горните примери показват, че методът на Гаус е добър начин за пресмятане на обратни матрици. Не е трудно да се съобрази, че без никакви допълнителни бележки същото върши работа, когато решаваме *матрични уравнения*. Матрично уравнение (от първа степен) е всяко уравнение от вида $AX = B$ или $XA = B$, където A и B са дадени матрици и се търси X. Матрично уравнение от по-общ вид има вида $AXB = C$. Наистина, ако $B = E$ получаваме $AX = C$, а ако $A = E$, то се получава $XB = C$. Ако матриците A и B са обратими, то уравнението $AXB = C$ има решение $X = A^{-1}CB^{-1}$.

(1.14) Пример. Матричното уравнение $AX = B$ се решава по метода на Гаус по същия начин, по който се пресмята обратна матрица. За тези цел образуваме "разширената" матрица $(A|B)$ и посредством елементарни преобразувания *само по редове* я свеждаме (ако това е възможно) към матрицата $E|D$. Проверете сами, че в този случай $D = A^{-1}B$. Това означава, че $X = D$ е решението на нашето матрично уравнение. По същия начин се решават уравненията от вида $XA = B$. Разбира се, решението е $X = BA^{-1}$ и лесен начин да го пресметнем е да образуваме разширената матрица $\begin{pmatrix} A \\ - \\ B \end{pmatrix}$ и да я преобразуваме *само по стълбове* до матрицата (когато е възможно) $\begin{pmatrix} E \\ - \\ D \end{pmatrix}$. Тогава очевидно $D = X$, защото елементарните преобразувания по стълбове са равносилни на умножения със специални матрици отдясно.

(1.14.1) Решете уравненията

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \; X \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \; X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(1.14.2) В този пример матриците са $n \times n$. Решете отначало уравненията при малки стойности на n; например при $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.14.3) Решете системите

a.)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b.*)
$$\begin{cases} AX + BY = C \\ A_1X + B_1Y = C_1 \end{cases}$$

където матриците пред X и Y са обратими; изследвайте тази система с метода на Гаус.

(1.14.4) Докажете, че матрицата $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ е решение на уравнението

$$X^2 - (a+d)X + (ad - bc)E = O$$

Намерете *всички решения* на това уравнение (ако се затруднявате в общия случай, решете уравнението при конкретни стойности на константите; например $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$ и $d = 1$).

1.15 Линейни системи. Едно от важните приложения на метода на Гаус се състои в решаването на *линейни системи.* Записана най общо, всяка система линейни уравнения (линейна система) изглежда така:

(ls)
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Методът на Гаус за системата **(ls)** се състои в *последователното изключване на неизвестните.* Нека например $a_{11} \neq 0$. Тогава можем да умножим първото уравнение с $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и да го прибавим към второто. Получаваме *еквивалентна* на **(ls)** система, второто уравнение на която е *свободно от* x_1, т.е. коефициентът пред x_1 във второто уравнение е нула. По същия начин можем да "освободим" от x_1 всички други уравнения.

Следва да отбележим, че промените, които правим със системата са равносилни на елементарни преобразувания на разширената матрица $(A|B)$, в която стълбът B е обазуван от десните части на **(ls)**, а a_{ij} е коефициентът пред x_j в уравнението с номер j в **(ls)**. И така, ако $a_{11} \neq 0$, то можем да освободим от x_1 всички уравнения, освен първото. Ако $a_{11} = 0$, но $a_{1j} \neq 0$ за някое j, то разменяме местата на уравненията с номера 1 и j и отново получаваме система с $a_{11} \neq 0$. И накрая, ако $a_{1j} = 0\ \forall j$, то **(ls)** е свободна от x_1 (т.е. не зависи от x_1) и ако **(ls)** е *съвместима* (т.е. има решение), то x_1 участва в него като параметър.

1.15.1 Забележка *Символите, които използваме в математически текстове понякога се нуждаят от допълнително съгласуване (конвенция). Например записът* $2x = 1$ *може да се тълкува като най-просто уравнение с една неизвестна или например като съкратен запис на уравнението* $2x + 0y = 1$, *или по някакъв друг начин (дайте пример). В първия случай имаме единственото решение* $x = \frac{1}{2}$, *във втория решенията са безброй много двойки от числата* $(\frac{1}{2}, \beta)$, *където* β *е произволно число.*

В следващия текст ще предполагаме че системата **(ls)** не е свободна от никоя неизвестна. Следователно **(ls)** е еквивалентна (в матричен запис) на следната система:

$$(\mathbf{ls}') \qquad \left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & a'_{m3} & a_{m4} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

По такъв начин остава да решаваме системата с разширена матрица

$$(\mathbf{lls}') \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & \cdots & a'_{3n} & b'_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m2} & a'_{m3} & a_{m4} & \cdots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$$

в която не участва неизвестната x_1. Ако $a'_{22} \neq 0$, то можем да повторим горните разсъждения за системата (**ls**$'$). Възможно е обаче първите няколко стълба в тази система да са съставени от нули. В този случай разместваме някои стълбове на (**ls**$'$) (и ако е нужно някои редове на (**lls**$'$)) в (**ls**$'$), за си осигурим $a'_{22} \neq 0$. Да забележим, че разместването на стълбове в (**ls**$'$) е равносилно рзмяната на означенията на неизвестните в изходната система; например ако разменим втория и третия стълбове ще получим система, в която вместо x_2 пишем x_3 и обратно.

Сега сме осигурили условията, при които разсъжденията за системата (**ls**$'$) са в сила и за (**lls**$'$) и по този начин получаваме система, която е равносилна на една от матриците:

$$
(\mathbf{ms})(\mathbf{k} < \mathbf{m}) \qquad \left(\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} & \bar{b}_1 \\
0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2k} & \bar{a}_{2,k+1} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\
0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3k} & \bar{a}_{3,k+1} & \cdots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & . \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{kk} & \bar{a}_{k,k+1} & \cdots & \bar{a}_{kn} & \bar{b}_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bar{b}_{k+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & . \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

при $k < m$ или на матрицата (ако $k = m$):

$$
(\mathbf{ms})(\mathbf{k} = \mathbf{m}) \qquad \left(\begin{array}{cccccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} & \bar{b}_1 \\
0 & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} & \cdots & \bar{a}_{2k} & \bar{a}_{2,k+1} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{b}_2 \\
0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3k} & \bar{a}_{3,k+1} & \cdots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & . \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_{mm} & \bar{a}_{m,m+1} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{b}_m
\end{array}\right)
$$

като и в двата записа числата $\bar{a}_{ii}$ са различни от нула и всички които са разположени *под тях* са равни на нула. С други думи системата е стъпаловидна и изглежда по следния начин:

$$
(\mathbf{lms}) \qquad \left\{\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 + \cdots + a_{1n}\bar{x}_n = b_1 \\
\bar{a}_{22}\bar{x}_2 + \bar{a}_{23}\bar{x}_3 + \cdots + \bar{a}_{2n}\bar{x}_n = \bar{b}_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\bar{a}_{kk}\bar{x}_k + \cdots + \bar{a}_{kn}\bar{x}_n = \bar{b}_k \\
0 = \bar{b}_{k+1}
\end{array}\right.
$$

при което $a_{ii} \neq 0$. Системата **(lms)** е равносилна (*еквивалентна*) на **(ls)** в смисъл, че двете системи имат едни и същи решения - това следва от обстоятелството, че двете системи се получават една от друга посредством елементарни преобразувания по редове и разместване на стълбове. Предимството да изучаваме решенията на **(lms)** се състои в това, че **(lms)** е записана в по-удобен вид. Например ако $\bar{b}_{k+1} \neq 0$, то очевидно **(lms)** няма решение (понякога се казва, че е *несъвместима*. Това е така, защото последното уравнение на **(lms)** става невярно тъждество.

