УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
Катедра "МАТЕМАТИКА"

Непрекъснтост. Производни и интеграли.

Записки на лекции по Анализ за специалността Архитектура

доц. д-р Владимир Тодоров

София, 2004 г.

1. Граница на функция. Непрекъснати функции.

В много от процесите, които се описват посредством математически модели се използват функции на числов аргумент. От друга страна явленията и процесите притежават някои общи (и може би естествени) свойства от типа на *скорост*, *плътност*, *виртуални сили* или изобщо скорост на различни процеси и др. Във всички тези неща се използва идеята за граница на функция.

Ето защо е важно да знаем какво е *граница* на функция. В следващия текст ще се занимаваме главно с функции на реален аргумент. Много от резултатите обаче *без никакви промени* остават верни и за функции на комплексен аргумент, тоест за функции от вида $f : B \to \mathbb{C}$, където B е подмножество на комплексната равнина $\mathbb{C}$. Същото се отнася и за функциите от вида $f : A \to \mathbb{C}$, където $A \subset \mathbb{R}$ е множество от реални числа. Ще означаваме с $(*)$**-с** аналога на твърдението $(*)$ в комплексния случай. Читателите, които изпитват дискомфорт от комплексни числа спокойно могат да пропускат тези части от текста при първо четене (а ако нещата са неспасяеми - и при второ :-).

1.1 Нека $f : D_f \to \mathbb{R}$; $D_f \subset \mathbb{R}$ е числова функция и $a \in \mathbb{R}$ е (реално) число. В този раздел ще изучаваме границата на $f(x)$, когато x клони към a като се променя само в множеството $A \subset D_f$. Идеята за граница на функция при $x \to a$ (така се записва накратко изказването "x клони към a") е съвсем естествена: разглеждаме всевъзможни редици $x_n \to a$ от елементи $x_n \in A$ и изучаваме техните образи $\{f(x_n)\}$.

Последното е възможно само когато можем да извършим граничен преход към a като използваме елементи от A, т.е. когато a е *контурна точка* на A:

1.1.1 Дефиниция. a е *контурна точка* на A, ако A съдържа редица $\{x_n\}$ за която $x_n \neq a \; \forall n$ и $\lim x_n = a$.

Например ако $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, то *единствената* контурна точка на A е числото 0. Забележете, че $0 \notin A$.

От друга страна, *всяко* число е контурна точка на множеството $\mathbb{Q}$ от всички рационални числа. Разгледайте самостоятелно различни други примери.

1.1.1-с Контурна точка на подмножеството $B \subset \mathbb{C}$ на комплексната равнина се определя *по същия начин*. Например **всяка** точка от единичната окръжност е контурна точка на множеството $B = \{z = \cos\alpha + i\sin\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q}\}$.

Определете контурните точки на множеството от всички точки z от вида $z = \frac{1+i^n n}{n}$; $n \in \mathbb{N}$, където i е имагинерната единица.

1.1.2 Впрочем в следващия текст множеството A най - често ще бъде интервал, а a негова вътрешна или крайна точка.

И така, нека f е функция на реален аргумент; тоест дефиниционната област D_f на функцията f е подмножество на $\mathbb{R}$. Да допуснем след това, че a е контурна точка на A.

1.2 Дефиниция Числото b е граница на функцията f, когато x клони към a по множеството A (ще записваме това така: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$), ако е изпълнено следното условие:

$(\varepsilon - \delta)$: За всяко положително ε съществува такова $\delta > 0$, че ако $x \in A$ и $0 < |x - a| < \delta$, то $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Очевидно горната дефиниция не е удобна за директно пресмятане на граници, защото тя предполага наличието на априорна (първоначална) информация за съответната граница. Този недостатък донякъде може да бъде избегнат с помощта на следната теорема:

1.2.1 Теорема (Хайне) Границата $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ съществува тогава и само тогава, когато е изпълнено следното условие:

(Н) За *всяка* редица $\{x_n\}$ от (различни от a) точки на A, която е сходяща към a, редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща.

При това от условието **(Н)** следва, че ако $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ са две редици от точки на A, за които $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x'_n = a$ то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$ и тази обща стойност е равна на границата $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ на f, определена посредством $(\varepsilon - \delta)$ дефиницията.

Доказателство: Нека е изпълнено условието от Дефиниция 1.2 и $\varepsilon > 0$ е произволно. Нека след това $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in A$ и $\lim x_n = a$. По условие съществува $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b$. Това озанчава, че можем да намерим $\delta > 0$, за което е изпълнено условието $(\varepsilon - \delta)$. След това избираме такова ν, че ако $n > \nu$ то $|x_n - a| < \delta$. Очевидно за тези n ще е изпълнено $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ което означава, че редицата $\{f(x_n)\}$ е сходяща.

Няма да доказваме подробно, че от 1.2.1 следва 1.2. Ще отбележим само, че ако е в сила условието от теоремата на Хайне и $\{x_n\} \to a$ и $\{x'_n\} \to a$ са две редици от точки на A, то съгласно условието редиците $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$ също са сходящи, например към b и b'. Ще докажем, че $b = b'$. За тази цел образуваме редицата $\{y_n\}$ където $y_n = x_k$ при $n = 2k-1$ и $y_n = x'_k$ при $n = 2k$. Лесно се вижда, че $\{y_n\} \to a$ и $y_n \in A \forall n$. Следователно съществува $\lim f(y_n) = c$. Тъй като $\{f(x_k)\}$ и $\{f(x'_k)\}$ са подредици на $\{f(y_n)\}$ то техните граници очевидно са равни на c, т.е. $b = c = b'$. По такъв начин доказахме, че *за всяка редица* $\{x_n\}$ от точки на A, която клони към a е в сила $\lim f(x_n) = b$.

