Геометрия

1. Събиране на вектори.

Насочените отсечки обикновено се наричат *вектори* (в равнината или пространството). Всяка насочена отсечка има *начало* A и *край* B и обикновено се означава със символа $\overrightarrow{AB}$. Векторът $\overrightarrow{AB}$ има две важни характеристики - *посока* и *дължина*. *Дължината* $|\overrightarrow{AB}|$ на $\overrightarrow{AB}$ по дефиниция е равна на дължината $|AB|$ на отсечката AB (Рис. 1.1).

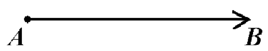


Рис. 1.1

а посоката се определя от избора на крайните точки. Оказва се, че понякога е удобно (ще се убедим в това по - късно) да разглеждаме и *нулеви вектори*. Нулев вектор е всеки, на който началото и краят му съвпадат, например $\overrightarrow{AA}$. Разбира се, понятието посока не е определено за нулевите вектори.

И така, посоката и дължината са важни характеристики на даден вектор. Да забележим, че дължината се определя лесно; това си е просто дължината на отсечката AB. Посоката може да бъде определена по различни начини, но никой от тях не е толкова нагледен, както при определянето на дължината. По - надолу ще се убедим, че с даден вектор по естествен начин са свързани различни числови характеристики (числа). Тези от тях, които по свойствата си приличат на дължината ще наричаме скалари. По точно *скалар* е всяко число (константа или променлива), което дава някаква *независима* характеристика на вектора - както споменахме, например дължината на вектора е скалар. *Не всяка величина*, която описва някакво свойство на векторите е скалар. Например за да определяме посоките на векторите е достатъчно да фиксираме някаква ос l в равнината. За да определим посоката на $\overrightarrow{AB}$ прекарваме през началото A на $\overrightarrow{AB}$ ос l^* успоредна и едопосочна с l. Очевидно посоката на $\overrightarrow{AB}$ се определя еднозначно от *ориентирания* ъгъл φ (Рис. 1.2).

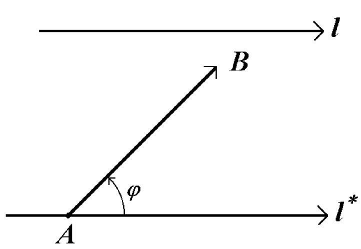


Рис. 1.2

Ъгълът φ на Рис. 1.2 *не е* скалар, защото зависи не само от векторът $\overrightarrow{AB}$, а също така и от оста l. Наистина ако разгледаме друга ос, например m, то ъгълът очевидно е друг (Рис. 1.3) - разбира се, в тези лекции стандартно отчитаме ъгъла против часовниковата стрелка, считано от оста към съответния вектор.

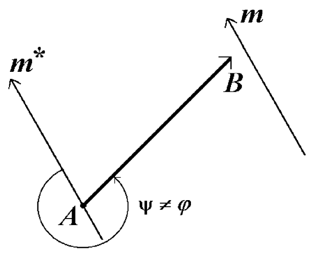


Рис. 1.3

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *успоредни* (понякога се казва *колинеарни*), ако правите AB и CD са успоредни (Рис.1.4).

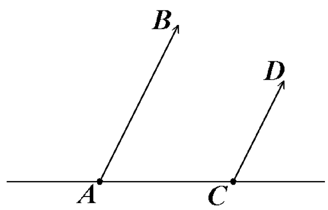


Рис. 1.4

При това ако точките B и D лежат в една и съща полуравнина относно правата AC, то казваме, че AB и CD са *еднопосочни* (Рис. 1.4). В противен случай те имат различни посоки или са *разнопосочни* (Рис. 1.5).

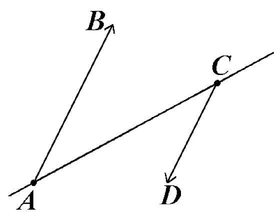


Рис. 1.5

Казваме, че $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са *равни*, ако те са еднопосочни и имат еднакви дължини.

1.1 Дефиниция. Нека е даден векторът $\overrightarrow{AB}$. Множеството $\vec{a}$ от всички вектори, които са равни на $\overrightarrow{AB}$ се нарича *свободен вектор.*

Следва да отбележим, че всяка точка от равнината или пространството е началото на единствен вектор, който е равен на $\overrightarrow{AB}$. Той се нарича *представител* на $\vec{a}$ (на Рис. 1.6 векторът $\overrightarrow{AB}$ е изобразен на тъмно поле). Факта, че $\overrightarrow{AB}$ е представител на $\vec{a}$ ще записваме с някое от равенствата $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ или $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

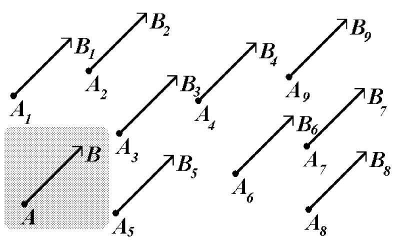


Рис. 1.6

Обратно, всеки представител на някой свободен вектор $\vec{x}$ определя еднозначно цялото множество $\vec{x}$. Свободният вектор има посока, която се определя от посоката на всеки негов представител (както посоката на несвободния, или както ще казваме по-надолу *свързан* вектор) и дължина, която е равна на дължината на всеки негов представител. Ако $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, то дължината на $\vec{a}$ ще означаваме с $|\vec{a}|$ (да напомним, че $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$, където $\overrightarrow{AB}$ е произволен представител на $\vec{a}$).

На пръв поглед идеята за свободен вектор е изкуствена, негеометрична и определено нерационална. Наистина, свободният вектор е цяло *множество* от вектори! За щастие, тези опасения не са твърде основателни. Идеята за свободни вектори позволява да се определят *алгебрични операции* в множеството от всички (свободни) вектори, което е основата идея на аналитичната геометрия. По - долу ще се убедим, че аналитичната геометрия дава мощен апарат за изследване на геометрични проблеми. От друга страна идеята за свободен вектор може да се геометризира лесно посредством разглеждане на кой да е представител на същия вектор. По - надолу ще изобразяваме свободните вектори посредством техни представители (както е направено на Рис. 1.7). И тъй като е безразлично кой точно представител на $\vec{a}$ ще разглеждаме, ще избираме тези, които са най-удобни за конкретните ни цели.

1.2 И така, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два свободни вектора; на Рис. 1.7 са изобразени представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

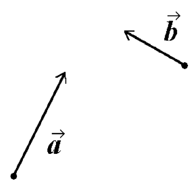


Рис. 1.7

Да изберем след това произволна точка O от равнината или пространството (Рис. 1.8).

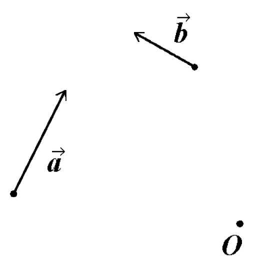


Рис. 1.8

С начало точката O построяваме представител $\overrightarrow{OA}$ на $\vec{a}$ (Рис. 1.9)

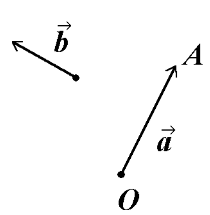


Рис. 1.9

и след това строим представител $\overrightarrow{AB}$ на $\vec{b}$ с начало точката A. Разглеждаме точките O и B като начало и край на вектора $\overrightarrow{OB}$. Този вектор определя свободния вектор $\vec{c}$ (т.е. $\overrightarrow{OB}$ е *представител* на $\vec{c}$), който ще наричаме *сума на векторите* $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ще отбелязваме събирането със знака "+", както при числа или матрици. И така, $\vec{c} = \vec{a}+\vec{b}$, както е показано на Рис. 1.10.

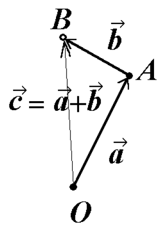


Рис. 1.10

Така полученият вектор $\vec{c}$ *не зависи* от избора на точката O. Наистина, да вземем друга точка, например P. Строим представител $\overrightarrow{PQ}$ на $\vec{a}$ с начало P и след това представител $\overrightarrow{QR}$ на $\vec{b}$ с начало точката Q (Рис.1.11). Докажете, че $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{PR}$ т.е., че сумата на вектори е дефинирана коректно (Упътване: четириъгълниците $POAQ$ и $QABR$ са успоредници, защото $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QR}$ - от това следва, че $POBR$ също е успоредник и значи $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PR}$).

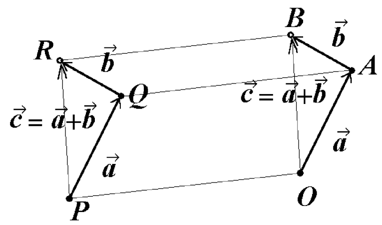


Рис. 1.11

Ако е даден вектора $\overrightarrow{AB}$, то ще казваме, че векторът $\overrightarrow{BA}$ е *противоположен* на $\overrightarrow{AB}$. Да забележим, че съгласно нашата дефиниция сумата $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$ дава нулевия вектор. Той е представител на *свободния* нулев вектор, който ще бележим с $\vec{0}$. Ако $\vec{a}$ е свободният вектор, определен от $\overrightarrow{AB}$, то с $-\vec{a}$ ще означаваме свободния вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ (Рис. 1.12). По такъв начин $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

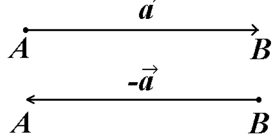


Рис. 1.12

От дефиницията за сума на вектори директно получаваме, че $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \quad \forall \vec{a}$. Тоест спрямо събирането векторът $\vec{0}$ е аналог на числото 0, а векторът $-\vec{a}$ очевидно е аналог на "противоположното число" на $\vec{a}$. Ще видим по надолу, че събирането на вектори и събирането на числа са напълно идентични от алгебрична гледна точка операции (т.е. имат едни и същи алгебрични свойства).

1.3 Комутативност. Събирането на вектори е *комутативно*, тоест $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ за всеки два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

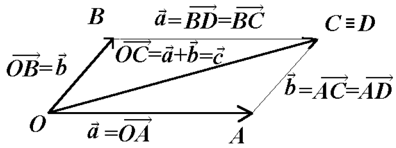


Рис. 1.13

Наистина, нека O е произволна точка. Строим представител $\overrightarrow{OA}$ на $\vec{a}$ с начало в O и след това представител $\overrightarrow{AC}$ на $\vec{b}$ с начало в A (Рис. 1.13). След това, както е показано на горната рисунка, вземаме представител $\overrightarrow{OB}$ на $\vec{b}$ с начало O и представител $\overrightarrow{BD}$ на $\vec{a}$ с начало в B. Остава да съобразим, че точките D и C съвпадат. Това е така, защото през B минава единствена права, успоредна на OA и *надясно* от B върху тази права има единствена точка на разстояние $|OA|$ от B (Рис. 1.13). Както е изобразено на Рис. 1.13, комутативния закон за събиране на вектори понякога се нарича *правило на успоредника.* Наистина, $OACB$ е успоредник със съседни страни $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а *диагоналът* $\overrightarrow{OC}$ е представител на свободния вектор $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

1.4 Асоциативност. Събирането на вектори е също така *асоциативно*; тоест $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. Рисунка 1.14 пояснява ситуацията. В заградения квадрат отляво са дадени векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а отдясно са взети техни представители в различен ред.

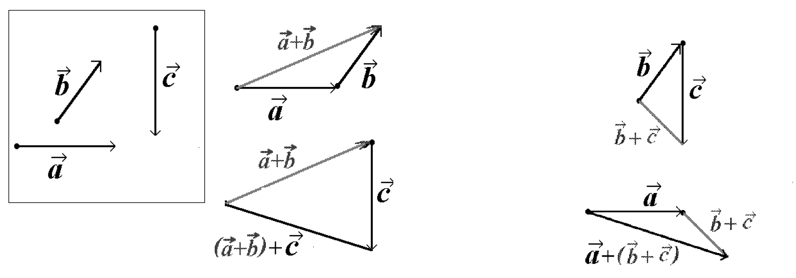


Рис. 1.14

Лесно е да се съобрази, че резултатът и в двата случая е един и същ. Друг начин да се убедим в равенството $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ дава Рис. 1.15.

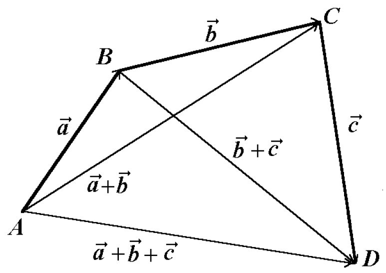


Рис. 1.15

Наистина, имаме

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

и

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

1.4.1 От комутативния и асоциативен закони следва, че *сумата на произволен брой вектори е независима от реда, по който те се събират, както и от групирането им в частични суми.*

Това означава, че за да се построи сумата на няколко вектора се начертава начупена линия, чиито насочени отсечки представят (т.е. са представители на) тези вектори, взети в *произволен* ред. Тогава векторът, насочен от началото към края на начупената линия е търсената сума. Рис. 1.16 пояснява ситуацията. Реализирайте за упражнение вектора $\overrightarrow{AJ}$ посредством начупена линия, която не се самопресича.

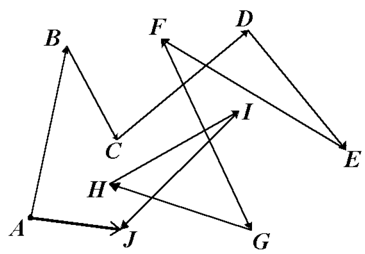


Рис. 1.16

1.4.2 Нека $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Прибавяме към двете страни на това равенство вектора $-\vec{b}$ и получаваме $(\vec{c}+\vec{b})+(-\vec{b})=\vec{a}+(-\vec{b})$. Тъй като $(\vec{c}+\vec{b})+(-\vec{b})=\vec{c}+(\vec{b}+(-\vec{b}))=\vec{c}+\vec{0}=\vec{c}$, то получаваме $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$, което ще записваме просто като $\vec{a}-\vec{b}$ както е при изваждането на числа. Поради това векторът $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ ще наричаме *разлика* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Разликата на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е изобразена на Рис. 1.17, където в затъмнения квадрат са изобразени редставители на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $-\vec{b}$, а под тях е построена (по два начина) разликата на $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

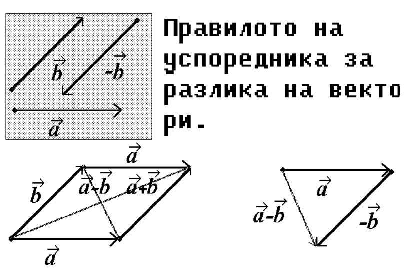


Рис. 1.17

Горната рисунка показва също, че вторият диагонал на успоредника, образуван от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е тяхната разлика.

Операцията изваждане на вектори позволява да определим свободния вектор $\overrightarrow{AB}$, ако са определени краищата му A и B. За да покажем как става това, трябва първо да поясним как можем да използваме вектори за да опишем разположението на точките в равнината и пространството.

1.4.3 Да фиксираме някоя точка O от равнината или пространството. Ще я наричаме *начало.* Всяка точка A в такъв случай определя единствен свободен вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ (с представител $\overrightarrow{OA}$). Свободният вектор $\vec{a}$ се нарича *радиус вектор* на точката A. Той определя еднозначно положението на A в равнината или пространството. За да отбележим факта, че $\vec{a}$ е радиус вектор на A ще пишем понякога $A(\vec{a})$.

И така, нека са дадени точките $A(\vec{a})$ и $B(\vec{b})$ (Рис. 1.18). Една от основните задачи на векторното смятане е да определим вектора $\overrightarrow{AB}$. Тоест да изразим свободния вектор, на който свързаният вектор $\overrightarrow{AB}$ е представител.

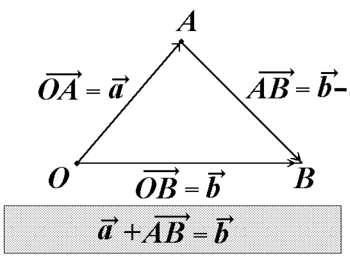


Рис. 1.18

Тази задача, както се вижда от горната рисунка, се решава без усилие: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$. С други думи $\vec{a}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, от където получаваме:

(fv)
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

2. Умножение на вектори с числа.

Както при действията с числа, естествено е вместо $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ да пишем $3\vec{a}$. Естествено е също така ако за някой вектор $\vec{b}$ имаме $\vec{b}+\vec{b}+\vec{b}=3\vec{b}=\vec{a}$, то вместо $\vec{b}$ да пишем $\frac{1}{3}\vec{a}$ (защото съгласно казаното по-горе $3\vec{b}=\vec{a}$). По същата логика можем да кажем какво значи например $\frac{2}{3}\vec{a}$ - това е $2\vec{b}$, където $3\vec{b}=\vec{a}$ (Рис. 2.1).

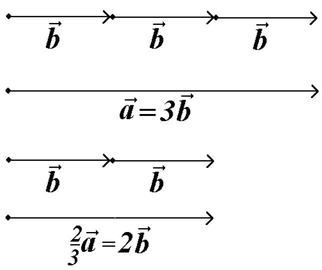


Рис. 2.1

Изобщо от тези забележки е ясно как се определят например векторите $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\frac{5}{7}\vec{a}$, $\frac{18}{13}\vec{a}$ и в общия случай $\frac{p}{q}\vec{a}$, където p и q са естествени числа.

Горното наблюдение показва, че можем да говорим за произведение на положително рационално (т.е. такова, което е частно на две цели) число с вектор. Произведението на число с вектор има следните алгебрични свойства: ако α и β са положителни рационални числа, то

(av) $$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}), \; ; (\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$$

Понякога ще пишем освен това $\vec{a}\alpha$ вместо $\alpha\vec{a}$. Геометрично векторът $\alpha\vec{a}$ е успореден (и дори еднопосочен) на $\vec{a}$ и има дължина $\alpha|\vec{a}|$. Ще отбележим освен това, че е в сила и следното дистрибутивно правило:

(cv) $$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

Верността на правилото **(cv)** се доказва лесно от Рис. 2.2:

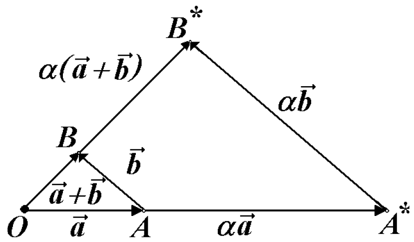


Рис. 2.2

Наистина, ако $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AB}$ са представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (по надолу ще пишем $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$), то $\overrightarrow{OB} = \vec{a}+\vec{b}$. Нека след това $|OA^*| = \alpha|OA|$ и $|OB^*| = \alpha|OB|$. Тогава триъгълниците OAB и OA^*B^* са подобни и значи $|AB| = \alpha|A^*B^*|$. Следователно $\overrightarrow{A^*B^*} = \alpha\overrightarrow{AB}$, което означава, че $\overrightarrow{A^*B^*} = \alpha\vec{b}$. Значи $\overrightarrow{OB^*} = \overrightarrow{OA^*} + \overrightarrow{A^*B^*} = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$. От друга страна $\overrightarrow{OB^*} = \alpha\overrightarrow{OB} = \alpha(\vec{a}+\vec{b})$.

2.1 И така, произведението на положително рационално число с вектор притежава свойствата **(av)** и **(cv)** (те се наричат *дистрибутивни закони*). Лесно е да се съобрази, че **(av)** и **(cv)** остават верни и ако дефинираме $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. Но тогава от **(av)** получаваме $\vec{0} = (1+(-1)) \cdot \vec{a} = \vec{a} + (-1)\vec{a}$. За да е изпълнено това равенство трябва очевидно $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ $\forall\vec{a}$, kоето и ще приемем за дефиниция. При това положение лесно можем да дефинираме произведение на вектор с *отрицателно* рационално число: ако $\alpha < 0$, то полагаме $\alpha\vec{a} = |\alpha|(-1)\vec{a} = |\alpha|(-\vec{a})$.

Горните разсъждения показват как се определя произведението на вектор с *произволно рационално число.* Докажете, че при това е вярно и следното свойство:

(sv) $$(-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a}) \; ; \; (-\alpha)(-\vec{a}) = \alpha\vec{a}$$

По-долу ще видим, че посредством **(av)** и **(cv)** се получават твърде важни геометрични следствия. Преди това обаче ще доопределим произведението на вектори с числа за всички (не само рационални положителни) числа.

2.2 Дефиниция. Произведение на числото (не непременно рационално) α и вектора $\vec{a}$ е векторът $\vec{b}$, който е определен по следния начин:

а.) $\vec{b} = \vec{0}$, ако $\alpha = 0$,

б.) $\vec{b}$ е успореден и еднопосочен с $\vec{a}$ ако $\alpha > 0$ и дължината му е равна на $\alpha|\vec{a}|$ и

в.) $\vec{b}$ е успореден и противоположен на $\vec{a}$ ако $\alpha > 0$ и дължината му е равна на $|\alpha||\vec{a}|$.

Лесно е да се съобрази, че свойствата **(av)**, **(cv)** и **(sv)** остават в сила за произведения на вектори с *произволни* (не непременно рационални) числа.

Да забележим, че във всички случаи $\vec{b}$ е успореден на α и $|\vec{b}| = |\alpha||\vec{a}|$. Вярно е и обратното, ако $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{b}\|\vec{a}$ тогава и само тогава, когато съществува α, за което $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Наистина, тогава можем да положим $\alpha = \pm\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Тъй като нулевият вектор няма посока, можем да считаме, че той е успореден на всеки вектор. И така, ако $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{b}\|\vec{a}$ тогава и само тогава, когато $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ за някое α. Ако $\vec{b} = \vec{0}$, то $\alpha = 0$.

2.2.1 Нека A и B са две *различни* точки. Докажете, че точката C принадлежи на правата AB тогава и само тогава, когато съществува единствена двойка числа α и β, за които $\overrightarrow{OC} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $\alpha + \beta = 1$.

Решение: Нека C е точка от AB. Тъй като $A \neq B$, то $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$. Точките A, B и C са точки от една права, значи $\overrightarrow{AB}\|\overrightarrow{AC}$ и следователно $\exists\ \lambda$ за което $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ (Рис.2.4).

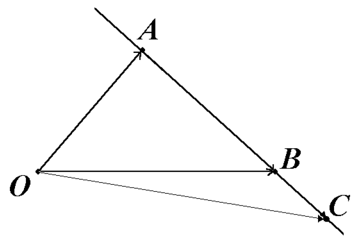


Рис. 2.4

Избираме начало O и нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са радиус векторите съответно на точките A, B и C. От 1.4.3 знаем, че $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$. Заместваме в $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ и получаваме $\vec{c} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$; $\vec{c} = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}$. Остава да положим $\alpha = 1 - \lambda$ и $\beta = \lambda$, за да получим, че $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $\alpha + \beta = 1$.

Обратно, нека $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ и $\alpha + \beta = 1$. Тогава $\alpha = 1 - \beta$ и $\vec{c} = (1-\beta)\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{a} - \beta\vec{a} + \beta\vec{b}$; $\vec{c} - \vec{a} = \beta(\vec{b} - \vec{a})$. Последното равенство означава, че $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AB}$, от където следва, че $\overrightarrow{AC}\|\overrightarrow{AB}$, т.е. точката C лежи на правата AB.

2.2.2 Забележка. Както по-горе получаваме, че $\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{AB}$. Умножаваме след това равенството $\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AB}$ с α и равенството $\overrightarrow{CB} = \alpha\overrightarrow{AB}$ с $-\beta$. Получава се $\alpha\overrightarrow{AC} - \beta\overrightarrow{CB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{AC} = \frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{CB}$. В този случай за точката C казваме, че *дели* AB в отношение $\frac{\beta}{\alpha}$, считано от A към B.