Ако $\bar{b}_{k+1} = 0$, то очевидно последното уравнение на **(lms)** е тъждеството $0 = 0$ и системата има безброй много решения при $k < n$ и единствено решение при $k = n = m$ (да забележим, че винаги $k \leq n$). Наистина, нека $k = n$. Тогава предпоследното уравнение на **(lms)** е $\bar{a}_{nn}\bar{x}_n = \bar{b}_n$ и да напомним, че $\bar{a}_{nn} \neq 0$; значи $\bar{x}_n = \frac{\bar{b}_n}{\bar{a}_{nn}}$. Уравнението над n-тото има вида $\bar{a}_{n,n-1}\bar{x}_{n-1} + \bar{a}_{nn}\bar{x}_n = \bar{b}_{n-1}$ и от него еднозначно определяме $\bar{x}_{n-1}$ и така последователно намираме всичките неизвестни на **(lms)**. Впрочем докажете, че ако $k = n = m$ (и само тогава) матрицата A е обратима и тогава можем да решим **(ls)** като матрично уравнение и да получим $X = A^{-1}B$, което и правим в следващия пример.

1.15.2 Пример. Решете системата:

a.)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$$

Умножаваме първото уранение с -5 и след това с -3 и го прибавяме съответно към второто и трето уравнения. В получавената система умножаваме втория ред с 2 и го прибавяме към третия. Получаваме последователно системите

$$\begin{cases} x_1 - x2x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = -4 \\ \quad -4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 2x_2 - 6x_3 = -4 \\ \quad\quad -6x_3 = -6 \end{cases}$$

и е съвършено очевидно как се решава втората система. Третото уравнение (което е свободно от x_1 и x_2) дава $x_3 = 1$, от второто (то е свободно от x_1) получаваме $x_2 = 1$ и накрая от първото следва, че $x_1 = 1$. Разбира се, можем да пресметнем обратната матрица на $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}$ и да умножим с нея отляво съответна разширена матрица; направете това самостоятелно. Следващият пример показва как се решава системата $AX = B$, когато не съществува A^{-1}:

1.15.2 б.) Ще решим следната система посредством преобарзувания на разширената и матрица:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = b \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

За да решим тази система записваме разширената матрица, след което умножаваме първия ред с -2, 1 и 3 и го прибавяме към втори, трети и четвърти редове:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & b \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 6 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1+b \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1+b \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3b \end{array}\right),$$

като в последната матрица са разменени *два стълба*. Тоест преименуваме неизвестните - $x_1' = x_1$, $x_2' = x_3$, $x_3' = x_2$ и $x_4' = x_4$. След това прибавяме втория ред към третия и четвъртия и разменяме третия и четвъртия стълбове.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 & b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 3 & 0 & b \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -2 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4b-3 \end{array}\right),$$

като накрая от четвъртия ред вадим третия, умножен с 3.

И така, методът на Гаус показва, че системата от Пример 1.15.2 б.) е равносилна на системата

1.15.2 в.)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{x}_3 - 2\bar{x}_4 = b \\ \quad -\bar{x}_2 + \bar{x}_3 \qquad\quad = -2b \\ \qquad\quad \bar{x}_3 \qquad\quad = 1-b \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 = 4b-3 \end{cases}$$

в която $\bar{x}_1 = x'_1$, $\bar{x}_2 = x'_2$, $\bar{x}_3 = x'_4$ и $\bar{x}_4 = x'_3$. Значи между първоначалните и крайни неизвестни има следната връзка $\bar{x}_1 = x_1$, $\bar{x}_2 = x_3$, $\bar{x}_3 = x_4$ и $\bar{x}_4 = x_2$. Очевидно е все едно дали ще решаваме системата б.) или в.). Решението на последната система е съвършено прозрачно: ако $4b - 3 \neq 0$, 1.15.2 в.) (и значи 1.15.2 б.) няма решение. Ако $b = \frac{3}{4}$ системата има решение. От третото уравнение получаваме, че $\bar{x}_3 = 1 - b = \frac{1}{4}$, от второто следва, че $\bar{x}_2 = 2b + \bar{x}_3 = \frac{7}{4}$, а от първото се получава $\bar{x}_1 = b - 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3 + 2\bar{x}_4 = -3 + 2\bar{x}_4$. По такъв начин са определени неизвестните $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ и $\bar{x}_3$, а за $\bar{x}_4$ не е казано нищо.Това означава, че $\bar{x}_4$ може да приема *произволни* стойности, или както е прието да се казва, $\bar{x}_4$ е параметър. Окончателно системата 1.15.2 б.) има безброй много решения, които изглеждат така: $x_1 = 2t-3$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{7}{4}$ и $x_4 = \frac{1}{4}$, където t е произволно число (*параметър*).

1.15.3 Решете следните системи:

a.)

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = b \\ 3x_1 - bx_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = b \end{cases}$$

b.)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

c.)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = a \end{cases}$$

d.) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -4 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 = b \end{cases}$ **e.)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = a \\ 3x_1 + 2x_2 = b \\ x_1 + x_2 = a \\ 2x_1 + 3x_2 = c \end{cases}$

f.) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 5x_4 = b \end{cases}$ **g.)** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = b \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 \qquad - 7x_3 = c \end{cases}$

h.) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 3 \\ 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 = a \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = a \end{cases}$

i.) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 5x_5 = a \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = a \end{cases}$

j.) $\begin{cases} 4x_1 + 3_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = -1 \\ x_1 - 3x_2 \qquad + x_4 - 2x_5 = a \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 6x_5 = a \end{cases}$

k.) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + 2x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_5 - x_6 = -2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = a \\ 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 - 15x_4 + 6x_5 - 5x_6 = a \\ 5x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 11x_4 \qquad + 9x_6 = a \end{cases}$

l.) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = a \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 - 2ax_5 = 0 \end{cases}$

1.16 Ранг на матрица. Детерминанти.

Да се върнем сега към разсъжденията от **1.10** и **1.15**. От тях лесно се получава, че (както е направено в (1.10.3.1) и (1.10.3.2)) можем да умножим матрицата **(m,n)** с подходящи специални матрици (от ляво и от дясно) така, че да се получи матрица, на която различни от нула са само първите няколко елемента по диагонала. Например всяка 3×4 матрица е еквивалентна на една от следните матрици (ще им казваме *базисни* матрици):

$$M_{(3,4)}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{(3,4)}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{(3,4)}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } M_{(3,4)}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Това означава, че *всяка* 3×4 матрица A е еквивалентна на някоя от матриците $M_{3,4}(i)$. Тоест можем да намерим такива специални мартици $B_1, B_2, \ldots, B_l$ и $C_1, C_2, \ldots, C_k$, че $B_l \cdots B_2 B_1 A C_1 C_2 \ldots C_k = E_{3,4}(i)$ за някое i. Тъй като обратната на всяка специална матрица е специална и произведението на обатими матрици е обратима, то *всяка* 3×4 е произведение на специални и базисна матрици. И докато специалните матрици в това произведение не са определени еднозначно, то може да се докаже, че базисната е единствена. Да забележим, че обратно - *всяка* 3×4 матрица е резултат от умножаването на някоя от матриците $E_{3,4}(i)$ със специални матрици.