1.2.1-c Теоремата на Хайне и горните дефиниции остават вярни и за функции на комлексен аргумент (или с комплексни стойности). Формулирайте 1.2 и 1.2.1 в този случай.

Понятието за граница на функция понякога се използува и при граничен преход "в безкрайност". Ще напомним съответния аналог и за редици:

1.2.2 Дефиниция Редицата $\{a_n\}$ клони към плюс безкрайност (съответно към минус безкрайност); ако е изпълнено следното условие:

За всяко реално число A съществува такова ν, че ако $n > \nu$ то $a_n > b$ (съответно $a_n < b$). В този случай ще пишем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty)$.

1.2.3 Дефиниция

(а) Границата на функцията f е равна на безкрайност (минус безкрайност), когато x клони към a по подмножеството A, ако е изпълнено условието: $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0$ такова, че ако $x \in A$, $x \neq a$ и $|x - a| < \delta$ то $f(x) > b$ $(f(x) < b)$. Ще записваме последното по следния начин: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty)$.

(б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b)$ ако $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in \mathbb{R}$ такова, че ако $x > a$ $(x < a)$ то $|f(x) - b| < \varepsilon$.

(в) Накрая предлагаме на читателя да формулира останалите четири версии за граничен преход към безкрайност: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Тук ще опишем като пример условието за границата $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. То изглежда тека: $\forall\ b \in \mathbb{R}\ \exists\ a \in \mathbb{R}$ такова, че ако $x > a$ то $f(x) < b$.

Формулирайте и докажете аналозите на теоремата на Хайне в различните варианти от горната дефиниция.

1.2.3-c Формулирайте 1.2.2 и 1.2.3 в комплесния случай. Разбира се, там са възможни само гранични преходи към ∞ (*но не и* към $+\infty$ или $-\infty$).

1.2.4 Теорема Ако $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то за всеки две числа α и β съществуват $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x))$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, които са равни съответно на $\alpha b + \beta c$ и bc. Ако при това $c \neq 0$ то $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$.

Доказателството на тази теорема е директно следствие от съответните свойства на числовите редици и теоремата на Хайне.

1.2.5 Пример Нека f е монотонна в интервала (a, b). Докажете, че за всяко $x_0 \in (a, b)$ съществуват границите $\lim\limits_{x\to x_0 \pm 0} f(x)$.

Упътване. Тук е удобно да използваме $(\varepsilon - \delta)$ дефиницията. Да разгледаме например интервала (a, x_0). Функцията f е ограничена отгоре в него, защото ако $x < x_0$, то $f(x) \leq f(x_0)$; тоест $f(x_0)$ е горна граница на f в интервала (a, x_0). Да означим с a *точната горна граница* на f в този интервал. Добър начин да си припомним какво е точна горна граница е да докажем, че $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = a$.

1.2.6 Примери (а) Ако $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$ *за всяко* n. Това следва от теоремата на Хайне и 4.18 (ж). Изобщо, както споменахме по - горе, пресмятането на граници на функции не би трябвало да е препятствие за всеки, който може да пресмята граници на редици.

(б) Пресметнете границата $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$ (вижте 4.23).

(в) Нека $a_n \neq 0 \neq b_m$ и $l = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_x + b_0}$. Докажете, че $l = \frac{a_n}{b_n}$, ако $n = m$, $l = 0$ при $n < m$ и $l = \pm\infty$ когато $n > m$.

(г) Пресметнете границата на израза от (г) когато x клони към 0.

(д*) Пресметнете $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{i}{x})^x$; $(i^2 = -1)$.

1.3 Непрекъснати функции.

1.3.1 Дефиниция Нека $x_0 \in D_f$. f е *непрекъсната* в точката x_0, ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Ако f е непрекъсната във всяка точка от множеството $A \subset D_f$, то ще казваме, че f е непрекъсната в A. Когато дадена функция е определена посредством аналитичен израз без допълнителни указания за дефиниционната и област, ще считаме, че дефиниционната област се състои от всички точки, за които изразът има смисъл. Ето няколко примера: $f(x) = \log_{2x^2-1}(2x^2 + x - 1)$ - дефиниционната област е $D_f = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$; $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x+5}$, $D_f = (-\infty, -5) \cup (-5, 2] \cup [3, \infty)$ и т.н.

1.3.1-с (а) Функцията $E(t) = \cos t + i \sin t$ е непрекъсната в реалната права $(t \in \mathbb{R})$. Убедете се сами, че това е тривиално следствие от непрекъснатостта на тригонометричните функции. Покажете, че функцията $f(t) = \frac{t}{1+t^2} + i\frac{1-t^2}{1+t^2}$ също е непрекъснта.

(б) Покажете, че функциите $g(t) = \frac{i}{i+t^2}$ и $h(t) = \frac{\sin 2t}{1-t} + i\sqrt[3]{1+t^2}$ са непрекъснати.