2.2.3 Пример. Нека $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ и $C(\vec{c})$ са три точки, които са определени посредством своите радиус-вектори. Докажете, че медицентърът G на $\triangle ABC$ има радиус-вектор $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Решение: Тъй като средата M на BC дели BC в отношение $\frac{1}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, то $\vec{m} = \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$ (Рис. 2.4.1). Аналогично G дели AM в отношение $\frac{2}{1} = \frac{\alpha}{\beta}$. От равенството $\alpha + \beta = 1$ получаваме, че $\alpha = \frac{2}{3}$ и $\beta = \frac{1}{3}$.

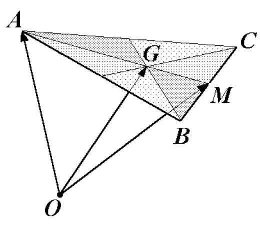


Рис. 2.4.1

Сега от 2.2.1 получаваме, че $\vec{g} = \overrightarrow{OG} = \beta\vec{a} + \alpha\vec{m} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

2.2.4 Изобщо нека са дадени точките $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ и $C(\vec{c})$, които не лежат на една права. Тогава те определят единствена равнина $\tau = (A, B, C)$. Докажете, че точката $D(\vec{d})$ е от τ тогава и само тогава, когато съществуват такива числа α, β и γ, че $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ и $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

2.2.4.1 Можем да описваме разположението на точките в равнината или пространството посредством *симетрични* връзки (релации) между техните радиус - вектори. Те понякога са по - удобни за решаването на различни проблеми. Така например, можем да формулираме Забележка 2.2.2 по следния начин:

Три различни точки $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ и $C(\vec{c})$ лежат на една права тогава и само тогава, когато съществуват три различни от нула числа α, β и γ, за които

$$\textbf{(sl)} \qquad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}; \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

Релацията **(sl)** означава всъщност, че точките A, B и C разделят страните BC, CA и AB в отношения съответно $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$. Докажете тези твърдения самостоятелно.

И така, определихме основните *линейни операции* с вектори - събиране на вектори и произведение на вектор с число. Те позволяват да опишем алгебрично всички свободни вектори в някоя равнина, или в пространството, което всъщност представлява основната идея на аналитичната геометрия. Преди да направим това, ще уточним някои понятия и термини относно свободните вектори. Да напомним, че два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, ако са успоредни, или ако някой от тях е нулев. Друг начин да кажем това е, че aко вземем представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общо начало, то *те лежат на една права* (забележете, че не е нужно да разглеждаме нулевите вектори отделно). Ще отбележим накрая, че това свойство не зависи от изборът на началната точка.

Аналогично ще казваме, че векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са *компланарни*, ако са успоредни на една и съща равнина. Друг начин да кажем това е: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни, ако всеки три представителя на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, които имат общо начало лежат в една равнина. От тук незабавно получаваме, че ако някой от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е нулев, то те са компланарни. Наистина, ако например $\vec{c} = \vec{0}$, то представителите на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ през началото определят равнина, в която непременно се съдържа иточката, която е представител на $\vec{a}$. И тук ще отбележим, че свойството компланарност очевидно не зависи от изборът на началото.

Аналогично на 2.2.4.1 можем да напишем симетрични условия, които са необходими и достатъчни за комплнарността на точките A, B, C и D (т.е. компланарността например на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ или на всеки три вектора с краища тези точки).

2.2.4.2 Пълен четириъгълник. Дадени са точките $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ и $D(\vec{d})$; при което никои три от тях не лежат на една права. Те лежат в една равнина тогава и само тогава, когато съществуват четири различни от нула числа α, β, γ и δ, за които

$$\textbf{(c4)} \qquad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}\ ;\ \alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

Наистина, ако A, B, C и D са компланарни, то или $AB \| CD$, или AB сече CD в някоя точка; например P. В първия случай съществува k, за което $\vec{b} - \vec{a} = k(\vec{d} - \vec{c})$ и $k \neq 0$, защото $\vec{b} - \vec{a} \neq \vec{0}$. Значи $-\vec{a} + \vec{b} + k\vec{c} - k\vec{d} = \vec{0}$.

Ако $AB \times CD = \{P\}$, то P лежи на AB и CD едновременно. От 2.2.1 знаем, че съществуват числа λ и μ; $1 \neq \lambda \neq 0 \neq \mu \neq$, за които $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB} = \lambda\vec{a} + (1 - \lambda)\vec{b}$ и аналогично $\vec{p} = \mu\vec{c} + (1 - \mu)\vec{d}$. Значи $\lambda\vec{a} + (1 - \lambda)\vec{b} = \mu\vec{c} + (1 - \mu)\vec{d}$, което дава $\lambda\vec{a} + (1 - \lambda)\vec{b} - \mu\vec{c} - (1 - \mu)\vec{d} = \vec{0}$. Тоест за $\alpha = \lambda$, $\beta = 1 - \lambda$, $\gamma = -\mu$ и $\delta = \mu - 1$ имаме $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = \vec{0}$ и $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

Обратно, да допуснем, че **(c4)** е изпълнено. Ако $\alpha+\beta=0$, то тогава и $\gamma+\delta=0$ и тогава **(c4)** се записва като $\alpha(\vec{a}-\vec{b})+\gamma(\vec{c}-\vec{d})=\vec{0}$ което означава, че $\alpha\overrightarrow{BA}=-\gamma\overrightarrow{DC}$ и правите AB и CD са успоредни. Ако $\alpha+\beta\neq 0$, то тогава и $\gamma+\delta=-(\alpha+\beta)\neq 0$. След това от **(c4)** получаваме, че $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=-(\gamma\vec{c}+\delta\vec{d})$ и значи

(2.2.4.2 a.)
$$\frac{\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}}{\gamma+\delta}=\vec{p}$$

Това означава, че точката P, за която $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ е обща за правите AB и CD; т.е. те лежат в една равнина.

Да забележим, по същия начин получаваме, че ако $\beta+\gamma\neq 0$, то

(2.2.4.2 b.)
$$\frac{\beta\vec{b}+\gamma\vec{g}}{\beta+\gamma}=\frac{\alpha\vec{a}+\delta\vec{d}}{\alpha+\delta}=\vec{q}$$

Това означава, че точката Q, за която $\overrightarrow{OQ}=\vec{q}$ е обща за правите BC и AD. Аналогично ако $\gamma+\alpha\neq 0$, то

(2.2.4.2 c.)
$$\frac{\gamma\vec{c}+\alpha\vec{a}}{\gamma+\alpha}=\frac{\beta\vec{b}+\delta\vec{d}}{\beta+\delta}=\vec{r}$$

и получаваме, че R, за която $\overrightarrow{OR}=\vec{r}$ е пресечна точка на правите AC и BD.

Пълният четириъгълник $ABCD$ (Рис. 2.2.4.2) има четири върха и шест страни - правите, които ги свързват (именно AB, DC; AD, BC и AC, BD).

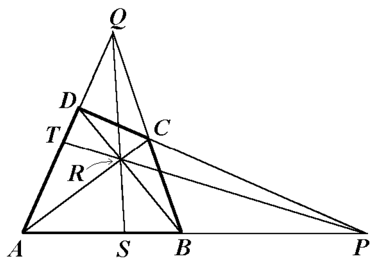


Рис. 2.2.4.2

Трите двойки срещуположни страни се пресичат в трите *диагонални точки* P, Q и R, определени с а.) - с.). Тези равенства показват как всяка диагонална точка разделя страните, на които лежи.

Ако например продължението на QR пресича AB в S, покажете, че точките S и P делят вътрешно и външно в отношения $\pm\frac{\beta}{\alpha}$ (това са отношенията $\frac{AS}{SB}$ и $\frac{AP}{PB}$; или $\overrightarrow{AS}=-\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{SB}$ и $\overrightarrow{AP}=\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{PB}$), които са равни по абсолютна стойност. За да докажем това, разглеждаме **(2.2.4.2 b.)** и **(2.2.4.2 c.)**; имаме:

$$\alpha\vec{a}+\delta\vec{d}=(\alpha+\delta)\vec{q}\ ;\ \beta\vec{b}+\delta\vec{d}=(\beta+\delta)\vec{r}$$

и изваждаме тези две равенства. Получава се $\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}=(\alpha+\delta)\vec{q}-(\beta+\delta)\vec{r}$. След като разделим последното равенство на $\alpha-\beta$, се получава

$$\frac{\alpha\vec{a}-\beta\vec{b}}{\alpha-\beta}=\frac{(\alpha+\delta)\vec{q}-(\beta+\delta)\vec{r}}{\alpha-\beta}=\vec{s}$$

където $\vec{s}$ е радиус векторът на S. Да забележим, че от последното векторно равенство следва, че S е пресечна точка на AB и QR, а от 2.2.2 се получава, че S дели AB в отношение $-\frac{\beta}{\alpha}$. Казваме, че точките S и P са *хармонично спрегнати* относно AB.

2.2.5 Център на тежестта Ако с някоя точка M е свързано число μ казваме, че M е *материална точка* с маса μ и ще пишем (M,μ). Нека (M_1,μ_1) и (M_2,μ_2) са две материални точки. Казваме, че C е център на тежестта на системата $\{(M_1,\mu_1);(M_2,\mu_2)\}$, ако $\mu_1\overrightarrow{CM_1}+\mu_2\overrightarrow{CM_2}=\vec{0}$.

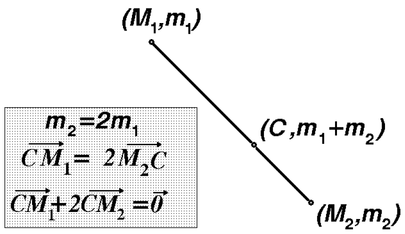


Рис. 2.2.5.1

Интуитивно малката маса на M_1 се "компенсира" от разстоянието $|CM_1|$. Тази гледна точка е известна като "правилото на лоста" и (разбира се) се потвърждава прекрасно от ежедневната практика. По - надолу ще разглеждаме центъра на тежестта като материална точка, чиято маса е сума на масите на M_1 и M_2.

Аналогично център на тежестта (център на масите, центроид) на системата от точки $\{(M_1,\mu_1);(M_2,\mu_2);\cdots;(M_n,\mu_n)\}$ ще наричаме материалната точка (C,μ) с маса $(\mu=\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)$, за която

(cw)
$$\mu_1\overrightarrow{CM_1}+\mu_2\overrightarrow{CM_2}+\cdots+\mu_n\overrightarrow{CM_n}=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\overrightarrow{CM_k}=\vec{0}$$

Можем да намираме центъра на тежестта например както е показано на следната рисунка:

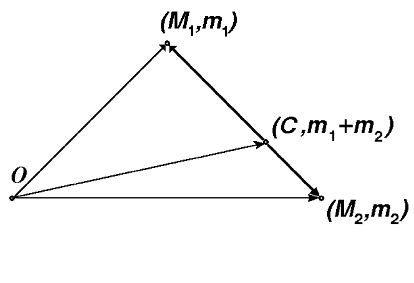


Рис. 2.2.5.2

Избираме произволна точка O и разглеждаме радиус векторите на точките M_1, M_2 и C. След това записваме равенството $\mu_1\overrightarrow{CM_1}+\mu_2\overrightarrow{CM_2}=\vec{0}$ с радиус вектори: $\mu_1(\overrightarrow{OM}_1-\overrightarrow{OC})+\mu_2(\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OC})=\vec{0}$ и значи $\mu_1\overrightarrow{OM_1}+\mu_2\overrightarrow{OM_2}-(\mu_1+\mu_2)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Ако $\mu=\mu_1+\mu_2\neq 0$, то последното равенство определя едозначно $\overrightarrow{OC}$, а значи и точката C: $\overrightarrow{OC}=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\overrightarrow{OM_1}+\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\overrightarrow{OM_2}$. Разбира се, всичко това е възможно само ако $\mu\neq 0$. Ако общата маса μ на системата е нула, то *всяка точка* (от равнината или пространството) е център на тежестта.

За да избегнем тази нееднозначност по - надолу ще считаме, че масата на всяка система материални точки (т. е. сумата от масите им) е ненулева. Да забележим накрая, че масовият център на две точки лежи на правата, определена от тях и ги дели по следния начин: $\frac{|CM_1|}{|CM_2|} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

2.2.5.1 Забележка От казаното до тук се вижда, че по принцип допускаме точки с отрицателни маси. Това е така и в приложенията на векторното смятане - например "отрицателна" маса може да се появи, когато се описват силите между електрически заряди с различни знаци, при тела с различни относителни тегла и т. н.

Да разгледаме сега системи с повече от две материални точки. Преминаваме към радиус вектори в **(cw)** и получаваме

$$\mu_1(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OC}) + \mu_2(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OC}) + \cdots + \mu_n(\overrightarrow{OM_n} - \overrightarrow{OC}) = \vec{0};$$

$$\textbf{(cwrv)} \qquad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{\mu}(\mu_1\overrightarrow{OM}_1 + \mu_2\overrightarrow{OM}_2 + \cdots + \mu_n\overrightarrow{OM}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\mu}\overrightarrow{OM}_k$$

Радиус векторът на центъра на тежестта на точките $\{(M_k, \mu_k)\}$ не се променя, ако заменим масите μ_k с пропорционални на тях маси $c\mu_k$, където разбира се $c \neq 0$. Наистина, тогава общата маса става $c\mu$ и константата c се съкращава в равенството **(cwvr)**. Поради тази причина в някои задачи за опростяване на изчисленията общата маса се смята за равна на единица.

Важно свойство на центърът на тежестта на система материални точки е неговата инвариантност спрямо подсистеми: нека в системата $\mathcal{M} = \{(M_k, \mu_k)\}_{k=1}^{n}$ заменим някои от точките с техния център на тежестта; нека например (D, μ') е центърът на системата $\{(M_1, \mu_1); (M_2, \mu_2); (M_3, \mu_3)\}$. Това означава, че $\mu' = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$. След това разглеждаме системата материални точки

$$\mathcal{M}' = \{(D, \mu'); (M_4, \mu_4); \cdots; (M_n, \mu_n)\}$$

Тя има за център на тежестта точката $\{(C', \mu'')\}$, където $\mu'' = \mu' + \mu_4 + \cdots + \mu_n = \mu$ и $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{\mu''}(\mu'\overrightarrow{OD} + \mu_4\overrightarrow{OM}_4 + \cdots + \mu_n\overrightarrow{OM}_n) = \overrightarrow{OC}$, защото $\mu'\overrightarrow{OD} = \mu_1\overrightarrow{OM}_1 + \mu_2\overrightarrow{OM}_2 + \mu_3\overrightarrow{OM}_3$. Тези пресмятания показват, че системите $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ имат общ център на масите.

2.2.5.2 Това е общо правило: нека точките от $\mathcal{M}$ са разделени на две групи:

$$\mathcal{M}' = \{(M_1, \mu_1); (M_2, \mu_2); \cdots; (M_p, \mu_p)\}$$

с маса $\mu' = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_p$ и

$$\mathcal{M}'' = \{(M_{p+1}, \mu_{p+1}); (M_{p+2}, \mu_{p+2}); \cdots; (M_n, \mu_n)\}$$

и маса $\mu'' = \mu_{p+1} + \mu_{p+2} + \cdots + \mu_n$. Центровете C и D на масите на системите $\mathcal{M}$ и $\{(C', \mu'); (C'', \mu'')\}$ съвпадат. Наистина, ако O е произволна точка, то

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\mu'}{\mu' + \mu''}\overrightarrow{OC'} + \frac{\mu''}{\mu' + \mu''}\overrightarrow{OC''}$$

и за да се убедим, че $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC}$ остава да заместим радиус векторите $\overrightarrow{OC'}$ и $\overrightarrow{OC''}$ с техните равни от **(cw)**:

$$\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{\mu'}(\mu_1\overrightarrow{OM}_1 + \mu_2\overrightarrow{OM}_2 + \cdots + \mu_p\overrightarrow{OM}_p)$$

и

$$\overrightarrow{OC''} = \frac{1}{\mu''}(\mu_{p+1}\overrightarrow{OM}_{p+1} + \mu_{p+2}\overrightarrow{OM}_{p+2} + \cdots + \mu_n\overrightarrow{OM}_n)$$

По такъв начин при търсене на центъра на тежестта *всяко подмножество от точки може да бъде заменено с неговия масов център.*

2.2.5.3 Да разгледаме системата материални точки $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$. Съгласно горния текст точките A', B' и C', които са центрове на масите на системите $\{(B,\beta),(C,\gamma)\}$, $\{(C,\gamma),(A,\alpha)\}$ и $\{(A,\alpha),(B,\beta)\}$ делят страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ в отношения $\frac{\gamma}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\beta}{\alpha}$ (Рис. 2.2.5.3).

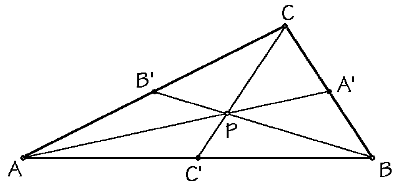


Рис. 2.2.5.3

Ясно е, че центърът на тежестта P е също така и център например на системата

$$\{(A,\alpha);(A',\beta+\gamma)\};$$

значи $\frac{AP}{PA'} = \frac{\beta+\gamma}{\alpha}$. Докажете в частност, че ако P е центърът на вписаната окръжност, то $\frac{AP}{PA'} = \frac{b+c}{a}$, където a, b и c са дължините на страните на $\triangle ABC$. Докажете също, че ако върховете на $\triangle ABC$ имат маси $\mathrm{ctg}\beta\mathrm{ctg}\gamma$, $\mathrm{ctg}\gamma\mathrm{ctg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta$, то центърът на тежестта съвпада с ортоцентъра на $\triangle ABC$.

2.2.5.4 Да допуснем, че точките A, B, C и D имат еднакви маси (например равни на единица). Като разглеждате различни подсистеми от материалните точки A, B, C и D докажете, че (Рис. 2.2.5.4)

а) отсечките L_1L_2, M_1M_2 и N_1N_2, които съединяват средите на срещуположните страни и диагоналите се пресичат в една точка P (центърът на тежестта на четириъгълника $ABCD$), която ги разполовява.

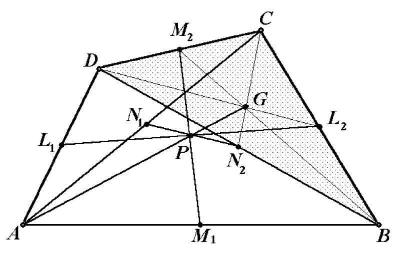


Рис. 2.2.5.4

б) Докажете, че медицентърът на триъгълника, с върхове някои три от точките A, B, C и D, точката P и четвъртия връх лежат на една отсечка; при това P я дели в отношение $\frac{3}{1}$.

в) Разбира се, възможно е точките A, B, C и D да не лежат в една равнина; тогава те са върхове на триъгълна пирамида. Горните разсъждения показват в частност, че правите, които съединяват всеки връх с медицентъра на срещуположната му страна се пресичат в една точка (центъра на тежестта), която ги разделя в отношение $\frac{3}{1}$ считано от върха. Тази точка също така разполовява отсечките, които съединяват средите на срещуположните ръбове на пирамидата.

2.2.5.5 Нека $ABCDM$ е четириъгълна пирамида (Рис. 2.2.5.5). Докажете, че отсечките, които съединяват медицентъра на триъгълник от околна стена или основата със средата на "срещуположния" му ръб се пресичат в една и съща точка P. Докажете, че P дели тези отсечки в отношение $\frac{3}{2}$. Например $\frac{N_1P}{PG_1} = \frac{N_2P}{PG_2} = \frac{3}{2}$.

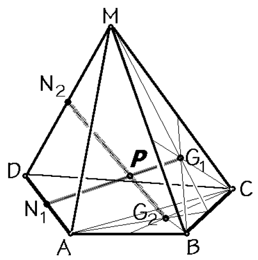


Рис. 2.2.5.5

На горната рисунка G_1 и G_2 са медицентрове на триъгълниците BCM и ABC, а N_1 и N_2 са среди на "срещуположните" им ребра AD и DM.

2.2.5.6 Нека $\{(M_k, 1)\}_{k=1}^n$ и $\{(N_k, 1)\}_{k=1}^n$ са системи материални точки с единични маси и (C, n), (D, n) са съответно центровете на масите. Докажете, че

$$\overrightarrow{M_1N_1} + \overrightarrow{M_2N_2} + \cdots + \overrightarrow{M_nN_n} = n\overrightarrow{CD}$$

2.2.5.7 Прави, прекарани през точка M и върховете A, B, C и D на триъгълна пирамида пресичат равнините на срещуположните стени в точките A', B', C' и D'. Докажете, че сумата на отношенията, в които тези точки разделят MA, MB, MC и MD е равна на -1.

2.2.5.8 Права пресича страните (или техните продължения) на равнинен многоъгълник $P_1P_2 \dots P_n$ в n *различни* точки $R_1R_2 \dots R_n$, които делят страните му в отношения $\overrightarrow{P_kR_k} = \lambda_k \overrightarrow{R_kP_{k+1}}$ за $k \le n-1$ и $\overrightarrow{P_nR_n} = \lambda_n \overrightarrow{R_nP_1}$. Докажете, че $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n$.

Упътване: Докажете твърдението за $n = 3, 4, \dots$. Ще покажем като пример как може да се разсъждава при $n = 4$: тъй като R_1 лежи на правата P_1P_2, то $\vec{r}_1 = \lambda\vec{p}_1 + \mu\vec{p}_2$, при което $\lambda + \mu = 1$ (напомняме, че $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ е радиус векторът на точката X). Лесно е да се съобрази след това, че можем да запишем λ и μ във вида $\lambda = \frac{x_1}{x_1 - x_2}$ и $\mu = \frac{x_2}{x_1 - x_2}$. Такива числа x_1 и x_2 съществуват, даже едното от тях (например x_1) може да бъде отнапред избрано по произволен начин; стига $\lambda \neq 0$ (а това е така, защото точките R_k са *различни*). Наистина ако например $x_1 = -7$, то $x_2 = \frac{7(1-\lambda)}{\lambda}$. И така, можем да изберем числата x_k по такъв начин, че

$$(x_1 - x_2)\vec{r}_1 = x_1\vec{p}_1 - x_2\vec{p}_2$$

$$(x_2 - x_3)\vec{r}_2 = x_2\vec{p}_2 - x_3\vec{p}_3$$

$$(x_3 - x_4)\vec{r}_3 = x_3\vec{p}_3 - x_4\vec{p}_4$$

$$(x_4 - x_5)\vec{r}_4 = x_4\vec{p}_4 - x_5\vec{p}_1$$

Събираме тези равенства и получаваме

$$(x_1 - x_2)\vec{r}_1 + (x_2 - x_3)\vec{r}_2 + (x_3 - x_4)\vec{r}_3 + (x_4 - x_5)\vec{r}_4 = (x_1 - x_5)\vec{p}_1$$

Последното равенство означава, че ако $x_1 - x_5 \neq 0$, то P_1 е център на тежестта на точките $\{(R_k, x_k - x_{k+1})\}$ (на които сумата от масите е точно $x_1 - x_5$). Това обаче е невъзможно, защото точката P_1 *не лежи* на правата, върху която са разположени точките R_k. Значи $x_1 - x_5 = 0$; $x_5 = x_1$. Но равенството $(x_k - x_{k+1})\vec{r}_k = x_k\vec{p}_k - x_{k+1}\vec{p}_{k+1}$ означава, че точката R_k дели P_kP_{k+1} в отношение $\lambda_k = -\frac{x_{k+1}}{x_k}$. Окончателно $\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = (-1)^4\frac{x_5}{x_1} = (-1)^4$, защото $x_5 = x_1$.