Ясно е, че такива разсъждения са валидни за произволни матрици (не само от тип 3×4). Изобщо ако с $E_{(m,n)(k)}$ означим (m,n)-матрицата, която има k единици $(0 \leq k \leq \min\{m,n\} - 1)$ по главния си диагонал, а останалите и елементи са нули, то е в сила следната теорема:

1.16.1 Теорема. Всяка матрица A е еквивалентна на някоя базисна матрица $E_{m,n}(k)$. Числото k се нарича *ранг* на A и е важна характеристика на A. Ще означаваме ранга на A с $r(A)$.

Ясно е как да пресмятаме ранга на дадена матрица: посредством елементарни преобразувания я свеждаме до базисна матрица.

1.16.2 Пример. Пресметнете ранга на всяка от следните матрици:

a.) $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$ **b.)** $$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}$$

c.) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \textbf{d.)} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e.) $$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & -2 & -5 \\ 8 & 6 & 12 & -1 & 0 \\ 7 & 9 & 8 & -9 & -25 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix} \quad \textbf{f.)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 14 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

g.) $$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 7 & 9 & -3 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \textbf{h.)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i.) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Понятието ранг улеснява разсъжденията, свързани с матрици. Например квадратната матрица $A_{(n,n)}$ е обратима точно когато $r(A) = n$. От казаното в **1.15** е видно, че системата $AX = B$ има решение точно когато ранговете A и разширената матрица $(A|B)$ съвпадат. Нещо повече, ако $r(A) = r(A|B) = k$ и броят на неизвестните е n, то решението на системата зависи от $n - k$ параметъра (докажете това сами). Това твърдение е известно като *Теорема на Руше*.

И така, *всяка* матрица A се разлага на произведение от специални матрици и базисна матрица. Да забележим, че базисната матрица е единствената матрица в това произведение, която може да не е квадратна. Значи ако A е квадратна, то очевидно всички матрици в произведението са квадратни и еднотипни с A.

1.16.3 Детерминанта. Понятието детерминанта се появява при разглеждането на различни задачи от Алгебрата, Геометрията и Анализа. Детерминантата е правило D, което съпоставя на всяка квадратна матрица A някакво число $D(A)$. Ще дефинираме първоначално действието на D за специални и базисни матрици: $D(E(i,j) = D(\bar{E}(i,j)) = -1$, $D(E_\lambda(i,j)) = D(E_\lambda(i,j)) = 1$ и $D(E_\lambda(i)) = \lambda$. Нека

X е базисна матрица. Полагаме $D(X) = 0$, ако X не е единичната матрица E и $D(E) = 1$ (впрочем забележете, че $E = E_1(i)\ \forall i$). Нека сега A е произволна квадратна матрица. Тогава $A = A_1A_2\cdots A_p$, където за всяко i A_i е специална или базисна матрица. *По дефиниция* $D(A) = D(A_1)D(A_2)\cdots D(A_p)$.

1.16.3.1 Пример. За матрицата A от Пример 1.12.1 получихме **(R)**, че

$$A^{-1} = E_{\frac{1}{5}}(1)E_{\frac{1}{5}}(2)E_{-\frac{1}{5}}(3)E_2(1,2)E_3(1,3)E_5(1)E_1(2,3)E_{-5}(2)E_3(3,2)E(2,3)E_{-1}(3,1)$$

от където следва, че

$$A = E_1(3,1)E_{-1}E(2,3)E_{-3}(3,2)E_{-\frac{1}{5}}(2)E_{-1}(2,3)E_{\frac{1}{5}}(1)E_{-3}(1,3)E_{-2}(1,2)E_{-5}(3)E_5(2)E_5(1)$$

Според горната дефиниция имаме $D(A^{-1}) = \frac{1}{5}$ и съответно $D(A) = 5$. Да забележим изобщо, че за произволна обратима матрица A очевидно е изпълнено $D(A^{-1}) = \frac{1}{D(A)}$ (защото $1 = D(E) = D(AA^{-1}) = D(A)D(A_1)$).

И така, вече знаем какво е детерминантата на произволна квадратна матрица A. Нещо повече, можем да пресмятаме детерминанти, защото можем да разлагаме матрици на специални и базисни множители. Лошото на тази дефиниция е, че тя (поне на пръв поглед) не е коректна. Наистина разлагането на *всяка* матрица в общия случай не е единствено. Нека например $A = A'_1A'_2\cdots A'_q$. Съгласно нашата дефиниция $D(A) = D(A'_1)D(A'_2)\cdots D(A'_q)$. Това показва, че въпросът дали $D(A_1)D(A_2)\cdots D(A_p) = D(A'_1)D(A'_2)\cdots D(A'_q)$ е напълно естествен.

1.16.4 Теорема. Ако A е квадратна матрица и $A_1A_2\cdots A_p = A = A'_1A'_2\cdots A'_q$ са две разлагания на A на произведения от специални и базисни матрици, то произведенията от техните детерминанти съвпадат.

Идеята на доказателството на тази теорема не е сложна - от дефиницията следват някои свойства на детерминантите. Тези свойства позволяват да се получи формула, която изразява $D(A)$ посредством елементите a_{ij} на A. Разбира се, педантичното реализиране на тази идея е извън целите на настоящите лекции.

Все пак ще отбележим някои директни следствия от дефиницията и Теорема 1.16.4:

1.16.5 Следствия.

a.) $D(AB) = D(A)D(B)$ - това, че детерминантата на произведението на две матрици е произведение на техните детерминанти е пряко следствие от Дефиниция 1.16.3.

За да докажем това свойство е достатъчно да се убедим, че ако A е квадратна неособена матрица, то може да бъде разложена на произведение, в базисната матрица е пръв или последен множител (изобщо в този случай базисната матрица е единичната и следователно комутира с всеки друг множител).

Да допуснем след това, че $A = X_1X_2\dots X_pE$ и $B = Y_1Y_2\dots Y_qE$, където E е единичната матрица. Тогава

$$AB = X_1X_2\dots X_pEY_1Y_2\dots Y_qE = X_1X_2\dots X_pEY_1Y_2\dots Y_q,$$

от където получаваме

$$ABY_q^{-1}\dots Y_2^{-1}Y_1^{-1} = X_1X_2\dots X_pE = EX_1X_2\dots X_p$$

Значи

$$AB = EX_1X_2\dots X_pY_1Y_2\dots Y_q = X_1X_2\dots X_pY_1Y_2\dots Y_qE$$

б.) Детерминантата на A не се променя, ако към някой стълб (ред) на A прибавим друг стълб (ред), умножен с число. С други думи, имаме следното равенство:

$$D\,(\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}_i \quad \cdots \bar{A}_j \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,) = D\,(\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \bar{A}_i + \lambda\bar{A}_i \quad \cdots \bar{A}_j \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,)$$

То е вярно, защото $D(A) = D(E_\lambda(i,j))D(A) = D(E_\lambda(i,j)A)$. Аналогично

$$D(A\bar{E}_\lambda(ij)) = D(A)D(E_\lambda(i,j)) = D(A)$$

в.) Ако разменим местата на два реда (стълба) на A, то детерминантата на получената матрица има противоположен знак на детерминантата на A. За доказателство е достатъчно да забележим, че $D(E(i,j)A) = D(E(i,j))D(A) = -D(A) = D(A\bar{E}(i,j))$.

г.) Ако $A = (\,\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,)$, то $D(\,\bar{A}_1 \quad \cdots \quad \lambda\bar{A}_i \quad \cdots \bar{A}_n\,) = \lambda D(A)$. Това е така, защото $D(E_\lambda(i)) = \lambda$.