Изобщо покажете, че функцията $f : [a, b] \to \mathbb{C}$; $f(t) = h(t) + ig(t)$ е непрекъсната точно когато са непрекъснати функциите g и h.

(в) Докажете, че за $n \in \mathbb{N}$ функцията z^n е непрекъсната за всяко $z \in \mathbb{C}$.

(г) Докажете, че функциите $f(z) = \frac{1}{z}$; $z \neq 0$ и $g(z) = \frac{1-2z}{1+z^2}$, $z \neq \pm i$ са непрекъснати в дефиниционните си области.

1.3.2 Теорема Ако f и g са непрекъснати в x_0, то (а) $\alpha f + \beta g$ е непрекъсната в x_0,

(б) fg е непрекъсната в x_0 и

(в) ако $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}$ е непрекъсната в x_0.

(г) Нека g е непрекъсната в $y_0 \in D_g$, а f е непрекъсната в точката $x_0 \in D_f$; при което $f(x_0) = y_0$. Тогава сложната функция $F(x) = g(f(x))$ е непрекъсната в точката x_0.

Твърденията от горната теорема са следствия от свойствата на сходящите редици.

1.3.2-с Разбира се, ако функциите $f(t) = x(t) + iy(t)$ и $g(t) = u(t) + iv(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ са непрекъснати в точката t_0, то

(а) за всеки две (може и комплексни) константи α и β функцията $\alpha f + \beta g$ е непрекъсната в точката t_0,

(б) функцията fg е непрекъсната в t_0 и

(в) ако $g(t_0) \neq 0$, то функкцията $\frac{f}{g}$ е непрекъсната в t_0.

(г) Нека g е непрекъсната в $w_0 \in D_g$, а f е непрекъсната в точката $z_0 \in D_f$; при което $f(z_0) = w_0$. Тогава сложната функция $F(z) = g(f(z))$ е непрекъсната в точката z_0. Ще отбележим, че в този случай аргументите и стойностите на функциите са комплексни числа.

Функцията f е *прекъсната* в $x_0 \in D_f$, ако не е непрекъсната там. Това означава, че или не съществува $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, или $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Ще прецизираме понятието точка на прекъсване:

1.3.3 Дефиниция Ще казваме, че функцията f има точка на прекъсване от първи тип при $x = x_0$, ако съществуват границите $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ и $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ и разбира се $f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$ или $f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$. В този случай ще наричаме разликата

$$\delta_f(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

скок на функцията f в точката x_0.

1.3.3.0 Читателят не бива да се заблуждава, че ако $\delta_f(x_0) = 0$ в някоя точка x_0, то f е непрекъсната там. В следващия текст (1.4.2) ще видим, че е възможно скокът в някоя точка да е нула и функцията да е прекъсната там (защото може да се случи $f(x_0 \pm 0) \neq f(x_0)$).

1.3.3.1 Забележка Разбира се, не може да се говори за точки на прекъсване от първи тип за функции на комплексен аргумет. Причината за това очевидно следва от факта, че в комплексната равнина освен "ляв" и "десен" граничен преход, към точката, в която се пресмята граница може да "подхожда" и по други начини.

Все пак ще отбележим, че по същия както в 1.3.3 начин можем да определяме различни видове точки на прекъсване за функции на *реален* аргумент, които имат *комплексни* (в общия случай) стойности.

Когато x_0 не е точка на прекъсване от първи тип и f е прекъсната в x_0 то ще казваме, че тя е точка на прекъсване от втори тип.

Забележка: Някои автори считат, че f е прекъсната в a и в случая, когато a е контурна точка на D_f и не съществува $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ (Да забележим, че в този случай е възможно $a \notin D_f$).

Например числото 0 е точка на прекъсване на функциите $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \sin\frac{1}{x}$ и т.н.

1.4 Примери

1.4.1 $x_0 = 0$ е точка на прекъсване от втори тип на функцията $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. Наистина, очевидно ако $\forall n \in \mathbb{N}$ $\;x_n = \frac{2}{\pi n}$, то редицата $\{f(x_n)\}$ има три точки на сгъстяване - -1, 0 и 1 и следователно е разходяща. Това означава, че условието **(H)** не е изпълнено и следователно не съществува $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$. Нещо повече, не същесвуват лява и дясна граници на f в точката 0, защото $\{f(x_n)\}$ има три точки на сгъстяване.

1.4.2 Нека $f(x) = \frac{1}{q}$, когато x е рационално число и $x = \frac{p}{q}$, където $\frac{p}{q}$ е несъкратима дроб и $f(x) = 0$ за $x \notin \mathbb{Q}$. Докажете, че f е непрекъсната във всяко ирационално число.

Тук ще докажем, че f има точка на прекъсване от първи тип във всяко рационално число. Нещо повече, както ще видим по - долу скокът на f навсякъде е нула:

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че *за всяко реално число* a е изпълнено равенството $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$. Нека $\varepsilon > 0$ е произволно и $n \in \mathbb{N}$ е естествено число за което $\frac{1}{n} < \varepsilon$. По - надолу ще използваме, че ако $\frac{p}{q} \in (\frac{l}{n!}, \frac{l+1}{n!})$, то $q > n$.