При $n = 3$ получаваме теоремата на Менелай, а при произволно n твърдението 2.2.5.8 се нарича теорема на Карно.

2.2.5.9 Равнина пресича страните на пространствения многоъгълник $P_1P_2\dots P_n$ в n *различни* точки $P_1P_2\dots P_n$. Покажете, че произведението на отношенията на деление от 2.2.5.8 е равно на $(-1)^n$.

2.2.5.10 Да си припомним 2.2.4.2. Там беше показано, че ако $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ и $D(\vec{d})$ са четири точки в равнината, при което никои три от тях не лежат на една права, то съществуват четири различни от нула числа α, β, γ и δ, за които е изпълнено равенството **c4**.

Нека сега фиксираме точките A, B и C, които *не лежат на една* права и M е произволна точка в равнината на ABC. Съгласно 2.2.4.2 ако M не лежи на никоя страна на $\triangle ABC$, то съществуват числата α, β, γ и μ, за които $\alpha + \beta + \gamma + \mu = 0$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \mu\vec{m} = \vec{0}$. Да забележим, че последното равенство означава, че M е център на тежестта на системата материални точки $\{A, B, C\}$ снабдени с маси $(-\frac{\alpha}{\mu}, -\frac{\beta}{\mu}, -\frac{\gamma}{\mu})$ (Рис. 2.2.5.6).

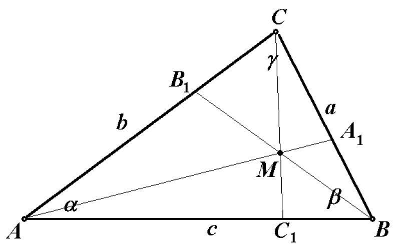


Рис. 2.2.5.6

на която A_1, B_1 и C_1 са центровете на маси на съответните системи от две материални точки. Числата $u = -\frac{\alpha}{\mu}$, $v = -\frac{\beta}{\mu}$, и $w = -\frac{\gamma}{\mu}$ определят еднозначно разположението на точката M и се наричат *барицентрични координати* на M. Ще записваме това така: $M(u, v, w)$. Ясно е, че за всяко $\lambda \neq 0$ тройката числа $(\lambda u, \lambda v, \lambda w)$ определя същата точка M; от друга страна всяка ненулева тройка числа може да бъде разглеждана като барицентрични координати на някоя точка.

2.2.5.11 Докажете например, че центърът на описаната около ABC окръжност има координати $(\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma)$, където α, β и γ са ъглите на $\triangle ABC$.

Ако a, b и c са страните на $\triangle ABC$, то определете точката $M(a, b, c)$.

2.2.5.12 Нарисувайте триъгълник (може и да е тъпоъгълен) и изобразете точките; чиито барицентрични координати са $(1, 1, 5)$, $(3, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$ и $(-1, 2, -3)$.

2.3 База. Координатна система.

2.3.1 База в равнината. Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неколинеарни (неуспоредни) вектора в равнината (ще напомним, че от тук в частност следва, че $\vec{a} \neq \vec{0} \neq \vec{b}$, защото нулевият вектор е успореден на всеки друг) и $\vec{c}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т.е. $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни). Съществува единствена двойка числа (α, β), за която $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Доказателство: Избираме някоя точка O и строим представители $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с общо начало точката O. По условие векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ лежат в една равнина (Рис. 2.5).

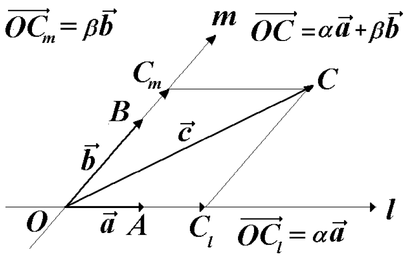


Рис. 2.5

Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определят две оси - Ol, която минава през O и е еднопосочна с $\vec{a}$ и Om, която минава през O и е еднопосочна с $\vec{b}$. През точката C прекарваме права, успоредна на l. Тя пресича m, защото l и m не са успоредни; да означим пресечната точка с C_m. По същия начин през C прекарваме права, успоредна на m. Тя пресича l в C_l. Тъй като $\overrightarrow{OC_l} \| \vec{a}$, то съществува α, за което $\overrightarrow{OC_l} = \alpha\vec{a}$. Аналогично от това, че $\overrightarrow{OC_m} \| \vec{b}$ следва, че $\exists\ \beta$, за което $\overrightarrow{OC_m} = \beta\vec{b}$. От правилото на успоредника следва, че $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC_l} + \overrightarrow{OC_m}$. Значи $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Ако допуснем, че $\vec{c}$ се изразява по друг начин; например $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$, то като извадим $\vec{c}$ от себе си получаваме $(\alpha - \lambda)\vec{a} + (\beta - \mu)\vec{b} = \vec{0}$. От това равенство следва, че коефициентите пред $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са нули. Наистина, ако например $(\alpha - \lambda) \neq 0$, то $\vec{a} = -\frac{(\beta-\mu)}{(\alpha-\lambda)}\vec{b}$, от където получаваме $\vec{a} \| \vec{b}$. Както знаем, това не е вярно.

И така, ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неуспоредни вектора в една равнина, то за всеки вектор $\vec{c}$ от тази равнина съществува единствен набор от две числа α и β, такива, че $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Числата α и β се наричат *координати* на $\vec{c}$; ще пишем $\vec{c}(\alpha, \beta)$ или $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.

От тези разсъждения получаваме, че ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са успоредни, то от равенството $A\vec{a} + B\vec{b} = \vec{0}$ следва $A = B = 0$. Това важно наблюдение ще бъде използвано често в следващия текст. Обикновено в приложенията A и B са изрази, в които участват две неизвестни и равенствата $\left\{\begin{array}{lll} A & = & 0 \\ B & = & 0 \end{array}\right.$ се схващат като система, от която се откриват желаните неизвестни. Ето един пример:

2.3.2 Нека в триъгълника ABC точките A_1 и C_1 лежат на правите BC и AB и ги делят в отношения α и γ (това означава, че $\overrightarrow{CA_1} = \alpha\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BC_1} = \gamma\overrightarrow{BA}$ - Рис. 2.6). Пресметнете отношенията, в които пресечната точка P на AA_1 и CC_1 дели тези отсечки. Решете задачата първо при $\alpha = \frac{1}{2}$ и $\gamma = \frac{2}{3}$.

Упътване: Нека $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CP} = \mu\overrightarrow{CC_1}$; трябва да пресметнем числата λ и μ.

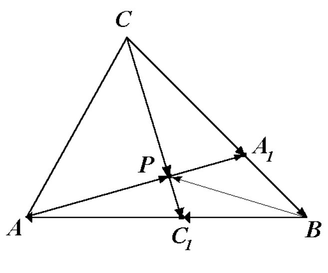


Рис. 2.6

Да положим за тази цел $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$. Ясно е, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{c}$ образуват база, освен ако $\triangle ABC$ е изроден (решете сами задачата в този случай). След като имаме база, ще изберем и начало - то може да бъде *всяка точка* и тъй като имаме право на избор, ще изберем например B; този връх е общ за $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$. След това изразете вектора $\overrightarrow{BP}$ по два начина: $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CB} = \lambda\overrightarrow{CC_1} - \vec{a}$ и $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AA_1} + \vec{c}$, където λ и μ са търсените отношения. Получава се системата

$$\begin{cases} 1-\lambda &= \alpha\mu \\ 1-\mu &= \gamma\lambda \end{cases}$$

Тя има решения $\lambda = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\gamma}$, $\mu = \frac{1-\gamma}{1-\alpha\gamma}$.

2.3.3 Нека спрямо някоя база $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ имат координати $\vec{p}(-1,1)$ и $\vec{q}(2,-1)$. Докажете, че $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не са успоредни.

2.3.3.1 Тъй като $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не са успореди, то те образуват база. Намерете координатите на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в тази база.

Решение: Ще решим "системата"

(*) $$\begin{cases} \vec{p} &= -\vec{a}+\vec{b} \\ \vec{q} &= 2\vec{a}-\vec{b} \end{cases}$$

относно $\vec{a}$ и $\vec{b}$, като за тази цел първо събираме двете уравнения; получава се $\vec{p}+\vec{q}=\vec{a}$; значи $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$. Следователно $\vec{a}$ има координати $(1,1)$ в базиса $\{\vec{p},\vec{q}\}$. За да получим $\vec{b}$ умножаваме първото уравнение в системата с 2 и го прибавяме към второто; получава се $2\vec{p}+\vec{q}=\vec{b}$; значи $\vec{b}=(2,1)$.

Да забележим, че тук всъщност извършихме елементарни преобразования с матрицата $P=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, която е съставена от координатите на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получаваме $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$.

Наблюдателният читател би трябвало да е забелязал, че матрицата $Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ е обратната матрица на P. И това не е случайно - то показва закоността на следното действие: записваме равенството **(*)** матрично $\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$ и умножаваме отляво с $Q=P^{-1}$. Получава се $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$. Всяка от матриците P и Q се нарича *матрица на прехода* (преход между базите $\{\vec{a},\vec{b}\}$ и $\{\vec{p},\vec{q}\}$).

Посредством матриците на прехода можем да записваме координатите на векторите спрямо различни базиси. Например ако координатите на вектора $\vec{u}$ спрямо базата $\{\vec{a},\vec{b}\}$ са $(-3,2)$, то $\vec{u}=-3\vec{a}+2\vec{b}$ и можем да запишем последното равенство матрично: $\vec{u} = (-3,2)\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$. След това използваме равенството $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$ и получаваме координатите

$$\vec{u} = (-3,2)\left(P\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}\right) = \left((-3,2)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix} = (7,-5)\begin{pmatrix} \vec{p} \\ \vec{q} \end{pmatrix}$$

на $\vec{u}$ спрямо базата $\{\vec{p},\vec{q}\}$.

2.3.3.2 Дадени са векторите $\vec{a}=(-3,1)$, $\vec{b}=(0,2)$, $\vec{c}=(1,2)$ и $\vec{d}=(1,1)$ с координатите си спрямо базата $\{\vec{e},\vec{h}\}$. Докажете, че всеки два от тези вектори образуват база. Кои са координатите на вектора $\vec{x}=\alpha\vec{e}+\beta\vec{h}$ спрямо тези бази.

2.4 Бази в пространството. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ са четири вектора и да допуснем, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са некопланарни (да напомним, че това в частност означава, никой от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не е нулев, а също така никои два от тези вектори не са успоредни).

При тези условия съществува единствен набор от три числа α, β и γ, за които $\vec{d} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

За тази цел да разгледаме представители $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ на $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ с общо начало O. Поясненията на Рис. 2.7 би трябвало да илюстрират верността на горното твърдение.

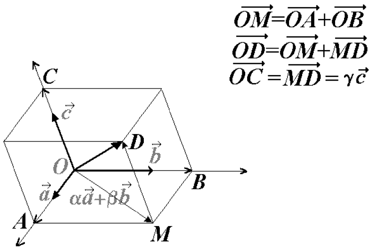


Рис. 2.7

За да видим, че това е така е достатъчно да прекараме през D равнини, успоредни съответно на равнините Olm, Omn и Onl. Всяка от тези равнини пресича оста, определена от третия вектор в съответната точка (Рис. 2.7). За да приключим с решението на задачата остава да съобразим, че аналогът на правилото на успоредника в пространството изглежда така: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$. Наистина, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OD}$.

И така, ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са три некомпланарни вектора, то за всеки вектор $\vec{d}$ в пространството съществува единствен набор от три числа (α,β,γ), които еднозначно определят вектора $\vec{d}$ в смисъл, че $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Наборът $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ се нарича *база* в пространството, а тройката числа (α,β,γ) се нарича *координати* (спрямо базата $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$) на вектора $\vec{d}$ (ще казваме още, че $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ е *разлагане* на $\vec{d}$ по базата $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$). За да отбелязваме, че (α,β,γ) са координатите на $\vec{d}$ понякога ще пишем $\vec{d}(\alpha,\beta,\gamma)$ или $\vec{d}=(\alpha,\beta,\gamma)$.

Нека $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma)$ и $\vec{q}(\lambda,\mu,\nu)$ са два вектора и t е число. Лесно е да се съобрази, че векторът $\vec{p}+\vec{q}$ има координати $(\alpha+\lambda,\beta+\mu,\gamma+\nu)$, а $t\vec{p}$ има координати $(t\alpha,t\beta,t\gamma)$. Наистина, тъй като $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ и $\vec{q}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}$, то $\vec{p}+\vec{q}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}+\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=(\alpha+\lambda)\vec{a}+(\beta+\mu)\vec{b}+(\gamma+\nu)\vec{c}$. Що се отнася до произведението с число, то следва от $t\vec{p}=t(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=(t\alpha)\vec{a}+(t\beta)\vec{b}+(t\gamma)\vec{c}$.

Горното разсъждение показва, че ако фиксираме някоя база, множеството на свободните вектори в пространството е еквивалентно на *множеството на всички матрици* от тип 1×3 по отношение на операциите събиране и умножение с число. Аналогично множеството на свободните вектори в равнината е еквивалентно на множеството на матриците от тип 1×2. В следващия текст ще видим, че тази връзка не е случайна.

2.4.1 а.) Нека $\mathcal{B}=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ е база. Предлагаме на читателят да съобрази, че векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имат координати $\vec{a}(1,0,0)$, $\vec{b}(0,1,0)$ и $\vec{c}(0,0,1)$; покажете също, че $2\vec{a}=(2,0,0)$, $\vec{a}-\vec{b}=(1,-1,0)$ и $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(1,1,1)$.

б.) Нека са дадени векторите $\vec{p}(1,-1,0)$, $\vec{q}(2,1,4)$ и $\vec{r}(2,-1,1)$. Пресметнете координатите на векторите $2\vec{p}-\vec{q}+3\vec{r}$; $-\vec{p}-3\vec{q}+2\vec{r}$.

в.) Компланарни ли са векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$?

Решение: Очевидно $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не са успоредни. Значи ако $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ са компланарни, то $\vec{p}$ и $\vec{q}$ образуват база в равнината (в която лежат трите вектора) и $\vec{r}$ е тяхна линейна комбинация: $\vec{r}=\xi\vec{p}+\eta\vec{q}$. След като преминем към координати получаваме $\vec{r}=(2,-1,1)=\xi(1,-1,0)+\eta(2,1,4)$ и след като приравним съответните координати получаваме системата

$$\left\{\begin{array}{rcr} \xi+2\eta & = & 2\\ -\xi+\eta & = & -1\\ 4\eta & = & 1 \end{array}\right.$$

за която е лесно да се види, че няма решение.

2.4.2 Изобщо не е трудно да се съобрази, че три вектора са некомпланарни точно тогава, когато матрицата на която редовете (или стълбовете) са координатите на векторите е обратима. Като илюстрация ще разгледаме пример 2.4.1. Очевидно имаме

$$\begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\\ \vec{r}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix} = A \begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix}$$

и е достатъчно да умножим горното равенство с

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -6 & -1 & 4\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

за да получим

$$\begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -6 & -1 & 4\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\\ \vec{r}\end{pmatrix}$$

което показва, че векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ образуват базис (и следователно са некомпланарни). Наистина, ако координатите на вектора $\vec{x}$ спрямо базиса $\mathcal{B}$ са $\vec{x} = (\xi, \eta, \zeta)$, то спрямо базиса $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ имаме $\vec{x} = (\xi, \eta, \zeta) \begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\\ \vec{c}\end{pmatrix} = (\xi, \eta, \zeta)A^{-1} \begin{pmatrix}\vec{p}\\ \vec{q}\\ \vec{r}\end{pmatrix}$. Значи

$$\vec{x} = (-5\xi - 6\eta + 4\zeta)\vec{p} + (-\xi - \eta + \zeta)\vec{q} + (4\xi + 4\eta - 3\zeta)\vec{r}$$

което означава, че *всеки вектор* е линейна комбинация на $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$. С други думи $\mathcal{C} = \{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ е база; в частност векторите от които се състои $\mathcal{C}$ са некомпланарни.

Матриците A и A^{-1} се нарича *матрица на прехода* (между базите $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$). Наричаме преход изразяването на координатите на даден вектор спрямо дадена база посредством координатите му спрямо друга база. По - горе видяхме например, че ако (ξ, η, ζ) са координатите на $\vec{x}$ в базиса $\mathcal{B}$, то за координатите му (λ, μ, ν) спрямо $\mathcal{C}$ имаме

$$\begin{cases} \lambda = -5\xi - 6\eta + 4\zeta \\ \mu = -\xi - \eta + \zeta \\ \nu = 4\xi + 4\eta - 3\zeta \end{cases}$$

или записано с матрици

$$\begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi & \eta & \zeta\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -6 & -1 & 4\\ 4 & 1 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi & \eta & \zeta\end{pmatrix} A^{-1}$$

След като умножим отдясно с A получаваме
$\begin{pmatrix}\xi & \eta & \zeta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & \mu & \nu\end{pmatrix} A$.

В много задачи изборът на базис е стандартна процедура и има за цел да съкрати някои протяжни пресмятания; както виждаме от горните примери изборът на базис се свежда до умножение с матрици.

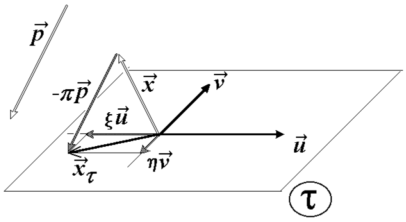
2.4.3 (а) Напишете координатите на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ спрямо базата $\mathcal{C}$.

(б) В базиса $\mathcal{C}$ е даден векторът $\vec{u} = (-2, -1, 3)$. Какви са координатите на $\vec{u}$ спрямо базиса $\mathcal{B}$?

2.4.4 Нека $\vec{u} = (2, -1, 1)$ и $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ са два (докажете *неколинеарни*) вектора. Всички компланарни с тях вектори лежат в (са успоредни на) една равнина τ. Свободните вектори в тази равнина, рзбира се, се определят от *базата* $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ в τ. Тоест, ако $\vec{q}$ е някой компланарен с $\vec{u}$ и $\vec{v}$ вектор, то $\vec{q} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, където (α, β) са координатите на

$\vec{q}$. За упражнение докажете, че векторът $\vec{q}(4,-1,7)$ е компланарен с $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Намерете координатите на $\vec{q}$ спрямо базата $\{\vec{u},\vec{v}\}$ в τ.

2.4.5 Нека $\vec{p}$ не е компланарен с $\vec{u}$ и $\vec{v}$; например нека $\vec{p}=(1,-1,-1)$. Тогава векторите $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{p}$ образуват база, да кажем $\mathcal{P}$. Ясно е, ако $\vec{x}(\alpha,\beta,\gamma)$ е *произволен* вектор, то той има някакви координати спрямо $\mathcal{P}$, да кажем (ξ,η,π).



Проекция

Нека $A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ е матрицата на прехода между $\mathcal{P}$ и $\mathcal{B}$. Имаме

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi&\eta&\pi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\\vec{v}\\\vec{p}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi&\eta&\pi\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\vec{a}\\\vec{b}\\\vec{c}\end{pmatrix}$$

От това следва, че $\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi&\eta&\pi\end{pmatrix}A$ и значи

$$\begin{pmatrix}\xi&\eta&\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\end{pmatrix}A^{-1}$$

Пресмятаме обратната на A:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\1&-3&-5\\0&1&1\end{pmatrix}$$

и записваме последното равенство по координати:

$$\begin{cases}\xi&=&\alpha+\beta\\\eta&=&-2\alpha-3\beta+\gamma\\\pi&=&-3\alpha-5\beta+\gamma\end{cases}$$

В частност

$$\begin{cases}\xi&=&\alpha+\beta\\\eta&=&-2\alpha-3\beta+\gamma\end{cases}$$

Да разгледаме сега вектора $\vec{x}_\tau=\xi\vec{u}+\eta\vec{v}$; той се нарича *проекция* на $\vec{x}$ в τ по направление, успоредно на $\vec{p}$ (вижте рисунката *Проекция*). От горните пресмятания получаваме, че

$$\vec{x}_\tau=(\alpha+\beta)\vec{u}+(-2\alpha-3\beta+\gamma)\vec{v}=(\alpha+\beta)(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})+(-2\alpha-3\beta+\gamma)(-\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$$

Следователно $\vec{x}_\tau$ има координати

$$\begin{cases}\alpha_\tau&=&4\alpha+5\beta-\gamma\\\beta_\tau&=&-3\alpha-4\beta+\gamma\\\gamma_\tau&=&-3\alpha-5\beta+2\gamma\end{cases}$$

което записано матрично изглежда така: $\begin{pmatrix}\alpha_\tau\\ \beta_\tau\\ \gamma_\tau\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$, където P е матрицата

$$\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ -3 & -4 & 1\\ -3 & -5 & 2\end{pmatrix}$$

Ще наричаме P *матрица на проектирането* в τ. Тя има различни важни геометрични свойства:

2.4.6 (а) Проверете, че $P^2 = P$.

(б) Всеки вектор, който е компланарен с $\vec{u}$ и $\vec{v}$ "издържа" на произведение с P. Например ако $\vec{q}$ е векторът от 2.4.4, проверете, че $P\vec{q} = \vec{q}$ (тук предполагаме, че координатите на $\vec{q}$ са записани като матрица стълб. Проверете също, че $P\vec{x}_\tau = \vec{x}_\tau$.

(в*) Докажете, че ако за някой вектор $\vec{w}$ е изпълнено $P\vec{w} = \vec{w}$, то $\vec{w}$ е компланарен с $\vec{u}$ и $\vec{v}$ (тоест лежи в τ).

(в**) Нека Q е ненулева (3×3) матрица, за която е изпълнено $Q^2 = Q$. Ако Q е обратима, то можем да умножим последното равенство с Q^{-1} за да получим $Q = E_3$, където E_3 е единичната (3×3) матрица. Да допуснем сега, че Q е необратима. Тъй като $Q \neq 0$, то рангът $r(Q)$ на Q е или 1, или 2. Ще разгледаме отделно двете възможности:

(в_1^{**}) ($r(Q) = 1$) Докажете, че съществува такъв ненулев вектор $\vec{u}$, че $Q\vec{x}$ е колинеарен с $\vec{u}$ *за всеки* вектор $\vec{x}$ (проекция върху права, успоредна на $\vec{u}$).

(в_2^{**}) ($r(Q) = 2$) Докажете, че съществуват два неколинеарни вектора $\vec{u}$ и $\vec{v}$, такива, че $Q\vec{x}$ е компланарен с $\vec{u}$ и $\vec{v}$ *за всеки* вектор $\vec{x}$ (проекция върху равнина, успоредна на $\vec{u}$ и $\vec{v}$).

2.4.7 *Упътване и коментар:* За да решим горните подусловия е полезно да открием тези вектори $\vec{x}$, за които $Q\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Разбира се векторът $\vec{x} = \vec{0}$ удовлетворява последното уравнение *за всяко* λ и тъкмо затова не представлява интерес. И така, търсим ненулеви вектори, за които $Q\vec{x} = \lambda\vec{x}$ при някое λ. Всеки такъв вектор се нарича *собствен вектор* на Q, а числото λ - *собствено число (стойност)* на Q.