д.) Нека $r(A) = n$ и $A = (\,\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,)$ е $n \times n$ матрица и $\bar{X}_{(n,1)}$ е матрица стълб. От теоремата на Руше следва, че системата $A\Lambda = \bar{X}$ *има единствено решение* $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$. Това означава, че $\bar{X} = \lambda_1\bar{A}_1 + \lambda_2\bar{A}_2 + \cdots + \lambda_n\bar{A}_n$ (убедете се в това самостоятелно). От б.) и г.) следва, че за детерминантата $\mathcal{D}(\bar{X}) = D\,(\,\bar{X} \quad \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,)$ имаме $\mathcal{D}(\bar{X}) = \lambda_1 D(A)$. Наистина

$$D\,(\,\bar{X} \quad \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,) = D\,(\,\bar{X} - \lambda_2\bar{A}_2; \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,) =$$

$$D\,(\,\bar{X} - \lambda_2\bar{A}_2 - \lambda_3\bar{A}_3; \bar{A}_2 \quad \cdots \bar{A}_n\,) = \cdots = D\,(\,\bar{X} - \lambda_2\bar{A}_2 - \lambda_3\bar{A}_3 - \lambda_4\bar{A}_4; \bar{A}_2 \quad \cdots \bar{A}_n\,) =$$

$$D\,(\,\bar{X} - \lambda_2\bar{A}_2 - \lambda_3\bar{A}_3 - \cdots - \lambda_n\bar{A}_n \quad \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,) = (\,\lambda_1\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2 \quad \cdots \quad \bar{A}_n\,) = \lambda_1 D(A)$$

Нека след това $\bar{Y} = \mu_1\bar{A}_1 + \mu_2\bar{A}_2 + \cdots + \mu_n\bar{A}_n$ е друга матрица стълб, образувана от стълбовете на A (ще казваме, че $\bar{Y}$ е *линейна комбинация* от стълбовете на A). Да забележим, че това представяне на Y е *единствено*, т.е. коефициентите μ_i са определени еднозначно. Ясно е, че $\mathcal{D}(\bar{Y}) = \mu_1 D(A)$, и ако положим $\bar{Z} = \bar{X}+\bar{Y} = \nu_1\bar{A}_1+\cdots+\nu_n\bar{A}_n$ то $\mathcal{D}(\bar{Z}) = \nu_1 D(A) = (\lambda_1+\mu_1)D(A) = \mathcal{D}(\bar{X})+\mathcal{D}(\bar{Y})$. И така, ако $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ са линейни комбинации на стълбовете на A, то $D(\bar{X}+\bar{Y}\ \bar{A}_2\ \cdots\ \bar{A}_n) = D(\bar{X}\ \bar{A}_2\ \cdots\ \bar{A}_n) + D(\bar{Y}\ \bar{A}_2\ \cdots\ \bar{A}_n)$. Тъй като *всеки стълб* е линейна комбинация на стълбовете на A, то от горните разсъждения се получава следното правило: ако първият стълб на A е сума на два стълба, то $D(A)$ е сума на две детерминанти, всяка от които има съответен първи стълб. Докажете сами, че това е вярно и за всеки друг стълб или ред.

Проверете, че

$$D\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & -1 \\ 1+5 & -1 & 2 \\ 2+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

е.) В 1.10.3.1 и 1.10.3.2 показахме, че всяка квадратна неособена матрица може да се приведе в диагонален вид с елементарни преобразувания. По дефиниция детерминантата на диагонална матрица е просто произведението на диагоналните елементи. Нещо повече, ако $A = (a_{ij})_{(n,n)}$ е *триъгълна* матрица (т.е. елементите под или над диагонала са нули например ако $a_{ij} = 0$ за $i < j$), то $D(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ - докажете това сами. Това води до един от най - популярните методи до пресмятане на детерминанти: посредством елементарни преобразувания изходната детерминанта се привежда в триъгълна форма.

1.16.6 Понякога за означаване на детерминантите ще ограничаваме техните матрици с вертикални прави линии, например $D\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$. Пресмятането се извършва както с матрици: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -10|E| = -10$. Изобщо докажете, че $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

1.16.7 Докажете, че

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Изразете горната детерминанта посредством елементите на матрицата и.

1.16.8. Пресметнете детерминантата:

a.) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$ **b.)** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$

c.) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$ **d.)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

e.) $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **f.)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

g.)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

h.)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & & \\ 1 & 4 & 9 & & \\ 1 & 8 & 27 & & \\ & & & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ & & & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$$

i.)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -3 \\ 7 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

j.)
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

k.)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

l.)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

m.)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

Пресметнете детерминантата **m.)** при $n = 3, 4, 5$ и т.н.

n.)
$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & z & x \\ -y & -z & 0 & y \\ -z & -y & -x & 0 \end{vmatrix}$$

o.)
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{vmatrix}$$

Напишете детерминанта от ред n, която има подобна на **n.)** структура и я пресметнете.

p.) Докажете, че

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & \alpha & \beta & \gamma \\ 1 & \mu & \nu & \tau \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+\lambda_1 & b+\lambda_1 & c+\lambda_1 \\ 1 & \alpha+\lambda_2 & \beta+\lambda_2 & \gamma+\lambda_2 \\ 1 & \mu+\lambda_3 & \nu+\lambda_3 & \tau+\lambda_3 \end{vmatrix}$$

където λ_1, λ_2 и λ_3 са произволни.

q.) Докажете, че

$$\begin{vmatrix} a-2b & -2a & 3c-4d & -2c \\ a & a+2b & 3c & 3c+4d \\ 3c-4d & -2c & 5a-6b & -2a \\ 3c & 3c+4d & 5a & 5a+6b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 2b & 3c & 4d \\ 2b & 3a & 4d & 5c \\ 3c & 4d & 5a & 6b \\ 4d & 5c & 6b & 7a \end{vmatrix}$$

r.) Докажете, че

$$\begin{vmatrix} x & a & y & b & z \\ y & b & z & a & x \\ z & a & x & b & y \\ x & b & z & a & y \\ z & a & y & b & x \end{vmatrix} = 0$$

1.17. Комплексни числа. Някои приложения на матричното смятане.

Матричното смятане е изключително удобно средство за нагледно представяне на различни алгебрични структури. Поради тази причина матричното смятане е важен инструмент за изучаване и анализ на различни теоретични и приложни проблеми. Разбира се, тези лекции нямат за цел детайлното изложение на матричното смятане. Тук показваме накратко някои от типичните и важни свойства на матричната алгебра (или части от нея).

Като елементарен пример ще посочим, че от алгебрична гледна точка множеството на всички матрици от вида $A = \alpha E$ (или $A = E\alpha$), където E е единична матрица от ред n е идентично с множеството от всички ("реални") числа.

1.17.1 Комплексни числа.

1.17.1.1 Нека $\mathcal{C}$ е множеството на всички (2×2) матрици, които имат вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Не е трудно да се докаже, че $\mathcal{C}$ е *затворено* по отношение на действията събиране и умножение на матрици (от $\mathcal{C}$). Това означава, че ако $A \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{C}$, то $A + B \in \mathcal{C}$, $AB \in \mathcal{C}$. Да забележим след това, че ако $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, то $AB = BA$. Наистина

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - b\beta & a\beta + b\alpha \\ -b\alpha - a\beta & -b\beta + a\alpha \end{pmatrix}$$

и

$$BA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta b & \alpha b + \beta a \\ -\beta a - \alpha b & -\beta b + \alpha a \end{pmatrix}$$

1.17.1.2 Можем също така да умножаваме матриците от $\mathcal{C}$ с числа: нека α е число и $\bar{\alpha}$ е матрицата $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$. Покажете, че $\forall\ A \in \mathcal{C}$ е изпълнено $\bar{\alpha}A = \alpha A$. Последното равенство показва, че произведението на матриците от $\mathcal{C}$ с числа и с диагонални матрици от типа $\bar{\alpha}$ е едно и също (впрочем този факт е в сила не само за (2×2) матрици). Покажете също така, че множеството $\mathcal{R}$ на всички матрици от вида $\bar{\alpha}$, където $\alpha \in \mathbf{R}$ е *алгебрически напълно идентично* с $\mathbf{R}$. Това означава, че можем да разглеждаме $\mathbf{R}$ като подмножество на (част от) $\mathcal{C}$.