(*Наистина, ако* $q \leq n$, *то можем да умножим числителя и знаменателя на* $\frac{p}{q}$ *с цялото число* $h = \frac{n!}{q}$. *Ще получим, че* $\frac{l}{n!} < \frac{hp}{n!} < \frac{l+1}{n!}$. *Това е невъзможно, защото* hp *е цяло число.*)

За a са възможни два случая: (а) $a = \frac{k}{n!}$ за някое цяло k и (б) съществува цяло k, за което $\frac{k}{n!} < a < \frac{k+1}{n!}$. В първия случай полагаме $\delta = \frac{1}{n!}$, а във втория $\delta = \min\{a - \frac{k}{n!}, \frac{k+1}{n!} - a\}$. Нека след това $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$. Ако x е ирационално, то $f(x) = |f(x)| = 0 < \varepsilon$, а ако $x = \frac{p}{q}$ е рационално, то $x \in (\frac{k-1}{n!}, \frac{k}{n!}) \cup (\frac{k}{n!}, \frac{k+1}{n!})$ което означава, че $|f(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Забележка: Да разгледаме функцията

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & ; \quad f(x) \neq 0 \\ 0 & ; \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

където f е от предходния пример (1.4.2). g има някои екзотични свойства. Докажете например, че g е прекъсната за *всяко реално число*, при което то е точка на прекъсване от втори тип. Нещо повече, покажете, че g е неограничена *във всеки неизроден* интервал.

1.4.3. Функцията $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)}$ има две точки на прекъсване от втори тип - 0 и 1.

1.4.4 Функцията $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$ има две точки на прекъсване от първи тип - -1 и $+1$.

1.4.5 Функцията

$$d(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

е прекъсната във всяка точка от $\mathbb{R}$. Докажете, след това, че функцията $f(x) = (x-1)d(x)$ е непрекъсната при $x = 1$. Посочете пример на функция, която е непрекъсната само в три точки.

Горните примери описват някои възможни случаи и видове на прекъснатост, а също така и множествата от точките на прекъсване. Тук няма да изучаваме подробно възможните множества от точки на прекъсване, както и възможните видове прекъснатост. Читателят не бива да предполага, че примерите 1.4 описват изцяло феномена прекъснатост, а и това не е предмет на обсъждане в тези лекции. В следващия текст ще изложим някои от основните класически резултати за свойствата на функциите, които са непрекъснати в даден интервал.

1.5 Теорема Всяка функция f, която е непрекъсната в ограничения затворен интервал $[a, b]$ е ограничена. Нещо повече, f достига най - голямата и най - малката си стойности в $[a, b]$.

Доказателство: Ще докажем първо, че f е ограничена. Ясно е, че за тази цел е достатъчно да се докаже, че функцията $|f|$ е ограничена отгоре (да отбележим, че $|f|$ е непрекъсната и неотрицателна).

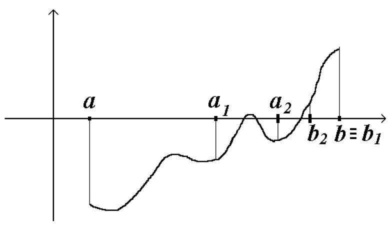
За тази цел допускаме противното. Това означава, че за всяко естествено n можем да посочим точка $a_n \in [a, b]$, за която $f(a_n) \geq n$. От теоремата на Вайерщрас следва, че можем да намерим сходяща подредица $\{a_{n_k}\}$ на ограничената редица $\{a_n\}$. Нека $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Тъй като $\forall k \in \mathbb{N}$ е изпълнено $a \leq a_{n_k} \leq b$, то $a \leq x_0 \leq b$, което означава, че $x_0 \in [a, b]$. От теоремата на Хайне следва, че $\lim\limits_{k\to\infty} |f(a_{n_k})| = |f(x_0)|$, което противоречи на неравенствата $|f(a_{n_k})| \geq n_k \geq k$.

И така, f е ограничена. Ще докажем например, че горната граница f е нейна стойност; т.е. че $\exists \quad x_+ \in [a, b]$ за която $f(x_+) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Нека $m = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ и $n \in N$. Тъй като $m - \frac{1}{n}$ не е горна граница на f, то съществува точка $x_n \in [a, b]$, за която $m - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq m$. Тъй като $\{x_n\} \subset [a, b]$ е ограничена редица, тя притежава сходяща подредица, да речем $\{x_{n_k}\} \to x_+ \in [a, b]$. $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = m$, защото $0 \leq m - f(x_{n_k}) \leq \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k}$. От друга страна $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_+)$, защото f е непрекъсната в x_+.

1.6 Теорема Нека f е непрекъсната в $[a, b]$ и $f(a)$ и $f(b)$ имат различни знаци, тоест $f(a)f(b) < 0$. При това условие съществува точка $c \in [a, b]$, за която $f(c) = 0$.

Доказателство: Ще казваме, че интервала $[y, z] \subset [a, b]$ е *шарен*, ако $f(y)f(z) < 0$. Нека след това $\xi = \frac{a+b}{2}$. Ако $f(\xi) = 0$, то полагаме $\xi = c$ и доказателството е завършено. В противен случай един от интервалите $[a, \xi]$ и $[\xi, b]$ е шарен. Нека това е $[\xi, b]$. Полагаме $a_1 = \xi$ и $b_1 = b$. Повтаряме последното разсъждение и строим редица $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$ от вложени шарени интервали $\Delta_n = [a_n, b_n]$, за които $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}); \quad n \in \mathbb{N}$, $(a_0 = a,\ b_0 = b)$. Нека $\{c\} = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_n$.