2.4.7.0 Нека Q е произволна квадратна матрица. Множеството на всички собствени числа на Q се нарича *спектър* на Q.

Собствените числа и вектори на матрици са едни от основните понятия в теорията на матричното смятане. Те са важни за приложенията (в механиката, геометрията и др.), а също и за теорията на матричното смятане.

Да се върнем към задача 2.4.6 (в*) и (в**). Записваме равенството $Q\vec{x} = \lambda\vec{x}$ по следния начин: $Q\vec{x} = \lambda\vec{x} = E(\lambda\vec{x}) = \lambda E\vec{x}$, където E е единичната матрица и след това прехвърляме отляво: $Q\vec{x} - \lambda E\vec{x} = \vec{0}$; $(Q - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$. Съгласно казаното по-горе, това матрично уравнение търсим *ненулево* решение ($\vec{x} \neq \vec{0}$) на това матрично уравнение. Такова съществува само ако детерминантата $|Q - \lambda E|$ на тази система е нула.

И така, собствените числа са решения на алгебричното уравнение $|Q - \lambda E| = 0$. То е от степен 3, ако матрицата Q е 3×3 или от степен 2, ако Q е 2×2 - матрица. Например ако $Q = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, то

$$|q - \lambda E| = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

от което следва, че собствените числа на Q са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 3$.

Нека сега $\vec{x}$ и λ са съответно собствен вектор и собствена стойност на Q. Умножаваме отляво равенството $Q\vec{x} = \lambda\vec{x}$ с Q и получаваме $Q^2\vec{x} = \lambda Q\vec{x}$. Но $Q\vec{x} = \lambda\vec{x}$, значи $Q^2\vec{x} = \lambda Q\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$. И така, λ и λ^2 са собствени числа на Q. Умножавайки с Q получаваме, че собствени числа на Q^2 и Q^3 са съответно λ^3, λ^4 и така нататък. *Специално когато Q е матрица на проектиране, то $Q^2 = Q$ и значи $Q^3 = Q$, $Q^4 = Q$ и т.н.* Следователно λ^2, λ^3

и прочие са собствени числа и на Q. Но собствените числа на Q са най - много 3. Значи $\lambda^2 = \lambda$ и $\lambda^3 = \lambda$, тоест $\lambda = 0$ или $\lambda = \pm 1$. След това намираме собствените вектори на матрицата на проектирането P от задача 2.4.5 (докажете, че те са 0 и 1). При $\lambda = 1$ се получава

$$(P-E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 4-1 & 5 & -1 \\ -3 & -4-1 & 1 \\ -3 & -5 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и съответно системата е

(ev)
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 & = & 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Тя очевидно се свежда до уравнението $3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0$. Това уравнение има за решения например векторите $\vec{x} = (1, 0, 3)$ и $\vec{y} = (0, 1, 5)$.

Докажете, че *всяка линейна комбинация на $\vec{x}$ и $\vec{y}$* също е решение на **(ev)**. Проверете, че $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са решения на **(ev)** и значи всяка от двойките $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{x}$, $\vec{y}$ е база в множеството от векторите, компланарни с τ. Докажете също, че *всеки три решения* на **(ev)** са компланарни (и са компланарни с τ). Тъй като собствената стойност е 1, то за всеки собствен вектор (или, което е същото - за всеки вектор от τ) $\vec{x}$ имаме $P\vec{x} = \vec{x}$ (проектираме върху τ).

При $\lambda = 0$ получаваме

$$(P-E)\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и съответната система е

(ev1)
$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 & = & 0 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ -3x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Проверете, че векторът на проектирането $\vec{p} = (1, -1, -1)$ от 2.4.5 е решение на тази система. Нещо повече, докажете, че *всяко друго* решение има вида $t\vec{p}$ (проектирането е успоредно на $\vec{p}$).

2.4.7.1 Нека $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Q също е матрица на проектиране. По - точно докажете, че Q е матрица на проектирането върху права l, която е успоредна на вектора $\vec{p} = (1, 1, 1)$. При това проектирането се извършва успоредно на равнината, която минава през началото O и векторите $\vec{a} = (1, -1, 0)$ и $\vec{b} = (1, 0, -1)$.

2.4.7.2 Как изглежда проектирането в равнината π, определена от точката $M(1, 1, 1)$ и векторите $\vec{(a)} = (-2, 1, 0)$ и $\vec{b} = (1, 0, -1)$, което е успоредно

(а) на вектора $(1, 0, 0)$

(б) на вектора $(1, 0, 1)$.

2.4.7.3 Непрекъсната хомогенна среда е подложена на линейна деформация, при която базисната призма (т.е., призмата породена от базисните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$) се трансформира в призмата, породена от векторите $\vec{p} = \frac{1}{2}(3, 1, 1)$, $\vec{q} = \frac{1}{2}(1, 2, 0)$ и $\vec{r} = \frac{1}{2}(1, 0, 2)$. Какви са главните оси на деформацията? (Упътване: това са направленията, които се запазват при съответната деформация, тоест собствените вектори.)

Коментар: Покажете, че $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$ образуват базис. Линейната деформация трансформира всеки вектор $\vec{x}$ във вектора $D\vec{x}$, където D е матрица. Направлението $\vec{x}$ се запазва, ако $D\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (ако $\lambda > 0$ се запазва и посоката). Значи трябва да се намерят (ако, разбира се, има такива) собствените вектори на матрицата на прехода от базиса $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в базиса $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

От друга страна, собствените числа са важни характеристики на линейната деформация.

Отг. $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ и $\vec{p} = (-1, 1, 1)$, $\vec{q} = (0, 1, -1)$, $\vec{r} = (2, 1, 1)$

2.5 Координатни системи. Да фиксираме някоя точка O от пространството (или равнината) и нека $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ е база (в равнината, разбира се, базата е $\{\vec{a}, \vec{b}\}$). Всяка точка A определя свободния вектор $\vec{a}$ с представител $\overrightarrow{OA}$. Обратно, всеки свободен вектор $\vec{b}$ определя единствената точка B, за която $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Точката O (която понякога ще наричаме *начало*) и базата $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ ще наричаме *координатна система*. И така, нека $\mathcal{K} = \{O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ е координатна система. Посредством К можем да редуцираме всяка геометрична задача към набор алгебрични разсъждения. Наистина, разположението (спрямо К) на всяка точка A в равнината или пространството се определя от радиус векторът и $\overrightarrow{OA} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Тройката (α, β, γ) (в равнината е набор от две числа (α, β)) ще наричаме *координати* на точката A и ще пишем $A(\alpha, \beta, \gamma)$. Основните задачи тук се отнасят до изразяването на координатите на някоя точка или вектор по дадени геометрични условия:

2.5.1 а.) Дадени са точките $A(0, -2, 1)$ и $B(3, 4, 1)$. Да се пресметнат координатите на вектора $\overrightarrow{AB}$. Изобщо докажете, че ако $A(\alpha_A, \beta_A, \gamma_A)$ и $B(\alpha_B, \beta_B, \gamma_B)$, то $\overrightarrow{AB} = (\alpha_B - \alpha_A, \beta_B - \beta_A, \gamma_B - \gamma_A)$.

б.) Дадена е освен това и точката $C(1, 0, 1)$. Докажете, че точките A, B и C лежат на една права. Докажете също, че че C е разположена между A и B. В какво отношение дели C отсечката AB?

в.) Дадени са точките A, A', B и B', като $\overrightarrow{OA'} = 3\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB'} = 2\overrightarrow{OB}$ и A, B и O не лежат на една права. Докажете, че правите AB и $A'B'$ се пресичат в някоя точка P.

Ако A има координати $A(2, 1, 1)$ и $B(1, -1, -1)$, намерете координатите на P. Намерете отношението $\frac{|AP|}{|PB|}$.

Ще дадем схема на решението (Рис. 2.8):

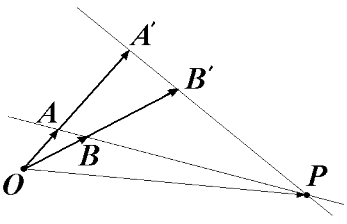


Рис. 2.8

Очевидно можем да разглеждаме векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ като база в равнината OAB. Спрямо *тази база* векторите $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OB'}$ имат координати съответно $A'(3, 0)$ и $B'(0, 2)$, значи векторът $\overrightarrow{A'B'}$ има съгласно подточка а.) координати $(-3, 2)$, а векторът $\overrightarrow{AB}$ с начало $A(1, 0)$ и край $B(0, 1)$ съответно е $(-1, 1)$. Ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ са успоредни, то трябва да има число t, за което $\overrightarrow{A'B'} = t\overrightarrow{AB}$. Значи $(-3, 2) = t(-1, 1) = (-t, t)$. Тоест трябва да е изпълнено $t = -3$ и $t = 2$ едновременно, което не е вярно. Значи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ не са успоредни, и следователно правите $A'B'$ и AB се пресичат в някоя точка P (защото лежат в една равнина и не са успоредни).

И така, P е обща за правите AB и $A'B'$. Това означава, че съществува λ, за което $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$ (защото $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{AP}$ и аналогично съществува μ, за което $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'P} = \overrightarrow{OA'} + \mu\overrightarrow{A'B'}$. Заместваме векторите с техните координати и получаваме $(1,0) + \lambda(-1,1) = (3,0) + \mu(-3,2)$; $(1-\lambda, \lambda) = (3-3\mu, 2\mu)$. От тук се получава системата $\begin{cases} 1-\lambda = 3-3\mu \\ \lambda = 2\mu \end{cases}$, която има решение $\lambda = 4$, $\mu = 2$. Заместваме например в $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB}$ и получаваме $\overrightarrow{OP} = (1,0) + 4(-1,1) = (-3,4)$. Да напомним, че това са координатите на P спрямо базата от вектори $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$; тоест $\overrightarrow{OP} = -3\vec{a} + 4\vec{b}$, където $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

Да напомним, че в условието на тази задача точките A и B бяха зададени посредством координатите си спрямо някаква система в пространството; тя очевидно има за начало точката O, изобразена на Рис. 2.8, но базисните и вектори са различни. Тоест дадено ни е, че $\vec{a} = (2,1,1)$ и $\vec{b} = (1,-1,-1)$. Заместваме $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в израза за $\overrightarrow{OP}$ и получаваме $\overrightarrow{OP} = (-2,-7,-7)$. Пресметнете търсеното отношение самостоятелно.

Ще разгледаме още няколко примера, които са типични за приложенията на линейните операции с вектори (събиране и умножение с число) при решаването на различни основни геометрични задачи.

2.5.2 Всъщност вече беше показано как можем да разпознаем дали някоя точка лежи върху дадена права. Да разгледаме проблема с пример: дадени са точката $A(1,-1,2)$ и векторът $\vec{e}(1,2,3)$. За тази цел е добре да си спомним условията, които трябва да удовлетворяват координатите на точката $M(x,y,z)$, за да сме сигурни, че M принадлежи на правата l, която е успоредна на $\vec{a}$ и съдържа A. Напомняме, че $\vec{x}$ е радиус векторът на X, т.е. $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$.

Ясно е, че за това е необходимо и достатъчно векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\vec{a}$ да са успоредни. Тъй като $\vec{e} \neq \vec{0}$, то това е изпълнено точно когато съществува t, за което $\overrightarrow{AM} = t\vec{e}$. Значи $\vec{m} - \vec{a} = t\vec{e}$. Равенството

(le) $$l : \vec{m} = \vec{a} + t\vec{e}$$

се нарича *векторно параметрично* уравнение на правата l. Разбира се, то служи за да разпознаваме дали някоя точка принадлежи на l или не. Можем да запишем **(le)** с координати; ще се получи

(lec) $$l : \begin{cases} x &= \quad 1+t \\ y &= \; -1+2t \\ z &= \quad 2+3t \end{cases}$$

и след като използваме, че $t = \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$ получаваме уравненията

(cle) $$l : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$

които обикновено се наричат *канонични уравнения* на правата l.

2.5.3 Напишете векторните и канонични уравнения на правите, които са определени от

(а) точката $A(-1,0,0)$ и векторът $\vec{e}(2,0,1)$ (внимание: разпознайте как е разположена правата l спрямо координатната система).

(б) точката $A(-2,1,0)$ и векторът $\vec{e}(2,-1,0)$ (забележете, че радиус векторът на A и $\vec{e}$ са разположени в първата координатна равнина - значи не е необходимо да пишем три координати - по този начин преминаваме към "равнинни" координати).

2.5.3.1 (а) Напишете всички възможни уравнения на правата, която минава през $A(-1,-1,3)$ и е успоредна на $\vec{e}(1,-1,1)$.

(б) Същото за $A(1,0,1)$ и $\vec{e}(3,-2,0)$.

2.5.4 Разбира се, няма значение дали уравнението **(le)** се разглежда в "равнината" или "пространството". Ще отбележим, че съгласно съвременните схващания, "векторите" могат да бъдат елементи и на "многомерни" (повече от 3) "векторни пространства", в които **(le)** също описва "прави линии". В тези записки обаче няма да се занимаваме с "многомерни" неща; все пак тук разчитаме отчасти и на "сетивното" отношение на читателя към геометричните обекти :-).

2.5.5 Нека $A(-1,2)$ и $\vec{e}(1,-2)$ са съответно точка и вектор от някоя равнина. Те определят права l, която минава през A и е успоредна на $\vec{e}$. Съгласно **(lec)** уравнението и е $l : \vec{m} = \vec{a} + t\vec{e}$, което означава, че $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2}$.

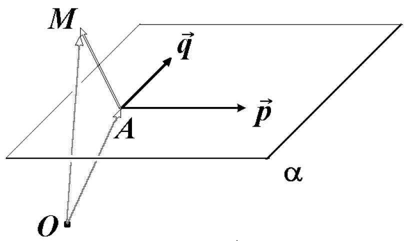
Последното равенство очевидно може да бъде записано така: $l : 2x + y = 0$. Това също се нарича уравнение на правата l (казано по - точно; *общо уравнение* на правата l).

2.5.6 Обратно, ако в някоя равнина вземем координатна система и разгледаме всички точки $M(x,y)$, чиито координати удовлетворяват уравнение от типа $ax + by + c = 0$, то те описват някаква права. Разгледайте и нарисувайте правите: $l : x-y+1 = 0$; $l : 2x-y-2 = 0$; $l : 0{\cdot}x - y + 1 = 0$ като си нарисувате поне две различни координатни системи - например с остър и тъп ъгъл между координатните оси.

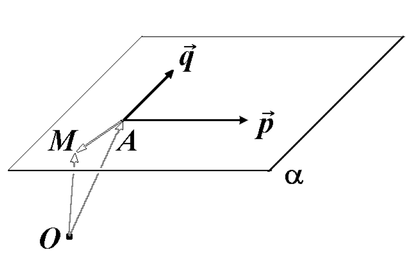
От последното упражнение е видно, че разположението на *геометричният обект* права, който се описва например от уравнението $y = 1$ зависи от избора на координатна система. След като веднъж е фиксирана някаква система обаче *всякакви свойства* на геометричните обекти се описват напълно от техните алгебрични уравнения.

2.5.7 Да предположим, че са дадени точката $A(-1,1,2)$ и векторите $\vec{p}(1,0,2)$ и $\vec{q}(2,-1,1)$. Тъй като $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не са успоредни, то съществува единствена равнина α, която минава през A и е успоредна на $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Нека освен това ни е дадена точката $M(x,y,z)$. Можем да разпознаем дали M лежи в равнината α по различни начини. В 2.4.2 например е предложено правило, посредством който можем да разпознаем дали три *вектора* лежат в една равнина или не.

Но точката M лежи в α тогава и само тогава, когато векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{AM}$ лежат в една равнина (вижте следващите рисунки).



Векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{AM}$ не лежат в една равнина



Векторите $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{AM}$ лежат в една равнина

Тъй като $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{AM}$ има координати $\overrightarrow{AM}(x+1, y-1, z-2)$. Следователно условието M да лежи в α е

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Пресметнете горната детерминанта, за да получите $2x + 3y - z + 1 = 0$. Това равенство се нарича *уравнение на равнината* α. То означава, че точката M лежи в α точно когато координатите и удовлетворяват уравнението на α. Например точката $(2, -1, 3)$ не лежи в α, защото $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 3 + 1 = -3 \neq 0$. От друга страна точката $(0, 0, 3)$ очевидно се съдържа в α. Тя също така принадлежи и на третата координатна ос - в точка, която е на разстояние три дължини на третия координатен вектор в положителна посока от началото O.

Нарисувайте координатна система и равнината α в нея. Изобщо уравнението на дадена равнина съдържа пълна информация за нея и позволява да се решават различни задачи свързани с въпросната равнина.

2.5.7.1 Същото се отнася и за уравненията на правите. Така например можем да изследваме как са разположени правата l, уравнението на която е **(cle)** и равнината α. За да разберем дали l и α се пресичат е достатъчно да решим системата от уравненията на l и уравнението на α:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$$
$$2x + 3y - z + 1 = 0$$

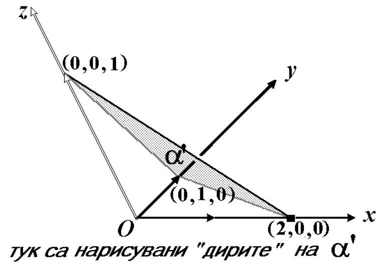
Тази система има единствено решение $x = \frac{7}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$ и $z = \frac{16}{5}$ (решете я самостоятелно). Това означава, че α и l се пресичат и точката $X(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{16}{5})$ е пробода на α с l.

2.5.7.2 Проверете, че точките $A(1, 3, -1)$, $B(0, 4, -1)$ и $C(1, 2, -2)$ не лежат на една права и напишете уравнението на равнината β, която минава през тях.

Упътване: Въпросната равнина е успоредна на (неколинеарните) векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и минава през точката A.

2.5.7.2.1 Нека a, b, c и d са някакви числа (понякога ще ги наричаме *коефициенти*) и да предположим, че сме фиксирали някаква координатна система. Ще изучим геометричното място α на тези точки $M(x, y, z)$, за координатите на които е ипълнено $ax + by + cz + d = 0$. Разбира се, "изродените" случаи не са интересни - ако всички коефициенти например са нули, то *всички* точки са от α. Друг такъв случай е когато $a = b = c = 0 \neq d$. Ясно е, че такива точки няма, тоест α е празното множество.

2.5.7.2.2 Да разгледаме например уравнението $x + 2y + 2z - 2 = 0$. Ще покажем, че α е равнина. За тази цел да разгледаме три решения на уравнението $x + 2y + 2z - 2 = 0$, които ще тълкуваме като *координати на точки*. Тъй като имаме едно уравнение с три неизвестни, то е нормално да се очаква, че ще има безброй много решения. И то наистина има; типичният подход тук е да дадем произволни стойности на две от неизвестните и да определим третата. При което ако и *и трите коефициента* не са нули, то стандартен похват е да видим дали има точки от α, които са от координатните оси. И така, полагаме $y = z = 0$ и получаваме, че точката $A(2, 0, 0)$ принадлежи на α. По същия начин разбираме, че точките $B(0, 1, 0)$ и $C(0, 0, 1)$ също принадлежат на α (вижте рисунката). И тъй като тези три точки *очевидно* не лежат на една права, те определят една (в смисъл на *единствена*:-) равнина, да кажем α'.



"Дирите" на дадена равнина са правите, по които тя пресича "координатните" равнини.

2.5.7.2.3 Да напишем уравнението на α':

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

което след пресмятане дава $x+2y+2z-2=0$. Авторът си позволява известна лукавост, но *вземете три произволни неколинерни* решения (например точките $A_1(2,1,-1)$, $B_1(-4,0,3)$ и $(-1,2,0)$) на $x+2y+2z-2=0$ и ще се убедите, че уравнението на геометричното място α_1 е същото или сходно на α' (тоест е от вида $lx+2ly+2lz-2l=0$ за някое l). Изобщо, вземете *произволни* уравнения и техни решения и експериментирайте какво се получава.

2.5.7.3 (а) Нека равнината β има уравнение $x-y-3z=0$. Докажете, че равнините α и β не са успоредни. Това означава, че се пресичат по някоя права m.

(б) Напишете уравненията на m (Упътване: намерете две точки от m).

(в) Кръстосани ли са правите l (от 2.5.2) и m?

(г) Същото за правите от 2.5.3 и 2.5.3.1.

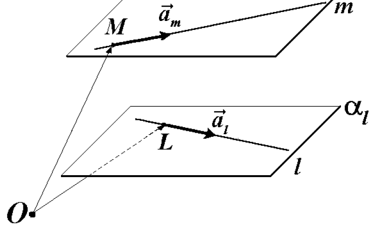
2.5.7.3.1 (а) Докажете, че равнините $\alpha: 3x-2y+z-6=0$ и $\beta: 9x-6y+3z+100=0$ са успоредни.

(б) Вярно ли е твърдението, че уравнението на *всяка* равнина, която е успоредна на α може да бъде записано по следния начин: $\alpha: 3x-2y+z+u=0$ за някое u.

(в) Изобщо докажете, че уравнението *всяка* равнина, която е успоредна на $\alpha: ax+by+cz+d=0$ може да бъде записано във вида $ax+by+cz+u=0$, където u е произволно число.

2.5.7.4 Намерете координатите на пробода на всяка от равнините α и β с всяка от правите от точки 2.5.3 и 2.5.3.1.

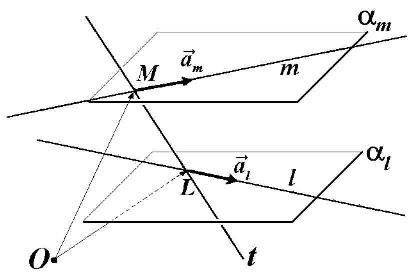
2.5.7.5 Всеки две кръстосани прави m и l определят двойка успоредни равнини α_m и α_l, всяка от които съдържа по една от правите. На следващата рисунка, всяка от тези равнини е успоредна на m и l (или на "направляващите" вектори $\vec{a}_m$ и $\vec{a}_l$) едновременно и минава през (някоя) точка от съответната права.



Равнините α_m и α_l са успоредни на m и l

Напишете уравненията на равнините, определени от правите 2.5.7.3 (в) и 2.5.7.3 (г).

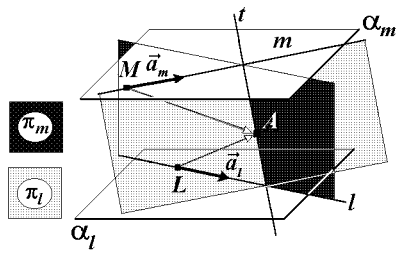
2.5.8 *Трансверзала* на кръстосаните прави l и m се нарича всяка права t, която ги пресича.



Правата t е трасверзала на m и l

През *всяка* точка A, която не лежи на α_m и α_l преминава единствена трансверзала. Наистина, равнината π_l през L, която е успоредна на $\vec{a}_l$ и $\overrightarrow{LA}$ съдържа правата l и точката A. Тази равнина е коректно определена, тъй като векторите $\vec{a}_l$ и $\overrightarrow{LA}$ *не са успоредни*(защо?). Аналогично векторите $\vec{a}_m$, $\overrightarrow{MA}$ и точката M определят равнината π_m, която съдържа точката A и правата m.

Равнините π_m и π_l не са успоредни и следователно се пресичат по някоя права t. На следната рисунка се вижда, че t съдържа точката A пресича правите m и l.



Правата t пресича l защото l е пресечница на π_l и $\vec{a}_l$. Аналогично t пресича и m.