1.17.1.3 В понататъшния текст ще наричаме матриците от $\mathcal{C}$ *комплексни числа*, а самото $\mathcal{C}$ - *множество* (съвкупност) на комплексните числа. Можем да записваме комплексните числа по по - кратък начин, който обикножено се нарича *алгебрична форма* на комплексното число. За тази цел да означим единичната 2×2 матрица с "тлъста" единица: $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и да положим след това $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Забележете, че матрицата $\mathbf{i}$ има следното забележително свойство (има *отрицателен* квадрат!):

$$\mathbf{i}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$$

Ясно е, че $\mathbf{1}$ може да бъде оприличена на числото 1 (тя има всичките алгебрични свойства на единицата). Матрицата $\mathbf{i}$ понякога се нарича *имагинерна* (или комплексна) единица (защото няма аналог в числовата система $\mathbf{R}$ - квадрата на никое число не е -1).

1.17.1.5 Забележка Съществуват и други матрици с подобно свойство; проверете например, че това е матрицата $\mathbf{i}^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Намерете *всички матрици* I, за които $I^2 = -\mathbf{1}$ и покажете, че $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}^*$ са *единствените* матрици от $\mathcal{C}$, чиито квадрат е $-\mathbf{1}$ (т.е. квадратния корен от -1 има, както би следвало да се очаква, две стойности - $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}^*$).

1.17.1.6 И така, ако $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, то можем да напишем

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i}$$

и

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha\mathbf{1} + \beta\mathbf{i}$$

Алгебричните действия с матриците от $\mathcal{C}$ се извършват по - лесно, ако те за записани в алгебрична форма. Наистина, $A+B = (a\mathbf{1}+b\mathbf{i})+(\alpha\mathbf{1}+\beta\mathbf{i}) = (a+\alpha)\mathbf{1}+(b+\beta)\mathbf{i}$. Произведението също се пресмята лесно: $(a\mathbf{1}+b\mathbf{i})\cdot(\alpha\mathbf{1}+\beta\mathbf{i}) = a\alpha\mathbf{1}^2+a\beta\mathbf{1}\mathbf{i}+\alpha b\mathbf{i}\mathbf{1}+b\beta\mathbf{i}^2$. Тъй като $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$ и $(\mathbf{1})\mathbf{i} = \mathbf{i}(\mathbf{1}) = \mathbf{i}$, то $AB = BA = (a\alpha - b\beta)\mathbf{1} + (a\beta + \alpha b)\mathbf{i} = (a\alpha - b\beta) + (a\beta + \alpha b)\mathbf{i}$. В последния запис спазихме традицията и пропуснахме в него единичната матрица $\mathbf{1}$.

****

Ще отбележим, че алгебричният запис на комплексните числа описва *всяка матрица* от $\mathcal{C}$. Наистина, ако $Z = x\mathbf{1} + y\mathbf{i}$, то очевидно

$$Z = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

1.17.1.6.1 Нека $Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x + y\mathbf{i}$. Ще наричаме числото x *реална част* на Z, а y *имагинерна част* на Z. Ще ги отбелязваме понякога със символите $x = \mathrm{Re}Z$ и $y = \mathrm{Im}Z$ (но $\mathrm{Im}Z \neq y\mathbf{i}$!). Значи числото $z \in \mathcal{C}$ е реално точно тогава, когато $\mathrm{Im}z = 0$.

1.17.1.7 Упражнение Извършете действията:

а.) $(1 - 3\mathbf{i}) + 3(-2 + \mathbf{i})$; $2(-2\mathbf{1} + 3\mathbf{i}) - 3(-\mathbf{1} + \mathbf{i})$;

б.) $(3\mathbf{1} + 2\mathbf{i})(-2\mathbf{1} + 3\mathbf{i})$, $(5\mathbf{i} - 3)(2 + \mathbf{i})$, $(1 - \mathbf{i})(1 + \mathbf{i})$, $a - b\mathbf{i})(a + b\mathbf{i})$, $(2 - \mathbf{i})^2$, $(1 + \mathbf{i})^3$, $(1 - \mathbf{i})^n$ за $n = 2, 3, 4, \ldots$.

1.17.1.8 Делене на комплексни числа Нека $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Докажете, че $AB = BA = E$. Това равенство показва, че можем да записваме B като $\frac{\mathbf{1}}{A} = \frac{1}{A}$. В алгебрична форма обратната матрица (която ще наричаме *реципрочно* число на A) изглежда така: $\frac{1}{A} = \frac{1}{a^2+b^2}(a + b\mathbf{i})$. Изобщо делението на комплексни числа има *същите алгебрични* свойства, каквито има делението на реални числа.

И така, от алгебрична гледна точка множеството $\mathcal{C}$ е еквивалентно на множеството на *реалните* числа (които се изучават в средното училище). Например частното $\frac{A}{B}$ на числата (матриците от $\mathcal{C}$) A и B е по дефиниция числото (матрицата) AB^{-1} или $B^{-1}A$. Пресметнете за упражнение реципрочните числа на посочените в пример 1.17.1.7 а.) и б.).

Упражнение Пресметнете: $\frac{4\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}}$, $\frac{8-\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}}$ и $\frac{4}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$.

1.17.1.9 За $A \in \mathcal{C}$ числото $\sqrt{D(A)} = \sqrt{a^2 + b^2}$ се нарича *модул* на A; ще го отбелязваме с $|A|$ (въпреки възможните недоразумения). Пресметнете модулите на матриците от пример 1.17.1.7.

Пресметнете $|1 - \mathbf{i}|$, $|4 - 3\mathbf{i}|$, $|(1 - \mathbf{i})(4 - 3\mathbf{i})|$ и $\left|\frac{1-2\mathbf{i}}{4-3\mathbf{i}}\right|$. Изобщо проверете, че $|AB| = |A||B|$ и $\left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$. Както се вижда от последните примери, модулите на комплесни и реални числа си приличат. Това наистина е така; за модули на комплексни числа остава в сила важното неравенство на триъгълника:

tr
$$||A| - |B|| \leq |A + B| \leq |A| + |B|$$

Ще проверим, че е изпълнено например второто неравенство. Да положим за тази цел $A = a + b\mathbf{i}$ и $B = \alpha + \beta\mathbf{i}$. Имаме $|A + B| = \sqrt{(a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2}$ и съответно

$$\sqrt{(a + \alpha)^2 + (b + \beta)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |A| + |B|,$$

от където след повдигане на квадрат получаваме последователно $(\alpha+a)^2+(\beta+b)^2 \leq a^2+\alpha^2+b^2+\beta^2+2\sqrt{(a+\alpha)^2(b+\beta)^2}$; $(\alpha a+\beta b)^2 \leq (a+\alpha)^2(b+\beta)^2$ и окончателно $2\alpha a\beta b \leq \alpha^2 b^2+\beta^2 a^2$. Предлагаме на читателя да се убеди, че това е очевидно.