Ясно е, че $\{a_n\}$ е растяща, а $\{b_n\}$ е намаляваща редица и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, защото $c - a_n < \frac{1}{2^{n-1}}(b - a) > b_n - c$. Тъй като инревалът $[a_n, b_n]$ е шарен, то $\forall n\ f(a_n)f(b_n) \leq 0$. Значи $0 \leq f^2(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0$, с което доказателството е завършено.



1.7 Следствие Ако f е непрекъсната в интервала $< a, b >$ и за $x_{1,2} \in < a, b >$ е изпълнено условието $f(x_1) < y < f(x_2)$, то съществува $x' \in (x_1, x_2)$, за която $f(x') = y$.

За доказателство е достатъчно да приложим теорема 1.6 за функцията $g(x) = f(x) - y$ и интервала $[x_1, x_2]$, в който g е непрекъсната. Очевидно $g(x_1) < 0$ и $g(x_2) > 0$, следователно за някое $x' \in (x_1, x_2)$ имаме $g(x') = 0$.

1.8 Следствие Ако Δ е интервал и f е непрекъсната в Δ, то $f(\Delta)$ е също интервал.

Доказателството на това твърдение следва от факта, че ако $y_{1,2} \in f(\Delta)$, то $[y_1, y_2] \subset f(\Delta)$.

1.9 Следствие Ако f е непрекъсната и еднозначна в интервала $< a, b >$, то тя е строго монотонна.

Доказателство: Да допуснем, че f не е монотонна. Докажете самостоятелно, че в този случай можем да намерим три точки от $< a, b >$ - например x_1, x_2 и x_3, за които $x_1 < x_2 < x_3$, но не е в сила никоя от веригите неравенства $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ или $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$; т.е. вярно е или $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$, или $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$. И в двата случая можем да намерим число y, което се съдържа едновременно в интервалите $(f(x_1), f(x_2))$ и $(f(x_2), f(x_3))$.

Следствие 1.7 показва, че съществуват точки $z_1 \in (x_1, x_2)$ и $z_2 \in (x_2, x_3)$, за които $f(z_1) = f(z_2) = y$. Тъй като очевидно $z_1 \neq z_2$, то f не е еднозначна.

Последните два резултата ни дават възможност да разглеждаме обратни функции на непрекъснати функции, които са дефинирани в някой *интервал*. Очевидно от тях следва, че ако дадена функция е непрекъсната в някой интервал, то

(а) образът на този интервал е отново интервал (без значение дали е ограничен или затворен) и

(б) функцията е обратима точно тогава, когато е монотонна.

Тези условия са съществени. Например функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ -x & ; \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

е обратима в интервала $(-\infty, \infty)$ и както лесно се вижда $f^{-1} = f$, но f не е монотонна в *никой* интервал. Забележете, че f е непрекъсната единствено при $x = 0$.

От друга страна функцията

$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in [-7, -6] \\ -x & ; \quad x \in [-1, 1] \end{cases}$$

е непрекъсната в дефиниционната си област $D_f = [-7, -6] \cup [-1, 1]$ и е обратима (покажете, че както по - горе $f^{-1} = f$), но не е монотонна - тя е намаляваща в $[-1, 1]$ и растяща в $[-7, -6]$. Причината е, очевидно, че дефиниционната област на f не е интервал.

И така, ако някоя функция непрекъсната и еднозначна в някой интервал, то тя е монотонна (и следователно има обратна). Оказва се, че в обратната и функция също е непрекъсната.

1.10 Теорема Ако f е непрекъсната и еднозначна в интервала $[a, b]$, то обратната и функция g е непрекъсната в интервала $[f(a), f(b)]$.

Доказателство: Ще изложим разсъжденията в случая на растящи функции; те са напълно аналогични в случая на намаляващи.

И така, нека $c = f(a)$, $d = f(b)$ и $c \leq y \leq d$. Тъй като f е строго растяща и е "върху" (Следствие 2.7), то тя е обратима - нека g е обратната и функция. Нека освен това $x = g(y)$ и $\varepsilon > 0$. Ясно е, че $y_1 = f(x - \varepsilon) < y < f(x + \varepsilon) = y_2$. Да положим $\delta = \min\{y - y_1, y_2 - y\}$. Лесно се проверява, че ако $|y' - y| < \delta$, то $|g(y') - g(y)| < \varepsilon$, което означава, че g непрекъсната.

1.11 Следствие Теорема 1.10 е вярна и когато f е дефинирана в *произволен* интервал.

Доказателството е тривиално; в този случай трябва да се положи $c = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $d = \lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.

1.12 Примери

1.12.1 Функцията $f(x) = x^2$ е непрекъсната и еднозначна в интервала $[0,\infty)$; значи тя има (единствена) непрекъсната обратна функция $g(y) = \sqrt{y}$.

1.12.2 Покажете, че функцията $f : [3,\infty) \to [-4,\infty)$; $f(x) = x^2 - 6x + 5$ е непрекъсната и обратима. Намерете обратната и.

1.12.3** Докажете,че функцията $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $x \in [-1,1]$ е обратима. Нещо повече, убедете се самостоятелно, че обратната и функция $g : [-1,3] \to [-1,1]$ може да бъде описана по следния начин. За всяко $y \in [-1,3]$ имаме $g(y) = 2\cos\alpha$, където α е определен от равенството $\cos 3\alpha = \frac{1-y}{2}$. От Теорема 1.10 следва, че функцията g е непрекъсната в интервала $[-1,3]$.