2.5.9 Посредством своите векторни параметрични уравнения са дадени правите $l : \vec{p} = t(1,0,0)$ и $\mu : \vec{q} = (1,1,1) + \tau(0,0,1)$. Напишете уравненията на тяхната трансверзала, която минава през точката $A(1,2,3)$.

Упътване: Правата l минава през точката $O(0,0,0)$ и е успоредна на вектора $\vec{a}_l(1,0,0)$. Следователно уравнението на равнината π_l, която е успоредна на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{a}_l$ е

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

или $-3y + 2z = 0$, за равнината π_m, която съдържа m (и значи точката $M(1,1,1)$) и е успоредна на векторите $\overrightarrow{MA} = (0,1,2)$ и $\vec{a}_m$ имаме

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

от където следва, че $\pi_m : x - 1 = 0$. С други думи трансверзалата t е пресечница на равнини:

$$t : \begin{cases} -3y + 2z & = & 0 \\ x - 1 & = & 0 \end{cases}$$

Да забележим, че последните равенства описват t; когато някоя права е описана като пресечница на две равнини системата от техните уравнения се нарича *общо уравнения* на съответната права. Ако искаме да напишем например каноничните уравнения на t е достатъчно да вземем две различни точки от нея. Тоест две различни решения на системата $\begin{cases} -3y+z &= 0 \\ x-1 &= 0 \end{cases}$ Това са например точките $P(1,0,0)$ и $Q(1,4,6)$. Векторът $\vec{a}_t = \overrightarrow{PQ} = (0,4,6)$ е успореден на t, и t минава през P. Значи t има векторно параметрично уравнение $t : \vec{t} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{a}_t = (1,0,0) + \lambda(0,4,6)$, където λ е параметър. Записано с координати последното изглежда така:

$$\begin{cases} x &= 1+0\cdot\lambda \\ y &= 0+4\lambda \\ z &= 0+6\lambda \end{cases}$$

Както в 2.5.2 можем да напишем каноничните уравнения на t след като решим горните уравнения спрямо параметъра λ. Това обаче не може да се направи с първото уравнение, защото то не зависи от λ. Всъщност от горните уравнения се получава, че $x = 1$ и $\lambda = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$. Въпреки това в литературата (и за по - кратък запис) е прието да се пише $t : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$, като се подразбира, че непременно $x = 1$ и $\frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \lambda$.

2.5.9.1 Да видим в кои точки t пресича l и m. Ако например (x_m, y_m, z_m) са координатите на пресечната точка на m и t, то те се получават при някоя стойност на τ и някоя стойност на λ. Значи трябва да са изпълнени равенствата $x_m = 1 = 1$, $y_m = 1 = 4\lambda$ и $z_m = 1+\tau = 6\lambda$. Първото от тях е тъждество, второто се изпълнява при $\lambda = \frac{1}{4}$, а третото при $\lambda = \frac{1}{4}$ и $\tau = \frac{1}{2}$. Значи общата точка има координати $(1, 1, \frac{3}{2})$.

2.5.9.2 Изобщо така се намира общата точка на две прави, ако, разбира се те се пресичат. Иначе системата няма решение. Ето няколко примера:

(а) Нека $l : \vec{l} = (-1,1,2) + t(0,1,2)$ и $m : \vec{m} = (1,0,1) + \tau(2,1,0)$ са уравненията на правите l и m. Ако те имат обща точка $M(x,y,z)$, то за някои стойности на параметрите t и τ имаме:

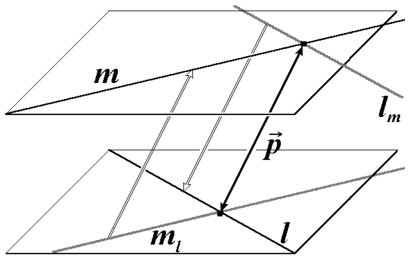
$$\begin{cases} x &= -1 &= 1+2\tau \\ y &= 1+t &= \tau \\ z &= 2+2t &= 1 \end{cases}$$

след което от първото равенство получаваме, че $\tau = -1$, от второто следва, че $t = -2$ и след като заместим в третото се получава $-2 = 1$. Значи горните равенства са противоречиви, няма такива стойности на параметрите и правите m и l не се пресичат. От това следва, че те са кръстосани или успоредни. Че не са успоредни следва от това, че "направляващите" вектори $(2,1,0)$ и $(0,1,2)$ очевидно не са успоредни.

(б) Дадени са правите $l : \vec{l} = \overrightarrow{OL} + t\vec{a}_l$ и $m : \vec{m} = \overrightarrow{OM} + \tau\vec{a}_m$. Установете взаимното им разположение и ако лежат в една равнина, напишете уравнението и. Ако се пресичат, пресметнете също така координатите на общата им точка, при условие, че: $\overrightarrow{OL} = (0,0,3)$, $\vec{a}_l = (3,5,1)$, $\overrightarrow{OM} = (1,1,4)$ и $\vec{a}_m = (1,3,-1)$; $\overrightarrow{OL} = (1,0,3)$, $\vec{a}_l = (3,5,1)$, $\overrightarrow{OM} = (1,1,4)$ и $\vec{a}_m = (1,3,-1)$; $\overrightarrow{OL} = (4,1,3)$, $\vec{a}_l = (2,-2,1)$, $\overrightarrow{OM} = (1,0,3)$ и $\vec{a}_m = (-4,4,-2)$; $\overrightarrow{OL} = (1,3,3)$, $\vec{a}_l = (1,0,1)$, $\overrightarrow{OM} = (2,1,1)$ и $\vec{a}_m = (1,1,-1)$; $\overrightarrow{OL} = (4,-3,1)$, $\vec{a}_l = (-3,1,-1)$, $\overrightarrow{OM} = (3,1,5)$ и $\vec{a}_m = (2,3,-1)$.

2.5.9.3 Нека са дадени кръстосаните прави l и m и нека векторът $\vec{p}$ е некомпланарен с тях (тоест направляващите вектори $\vec{a}_m$, $\vec{a}_l$ и $\vec{p}$ са некомпланарни). Можем да прекараме равнини π_m и π_l, които съдържат съответно правите m и l и са успоредни на $\vec{p}$. Тяхната пресечница е трансверзала, която е успоредна на вектора $\vec{p}$. На следващата рисунка това са равнините π_l и π_m, които минават съответно през правите m и l и "двупосочния" вектор $\vec{p}$ -

ясно е, че разположението на тези равнини не зависи от посоката, а само от *направлението* на $\vec{p}$.



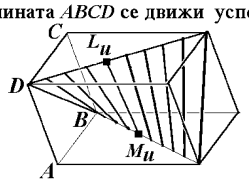
Правата t пресича l, защото l е пресечница на π_l и $\vec{a}_l$. Аналогично t пресича и m.

Убедете се сами, че за да нарисуваме някоя от равнините π_l или π_m е достатъчно да построим успоредната и на $\vec{p}$ проекция (m_l или l_m) на едноименната и права.

Нека $\vec{p} = (1, -2, 3)$. Пресметнете уравненията на трансверзалата, успоредна на $\vec{p}$ на правите с уравнения: $l : \vec{l} = (-1, 0, 2) + t(1, 1, 2)$ и $m : \vec{m} = (1, 1, 1) + \tau(2, 1, 1)$; $l : \vec{l} = (0, 0, 1) + t(2, 1, 2)$ и $m : \vec{m} = (1, 0, 1) + \tau(1, 2, 2)$; $l : \vec{l} = (3, 4, 2) + t(-3, 1, 2)$ и $m : \vec{m} = (1, 0, 1) + \tau(2, 1, 0)$.

2.5.10 Понякога представляват интерес (например в строителната наука) множество от трансверзали на фиксирани кръстосани прави, които имат някакво свойство. Като пример ще разгледаме всички трансверзали, които са успоредни на дадена равнина. Ясно е, че ако никоя от правите l и m не е успоредна на равнината α, то *всяка равнина* α_u, която е успоредна на α пресича всяка от правите m и l в (по една) точка M_u и L_u и, разбира се, трансверзалата M_uL_u е успоредна на α_u (виж 2.5.7.3.1 (в)).

Равнината *ABCD* се движи успоредно на



себе си и пресича правите *m* и *l* в M_u и L_u.
Трансверзалите M_uL_u описват повърхнина.

Да разгледаме като пример успоредните равнини $\alpha_u : x + y + z - u = 0$ и правите $l : \vec{l} = (0, 0, 0) + \tau(1, 0, 0)$ и $m : \vec{m} = (1, 1, 0) + \tau(0, 0, 1)$.

За пробода на l с α_u получаваме $t = u$ и $L(u, 0, 0)$, съответно $\tau = u - 2$ и $M(1, 1, u - 2)$ (просто заместете координатите на $\vec{l}$ и $\vec{m}$ в уравнението на α_u).

За да напишем уравнението на трасверзалата M_uL_u пресмятаме координатите на $\overrightarrow{M_uL_u}$: $\overrightarrow{M_uL_u} = \overrightarrow{OL_u} - \overrightarrow{OM_u} = (1 - u, 1, u - 2)$. Значи имаме

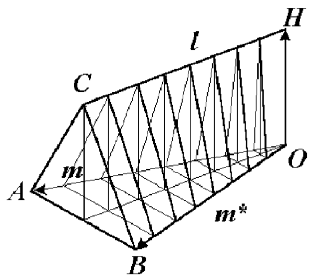
$$(\mathcal{H}) \qquad \begin{cases} x &= u + \lambda(1 - u) \\ y &= \lambda \\ z &= \lambda(u - 2) \end{cases}$$

Тази система уравнения описва множеството $(\mathcal{H})$ от всички точки в пространството, които лежат на трасверзалите, успоредни на α_u. Параметрите λ и u могат да приемат произволни стойности и по такъв начин се получават точките от $(\mathcal{H})$. За да намерим каква е зависимостта между x, y и z е достатъчно да *изключим* параметрите u и λ от $(\mathcal{H})$. Това означава да решим две от уравненията $(\mathcal{H})$ и да заместим резултата в третото: $\lambda = y$; $u = \frac{z}{y} + 2$ и заместваме в първото уравнение: $x = \frac{z}{y} + 2 + y(1 - 2 - \frac{z}{y})$; $xy = y + z - yz$. Последното равенство се нарича *уравнение* на $(\mathcal{H})$. Обикновено записваме това така:

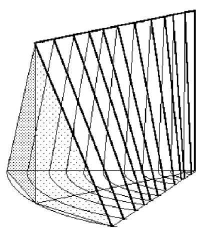
$$\mathcal{H} : xy + yz - y - z = 0.$$

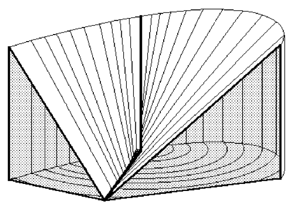
Разбира се, горното уравнение описва геометричното място на тези точки, които лежат на трасверзали, успоредни на α_u. В нашия случай това е повърхнина (хиперболичен параболоид).

2.5.10.1 Напишете уравнението на повърхнините, нарисувани на следващата рисунка. Там базата се състои от векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{h} = \overrightarrow{OH}$, триъгълникът OAB е равнобедрен; $|OA| = |OB| = a$; $|\overrightarrow{OH}| = h$ и $\overrightarrow{OH}$ е перпендикулярен на равнината на основата, l е успоредна на медианата (и ъглополовящата), а m и m^* са страните на триъгълника OAB.



2.5.10.2* Напишете уравненията на повърхнините, изобразени на следната рисунка (упътване: изберете подходяща координатна система)





3. Произведения на вектори.

До тук разглеждахме само произведения на вектори с числа. В следващия текст ще дефинираме две важни операции между вектори, известни като "умножения". Резултатите от тези операции се наричат "произведения", защото имат някои свойства, близки до свойствата на произведението на числа. Ще видим все пак по-долу, че тези произведения описват важни феометрични свойства на равнината и пространството и имат и свойства, които не са присъщи на произведението на числата.

Тъй като едното от тези произведения е число (скалар), а другото е вектор, те се наричат съответно *скаларно произведение* и *векторно произведение*.

3. Скаларно произведение. Скаларното произведение на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$, означавано с $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\vec{a}\vec{b}$ обикновено се дефинира като произведението на техните дължини и косинусът на ъгъла, който те сключват:

(sp) $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})$$

3.0 Коментар На "непредубеденият" читател тази дефиниция вероятно изглежда изкуствена и "немотивирана". Следващият текст има за цел да покаже, че тя има сериозен геометричен смисъл.

В **(sp)** $(\vec{a},\vec{b})$ означава най-малкия ъгъл с положителен знак между векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако някой от векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$ е нулев, то полагаме $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ (забележете, че тогава ъгълът $(\vec{a},\vec{b})$ не е определен). И така, скаларното произведение е *число*, което е положително, отрицателно или нула, в зависимост от това дали ъгълът $(\vec{a},\vec{b})$ е остър, тъп или прав.

Следователно за *ненулеви* вектори от $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ следва, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са перпендикулярни. Когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са успоредни, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$ или $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$ в зависимост от това дали $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имат еднакви или противоположно посоки. В частност за "квадратът" на $\vec{a}$ имаме $\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Тоест $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}$. От дефиницията следва, че

(sp1) $$(-\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(-\vec{b}) = -\vec{a}\cdot\vec{b}\ ;\ (-\vec{a})\cdot(-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\ ;\ (\alpha\vec{a})\cdot(\beta\vec{b}) = \alpha\beta\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Последният резултат е очевиден, когато α и β са положителни числа, останалите случаи следват от предните равенства. От дефиницията получаваме също така, че

(sp2) $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

Да забележим, че няма смисъл да говорим за асоциативен закон, защото няма скаларно произведение на *три* (или повече) вектори. Все пак убедете се самостоятелно, че $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

Важно свойство на скаларното произведение е неговата *дистрибутивност*:

(sp3) $$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$$

За да докажем **(sp3)** ще разгледаме дефиницията на скаларно произведение по-подробно. Нека l е ос, върху която е фиксиран еднопосочен с нея единичен вектор $\vec{e}$ и $\vec{c}$ е някакъв вектор. Вземаме някой представител на $\vec{c}$ и прекарваме през началото и края му прави (ако е в пространството - равнини), перпендикулярни на l. Те пресичат l в две точки, които са начало и край на вектор върху l. Ще го отбелязваме с $\vec{c}_\pi$ (Рис. 3.1). Следва да отбележим, че от Рис. 3.1 се вижда, че проектирането на вектор върху ос е дистрибутивно. Това означава, че ако $\vec{d} = \vec{c}+\vec{b}$, то $\vec{d}_\pi = \vec{c}_\pi + \vec{b}_\pi$ (доказателството се съдържа в Рис. 3.1).

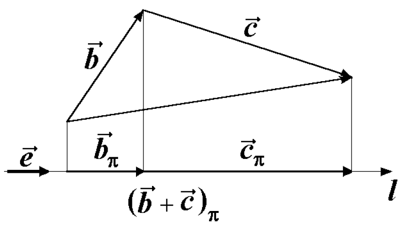


Рис. 3.1

Векторът $\vec{c}_\pi$ се нарича *ортогонална проекция* на $\vec{c}$ върху оста l.

3.0.1 Коментар *Впрочем спомнете си предходния текст: - там показахме, че при фиксирана координатна система проекцията е резултат на умножение с матрица. Значи ако P е матрицата на проектирането, то **за всеки вектор** $\vec{v}$ имаме $\vec{v}_\pi = P\vec{v}$ (стига да записваме $\vec{v}$ като стълб). Но тогава очевидно*

$$(\vec{c}+\vec{b})_\pi = P(\vec{c}+\vec{b}) = P\vec{c}+P\vec{b} = \vec{c}_\pi + \vec{b}_\pi.$$

Все пак по наше мнение рисунката в този случай е достатъчен аргумент. И така, тъй като $\vec{e}$ и $\vec{c}_\pi$ са колинеарни, то съществува число c_π, за което $\vec{c}_\pi = c_\pi\vec{e}$. c_π се нарича *компонента на $\vec{c}$ върху l*. Убедете се сами, че $c_\pi = |\vec{c}|\cos(\vec{c}, l) = |\vec{c}|\cos(\vec{c}, \vec{e})$, където $(\vec{c}, l)$ е елементарният ъгъл между $\vec{c}$ и l (рис. 3.1).

Нека сега $\vec{a}$ е еднопосочен с l вектор. Ясно е, че $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}$ и значи за всеки вектор $\vec{d}$ е изпълнено $\vec{a}\cdot\vec{d} = |\vec{a}|\vec{e}\vec{d} = |\vec{a}||\vec{d}|\cos(\vec{d}, \vec{e}) = |\vec{a}|d_\pi$. Значи ако $\vec{d} = \vec{b}+\vec{c}$, то $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|(\vec{b}+\vec{c})_\pi = |\vec{a}|(b_\pi + c_\pi) = |\vec{a}|b_\pi + |\vec{a}|c_\pi = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$.

Дистрибутивността на скаларното произведение е важно свойство. То позволява с прости алгебрични пресмятания да достигаме до неочевидни геометрични резултати. Ето някои примери:

3.1.0 Задача. а.) Да разгледаме детерминантата $G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}^2 \end{vmatrix}$, образувана от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажете, че $G(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ тогава и само тогава, когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

Решение: Нека $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ са представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с начало точката C.

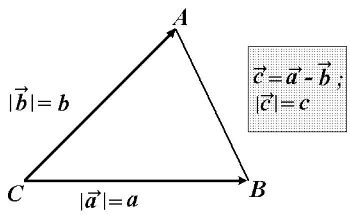


Рис. 3.1.1

Тук (понякога и в следващия текст) с x ще означаваме дължината на вектора $\vec{x}$. Тоест a, b и c са дължините на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{a}-\vec{b}$. Да забележим след това, че от равенството $\vec{c}^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$ следва, че $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$. Заместваме скаларното произведение в $G(\vec{a}, \vec{b})$ и получаваме $G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \\ \frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) & \vec{b}^2 \end{vmatrix} = a^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2$.

Значи имаме

$$G(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{4}(4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2) = \frac{1}{4}(2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) =$$

$$\frac{1}{4}((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)=\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$$

От Хероновата формула следва, че $G(\vec{a},\vec{b})=4S^2_{\triangle ABC}=S^2$, където S е лицето на успоредика $CBDA$, чиито страни CB и CA са представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 3.1.2).

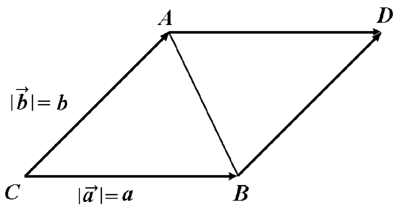


Рис. 3.1.2

Ще казваме, че успоредникът $CBDA$ е *породен* от (или е опънат на) векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Очевидно, ако $\vec{a}||\vec{b}$, то за някое λ имаме $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ и значи

$$G(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{a}^2 & \lambda\vec{a}^2\\ \lambda\vec{a}^2 & \lambda^2\vec{a}^2\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\vec{a}^2 & \vec{a}^2\\ \lambda\vec{a}^2 & \lambda\vec{a}^2\end{vmatrix}=\lambda^2\begin{vmatrix}\vec{a}^2 & \vec{a}^2\\ \vec{a}^2 & \vec{a}^2\end{vmatrix}=0$$

С други думи, $G(\vec{a},\vec{b})\geq 0\ \forall\vec{a},\vec{b}$ и геометричния смисъл на детерминантата $G(\vec{a},\vec{b})$ е ясен - тя е равна на квадрата на лицето на успоредника, породен от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б.)Докажете, че ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неколинеарни вектора и $\vec{c}$ е компланарен с тях, то от $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ и $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ следва, че $\vec{c}=\vec{0}$. Решение: Наистина, очевидно $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват база, следователно $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. Сега умножаваме това равенство съответно с $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $0=\vec{a}\cdot\vec{c}=\alpha\vec{a}^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}$ и $0=\vec{b}\cdot\vec{c}=\alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta\vec{b}^2$. От 3.1.0 а.) получаваме, че системата $\begin{cases}\alpha\vec{a}^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta\vec{b}^2 &= 0\end{cases}$ има единствено решение $\alpha=\beta=0$.

3.1.0.1 Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неколинерни вектора, на които са построени представители с начало в точката O. Да положим

$$\vec{N}_{\vec{a}}(\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b}\\ \vec{a}^2 & \vec{a}\vec{b}\end{vmatrix}=(\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}^2)\cdot\vec{b}$$

Докажете, че $\vec{N}_{\vec{a}}(\vec{b})$ е перпендикулярен на $\vec{a}$ и представителят му с начало в O лежи в различна полуравнина с представителя на $\vec{b}$ (Рис. 3.1.0.1).

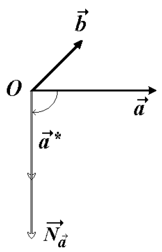


Рис. 3.1.0.1

Дължината на $\vec{N}_{\vec{a}}$ е равна на $|\vec{N}_{\vec{a}}(\vec{b})|^2=((\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{a}-(\vec{a}^2)\cdot\vec{b})^2=(\vec{a}\vec{b})^2a^2+a^4b^2-2a^2(\vec{a}\vec{b})^2$, $|\vec{N}_{\vec{a}}(\vec{b})|^2=a^2(a^2b^2-(\vec{a}\vec{b})^2)$; следователно $|\vec{N}_{\vec{a}}|=|\vec{a}|\sqrt{G(\vec{a},\vec{b})}$.

От тук следва, че векторът $\vec{a}^*_{\vec{b}} = \frac{1}{\sqrt{G(\vec{a},\vec{b})}}\vec{N}_{\vec{a}}$ *е получен от $\vec{a}$ посредством ротация на* 90° *в посока, "противоположна" на $\vec{b}$.* Наистина, забележете, че дължината на $\vec{a}^*_{\vec{b}}$ е равна на $|\vec{a}|$.

3.1.1 Задача. а.) Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{h}$ са дадени вектори. Докажете, че е вярно равенството:

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{h}-\vec{c})+(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{h}-\vec{a})+(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{h}-\vec{b})=0 \tag{a.}$$

Упътване: Разкриваме скобите по същия начин както при действия с числа.

б.) Докажете, че височините във всеки триъгълник се пресичат в една точка. Упътване: Нека радиус-векторите на върховете A, B и C на $\triangle ABC$ са съответно векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Да прекараме две височини в $\triangle ABC$; например през B и C и нека те се пресичат в точка $H(\vec{h})$. За да решим задачата е достатъчно да покажем, че AH е височина. По построение $\vec{h}-\vec{b}$ е перпендикулярен на $\vec{c}-\vec{a}$. Значи $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{h}-\vec{b})=0$. Аналогично $\vec{h}-\vec{c}$ е перпендикулярен на $\vec{a}-\vec{b}$ и значи $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{h}-\vec{c})=0$. По този начин тъждеството а.) приема вида $(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{h}-\vec{a})=0$, което означава, че $\overrightarrow{AH}$ е перпендикулярен на $\overrightarrow{BC}$. С други думи AH е височина, което и трябваше да се докаже.