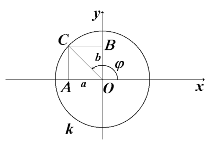
1.17.1.10 Нека $Z=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a+b\mathbf{i}$ е комплексно число. Транспонираната матрица Z^t на Z ще наричаме *спрегнато число* на Z и ще означаваме с $\bar{Z}$. С други думи $\bar{Z}=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a-b\mathbf{i}$. От свойствата на транспонираните матрици следва, че $\overline{Z_1+Z_2}=\overline{Z}_1+\overline{Z}_2$ и $\overline{Z_1Z_2}=\overline{Z_2Z_1}=\bar{Z}_1\bar{Z}_2$ (защото умножението е комутативно). Ще отбележим също така, че Z е реално точно тогава, когато $Z=\overline{Z}$.

1.17.1.11 Нека $Z=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi$. Лесно се вижда, че $Z^2=\begin{pmatrix} \cos^2 2\varphi-\sin^2\varphi & 2\cos\varphi\sin\varphi \\ -2\cos\varphi\sin\varphi & -\sin^2\varphi+\cos^2\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}$. Извършете по - нататък действията $Z^3=Z^2Z$, $Z^4=Z^3Z$ и докажете, че $Z^n=\cos n\varphi+\mathbf{i}\sin n\varphi$ (формула на Моавр).

1.17.1.12 а) За кои стойности на φ $(\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi)^3=\mathbf{1}$?

б) Кои са числата z от вида $z=\cos\varphi+\mathbf{i}\sin\varphi$, за които $z^2=\mathbf{i}$; същото за уравненията $z^2=-\mathbf{i}$ и $z^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$.

1.17.1.13 Оказва се, че *всяко* комплексно число Z може да бъде представено в сходна на 1.17.1.11 форма (тя се нарича *тригонометрична форма* на Z). Наистина, нека $Z=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = x+y\mathbf{i}$. Да положим след това $a=\frac{x}{\bar{Z}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ и $b=\frac{y}{\bar{Z}}$. Тъй като $a^2+b^2=1$, то е ясно, че съществува единствен ъгъл $\varphi\in[0,2\pi)$, за който $a=\cos\varphi$ и $a=\sin\varphi$. На рисунката по - долу е показано как може да се определи φ: k е единичната окръжност, а на осите Ox и Oy са нанесени числата a и b. По такъв начин определяме точките A и B - те са краища на (насочените) отсечки с дължини a и b, които са разположени върху осите Ox и Oy. Ясно е, че пресечната точка C на перпендикулярите през точките A и B лежи на единичната окръжност k (защото $OA^2+OB^2=1$), а ъгълът φ е определен от положителната посока на Ox и OC (както е показано на следващата рисунка).



Рисунка

Значи всяко комплексно число $Z=x+\mathbf{i}y$, може да бъде записано във вида

$Z = |Z|(\frac{x}{|Z|} + \mathbf{i}\frac{y}{|Z|}) = |Z|(a + \mathbf{i}b) = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, където $r = |Z|$ е модула на Z, а φ е ъгълът, показан на рисунката; той се нарича *аргумент* на Z.

1.17.1.14 Да разгледаме сега комплексното число $z = x + \mathbf{i}y = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)$, което е записано в тригонометрична форма. Ще отбележим, че $r \geq 0$ се определя еднозначно, а φ определен с точност кратен на 2π ъгъл (например все едно е дали ще работим с ъгъла $\frac{\pi}{3}$ или $\frac{7\pi}{3}$), поради което тук ще предполагаме, че $\varphi \in [0, 2\pi)$. По - надолу ще отбелязваме φ с $\arg Z$.

Тригонометричната форма на комплексните числа позволява по - лесно да се извършват операциите умножение и делене. Наистина, нека $u = \varrho(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta$. Тогава $zu = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)\varrho(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta) = r\varrho(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathbf{i}\sin\beta) = r\varrho(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \mathbf{i}(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta))$. С други думи

$$\textbf{(trf)} \qquad zu = r\varrho(\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha + \beta)$$

От формулата **(trf)** се получава лесно формулата на Моавр, а също така следва и лесен начин за делене на комплексни числа. Наистина, ако $w = \frac{r}{\varrho}(\cos(\alpha - \beta) + \mathbf{i}\sin(\alpha - \beta)$, то от **(trf)** следва, че $wu = z$, следователно $w = \frac{z}{u}$.

1.17.1.15 Примери а) Нека $z = 1 + \mathbf{i}$ и $u = \sqrt{3} - \mathbf{i}$. Ясно е, че $\arg z$ е този ъгъл φ, за който $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, а за $\alpha = \arg u$ имаме $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и съответно $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$. От тук следва, че $\varphi = 45^\circ$ и $\alpha = 120^\circ$.

1.17.1.16* Тъй като алгебричните действия за комплексни и реални числа имат еднакви свойства, то сумата на геометрична прогресия от комплексни числа се пресмята посредством същия израз както и за реални. Ако Z е числото от пример 1.17.1.11, то

$$\mathbf{1} + Z + Z^2 + \cdots + Z^{n-1} = \frac{Z^n - \mathbf{1}}{Z - \mathbf{1}}$$

Използвайте това и пример 1.17.1.11, за да докажете равенствата (**c**) и (**s**):

$$(\mathbf{c}) \qquad 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\cos\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$(\mathbf{s}) \qquad \sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

Упътване Две неща са от полза при решаването на тази задача:

а) Ако $Z = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$, то $\frac{1}{Z} = Z^{-1} = \cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi$ - наистина, $(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)(\cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi) = \cos^2\varphi - \mathbf{i}^2\sin^2\varphi = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ и

б) Нека α е произволен ъгъл и $z = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha$. Тогава $z - \mathbf{1} = \cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha - 1 = \cos\alpha - 1 + \mathbf{i}\sin\alpha = -2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\mathbf{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\mathbf{i}^2\sin^2 + 2\mathbf{i}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\mathbf{i}\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} +$

$\mathbf{i}\sin\frac{\alpha}{2}$). След това използвайте **(trf)**, за да пресметнете по - лесно частното $\frac{Z^n-\mathbf{1}}{Z-\mathbf{1}}$ в алгебрична форма.

1.17.1.17 Формулата на Моавр позволява също така лесно да се пресмятат корени от комплексни числа. Нека z е комплексно число и n е естествено. Казваме, че u е n-ти корен от z, ако $u^n = z$. Корен от комплексно число може да се пресметне, като корен от матрица (каквито са всъщност комплексните числа). Нека например $z = \mathbf{i}$ и $u = a + b\mathbf{i}$ е корен втори от z. Тогава $(a + b\mathbf{i})^2 = \mathbf{i}$; $a^2 - b^2 + 2ab\mathbf{i} = \mathbf{i} = 0 + 1 \cdot \mathbf{i}$. Това означава, че a и b са решения на системата $\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 0 \\ 2ab & = & 1 \end{cases}$. Тази система се решава лесно: от първото уравнение следва, че $a^2 = b^2$; $a = \pm b$ и $a = b$, защото $2ab = 1 > 0$. От второто уравнение получаваме съответно $2b^2 = 1$. Значи $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ и съответно $u_{1,2} = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i})$.