В следващия текст ще видим, че функцията g може да бъде описана "по по - разбираем" начин.

2. Производна и диференциал

Като правило функциите, които се използват в приложните раздели на естествознанието притежават по - прецизни свойства от типа непрекъснатост. Това, че f е непрекъсната в точката x означава, че изразът $f(x+h) - f(x)$, разглеждан като функция на h има граница 0 при $h \to 0$. С други думи разликата $\Delta_x f(h) = f(x+h) - f(x)$ е *безкрайно малка* функция на h. За да получим по - подробна информация за поведението на f в точки , близки до x би трябвало да разгледаме свойствата на $\Delta_x f(h)$.

Например, безкрайно малка ли е функцията $\frac{\Delta_x f(h)}{h}$? Да допуснем, че съществува границата $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta_x f(h)}{h} = c_x$. Тогава е естествено да изучим функцията $\alpha(h) = \Delta_x f(h) - c_x h$. Ако е вярно, че $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0$, то може да се каже, че $c_x h$ апроксимира $\Delta_x f(h)$ *от ред по - висок от едно.* В този случай за достатъчно малки стойности на h е изпълнено приближеното равенство $f(x+h) \approx f(x) + c_x h$. Дори и такова елементарно наблюдение дава възможност да бъдат пресмятани стойностите на различни функции с удивително висока точност.

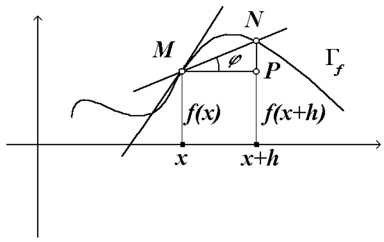
2.1 Пример Нека $f(x) = \sin x$. Ясно е, че $\Delta_x f(h) = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})$, следователно $c_x = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta_x f(h)}{h} = \cos x$. За функцията $\alpha(h) = \sin(x+h) - \sin x - h\cos x = 2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2}) - h\cos x$ имаме

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) - \cos x = 0.$$

Така се получава, че $\sin(x+h) \approx \sin x + h\cos x$. След замяна на x с $x+h$ получаваме съответно $\sin(x+2h) \approx \sin(x+h) + h\cos(x+h)$. Значи $\sin(x+2h) \approx \sin x + h\cos x + h\sqrt{1-\sin^2(x+h)} \approx \sin x + h\cos x + h\sqrt{1-(\sin x + h\cos x)^2}$ и т.н. Ако приемем за начална точка такова x, за което стойността $\sin x$ е известна - например $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и разгледаме подходяща стъпка h, то стойностите на функцията $\sin$ могат да бъдат пресметнати с доста голяма точност.

Границата на частното $\frac{\Delta_x f(h)}{h}$ се появява по естествен начин при различни проблеми от Физиката, Геометрията и други (понякога неочаквани) раздели на различни приложни науки. Ето няколко примера:

2.2 Пример Нека $M(x,y)$ е точка от графика Γ_f на функцията f. Да напомним, че това означава, че $y = f(x)$. Един от естествените начини да се дефинира *допирателна* към Γ_f в точката M е допирателната права да се разглежда като граница на хордите, които минават през точките $M(x, f(x))$ и $N(x+h, f(x+h))$ при $h \to 0$.



Тъй като всяка хорда минава през неподвижната точка M, то допирателната е определена еднозначно, ако можем да открием ъгъла, който тя сключва с оста Ox например (тангенсът му се нарича *ъглов коефициент*). Очевидно той е граница на ъгловия коефициент на правата MN, който е равен на частното на насочените отсечки $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\overline{PN}}{\overline{MP}}$. От горната рисунка се вижда, че $\frac{\overline{PN}}{\overline{MP}} = \frac{\Delta_x f(h)}{h}$. Значи ако съществува допирателна, то ъгловият и коефициент е равен на c_x. Например допирателната към графика на функцията $f(x) = \sin x$ в точката $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ има уравнение $\eta - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi - \frac{\pi}{6})$.

Ако функцията f описва някакъв процес, то *средна скорост* на процеса във времевия интервал $[t, t+h]$ се нарича частното $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{\Delta_t f(h)}{h}$. Естествено е да наричаме границата на това частно при $h \to 0$ *скорост* на съответния процес в момента t.

2.3 Дефиниция *Производна* на функцията f в точката x се нарича границата на частното

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta_x f(h)}{h} = \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Понякога ще казваме също, че f е *диференцируема* в точката x.

Производната на f в точката x_0 обикновено се бележи с някой от символите $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$ или $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}$.

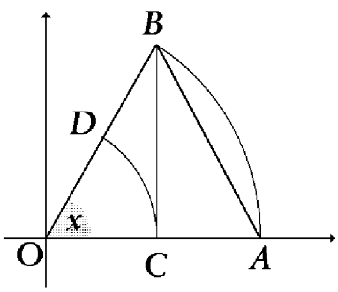
2.3.1 Производни на някои функции

2.3.1.1 На читателят би трябвало да е известно, че $(\sin x)' = \cos x$.