в.) Аналогично тъждеството

$$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\left(\vec{k}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+(\vec{b}-\vec{c})\cdot\left(\vec{k}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)+(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{k}-\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)=0 \tag{dc}$$

показва,че симетралите на страните на всеки триъгълник се пресичат в една точка K - *центъра на описаната окръжност.*

г.) И така, ако $\vec{h}$ и $\vec{k}$ са съответно ортоцентъра и центъра на описаната окръжност, то всяко събираемо в тъждества а.) и в.) се анулира (т. е. е равно на нула). От тук следва, че $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{h}-\vec{c})=0$ и $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{k}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2})=0$, от където следва, че $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{h}+2\vec{k}-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})=0$ ili $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{h}+2\vec{k}-3\vec{g})=0$, където $\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ е радиус вектора на медицентъра. Аналогично получаваме $(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{h}+2\vec{k}-3\vec{g})=0$ и $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{h}+2\vec{k}-3\vec{g})=0$, което показва, че $\vec{h}+2\vec{k}-3\vec{g}=\vec{0}$ (вж. 3.1.0). От тук получаваме, че $\vec{g}=\frac{1}{3}\vec{h}+\frac{2}{3}\vec{k}$. От тук следва, че медицентърът на всеки триъгълник лежи на отсечката, съединяваща ортоцентъра и центъра на описаната окръжност и я дели в отношение $\frac{2}{1}$ (*права на Ойлер* на триъгълника ABC - Рис. 3.2).

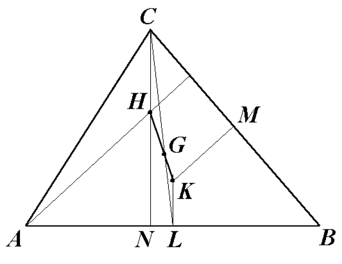


Рис. 3.2

д.) Нека векторите $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ имат равни дължини. Докажете, че ако $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, то H е ортоцентърът на триъгълника ABC. (Упътване: умножете скаларно равенството $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{h}$ последователно с $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$ и $\vec{c}-\vec{a}$).

3.1.2 Продължаваме с някои примери на типични задачи от геометрията, които се решават с използване на скаларно произведение.

Нека е дадена е координатната система $\mathcal{P}=(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,)$ в равнината, на която базисните вектори имат длжини $|\vec{e}_1|=2$, $|\vec{e}_2|=1$, а ъгълът между тях е 120°.

3.1.2.1 Пресметнете скаларното произведение на векторите $\vec{a}(-1,1)$ и $\vec{b}(2,1)$.

Решение: Имаме $\vec{a}\cdot\vec{b} = (-\vec{e}_1+\vec{e}_2)\cdot(2\vec{e}_1+\vec{e}_2) = -2\vec{e}_1^{\,2}+\vec{e}_2^{\,2}-\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1$. Тъй като $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=-1$ (защо?) и $\vec{e}_1^{\,2}=4$, $\vec{e}^{\,2}=1$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot4+1-(-1)+2\cdot(-1)=-8$. В частност, ъгълът между $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е тъп.

Разбира се, всякакви задачи в които се използва скаларно произведение се свеждат в крайна сметка до работа с (може би протяжни но) елементарни по структура алгебрични изрази. Пресмятанията стават значително по - прегледни, ако използваме матрично смятане: нека $\vec{a}(a_1,a_2)$ и $\vec{b}(b_1,b_2)$ са два *произволни* вектора. Ето как изглежда скаларното им произведение:

(sps) $$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2)\cdot(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2) = a_1b_1\vec{e}_1^{\,2}+a_2b_2\vec{e}_2^{\,2}+(a_1b_2+a_2b_1)\vec{e}_1\vec{e}_1 =$$

$4a_1b_1+a_2b_2-(a_1b_2+a_2b_1)$. И сега не е трудно да се съобрази, че последното равенство може да бъде записано с матрици. Наистина, нека $\mathcal{G}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ е *матрицата на* Грам на базисните вектори $\mathcal{G}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2^{\,2}\end{pmatrix}$. Проверете, че скаларното произведение може да бъде записано така:

(spm) $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2\\ \vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 & \vec{e}_2^{\,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}$$

В нашия случай $\mathcal{G}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ и дължината на вектора $\vec{a}$ например се пресмята по следния начин:

$$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a_1-a_2 & ; & -a_1+a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=$$

$(4a_1-a_2)a_1+(-a_1+a_2)a_2=4a_1^2+a_2^2-2a_1a_2$. За дължините на векторите от 3.1.2.1 имаме $\vec{a}^{\,2}=4\cdot(-1)^2+1^2-2(-1)\cdot1=7$ и $\vec{b}^{\,2}=4\cdot2^2+1^2-2\cdot2\cdot1=13$, след което можем да определим ъгъла φ между тези вектори: $\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=-\frac{8}{\sqrt{7}\sqrt{13}}$

3.1.2.2 Точките $A(1,3)$, $B(3,1)$ и $C(4,2)$ са върхове на тиръгълник.

(a) Пресметнете лицето му и дължината на височината през A.

(b) Намерете координатите на петата H на височината през A.

(в) Пресметнете радиусът на описаната окръжност.

Коментари: Координатите на векторите $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$ са съответно $\vec{b}(2,-2)$ и $\vec{c}(3,1)$.

(a) За да решим това подусловие е достатъчно да пресметнем $G(\vec{b},\vec{c})$; тогава $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{G(\vec{b},\vec{c})}$

(б) Правата BC минава през точката B и е успоредна на вектора $\overrightarrow{BC}(1,1)$. Според 2.5.5 уравнението и е $BC:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{1}$, от където получаваме $BC: x-y-2=0$. Тъй като $\overrightarrow{AH}$ е височина, то трябва $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=0$. Нека (ξ,η) са координатите на $\overrightarrow{AH}$. Имаме

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=3\xi=0$$

Нека (x,y) са координатите на H. Тогава векторът $\overrightarrow{AH}$ има координати $(x-1,y-3)$, тоест $\xi=x-1$ и $\eta=y-3$. Тъй като $\xi=0$, то $x=1$. Но точката H принадлежи на BC, значи координатите и удовлетворяват уравнението $BC: x-y-2=0$ на тази права. Тъй като $x=1$, то получаваме, че $y=-1$. И така имаме $H(1,-1)$. Забележете, че можем отново да решим (а), като пресметнем дължината на вектора (или разстоянието между точките) $\overrightarrow{AH} = (0, 4)$.

(в) Намерете например дължината на AB и синуса на ъгъл C.

3.1.2.3 Да разгледаме координатната система $\mathcal{P}_1 = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2,)$ с базисни вектори с дължини $|\vec{e}_1| = \sqrt{2}$, $|\vec{e}_2| = 1$, и ъгъл между тях $\frac{\pi}{4}$.Тъй като $\vec{e}_1^2 = 2$, $\vec{e}_2^2 = 1$ и $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 1$ то $\mathcal{G}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Значи скаларното произведение на векторите $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ има вида $\vec{a} \cdot \vec{b} = A_1 b_1 + A_2 b_2$, където

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 & ; & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

3.1.2.4 Напишете уравнението на външната ъглополовяща през върха A на триъгълника ABC, ако $A(4, 7)$, $B(1, 6)$ и $C(-1, 0)$.

Решение и коментар: От правилото на успоредника следва, че ако векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ имат *еднакви дължини*, то сумата и разликата им са диагоналите на ромб и значи лежат по вътрешната и външна ъглополовящи на ромба, породен от $\vec{p}$ и $\vec{q}$.

С други думи ако успеем да построим два вектора с еднакви дължини и посоките на $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, то ще получим вектори, които са успоредни на двете ъглополовящи. За тази цел ще пресметнем дължините на $\vec{b}(-3, -1)$ и $\vec{c}(-5, -7)$: $(A_1, A_2) = (-3, -1) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (-7, -4)$ и $\vec{a}^2 = \begin{pmatrix} -7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 21 + 4 = 25$. И така, $|\vec{b}| = 5$. Аналогично получаваме, че $|\vec{c}| = 13$. Това означава, че векторите $\vec{p} = 13\vec{b} = (-39, -13)$ и $\vec{q} = 5\vec{c} = (-25, -35)$ имат еднаква дължина, равна на 65. Това означава, че $\vec{l} = \vec{p} - \vec{q} = (-14, 22) = 2(-7, 11)$ е успореден на външната ъглополовяща; а значи такъв е и $(-7, 11) = \frac{1}{7}\vec{l}$. Уравнението на външната ъглополовяща l е $l : \frac{x-4}{-7} = \frac{y-7}{11}$; след опростяване $l : 11x + 7y + 93 = 0$.

3.1.2.5 Решете задачите 3.1.2.2 (а), (б), и (в) за триъгълника от задача 3.1.2.4. Намерете освен това координатите на ортоцентъра на $\triangle ABC$. Пресметнете разстоянието между центъра на тежестта и ортоцентъра на $\triangle ABC$.

3.1.2.6 Докажете, че трите вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни тогава и само тогава, когато

$$G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b}^2 & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c}^2 \end{vmatrix} = 0$$

Детерминантата $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ се нарича *детерминанта на Грам* на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$; а съответната и матрица $\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - матрица на Грам на тези вектори.

Упътване: Ако някои два от векторите са успоредни, то детерминантата на Грам е нула - проверете това. Ето защо ще предполагаме, че никои два от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не са успоредни.

Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни, то всеки два от тях образуват база и тогава имаме например $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. След това умножаваме равенството $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ скаларно с $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Получаваме

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\vec{a}^2 + \beta\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ \alpha\vec{b} \cdot \vec{a} + \beta\vec{b}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} & = & 0 \\ \alpha\vec{c} \cdot \vec{a} + \beta\vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c}^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

което означава, че системата

$$\begin{cases} \vec{a}^2 x + \vec{a}\cdot\vec{b} y + \vec{a}\cdot\vec{c} z &= 0 \\ \vec{b}\cdot\vec{a} x + \vec{b}^2 y + \vec{b}\cdot\vec{c} z &= 0 \\ \vec{c}\cdot\vec{a} x + \vec{c}\cdot\vec{b} y + \vec{c}^2 z &= 0 \end{cases}$$

има ненулево решение $x = \alpha$, $y = \beta$ и $z = -1 \neq 0$. Както знаем, това е възможно само ако детерминантата $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ на тази система е нула.

Нека сега $\vec{a}$, $\vec{b}$, и $\vec{c}$ са некомпланарни. Доказателството в този случай се съдържа в следващата рисунка (Рис. 3.1.2.6), на която са изобразени представители на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с общо начало O. Нека $\vec{p}$ е ортогоналната проекция на $\vec{c}$ в равнината α през O, $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогава $\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}$ и очевидно $\vec{q}$ е ортогонален на α.

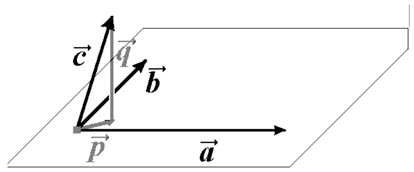


Рис. 3.1.2.6

Тъй като $\vec{p}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{p} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, защото $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуват база в α. След това заместваме $\vec{c}$ с $\vec{p} + \vec{q}$ в $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и получаваме:

$$G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{p} + \vec{a}\cdot\vec{q} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 & \vec{b}\cdot\vec{p} + \vec{b}\cdot\vec{q} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{p} + \vec{c}\cdot\vec{q} \end{vmatrix} = G_1 + G_2$$

където

$$G_1 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{p} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 & \vec{b}\cdot\vec{p} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{p} \end{vmatrix}$$

и

$$G_2 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{q} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 & \vec{b}\cdot\vec{q} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & 0 \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 & 0 \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{q}^2 \end{vmatrix} = \vec{q}^2 \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 \end{vmatrix}$$

тъй като $\vec{c}^2 = \vec{c}\cdot(\vec{p} + \vec{q}) = \vec{c}\cdot\vec{p} + \vec{c}\cdot\vec{q}$. Последното равенство следва от това, че $\vec{q}$ е перпендикулярен на α; значи $\vec{c}\cdot\vec{q} = (\vec{p} + \vec{q})\cdot\vec{q} = \vec{q}^2$ и $\vec{a}\cdot\vec{q} = \vec{b}\cdot\vec{q} = 0$. От тук получаваме също, че $\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{p}\cdot\vec{a}$ и $\vec{c}\cdot\vec{b} = \vec{p}\cdot\vec{b}$. Значи

$$G_1 = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{p} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 & \vec{b}\cdot\vec{p} \\ \vec{p}\cdot\vec{a} & \vec{p}\cdot\vec{b} & \vec{p}^2 \end{vmatrix} = 0$$

защото $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ са компланарни.

И така, $G = G_2 = \vec{q}^2 \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}^2 \end{vmatrix} = |\vec{q}|^2 G(\vec{a}, \vec{b})$. Това равенство означава, че $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ е равно на квадрата на обема на призмата, породена от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Наистина, $G(\vec{a}, \vec{b})$

е квадратът на лицето на успоредника, опънат върху $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\vec{q}|$ е дължината на височината на призмата, както е показано на Рис. 3.1.2.6 (а).

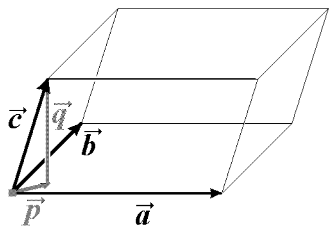


Рис. 3.1.2.6 (а)

3.1.2.7 Сега да видим как изглежда скаларното произведение, когато ни е дадена някоя координатна система в пространството (тоест да изразим скаларното произведение на два вектора посредством техните координати).

Дадена е координатна система $\mathcal{K} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и векторите $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Разбира се, произведението $\vec{a} \cdot \vec{b}$ се пресмята посредством банално разкриване на скоби:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$$

$$a_1b_1\vec{e}_1^{\,2} + a_2b_2\vec{e}_2^{\,2} + a_3b_3\vec{e}_3^{\,2} + (a_1b_2 + a_2b_1)\vec{e}_1\vec{e}_2 + (a_1b_3 + a_3b_1)\vec{e}_1\vec{e}_3 + (a_2b_3 + a_3b_2)\vec{e}_1\vec{e}_3$$

Проверете, че горните пресмятания могат да бъдт записани матрично и тогава за $\vec{a} \cdot \vec{b}$ получаваме:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2^{\,2} & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_3^{\,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

където

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_2^{\,2} & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_1\vec{e}_3 & \vec{e}_2\vec{e}_3 & \vec{e}_3^{\,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix};$$

като в последното равенство сме положили

$$(A_1, A_2, A_3) = (a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} \vec{e}_1^{\,2} & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2^{\,2} & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 & \vec{e}_3^{\,2} \end{pmatrix}$$

Естествено, матричният запис прави неатрактивните пресмятания по - поносими.

И така, структурата на скаларното произведение се определя от матрицата на Грам $\mathcal{G}(\mathcal{K}) = \mathcal{G}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ на базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Тя винаги е обратима (съгласно 3.1.2.6), защото $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ са некомпланарни.

3.1.2.8 Продължаваме с няколко примера на координатни системи и приложения на скаларното произведение в пространството.

3.1.2.8.1 Базиса на координатната система $\mathcal{A} = (O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ се състои от две двойки $\vec{e}_1$, $\vec{e}_3$) и $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ перпендикулярни вектори, а ъгълът между $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ е $120°$. Дължините на базисните вектори съответно са $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 2$ и $|\vec{e}_3| = 1$. Тъй като $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$ и $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = -2$, то матрицата на Грам изглежда така: $\mathcal{G}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

След като знаем матрицата на Грам, можем да решаваме различни задачи:

(а) Пресметнете дължината на отсечката AB с краища точките $A(-3,-1,4)$ и $B(1,1,3)$.

Решение: Тъй като $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, то $\overrightarrow{AB}(4,2,-1)$ и значи $|AB|^2=\overrightarrow{AB}^2$. За скаларния квадрат на $\overrightarrow{AB}$ имаме $\overrightarrow{AB}^2=(4,2,-1)\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$; $(4,2,-1)\begin{pmatrix}4&-2&0\\-2&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$ $(12,0,-1)$ и $\overrightarrow{AB}^2=(12,0,-1)\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}=49$. Значи $|AB|=7$.

(б) Пресметнете ъгълът между векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{a}(0,2,3)$.

Упътване: В точка (а) видяхме, че $(4,2,-1)\mathcal{G}(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=(12,0,-1)$. Значи $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=$ $(4,2,-1)\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}=-3$.

Остава да се пресметне дължината на $\vec{a}$, за да получим, че $\cos(\angle(\overrightarrow{AB},\vec{a}))=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{AB}||\vec{a}|}=-\frac{3}{35}$.

3.1.2.8.2 Дадена е координатната система $\mathcal{B}=(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, базисът $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ на която се състои от три вектора с дължини $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$ и $|\vec{e}_3|=2$. $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ са перпендикулярни, а ъгълът между всеки един от тях и $\vec{e}_3$ е равен на $60°$. Пресметнете матрицата на Грам на $\mathcal{B}$, след което решете следните подусловия: Отг. $\mathcal{G}(\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&4\end{pmatrix}$

(а) Нека правата l е минава през точката $L(1,1,1)$ и е успоредна на вектора $\vec{a}_l(-2,-1,2)$. Пресметнете разстоянието от $M(3,2,0)$ до l.

Решение: Вземаме представител на $\vec{a}_l$ с начало в L и разглеждаме успоредника породен от $\vec{b}=\overrightarrow{LM}$ и $\vec{a}_l$ (Рис. 3.3):

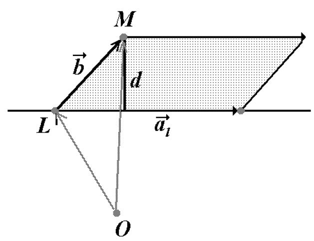


Рис. 3.3

Ясно е, че височината d на затъмнения успоредник е търсеното разстояние. Тъй като можем да пресметнем лицето S на успоредника и дължината на $\vec{a}_l$ то $d=\frac{S}{|\vec{a}_l|}$, където $S=\sqrt{G(\vec{a},\vec{b})}$.

Векторът $\vec{b}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}$ има координати $\vec{b}=(2,1,-1)$ (забележете, че $\vec{b}$ не е успореден на $\vec{a}_l$ и значи M не лежи на l) и за произведението $\vec{a}_l\cdot\vec{b}$ имаме $\vec{a}_l\cdot\vec{b}=(-2,-1,2)\mathcal{G}(\mathcal{B})\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Пресмятаме последователно $(-2,-1,2)\mathcal{G}(\mathcal{B})=(-2,-1,2)\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&4\end{pmatrix}=(0,1,5)=(A_1,A_2,A_3)$.

Окончателно $\vec{a}_l\cdot\vec{b}=(0,1,5)\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=-4$.

По същия начин се пресмятат произведенията $\vec{b}^2$ и $\vec{a}_l^2$; например

$$\vec{a}_l^2 = (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix} = 9,$$

аналогично се получава, че $\vec{b}^2 = 3$.

Следователно $G(\vec{a}_l, \vec{b}) = \begin{vmatrix}9 & -4\\-4 & 3\end{vmatrix} = 11$ и за търсеното разстояние получаваме $d = \frac{S}{|\vec{a}_l|} = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

3.1.2.9 Напишете уравнението на равнината, която минава през M и е перпендикулярна на l.

Коментар: Да означим с α търсената равнина. Ясно е, че ако точката X лежи в α, то векторът $\overrightarrow{MX}$ е перпендикулярен на $\vec{a}_l$. Разбира се това условие е и достатъчно. С други думи, "уравнението" на α е $\vec{a}_l \cdot \vec{p} = 0$ (вижте следващата рисунка).

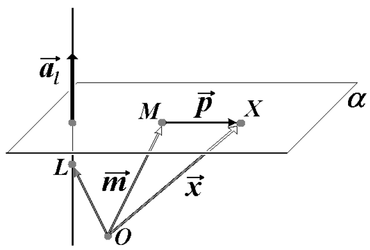


Рис. 3.1.2

Тъй като $\vec{p} = \vec{x} - \vec{m}$, то последното условие се трансформира в $\vec{a}_l \cdot \vec{x} - \vec{a}_l \cdot \vec{m} = 0$; $\alpha : \vec{a}_l \cdot \vec{x} = \vec{a}_l \cdot \vec{m}$ (това равенство се нарича общо уравнение на α). За да преминем към координатен запис, нека $\vec{x} = (x, y, z)$ и да напомним, че вече пресметнахме матрицата $A = (A_1, A_2, A_3) = (a_1, a_2, a_3)\mathcal{G}(\mathcal{B})$.

Тогава уравнението на α в матричен запис изглежда така:

$$\textbf{(pe)} \qquad (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}; \quad (A_1, A_2, A_3)\begin{pmatrix}x-3\\y-2\\z\end{pmatrix} = 0$$

От горните разсъждения виждаме, че уравнението на равнината α_{M_0}, която минава през точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и е перпендикулярна на l има следния вид (умножаваме матриците в **(pe)**):

$$\textbf{(pes)} \qquad \alpha : A_1(x - x_0) + A_2(y - y_0) + A_3(z - z_0) = 0$$

В конкретния случай получаваме $\alpha : y + 5z - 2 = 0$. Как е разположена α спрямо координатната система α (направета рисунка)?

3.1.2.10 Напишете уравнението на равнината, която минава през точката $M(-1, 1, -1)$ и е перпендикулярна на вектора $\vec{n}(2, 1, 3)$.

3.1.2.11 Общоприетото понятие за "теория" в Математиката (което най - често се схваща като догматично запаметяване на някои факти или разсъждения) само по себе си представлява една твърде популярна (за жалост) догма. Като контратеза на тази догма тук ще преминем към "теоретичен" стил на изложение.

И така, да се върнем в точка в 3.1.2.7, където беше показано как изглежда скаларното произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ на два *произволни* вектора в *произволната* координатна система $\mathcal{K}$.

По-надолу за вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ с $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ще означаваме матрицата ред, която е образувана от координатите на $\vec{x}$. Забележете, че тези обекти са *различни* (всъщност би трябвало да пишем без запетаи $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$). Наистина, записът $\vec{x}$ означава, че разглеждания вектор е линейна комбинация на базисните вектори на $\mathcal{K}$, докато $\bar{x}$ е кратък запис на матрица - ред. Записано по този начин, скаларното произведение (координатите му) изглежда така: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \bar{x}\mathcal{G}(\mathcal{K})\bar{y}^t = \bar{x}\mathcal{G}\bar{y}^t$ (напомняме, че $\bar{y}^t$ е транспонираната на $\bar{y}$ матрица стълб).

Да разгледаме сега векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и да образуваме блочната матрица $B = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$, редовете на която се състоят от координатите на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. За нейната транспонирана имаме $B^t = \begin{pmatrix} \bar{a}^t & \bar{b}^t \end{pmatrix}$. Сега пресмятаме произведението $B\mathcal{G}(\mathcal{K})B^t$:

$$B\mathcal{G}(\mathcal{K})B^t = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} \bar{a}^t & \bar{b}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}\mathcal{G} \\ \bar{b}\mathcal{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}^t & \bar{b}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}\mathcal{G}\bar{a}^t & \bar{a}\mathcal{G}\bar{b}^t \\ \bar{b}\mathcal{G}\bar{a}^t & \bar{b}\mathcal{G}\bar{b}^t \end{pmatrix} = \mathcal{G}(\vec{a}, \vec{b})$$

С други думи $G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\mathcal{G}\bar{a}^t & \bar{a}\mathcal{G}\bar{b}^t \\ \bar{b}\mathcal{G}\bar{a}^t & \bar{b}\mathcal{G}\bar{b}^t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a}^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b}^2 \end{vmatrix}$.