Аналогично ако искаме да пресметнем $\sqrt[3]{z}$ от някое комплексно число $z = p + q\mathbf{i}$, то трябва да решим системата $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 & = & p \\ 3a^2b - b^3 & = & q \end{cases}$. Например числата $u = a + b\mathbf{i}$ за които $u^3 = 1$ имат реална и имагинерна части, които са решения на $\begin{cases} a^3 - 3ab^2 & = & 1 \\ 3a^2b - b^3 & = & 0 \end{cases}$. От второто уравнение получаваме $b_1 = 0$ или $b = \pm a\sqrt{3}$, $a^3 - 9a^3 = 1$, $a^3 = -\frac{1}{8}$ и $a = -\frac{1}{2}$. Значи имаме още две решения: $b_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Окончателно $u^3 = 1$ за три числа: $u_1 = 1$, $u_2 = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $u_3 = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В общия случай за да се намерят n-тите корени на дадено комплексно число трябва да се реши алгебрична система от две уравнения с две неизвестни от n-та степен.

Тригонометричният запис на комплексните числа предлага по - лесен метод за пресмятане на корени от комплексни числа. Нека $z = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$, $u = \varrho(\cos\alpha + \mathbf{i}\sin\alpha)$ и да допуснем, че $u^n = z$. Тогава $\varrho^n(\cos n\alpha + \mathbf{i}\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$. От това равенство следва, че $\varrho^n = r$ (защото $\varrho^n = |u|^n = |z| = r$) и $\cos n\alpha = \cos\varphi \quad ; \sin n\alpha = \sin\varphi$. Тригонометричните функции имат еднакви стойности само когато аргументите им се различават с кратно на 2π. Значи за някое цяло k имаме $n\alpha_k = \varphi + 2k\pi$. Да забележим след това, че ако $k_1 - k_2 = 2mn\pi$ то $\alpha_{k_1} - \alpha_{k_2} = \frac{\varphi+2k_1\pi}{n} - \frac{\varphi+2k_2\pi}{n} = 2m\pi$. Това означава, че различни комплексни числа се получават само за n различни стойности на k, например за $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Имаме следователно

$$\textbf{(m)} \qquad \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$$

Равенството **(m)** също се нарича формула на Моавр. То показва, че *всяко различно от нула* комплексно число има точно n на брой n-ти корена

1.17.1.18 Задача Пресметнете

(a) $(1 + \mathbf{i})^{11}$ и $\frac{\mathbf{i}^7 - \mathbf{i}^{-7}}{2\mathbf{i}}$

(б) всички стойности на $\sqrt{1+\mathbf{i}}$, $\sqrt[3]{7-4\mathbf{i}}$ (пресметнете аргумента на $7-4\mathbf{i}$ например с помощта на някоя таблица), $\sqrt[4]{\mathbf{i}}$, $\sqrt[6]{-\mathbf{i}}$, $\sqrt[6]{-1}$, $\sqrt[10]{-1}$.

(в) $\cos 4\varphi$ и $\sin 5\varphi$ посредством $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ - използавйте, че $\cos n\varphi + \mathbf{i}\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$.

(г) $\cos^4\varphi$ и $\sin^5\varphi$ посредством синуси или косинуси на кратни ъгли.

(д) $\sin^4\varphi + \sin^4 4\varphi + \sin^4 7\varphi + \cdots + \sin^4(3k-2)\varphi$.

(е**) $\sigma = \varepsilon^l + \varepsilon^{2l} + \cdots + \varepsilon^{nl}$, където $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ (Отг. $\sigma = 0$, ако n не е делител на l и $\sigma = n$, ако l се дели на n) (Решете подусловие 1.17.1.18 (д) първо за $n = 2, 3, 4, \ldots$).

1.17.1.19 Всички алгебрични задачи, които възникват (и са разглеждани например в средното училище) и са формулирани за реални числа могат да бъдат разгледани и за комплексни. Например уравнението $ax^2+bx+c=0$ има решения, които се получават по формулата $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, където $\sqrt{D}$ е една от двете стойности на корена, а числата a, b и c са комплексни (в общия случай). С други думи *всяко* уравнение от втора степен има решения (които в общия случай са комплексни числа). Оказва се (и това съвсем не очевидно), че в разширената числова система на комплексните числа *всяко алгебрично уравнение*

(alg) $$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

има точно n (в общия случай комплексни) *решения.* Това твърдение се нарича *Основна теорема на алгебрата* (и наистина е такава) и е финал на повече от 2000 - годишни изследвания, правени в различни епохи и цивилизации. Решете уравненията:

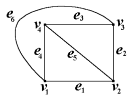
(а) $x^2-(2+\mathbf{i})x+(-1+7\mathbf{i})=0$, $x^2-(3-2\mathbf{i})x+(5-5\mathbf{i})=0$ и $(2+\mathbf{i})x^2-(5-\mathbf{i})x+(2-2\mathbf{i})=0$;

(б) $x^4-(1+\mathbf{i})x^2-2+2\mathbf{i}=0$, $x^4-3x^2+4=0$ и $x^4-30x^2+289=0$;

(в) $x^6+2\mathbf{i}x^3-2=0$, $x^8-2\mathbf{i}\sqrt{3}x^4-4=0$, $x^{10}-2\cos\alpha x^5+1=0$ и* $x^4-4\cos\alpha\cos\beta x^3+2(1+2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta))-4\cos\alpha\cos\beta x+1$.

1.17.2 Други приложения на матричното смятане.

1.17.2.1 В различни приложения на комбинаториката, геометрията и други раздели на математиката е полезнен апарата на *теорията на графите. Граф* е множество от точки $\{v_i\}$(които често се наричат върхове), част от които са свързани с отсечки или линии $\{e_j\}$ (ще ги наричаме ребра). Нека G е граф с n върха. След като номерираме върховете и ребрата на G по някакъв начин, можем да му съпоставим $(n\times)$-матрицата $A_G = (a_{ij})_{(n,n)}$, в която $a_{ij}=1$, ако v_i и v_j са свързани с ребро и $a_{ij}=0$, когато v_i и v_j не са краища на ребро от G. A_G се нарича *матрица на инцидентност* на G. Матрицата на инцидентност на графа от рисунка 1.17.2.1 (а)



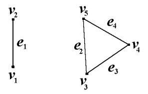
(G)

Рисунка 1.17.2.1 (а)

е равна на

$$A_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Съответно графът H от рисунка 1.17.2.1 (б)



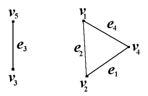
(H)

Рисунка 1.17.2.1 (б)

има матрица

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Следва да отбележим, че матрицата на инцидентност не е определена еднозначно; ето какво се получава, ако номерираме върховете на графа H по друг начин:



(H')

Рисунка 1.17.2.1 (в)

Очевидно матрицата на този граф е

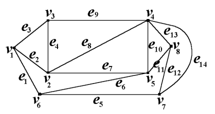
$$A_{H'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Докажете, че ако A и B са матрици на инцидентност на един и същ граф, то $A = XBY$, където X и Y са произведения на специални матрици.