Това е вярно, защото за малки стойности на $x > 0$ са в сила неравенствата

$$x \cos x < \sin x < x,$$

верността на които се вижда от следващата рисунка:



Наистина, да разгледаме сектора OAB с център точката O, радиус единица и централен ъгъл x, *изразен в радиани.* Спускаме от B перпендикуляр BC към OA и получаваме правоъгълния триъгълник OCB с хипотенуза $OB = 1$ и $\angle BOC = x$. Ясно е, че $OC = \cos x$, $BC = \sin x$ и значи $S_{OBC} = \frac{1}{2} \cos x \sin x$.

От друга страна за лицето на сектора OCD, чиито радиус е равен на $OC = \cos x$ имаме $S_{\widehat{OCD}} = \frac{1}{2}x\cos^2 x$. И тъй като той се съдържа в $\triangle OCD$, то $\frac{1}{2}x\cos^2 x < \frac{1}{2}\cos x \sin x$ и значи $x\cos x < \sin x$. Що се отнся до неравенството $\sin x < x$, то следва от това, че $BC = \sin x$, $\widehat{AB} = x$ (ако x е в *радиани*) и $BC < \widehat{AB}$, защото BC е *най - късото* разстояние от точката B до коя да е точка от правата OA. Да отбележим освен това, че от тук следва и по - слабото (но доста полезно) неравенство $x\sqrt{1-x^2} < \sin x < x$ (защото $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$). От него и от тъждеството $\sin y - \sin x = 2\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{y+x}{2}$ получаваме, че ако разликата $y - x$ е малка и $y > x$, то е изпълнено

$$\sqrt{1-\frac{(y-x)^2}{4}}\cos\frac{y+x}{2} < \frac{\sin y - \sin x}{y-x} < \cos\frac{y+x}{2}.$$

От горните неравенства очевидно се получава, че $(\sin x)' = \cos x$.

2.3.1.2 Докажете, че $(\cos x)' = -\sin x$.

Разбира се, следвайки Дефиниция 2.3 можем да пресмятаме производните на различни функции. Тази дейност се облекчава от свойствата на производните, които разглеждаме в следващия текст. Тук ще отбележим, че ако някоя функция има производна в дадена точка (например x), то съществува $\lim\limits_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. От това очевидно следва, че е вярна следната теорема.

2.4 Теорема Ако f е диференцируема в точката x, то тя е непрекъсната в тази точка.

Обратното не е вярно, както ще се убедим по - надолу.

Когато в Дефиниция 2.3 се разглежда само лява или дясна граница ще говорим съответно за лява f'_l или дясна f'_r производна на f в точката x.

Например функцията $|x|$ в точката 0 има лява производна -1 и съответно дясна $+1$. Следователно $|x|$ **няма производна** при $x = 0$; въпреки това тя очевидно е непрекъсната при $x = 0$. Нещо повече, може да се построи функция, която е непрекъсната във всяка точка от $\mathbb{R}$ и не притежава производна в никое $x \in \mathbb{R}$.

Ще казваме, че f е диференцируема в множеството $A \subset \mathbb{R}$, ако f има производна във всяка точка на A. В този случай в A е дефинирана функцията $g = f'$ и очевидно можем да разглеждаме производната g' на g - тя се нарича *втора производна* на f и се означава със символите f'', $f^{(2)}$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}$.

По този начин можем да дефинираме *производни от по - висок ред* на функцията f; обикновено те се означават със символите $f^{(n)}$ или $\frac{d^n f}{dx^n}$.

2.5 Теорема Ако функциите f и g имат производни в точката x и α и β са константи, то и функциите $\alpha f + \beta g$ и fg са диференцируеми в x и $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ и $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Доказателство на тази теорема е съвсем стандартно и няма да го разглеждаме подробно. За упътване ще отбележим, че за доказателство на второто равенство е полезно да се извърши преобразованието

$$f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)$$

и след това да се използва Теорема 2.4.

2.6 Теорема (Лайбниц) Ако функциите f и g имат производни до ред n включително, то произведението им също има производна от ред n, която може да бъде изчислена по следния начин:

$$\textbf{(L)}\qquad (fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g' + \binom{n}{2}f^{(n-2)}g'' + \cdots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n)}$$

Доказателство: При $n = 1$ формулата на Лайбниц е доказана в Теорема 2.5. Да допуснем сега, че формулата **(L)** е вярна за $k \leq n$. По дефиниция $f^{(n+1)} = \frac{d}{dx}(f^{(n)})$ за всяка функция f, а съгласно нашата хипотеза

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(n-k+1)}g^{(k)}.$$

Следователно

$$(fg)^{(n+1)} = (f^{(n)}g)' + \binom{n}{1}(f^{(n-1)}g')' + \cdots + \binom{n}{k}(f^{(n-k)}g^{(k)})' + \cdots + (fg^{(n)})' =$$

$$f^{(n+1)}g + f^{(n)}g' + \binom{n}{1}f^{(n)}g' + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g'' + \cdots + \binom{n}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k+1)}$$

$$+ \cdots + f'g^{(n)} + fg^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right) f^{(n)}g' + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right) f^{(n-1)}g'' +$$

$$+ \cdots + \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \cdots + \left(\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right) f'g^{(n)} + fg^{(n+1)}$$

Сега остава да използваме тъждеството $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ за да получим

$$(fg)^{(n+1)} = f^{(n+1)}g + \binom{n+1}{1}f^{(n)}g' + \cdots + \binom{n+1}{k}f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \cdots + fg^{(n+1)}$$

Доказателството следва от принципа на математическата индукция.