3.1.2.11.1 Примери (а) Дадени са векторите $\vec{a}(1, -1)$ и $\vec{b}(2, 1)$. Докато не е уточнена базата, спрямо която се разглеждат координатите им не можем да извършим конкретни пресмятания; може все пак да се каже, че ако $\mathcal{G}$ е матрицата на Грам, то $G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ако координатите им са спрямо системата $\mathcal{P}$ (от 3.1.2), то

$$G(\vec{a}, \vec{b}) = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 13 \end{vmatrix} = 27.$$

Аналогично ако работим в базиса $\mathcal{P}_1$ имаме $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$G(\vec{a}, \vec{b}) = \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 9$$

(б) Тъй като $G(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}^2\vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$, то (спомнете си означенията от 3.1.0) $G(\vec{a}, \vec{b}) = a^2b^2(1 - \cos^2\varphi)$, където $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$. Следователно $G(\vec{a}, \vec{b}) = a^2b^2\sin^2\varphi$ и $\sin^2\varphi = \frac{G(\vec{a}, \vec{b})}{a^2b^2}$; $\sin\varphi = \frac{\sqrt{G(\vec{a}, \vec{b})}}{ab}$ (забележете, че $\sin\varphi \geq 0$, защото φ е елементарен ъгъл).

Отг. $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{13}$, $G(\vec{a}, \vec{b}) = 9$; значи $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$

3.1.2.11.2 Продължаваме с примерите: ще пресметнем координатите на вектора $\vec{a}^*_{\vec{b}}$ в базата $\mathcal{P}_1$ (вижте 3.1.0). Тъй като $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$ и $\vec{a}^2 = 1$, то $\vec{N}_{\vec{a}}(\vec{b}) = 2\vec{a} - \vec{b}$. Това означава, че векторът $\vec{a}^*_{\vec{b}} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - \vec{b}) = (0, -1)$ има дължина единица и е перпендикулярен на $\vec{a}$.

(а) Направете рисунка на базиса и векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}^*$.

(б) Ясно е, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{a}^*_{\vec{b}}$ са неколинеарни. Значи образуват базис $\mathcal{R}$ в равнината. Пресметнете матрицата на Грам на този базис.

(в) Пресметнете координатите на $\vec{b}^*_{\vec{a}}$ в базиса $\mathcal{R}$.

3.1.2.12 Както в 3.1.2.11, детерминантата на Грам на три вектора може да бъде пресметната посредством техните координати (ако, разбира се, ни е известен базиса). Да напомним, че ако ни е даден например вектора $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, то можем да напишем $\vec{a} = \bar{a}\sqrt{\mathcal{G}}$, където $\bar{a}$ е матрицата ред от координатите на $\vec{a}$: $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, а със символа $\sqrt{\mathcal{G}}$

(да не се бърка с операцията коренуване) означаваме матрицата стълб, на която елементи са векторите от базиса на системата $\mathcal{B}$ (от 3.1.2.8.2): $\sqrt{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$.

С други думи, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$.

Нека след това $\vec{b} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. Ясно е, че можем да запишем $\vec{b}$ във вида

$$\vec{b} = \sqrt{\mathcal{G}}^t \bar{b}^t = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

след което скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се записва (и пресмята) така:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \bar{a}\sqrt{\mathcal{G}}\sqrt{\mathcal{G}}^t \bar{b}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{a}\mathcal{G}\bar{b}^t$$

защото наистина $\sqrt{\mathcal{G}}\sqrt{\mathcal{G}}^t = \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ - проверете това. Окончателно се получава $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

3.1.2.12.1 Ясно е, че можем да запишем матрично и детерминантата на Грам на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Наистина, от горните разсъждения не е трудно да се съобрази, че $\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} \mathcal{G}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \bar{a}^t & \bar{b}^t \end{pmatrix}$. Значи

$$\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$$

и окончателно получаваме $G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 21$.

3.1.2.12.2 Нека $\vec{c} = (1, 1, 1)$ е трети вектор, чиито координати са дадени спрямо базата $\mathcal{B}$ от точка 3.1.2.8.2. Можем да пресметнем матрицата на Грам на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ по следния начин:

$$\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} \mathcal{G}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \bar{a}^t & \bar{b}^t & \bar{c} \end{pmatrix}$$

и за конкретните вектори имаме

$$\mathcal{G}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 10 & 8 \\ 0 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Значи $G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 18$.

3.1.2.12.3 В координатната система $\mathcal{B}$ са дадени четири точки: $A(1, -2, 3)$, $B(3, -1, 2)$, $C(0, -3, 5)$ и $D(2, -1, 4)$.

(а) Пресметнете обема на пирамидата $ABCD$

Отг. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(б) Пресметнете разстоянието d от точка D до равнината ABC.

Упътване: Пресметнете $d^2 = \frac{G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)}{G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}$

(в) Докажете, че правите AB и CD са кръстосани и намерете разстоянието h между тях.

Упътване: Проверете, че $h^2 = \frac{G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)}{G\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)}$

(г*) Нека h_1, h_2, h_3 и h_4 са височините в триъгълна пирамида, а d_1, d_2 и d_3 са разстоянията между трите двойки срещуположни кръстосани ръбове. Докажете, че

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2}$$

3.1.2.13 И така, аналитичната структура на скаларното произведение се определя от матрицата на Грам на съответния базис. Значи колкото по просто е устрена матрицата на Грам, толкова по - прегледна структура има скаларното произведение. Най - "просто" е устроена, разбира се, нулевата матрица. Тя обаче не може да бъде матрица на Грам, защото не е обратима. Разбира се доколко "просто" е устроен даден обект (алгебричен израз или геометрична конструкция) е до голяма степен въпрос на личен (субективен) избор. Все пак "общоприето" е схващането, че скаларното произведение има най - удобна форма, когато матрицата на Грам съвпада с единичната 3×3 матрица.

В този случай казваме, че базата (и съответно координатната система) е *ортогонална.* Наистина, съобразете сами, че тогава базисните вектори имат дължина единица и всеки два от тях са перпендикулярни.

Ако $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \bar{a}E\bar{b} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$

Пререшете *всички* задачи от точка 3.1, като считате, че координатната система е ортогонална. По същия начин в следващия текст може да се счита (например - при първо четене), че системата е ортогонална.

3.1.3 Нека L е *линейна функция* на вектори. Това означава, че L е правило, което на всеки вектор $\vec{x}$ съпоставя число $L(\vec{x})$ по такъв начин, че $L(\vec{x} + \vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$ *за всеки два* вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ и $L(t\vec{x}) = tL(\vec{x})$ *за всяка константа t и вектор $\vec{x}$.*

Изучаването на линейните векторни функции не е самоцел; те се появават по естествен начин в различни приложни задачи.

Например да фиксираме някакъв вектор $\vec{a}$. Работата $L(\vec{x})$, която извършва силата $\vec{x}$ при изминаването на път с дължина и посока, равна на $\vec{a}$ е линейна функция на $\vec{x}$. От курса по физика е известно, че $L(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$.

Друг пример:

3.1.3.1 Нека $\vec{a}(1, 1)$ е вектор, на който разглеждаме фиксиран представител с начало например в началото на координатната система. През $\vec{a}$ прекарваме ос l, ориентирана по посока на $\vec{a}$, kакто е показано на следната рисунка. Считаме, че фигурите, които се намират в горната полуравнина имат положителни лица, а тези в полуравнината, обозначена с "$-$" - отрицателни.

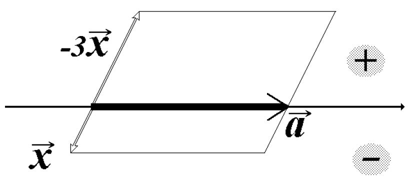


Рис. 3.1.3

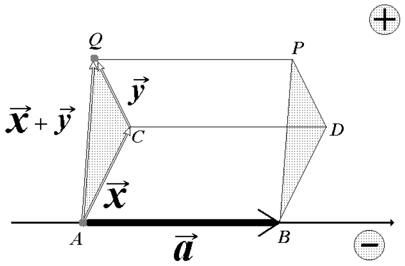


Рис. 3.1.3.1

На всеки (свободен) вектор $\vec{x}$ съпоставяме ориентираното лице $L(\vec{x})$ на успоредника, породен от векторите $\vec{a}$ и $\vec{x}$. На горните рисунки е показано, че $L(\vec{x})$ е линейна функция на $\vec{x}$. Наистина, $L(\vec{x})+L(\vec{y}) = L(\vec{x}+\vec{y})$, тъй като $S_{ABCD}+S_{CDPQ} = S_{ABPQ}$. Последното равенство следва от това, че затъмнените триъгълници са еднакви и следователно имат равни лица.

3.1.3.1.1 Ще покажем, че съществува *такъв вектор* $\vec{b}$, че $L(\vec{x}) = \vec{b}\cdot\vec{x}$ - с други думи, че L е скаларно произведение. Наистина, нека $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ е базиса, спрямо който работим и $L(\vec{e}_1) = e_1$, $L(\vec{e}_2) = e_2$. Тогава за всеки вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$ имаме

$$L(\vec{x}) = L(x_1\vec{e}_1) + L(x_2\vec{e}_2) = x_1 L(\vec{e}_1) + x_2 L(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} L(\vec{e}_1) & L(\vec{e}_2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

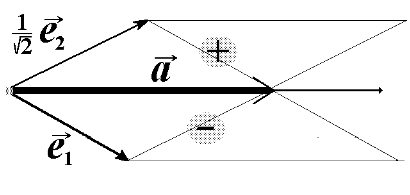
$$L(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ако $\mathcal{G}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \mathcal{G}$ е матрицата на Грам на базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, то да положим $(\lambda_1, \lambda_2) = (e_1, e_2)\mathcal{G}^{-1}$. Тогава *за всеки вектор* $\vec{x}$ имаме

$$L(\vec{x}) = e_1 x_1 + e_2 x_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{b}\cdot\vec{x}$$

където $\vec{b}$ е векторът $\vec{p} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2$.

Ако например $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ е базисът от 3.1.2.3, то векторът $\vec{a}$ е разположен приблизително както е показано на следващата рисунка

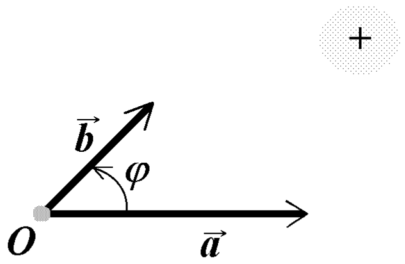


и значи $L(\vec{e}_1)$ е лицето S_1 на успоредника, породен от векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{a}$, взето със знак минус. Но $S_1^2 = G(\vec{e}_1, \vec{a}) = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

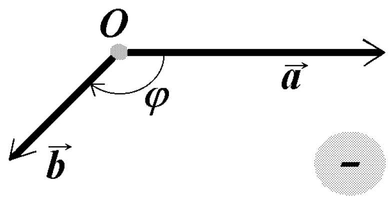
Следователно $S_1^2 = 1$; $S_1 = -1$. Аналогично $S_2^2 = G(\vec{e}_2, \vec{a}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4$; значи $S_2 = 2$. Но $S_1 = e_1$ и $S_2 = e_2$; а от горните разсъждения се получава, че координатите (b_1, b_2) на търсения вектор се получават от равенството $(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix}\mathcal{G}^{-1}$; $(b_1, b_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = (-3, 5)$. И така: $L(\vec{x}) = \vec{b}\cdot\vec{x}$, където $\vec{b} = (-3, 5)$.

Решете същата задача, ако координатната система е от пример 3.1.2. Решете я също така, ако координатната система е ортогонална. И накрая, решете тази задача геометрично. Изобщо, как изглежда векторът $\vec{b}$?

3.1.3.2 Да разгледаме *наредената двойка* от неколинеарни вектори: $(\vec{a}, \vec{b})$, където $\vec{a}$ е първи вектор, а $\vec{b}$ - втори вектор. Ако по - малкият от двата ъгъла, които са ориентирани от $\vec{a}$ към $\vec{b}$ е насочен както на Рис. 3.1.3.2$^{(a)}$, ("против часовниковата стрелка"), то казваме, че двойката вектори $(\vec{a}, \vec{b})$ е ориентирана *положително.* В противен случай казваме, че $(\vec{a}, \vec{b})$ е ориентирана *отрицателно.*



3.1.3.2$^{(a)}$



3.1.3.2$^{(b)}$

Ще отбележим, че фактически $(\vec{a}, \vec{b})$ е база в равнината, тоест, базите са разделени на положителни и отрицателни. Ще означаваме знака на $(\vec{a}, \vec{b})$ със символа $\sigma(\vec{a}, \vec{b})$. Полагаме освен това $\sigma(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни (успоредни).

Проверете, че $\sigma(\vec{a}, \vec{b}) = -\sigma(\vec{b}, \vec{a})$.

Полагаме след това $g(\vec{a}, \vec{b}) = \sigma(\vec{a}, \vec{b})\sqrt{G(\vec{a}, \vec{b})}$. Горната задача показва, че $g(\vec{x}, \vec{y})$ има следните свойства:

(а) $g(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = g(\vec{x}, \vec{y}_1) + g(\vec{x}, \vec{y}_2)$;

(б) $g(\vec{x}_1 + \vec{a}_2, \vec{y}) = g(\vec{x}_1, \vec{y}) + g(\vec{x}_2, \vec{y})$;

(в) $g(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda g(\vec{x}, \vec{y})$;

(г) $g(\vec{x}, \vec{y}) = -g(\vec{y}, \vec{x})$ и $g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ тогава и само тогава, когато векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ са колинеарни.

Векторни функции, които имат горните свойства се наричат *тензори.* Тензорите имат важни приложения в механиката.

(д) Нека базисът е положително ориентиран, ортогонален и векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ имат съответно координати $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Докажете, че $g(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$.

(е) Дадено е, че $\vec{x} = (x_1, x_2)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2)$ спрямо базиса например например от точка 3.1.2 или 3.1.2.3. Пресметнете и в двата случая стойността на $g(\vec{x}, \vec{y})$.

Отг. $g(\vec{x}, \vec{y}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} g(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

3.2 Векторно произведение.

3.2.1 Линейни функции на вектори съществуват и в пространството и също така имат важни приложения в механиката и геометрията. Следния пример (елемент на обема в пространството) има важно значение в много задачи:

3.2.2 Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неколинеарни вектора в пространството. Ако построим векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общо начало, то те определят някаква равнина α. Тя разделя пространството на две полупространства. Обявяваме едното от тях *положително*, а другото *отрицателно.*

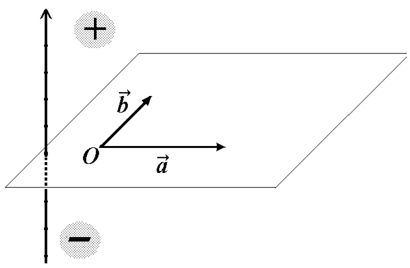


Рис. 3.2.2

Тогава вторият край на представителя с начало в O на всеки вектор $\vec{c}$, който не е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежи в едното от двете полупространства.

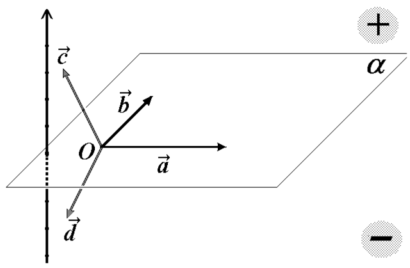


Рис. $3.2.2^{(a)}$

На горната рисунка $\vec{c}$ сочи в положителното полупространство, а $\vec{d}$ в отрицателното. В следващия текст ще считаме, че обемът на всяко тяло, което е разположено в отрицателното полупространство е отрицателен, а ако е разположено в положителното - положителен.

Нека сега $\vec{c}$ е произволен вектор в пространството. Означаваме с $L(\vec{c})$ обема на призмата, породена от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

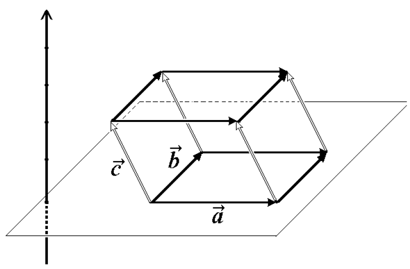


Рис. $3.2.2^{(b)}$

На горната рисунка $L(\vec{c}) > 0$; съответно на следващата имаме

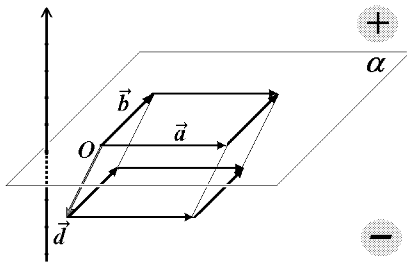


Рис. 3.2.2$^{(c)}$

$L(\vec{d}) < 0$. Следващата рисунка показва, че $L(\vec{x}+\vec{y}) = L(\vec{x}) + L(\vec{y})$.

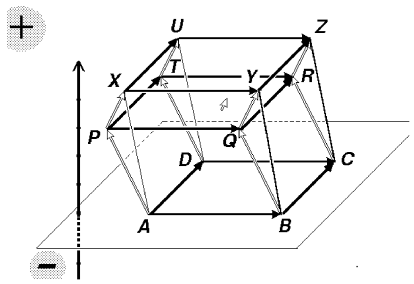


Рис. 3.2.2$^{(d)}$

Наистина, нека $\overrightarrow{AP} = \vec{x}$ и $\overrightarrow{PX} = \vec{y}$. Тогава $\overrightarrow{AX} = \vec{x}+\vec{y}$ и очевидно сумата от обемите на призмите $ABCDPQRT$ и $PQRTXYZU$ е равна на обема на призмата $ABCDXYZU$, защото многостените $ADUXPT$ и $BCZYQR$ са еднакви.

От друга страна, следващата рисунка показва, че $L(\lambda\vec{x}) = \lambda L(\vec{x})$. Например $L(-\frac{1}{2}\vec{x}) = -\frac{1}{2}L(\vec{x})$, защото обемът на призмата под равнината α е два пъти по - малък от обема на горната призма (докажете това).

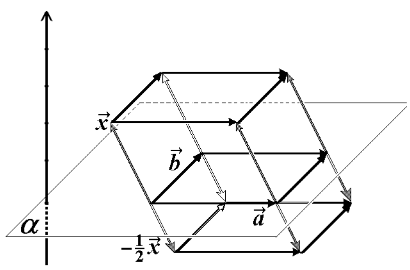


Рис. 3.2.2$^{(e)}$

3.2.2.1 Ясно е, че $|L(\vec{x})| = \sqrt{G(\vec{a},\vec{b},\vec{x})}$. За да можем да пресмятаме $L(\vec{x})$ и със точен знак ще определим числото $\sigma(\vec{x})$ по следния начин: $\sigma(\vec{x}) = 1$, ако $\sigma(\vec{x})$, ако $\vec{x}$ лежи в положителното полупространство, $\sigma(\vec{x}) = -1$, ако представителят на $\vec{x}$ лежи в отрицателното полупространство и накрая $\sigma(\vec{x}) = 0$, ако $\vec{x}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогава $L(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})\sqrt{G(\vec{a},\vec{b},\vec{x})}$.

3.2.2.2 Нека координатите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ спрямо базиса от точка 3.1.2.8.1 са $\vec{a} = (1,1,0)$ и $\vec{b} = (0,1,1)$. Избираме за положително полупространство това от двете полупространства, от което двойката вектори изглежда ориентирана положително (вижте точка 3.1.3.2).

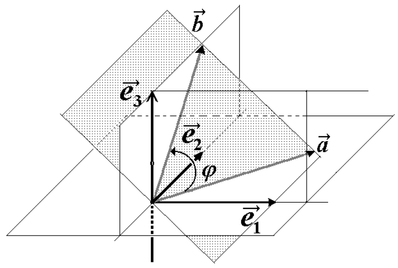


Рис. 3.2.2.2

От горната рисунка се вижда, че при този избор имаме $L(\vec{e}_1) > 0$, $L(\vec{e}_2) < 0$, и $L(\vec{e}_3) > 0$. Сега можем да пресметнем конкретните стойности:

$$L^2(\vec{e}_1) = G(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}_1) = \left| \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{e}_1 \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} \bar{a}^t & \bar{b}^t & \bar{e}_1^t \end{pmatrix} \right|$$

където сме образували съответните матрици от координатите на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{e}_1$, а $\mathcal{G}$ е матрицата на Грам на базиса $\mathcal{A}$ от точка 3.1.2.8.1.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 12$$

Значи $e_1 = L(\vec{e}_1) = 2\sqrt{3}$. Аналогично получаваме, че $L(\vec{e}_2) = -2\sqrt{3}$ и $L(\vec{e}_3) = 2\sqrt{3}$ (вижте 3.1.3.1.1).

Това означава, че ако $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ е произволен вектор, то $L(\vec{x}) = L(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1 L(\vec{e}_1) + x_2 L(\vec{e}_2) + x_3 L(\vec{e}_3) = 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

3.2.2.3 Повтаряйки разсъжденията от 3.1.3.1.1 ще докажем, че съществува вектор $\vec{c}$, за който $L(\vec{x}) = \vec{c} \cdot \vec{x}$ *за всеки вектор* $\vec{x}$. С други думи, линейната функция L е скаларно произведение. Впрочем, по сходен начин се доказва, че *всяка линейна функция* е скаларно произведение. Наистина, както в 3.1.3.1.1 можем да положим $(\lambda, \mu, \nu) = 2\sqrt{3}(1, -1, 1)\mathcal{G}(\mathcal{A})^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Векторът $\vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3)$ се нарича *векторно произведение* на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и се бележи с $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

3.2.3 Нека $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, е *наредена тройка* от вектори, които не лежат в една равнина.Това означава, че тройките $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$ например са *различни*, въпреки, че се състоят от едни и същи вектори.

Да построим след това представители на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с общо начало O (рис. 3.2.3)

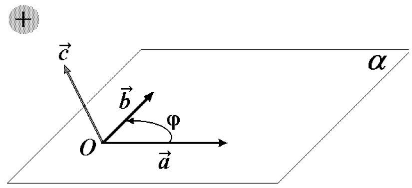


Рис. 3.2.3

Точката O и векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (първият и вторият вектори, взети в този ред) определят равнината α.

Да забележим както в 3.2.2, че α разделя пространството на две полупространства. *Ще считаме, че е положително това от тях*, от което ориентацията на базиса $(\vec{a}, \vec{b})$ (векторите са разгледани в посочения ред) изглежда положителна както в точка 3.1.3.2 (рисунка 3.1.3.2$^{(a)}$).

3.2.3.1 Ако векторът $\vec{c}$ е разположен в положителното полупространство относно двойката $(\vec{a}, \vec{b})$, то ще казваме, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е *положително ориентирана* (или дясна) тройка от вектори; в противен случай $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са ориентирани отрицателно или, че образуват лява тройка вектори).

На рис. 3.2.3 е изобразена положително ориентирана тройка, а тази на следващата рисунка е ориентирана отрицателно:

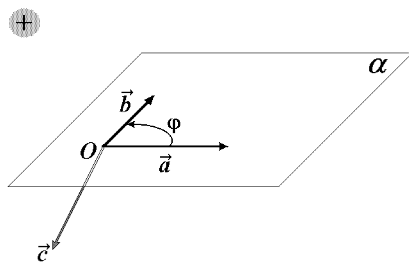


Рис. 3.2.3.1

Забележете, че положителното полупространство се променя, ако променим реда на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Това се вижда и на следващите рисунки, където е изобразена ориентацията на същата тройка вектори в реда $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ - тройката е отрицателно ориентирана и на дясната рисунка е показано, че тройката $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, е дясна.