1.17.2.2 Нарисувайте графите P и Q, чиито матрици са

$$A_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.17.2.3 Нека $A = (a_{ij})_{n,n}$ е матрица на инцидентност на графа G с n върха. Да означим с b_{kl} елемента, разположен на ред с номер k и стълб с номер l в матрицата A^2. Имаме $b_{kl} = a_{k1}a_{1l} + a_{k2}a_{2l} + \cdots + akna_{nl}$. Да забележим, че всяко събираемо в последната сума е 0 или 1 (защото такива са елементите на A). Лесно може да се съобрази кога едно събираемо не е нула - когато и двата множителя в негоса единици. Например ако $a_{k2}a_{2l} \neq 0$, то $a_{k2} = 1$ и $a_{2l} = 1$. Това означава, че са свзрзани с ребре върховете v_k и v_2, също и v_2 и v_l. Тоест *има път (маршрут) в G с дължина две ребра, който свързва v_k и v_l*. Следователно числото b_{kl} е равно на броя на всички маршрути от v_k до v_l в G с дължина 2. Проверете това на графа от рисунка 1.17.2.3:

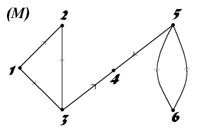


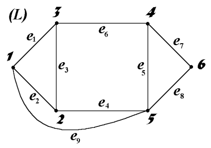
Рисунка 1.17.2.3

Изобщо докажете, че елемента $b_{kl}^{(p)}$ от A^p, който е разположен на $k-$тия ред и $l-$тия стълб на A^p е равен на броя на всички маршрути с дължина p в G между v_k и v_l.

1.17.2.4 От казаното по - горе се вижда как може да се реши важната за много приложения задача за намирането на дължината на най - късия маршрут между върховете v_k и v_l на даден граф G: Образуваме матрицата на инцидентност A_G на G и разглеждаме степените и A_G^p; $\quad p = 2, 3, 4, \ldots$ *Най - малкото* p, за което елемента $a_{kl}^{(p)}$ с позиция (k, l) в A_G^p е различен от нула дава дължината на най - късия маршрут между v_k и v_l в G. Броя на тези маршрути е равен на $a_{kl}^{(p)}$. Проверете това за примера с графа от рисунка 1.17.2.3.

1.17.2.5 Графите (или различни техни свойства) се описват посредством матрици по различни начини и целта на тези лекции не е педантично и подробно излагане на теорията на графите. Ще отбележим все пак още един популярен способ за представяне на граф посредством матрица. Това е *матрицата на съседство* на даден граф. Ако G е граф с n върха и m ребра, то можем да му съпоставим $n \times m$ матрицата $B_G = (b_{ij})_{n,m}$, в която b_{ij} е единица, ако върхът e_i е край на реброто и нула в противен случай. Ето как изглеждат матриците на инцидентност на графите, показани на следващата рисунка (забележете, че графът (M) е *ориентиран*; реброто, което свързва връх i с връх $\neq$ е отбелязано с $\{i, j\}$):





$$B_M = \left\{ \begin{array}{c|ccccccc} & \langle 1,2\rangle & \langle 1,3\rangle & \langle 3,2\rangle & \langle 3,4\rangle & \langle 5,4\rangle & \langle 5,6\rangle & \langle 6,5\rangle \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right.$$

$$B_L = \left\{ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccccc} \langle\mathbf{e_1}\rangle & \langle\mathbf{e_2}\rangle & \langle\mathbf{e_3}\rangle & \langle\mathbf{e_4}\rangle & \langle\mathbf{e_5}\rangle & \langle\mathbf{e_6}\rangle & \langle\mathbf{e_7}\rangle & \langle\mathbf{e_8}\rangle & \langle\mathbf{e_9}\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

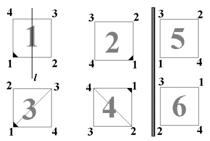
Напишете матриците на инцидентност на графите G, H, H', P и Q. Нарисувайте графа с матрица на инцидентност

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccc} \langle\mathbf{e_1}\rangle & \langle\mathbf{e_2}\rangle & \langle\mathbf{e_3}\rangle & \langle\mathbf{e_4}\rangle & \langle\mathbf{e_5}\rangle & \langle\mathbf{e_6}\rangle & \langle\mathbf{e_7}\rangle & \langle\mathbf{e_8}\rangle & \langle\mathbf{e_9}\rangle & \langle\mathbf{e_{10}}\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.17.3. Матричното смятане има най - разнообразни други приложения в различни области от математиката и естествознанието. Ще приключим този раздел с още два примера.

1.17.3.1 Нека F е правилна фигура (многоъгълник или многостен). Има различни начини да преобразуваме F в себе си - ротации около точки или оси, симетрии и т.н.; те се наричат *движения* на F. Считаме, че F е твърдо тяло и при различните движения формата и размерите на фигурата не се променят.

На рисунка 1.17.3.1 например е изобразен в горния ляв ъгъл квадрата $K = \{1, 2, 3, 4\}$. Ясно е, че посредством ротация на $\frac{\pi}{2}$ около центъра му той се преобразува в $\{4, 1, 2, 3\}$.

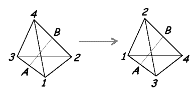


Рисунка 1.17.3.1

Квадрата с номер три се получава от първия с отражение от диагонала $\{1, 3\}$, а номер 4 се получава от 1 с отражение от диагонала $\{2, 4\}$. Квадратите с номера 5 и 6 *не могат да бъдат получени* от никой от квадратите $1 - 4$ (защо?). Ясно е, че движенията на квадрата K могат да бъдат описани посредством нредбата на върховете му - например $\{2,1,4,3\}$, който се получава от 3 с ротация, а от квадрат 1 чрез симетрия относно оста l. Резултата от две последователни движения на K ще наричаме *произведение* на движенията. Тъй като от формална гледна точка всяко движение се изразява посредством някаква наредба на върховете на K, то можем да съпоставим на всяко движение (4×4) матрица, произведението с която размества съответните върхове. Например за нредбата на върховете в квадрат 3 имаме $\{1,4,3,2\} = \{1,2,3,4\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а квадрат 2 е резултат на произведението $\{1,2,3,4\} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

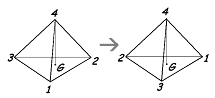
Изобщо нека да означим с $\mathcal{K}$ множеството на всички матрици, които описват движенията на K (разбира се "неутралното" движение $\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ също е от K). Докажете, че ако $A, B \in \mathcal{K}$, то $AB \in \mathcal{K}$ и $A^{-1} \in \mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ се нарича обикновено *група на симетриите (движенията)* на K.

По подобен начин се описват движенията на всички правилни фигури; например тетраедъра (правилната тръгълна пирамида) има също четири върха, но групата $\mathcal{T}$, която описва неговите движения е различна от $\mathcal{K}$. Това не означава, че те изобщо нямат общи елементи: например матрицата $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ се съдържа и в $\mathcal{K}$ и в $\mathcal{T}$. В $\mathcal{T}$ тя описва ротацията на $180°$ около оста AB (рисунка 1.17.3.2), а в квадрата е резултат от две симетрии спрямо диагоналите му.



Рисунка 1.17.3.2

Движението на рисунка 1.17.3.3, което представлява ротация на $120°$ около правата $4G$



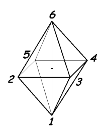
Рисунка 1.17.3.3

и поражда матрицата $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ не принадлежи на $\mathcal{K}$ (защо?).

1.17.3.2 Докажете, че $\mathcal{K}$ се състои от осем мартрици. Напишете матриците, от които се състоят групите на симетрии на:

(а) правилния шестоъгълник

(б) октаедъра (рисунка 1.17.3.4).



Рисунка 1.17.3.4

1.17.4 С помощта на матрично смятане можете да зашифровате конфиденциален текст, например текста THE*END. Това може да се направи посредством матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

която чрез умножение го променя по следния начин:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ H \\ E \\ * \\ E \\ N \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \\ E \\ H \\ N \\ T \\ * \end{pmatrix}$$

Да отбележим, че A е специална матрица; значи текста DEEHNT* може да бъде разкодиран чрез умножение с A^{-1}. Подобен метод за шифриране е бил използван в армията на Юлий Цезар преди около 2000 години.