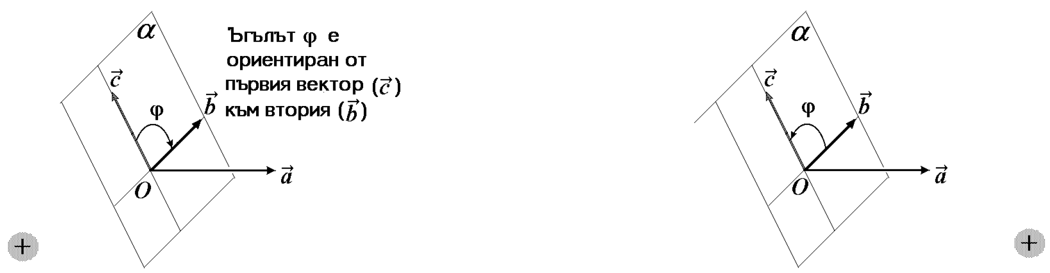


Рис. 3.2.3.2

3.2.3.2 Изобщо докажете, че ако в наредена тройка от вектори разменим местата на два вектора, то ориентацията на тройката се променя.

И така, съгласно 3.2.2.1 ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два неколинерни вектора, то за всеки вектор $\vec{x}$ е определено числото $\sigma(\vec{x}) = \pm 1$ ако $\vec{x}$ ne лежи в равнина, успоредна на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\sigma(\vec{x}) = 0$ в противен случай. За линейната функция "ориентиран обем" L от 3.2.2 имаме $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = \sigma_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x})\sqrt{G(\vec{a},\vec{b},\vec{x})}$. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни (успоредни), полагаме $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = 0$ *за всеки* вектор $\vec{x}$. И така, функцията $L_{(\vec{a},\vec{b})}$ е дефинирана за произволна двойка от вектори $(\vec{a},\vec{b})$.

3.2.3.2.1 От тук се получава, че $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = L_{(\vec{x},\vec{a})}(\vec{b})$. Наистина, $G(\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = G(\vec{x},\vec{a},\vec{b})$, защото обемът на призмата не зависи от реда, в който разглеждаме ребрата й, а $\sigma_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = \sigma_{(\vec{x},\vec{a})}(\vec{b})$, защото тройките вектори съгласно 3.2.3.2 имат еднаква ориентация.

3.2.3.3 Докажете, че $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = -L_{(\vec{b},\vec{a})}(\vec{x})$ за всеки вектор $\vec{x}$. (Упътване: разгледайте рисунките от Рис. 3.2.3 до 3.2.3.2).

3.2.4 В 3.2.2.3 определихме векторното произведение на два конкретни вектора. Тук ще повторим тези разсъждения за два произволни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатите $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ на които са дадени в някоя произволна положително ориентирана база $\mathcal{X} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

За да направим това, определяме стойностите на $L_{(\vec{a},\vec{b})}$ за векторите от базиса; нека $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_1) = e_1$, $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_2) = e_2$ и $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_3) = e_3$. Ясно е, че ако $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ е произволен вектор, то

$$L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = x_1 L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_1) + x_2 L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_2) + x_3 L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Последното равенство може да бъде записано така:

$$L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Да си спомним сега, че търсим вектор $\vec{p} = (\lambda, \mu, \nu)$, за който $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = \vec{p}\cdot\vec{x}$ при произволно $\vec{x}$. Но ако $\vec{p}$ е желаният вектор, то $\vec{p}\cdot\vec{x} = \bar{p}\mathcal{G}(\mathcal{X})\bar{x}^t$. Значи би трябвало $(e_1, e_2, e_3) = \bar{p}\mathcal{G}(\mathcal{X}) = (\lambda, \mu, \nu)\mathcal{G}(\mathcal{X})$.

За да е изпълнено горното е достатъчно да положим

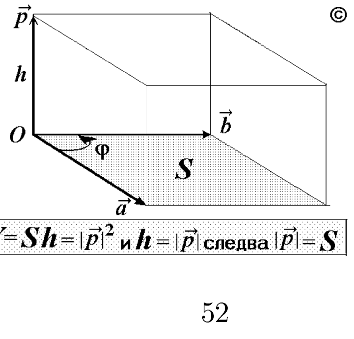
$(\lambda, \mu, \nu) = (e_1, e_2, e_3)\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{X})$, където $\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{X})$ е обратната матрица на $\mathcal{G}(\mathcal{X})$. По този начин координатите на вектора $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ са определени и задачата е решена.

3.2.4.1 Да видим как е разположено спрямо $\vec{a}$ и $\vec{b}$ тяхното векторно произведение. Ще отбележим отначало, че ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са успоредни, то $\vec{p} = \vec{0}$, защото $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) = 0$ *за всяко* $\vec{x}$.

Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са неколинерни. Тогава за всяко $\vec{x}$ $\vec{p}\cdot\vec{x} = L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x})$ е ориентираният обем на призмата, породена от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{x}$. Това означава, че ако $\vec{x}$ е некомпланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\vec{p}\cdot\vec{x} = L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) \neq 0$, в частност $\vec{x} \neq \vec{0}$.

От друга страна $\vec{p}\cdot\vec{a} = L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{a}) = 0$, защото обемът на призмата, опъната върху векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}$ е равен на 0 (призмата е изродена). Аналогично $\vec{p}\cdot\vec{b} = 0$ и като следствие получаваме, че *векторът $\vec{p}$ е перпендикулярен на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$.*

3.2.4.2 Тъй като $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{p}) = \vec{p}\cdot\vec{p} = \vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 > 0$, то тройката вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ е положително ориентирана.



От $V = Sh = |\vec{p}|^2$ и $h = |\vec{p}|$ следва $|\vec{p}| = S$

Рис. 3.2.4.2

Освен това обемът на призмата, породена от $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ е равен на $|\vec{p}|^2$. Той също така е равен и на Sh, където S е лицето на успоредника, породен от векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тъй като $\vec{p}$ е перпендикулярен на $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то височината h на призмата породена от $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{p}$ е равна на $|\vec{p}|$. На горната рисунка е показано, че от това очевидно следва, че $|\vec{p}| = S = \sqrt{G(\vec{a},\vec{b})}$.

3.2.5 Да резюмираме свойствата на векторното произведение:

(а) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ тогава и само тогава, когато $\vec{a}||\vec{b}$.

(б) $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$, при което наредената тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ е положително (дясно) ориентирана.

(в) $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{G(\vec{a},\vec{b})}$, значи $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\angle(\vec{a},\vec{b})$. Тъй като $\angle(\vec{a},\vec{b})$ е елементарен, то $\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$ е положителен.

(г) От 3.2.3.3 следва, че $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$. Наистина, ако $L_-(\vec{x})$ е линейната функция, определена от равенството $L_-(\vec{x}) = -L(\vec{x})$, то векторът $\vec{p}_- = -\vec{p}$ удовлетворява $L_-(\vec{x}) = \vec{p}_- \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x}$. Освен това $L_{(\vec{a},\vec{b})} = -L_{(\vec{b},\vec{a})}$, защото тройките $(\vec{a},\vec{b},\vec{x})$ и $(\vec{b},\vec{a},\vec{x})$ имат противоположни ориентации.

(д) За всяко λ е изпълнено $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \times \vec{b}$. Имаме $G(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{x}) = G(\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{x}) = \lambda^2 G(\vec{a},\vec{b},\vec{x})$. Доказателството следва от факта, че тройките вектори $(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{x})$ и $(\vec{a},\vec{b},\vec{x})$ са ориентирани еднакво или не в зависимост от това дали λ е положително или не.

(е) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$. Това следва от 3.2.3.2.1 защото за всеки вектор $\vec{x}$ имаме

$$L_{(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})}(\vec{x}) = L_{(\vec{x},\vec{a})}(\vec{b}+\vec{c}) = L_{(\vec{x},\vec{a})}(\vec{b}) + L_{(\vec{x},\vec{a})}(\vec{c}) = L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) + L_{(\vec{a},\vec{c})}(\vec{x})$$

От друга страна векторът $\vec{p} = \vec{a} \times \vec{b}$ е определен еднозначно от линейната функция $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x})$. Остава само да положим $\vec{q} = \vec{a} \times \vec{c}$ и да видим, че за всяко $\vec{x}$ е изпълнено

$$(\vec{p} + \vec{q}) \cdot \vec{x} = \vec{p} \cdot \vec{x} + \vec{q} \cdot \vec{x} = L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x}) + L_{(\vec{a},\vec{c})}(\vec{x})$$

Докажете сами, че $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ (Упътване: използвайте, че $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})$).

(ж) Векторното произведение *не е* асоциативно; тоест не е вярно, че $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$. Убедете се сами, че произведенията имат различно разположение в пространството.

3.2.6 В точка 3.2.4 видяхме, че ако знаем координатите на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можем да пресметнем координатите на $\vec{a} \times \vec{b}$ след като пресметнем стойностите $e_\lambda = L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{e}_\lambda); \quad \lambda = 1, 2, 3$ на линейната функция $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{x})$ в базисните вектори.

За да направим това обаче трябва да преценим (както в точка 3.2.2.2) как са ориентирани тройките вектори $(\vec{a},\vec{b},\vec{e}_1)$, $(\vec{a},\vec{b},\vec{e}_2)$ и $(\vec{a},\vec{b},\vec{e}_3)$. Вместо да правим това всеки път, по - удобно е да разкрием скобите в произведението $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1b_2\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + a_1b_3\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 + a_2b_1\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + a_2b_3\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 + a_3b_1\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + a_3b_2\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$

В горната сума не участвуват произведения от вида $\vec{e}_i \times \vec{e}_i$, защото са нули. След това използваме, че за $i \neq j$ е изпълнено $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\vec{e}_j \times \vec{e}_i$ и получаваме

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$$

Ако тълкуваме изразите в скобите като детерминанти от втори ред става ясно, че можем да запишем горното равенство като формална детерминанта, на която първият ред се състои от вектори:

$$\text{(vp)} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

За да пресмятаме векторни произведения е достадъчно да видим кои са векторите $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ за $i \neq j$. Във всеки конкретен случай това не представлява особен проблем:

3.2.6.1 Да си припомним например базиса $\mathcal{A}$ от точка 3.1.2.8.1. За матрицата на Грам имаме: $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а от 3.2.2.3 знаем, че нейната обратна е $\mathcal{G}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Съгласно 3.2.2.3 за да пресметнем $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$ например е достатъчно да се пресметне $L_{(\vec{e}_2,\vec{e}_3)}(\vec{x})$ за $\vec{x} = \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Но това е лесно: $L_{(\vec{e}_2,\vec{e}_3)}(\vec{e}_2) = L_{(\vec{e}_2,\vec{e}_3)}(\vec{e}_3) = 0$ и $L_{(\vec{e}_2,\vec{e}_3)}(\vec{e}_1) = \sqrt{G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = 2\sqrt{3}$. Знакът пред корена е положителен, защото тройката вектори $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1)$ е положително ориентирана, при положение, разбира се, че изходния базис $\mathcal{A}$ е ориентиран положително.

Забележка*: *Докажете, че* ***за всяка матрица на Грам*** *$\mathcal{G}$ съществуват точно два базиса $\mathcal{X}_\pm$, които са противоположно ориентирани, и за които $\mathcal{G}(\mathcal{X}_\pm) = \mathcal{G}$.*

И така, както в 3.2.4 получаваме, че $(e_1, e_2, e_3) = 2\sqrt{3}(1, 0, 0)$, а координатите (λ, μ, ν) на $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$ се получават от равенството

$$(\lambda, \mu, \nu) = 2\sqrt{3}(1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}(2, 1, 0)$$

По същия начин получаваме $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 2, 0)$ и $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = 2\sqrt{3}(0, 0, 1)$.

3.2.6.2 Ясно е, можем да напишем обща формула за вида на векторното произведение при произволен базис. Ние обаче няма да излагаме тези непоучителни пресмятания; вместо това предлагаме на читателя да пресметне за упражнение векторното произведение на векторите $\vec{a} = (-1, 2, -2)$ и $\vec{b} = (2, 1, -2)$, чиито координати са дадени в базиса $\mathcal{B}$ от 3.1.2.8.2.

3.2.6.3 Ще напишем вместо това как изглежда векторното произведение, когато базисът е ортогонален. Това означава (вижте 3.1.2.13), че матрицата на Грам е единичната 3×3 матрица E_3.

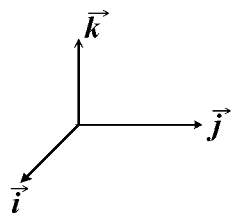


Рис. 3.2.6.2

Ще считаме, че базисът е дясноориентираната тройка $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ от ортогонални единични вектори, както е показано на горната рисунка. Тогава очевидно $\vec{j} \times \vec{k} = (1, 0, 0)E = (1, 0, 0) = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ и $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$. От (**vp**) получаваме, че

$$\text{(vpo)} \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

3.3.1 В 3.2.5 (ж) препоръчахме на читателя да се убеди, че в общия случай $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. Това наистина е така; да забележим, че $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \perp \vec{a}$, а $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \perp \vec{c}$. Значи равенството $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ е възможно само ако $\vec{a}\|\vec{c}$.

Изобщо произведението $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ се нарича *двойно векторно произведение*. Ясно е, че има два вида двойни векторни произведения - $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ също е такова, но забележете, че $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}$.

И така, векторът $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ е перпендикулярен на $\vec{c}$. Той освен това е перпендикулярен и на $\vec{a}\times\vec{b}$, тъй като това е първият множител в произведението $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$. Последната забележка означава, че $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Няма да коментираме случая, когато $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са успоредни, защото е скучен; следователно предполагаме, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са неколинеарни.

Тогава те са база за всички компланарни с тях вектори; т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ за някои числа α и β.

За да определим коефициентите α и β, ще разгледаме специална ортогонална база $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, векторът $\vec{i}$ на която е успореден с $\vec{a}$, а $\vec{j}$ е компланарен с $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

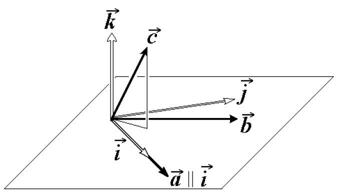


Рис. 3.3.1

Спрямо тази система координатите на съответните вектори изглеждат по следния начин: $\vec{a}=(a_1,0,0)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,0)$ и $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Изчисляваме векторните произведения:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = a_1b_2\vec{k};$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & a_1b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -a_1b_2c_2\vec{i} + a_1b_2c_1\vec{j}$$

В последното равенство прибавяме и вадим $a_1b_1c_1\vec{i}$ и получаваме

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -a_1b_2c_2\vec{i} - a_1b_1c_1\vec{i} + a_1b_1c_1\vec{i} + a_1b_2c_1\vec{j} = -(b_1c_1+b_2c_2)(a_1\vec{i}) + a_1c_1(b_1\vec{i}+b_2\vec{j})$$

В първите скоби е записано скаларното произведение $\vec{b}\cdot\vec{c}$, а в останалите съответно векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$; окончателно получаваме $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$, защото $a_1c_1 = \vec{a}\cdot\vec{c}$. Съответно $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$.

3.3.2 Нека са дадени векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Напомняме, че числото $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{c}) = g(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ е равно на ориентирания обем на призмата, породена от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. При което $g(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$, ако тройката $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ е ориентирана положително и $g(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$ в противен случай.

По дефиниция (на векторно произведение) $g(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{p}\cdot\vec{c}$, където $\vec{p}=\vec{a}\times\vec{b}$, тоест това е скаларното произведение на $\vec{c}$ с векторното произведение $\vec{p}$ на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ето защо $g(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ се нарича *смесено произведение* на векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

В 3.2.3.2.1 отбелязахме, че $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{c}) = L_{(\vec{c},\vec{a})}(\vec{b})$. Прилагаме последното още веднъж и получаваме $L_{(\vec{a},\vec{b})}(\vec{c}) = L_{(\vec{b},\vec{c})}(\vec{a})$. Значи $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

3.3.2.1 С помощта на произведенията на три вектора можем да пресмятаме всякакви произведения на вектори (които, разбира се, могат да бъдат образувани). Например за да пресметнем скаларното произведение $L = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$, полагаме $\vec{c}\times\vec{d} = \vec{p}$. Тогава $L = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{p} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{p})$ съгласно 3.3.2. В скобите се получава $\vec{b}\times\vec{p} = \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})$, от където и от 3.3.1 се получава $\vec{b}\times\vec{p} = (\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}$. Значи

$$(\mathbf{L}) \qquad L = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \begin{vmatrix} (\vec{a}\cdot\vec{c}) & (\vec{a}\cdot\vec{d}) \\ (\vec{b}\cdot\vec{c}) & (\vec{b}\cdot\vec{d}) \end{vmatrix}$$

3.3.2.2.1 Аналогично можем да постъпим например с произведението $\vec{x} = (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$. Полагаме $\vec{p} = (\vec{c}\times\vec{d})$ и развиваме съгласно 3.3.1 двойното произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{p}$:

$$\vec{x} = (\vec{p}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{p}\cdot\vec{b})\vec{a} = g(\vec{c},\vec{d},\vec{a})\vec{b} - g(\vec{c},\vec{d},\vec{b})\vec{a}$$

Тъй като $g(\vec{c},\vec{d},\vec{a}) = g(\vec{a},\vec{c},\vec{d})$ и $g(\vec{c},\vec{d},\vec{b}) = g(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$, то окончателно получаваме

$$\vec{x} = g(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - g(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$$

По същия начин можем да представим $\vec{x}$ така: $\vec{x} = \vec{q}\times(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{q}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{q}\cdot\vec{c})\vec{d}$ Приравняваме изразите за $\vec{x}$ и използваме, че $(\vec{q}\cdot\vec{d}) = g(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ и $(\vec{q}\cdot\vec{d})g(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$, за да получим, че (изразявайки $\vec{x}$ по два начина)

$$g(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - g(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a} = g(\vec{d},\vec{a},\vec{b})\vec{c} - g(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}$$

Ако $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ например са некомпланарни, то от горното равенство получаваме развитието на вектора $\vec{d}$ по базиса $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$:

$$(\mathbf{vb}) \qquad \vec{d} = \frac{g(\vec{d},\vec{b},\vec{c})}{g(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\vec{a} + \frac{g(\vec{a},\vec{d},\vec{c})}{g(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\vec{b} + \frac{g(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{g(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}\vec{c}$$

Горното равенство показва, че ако ни е известна детерминантата на Грам базиса $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$, то можем да представим аналитично *всеки вектор*, на който разположението спрямо $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ е зададено по някакъв начин. То освен това дава геометрично тълкуване на координатите на $\vec{d}$ - те са отношения на ориентирани обеми.

3.3.2.2 В горния текст изложихме някои елементи на векторната алгебра. Трябва да отбележим, че векторната алгебра е твърде мощен апарат за изучаването на най - различни геометрични проблеми.

Нейно следствие са например основните формули на *сферичната тригонометрия*. Да напомним, че *голяма окръжност* върху дадена сфера е всяка окръжност, центърът на която съвпада с центъра на сферата. *Сферичният триъгълник* е област върху единичната сфера, която е заградена от дъги на три големи окръжности.

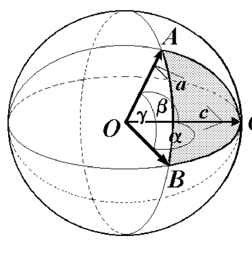


Рис. 3.3.2.2
На рисунката сферичният триъгълник ABC е затъмнената област. Той има за страни дъгите AB, BC и CA. Разбира се, те се измерват посредством ъглите α, β и γ. Ъглите на триъгълника ABC са ъглите между дъгите му. По дефиниция ъгъл между две дъги е ъгълът между допирателните вектори към тях в общата им точка. В случая това е ъгълът a между векторите $\vec{t}_A$ и $\vec{t}_B$.

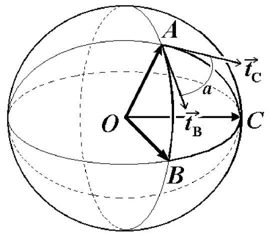


Рис. 3.3.2.2$^{(a)}$
От горната рисунка се вижда, че a е двустенният ъгъл между равнините OAB и OAC. Наистина, допирателната към дадена сфера е перпендикулярна на радиуса на сферата в съответната точка. По - надолу считаме, че никой от ъглите на ABC не е по - голям от π.

3.3.2.3 Да решим сферичен триъгълник означава по три дадени негови елемента да пресметнем всеки друг елемент. И така, нека срещуположните на A, B и C страни са α, β и γ, а двустенните ъгли при A, B и C са съответно a, b и c. Ще отбележим също така, че вместо сферичен триъгълник можем да разглеждаме тристенен ъгъл, както е показано на следващата рисунка.

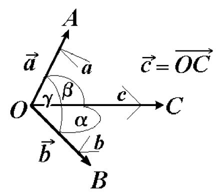


Рис. 3.3.2.3
Векторите $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ са единични, а ъглите между тях са показани на рис. 3.3.2.3.

3.3.2.4 Имаме

$$\vec{b}\cdot\vec{c} = \cos\alpha, \quad \vec{c}\cdot\vec{a} = \cos\beta, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \cos\gamma$$

и

$$\vec{b}\times\vec{c} = \sin\alpha\vec{a}', \quad \vec{c}\times\vec{a} = \sin\beta\vec{b}', \quad \vec{a}\times\vec{b} = \sin\gamma\vec{c}'.$$

Тук $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ и $\vec{c}'$ са единичните вектори, еднопосочни със съответните векторни произведения (забележете, че $|\vec{b}\times\vec{c}| = \sin\alpha$; $|\vec{c}\times\vec{a}| = \sin\beta$ и $|\vec{a}\times\vec{c}| = \sin\gamma$).

Ъглите между векторите $\vec{a}'$, $\vec{b}'$ и $\vec{c}'$ са равни очевидно на на двустенните ъгли на тристенния ъгъл от рис. 3.3.2.3, защото раменете им са взаимно перпендикулярни.

Значи за произведението $\vec{b}'\cdot\vec{c}'$ имаме $\vec{b}'\cdot\vec{c}' = |\vec{b}'||\vec{c}'|\cos(\pi - a) = -\cos a$, защото $\vec{b}'$ и $\vec{c}'$ са единични вектори.

От друга страна съгласно **(L)**

$$\vec{b}'\cdot\vec{c}' = \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\begin{vmatrix}\vec{a}^2 & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{vmatrix} = \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\begin{vmatrix}1 & \cos\beta\\ \cos\gamma & \cos\alpha\end{vmatrix}$$

По такъв начин получаваме, че

(cth)
$$\cos a = \frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\begin{vmatrix}1 & \cos\beta\\ \cos\gamma & \cos\alpha\end{vmatrix} = \frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

Равенството **(cth)** се нарича *косинусова теорема* за тристенния ъгъл.

3.3.2.5 От тъждествата в началото на 3.3.2.4 можем да се направят различни други заключения. Ще отбележим, че тези тъждества съдържат основните факти на сферичната геометрия.

Например от втория ред в 3.3.2.4 след като умножим скаларно с "векторите прим" получаваме съответно.

$$g(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\vec{a}'\sin\alpha;\quad g(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{b}\vec{b}'\sin\beta;\quad g(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{c}\vec{c}'\sin\gamma$$

и аналогично (докажете го)

$$g(\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}') = \vec{a}'\vec{a}\sin a;\quad g(\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}') = \vec{b}'\vec{b}\sin b;\quad g(\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}') = \vec{c}'\vec{c}\sin c.$$

След като разделим почленно тези равенства получаваме *синусовата теорема* за сферичен триъгълник:

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$