2.7 Задача *Докажете, че при условията от 2.6 следва равенството*

$$f^{(n)}g + (-1)^{n-1}fg^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + \cdots + (-1)^{n-1}fg^{(n-1)}\right).$$

Нека f има производна в точката x. Тогава разликата $f(x+h) - f(x) = \Delta_x f(h)$ е *безкрайно малка функция* при $h = 0$. В коментара на Пример 2.1 беше отбелязано, че $\Delta_x f(h)$ е сума на линейна функция на h и безкрайно малка функция на h от ред по - голям от 1: $\Delta_x f(h) = c_x h + \alpha_x(h)$; $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha_x(h)}{h} = 0$. От казаното до тук е ясно, че $c_x = f'(x)$.

2.8 Дефиниция Линейната част $d_x f(h)$ на нарастването $\Delta_x f(h)$ се нарича диференциал на функцията f е точката x.

Очевидно $d_x f(h) = c_x h = f'(x)h$. Трябва да се има пред вид, че изразът $d_x f$ е означение на линейната функция $c_x h$ и разбира се представлява *неделим* символ - в същия смисъл, в който например символът sin е общоприето име на известна тригонометрична функция.

Често в означението за диференциал се проуска индекса x и се пише просто $df(h)$; също така е общоприета практика в математическата литература да не се отбелязва и аргумента на функцията $d_xf(h)$ и да се пише просто df. Ясно е, че се предполага за предварително известна точката, в която се разглежда диференциала на f.

Така например за функцията $i(x) = x$ имаме $d_xi(h) = i'(x)h = h$. Не съвсем коректно от логическа гледна точка, но е общоприето вместо $d_xi(h)$ да се пише просто dx. Следователно dx е линейна функция, която дествува по следния начин $dx(h) = h$. По такъв начин диференциалът на произволна функция може да се изрази посредством dx. Това е вярно, защото произведението на константа и линейна функция е отново линейна функция: $d_xf = df = c_xdx = f'(x)dx$. Значи производната $f'(x)$ е частно на две линейни функции - df и dx.

Забележка Очевидно е от горните разсъждения, че ако съществува диференциалът на някоя функция, то той е единствен.

2.9 Теорема Ако функциите f и g са диференцируеми в точката x, то

(а) за всеки две константи α и β функцията $\alpha f + \beta g$ е диференцируема и $d_x(\alpha f + \beta g) = \alpha d_xf + \beta d_xg$ и

(б) $\exists\ d_x(fg)$ и $d_x(fg) = f(x)d_xg + g(x)d_xf = fdg + gdf$.

Нека сега функцията $y = f(x)$ е диференцируема при $x = x_0$ и $z = g(y)$ е диференцируема при $y = y_0 = f(x_0)$.

2.10 Теорема Функцията $F(x) = g(f(x))$ е диференцируема в точката x_0 и $F'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$.

Доказателство: Тъй като f е диференцируема, то $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)$ като α е функция, за която $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha(h)}{h} = 0$. Аналогично $g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0)k + \beta(k)$ с $\lim\limits_{k\to 0} \frac{\beta(k)}{k} = 0$.

Да положим сега $f(x_0 + h) = y_0 + k$. Получаваме последователно $F(x_0 + h) - F(x_0) = g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) = g(y_0 + k) - g(y_0) = g'(y_0)k + \beta(k)$. Очевидно $k = f(x_0 + h) - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)$. Окончателно получаваме $F(x_0 + h) - F(x_0) = g(y_0)f(x_0)h + g'(y_0)\alpha(h) + \beta(k)$.

Да положим $\gamma(h) = g'(y_0)\alpha(h) + \beta(k)$. За да докажем теоремата е достатъчно да се убедим, че $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\gamma(h)}{h} = 0$. Но $\frac{\gamma(h)}{h} = g'(y_0)\frac{\alpha(h)}{h} + \frac{\beta(k)}{h}$. От избора на α следва, че $g'(y_0)\frac{\alpha(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$. Значи остава да покажем, че $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\beta(k)}{h} = 0$. Да забележим първо, че $k = k(h) = f'(x_0)h + \alpha(h) \to 0\ h \to 0$; нещо повече $\frac{k}{h} = f'(x_0) + \frac{\alpha(h)}{h} \to f'(x_0)$ при $h \to 0$. Имаме след това $\frac{\beta(k)}{h} = \frac{\beta(k)}{k}\frac{k}{h} \to 0.f'(x_0) = 0$ ако $k \neq 0$. За да работи това разсъждение и при $k = 0$ е достатъчно да доопределим функцията β и при $k = 0$ като положим $\beta(0) = 0$.

2.11 Теорема Функцията $g(y) = \frac{1}{y}$ е диференцируема при $y \neq 0$ и $g'(y) = -\frac{1}{y^2}$.

Доказателство: $g(y+k) - g(y) = \frac{1}{y+k} - \frac{1}{y} = \frac{-k}{y(y+k)}$. Следователно $\frac{\Delta_y g(k)}{k} = \frac{g(y+k)-g(y)}{k} = -\frac{1}{y(y+k)} \to -\frac{1}{y^2}$ при $k \to 0$.

2.12 Следствие Ако f и g са диференцируеми в точката x_0, то и функцията $\frac{f}{g}$ има производна там и $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'_{x=x_0} = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ (ако, разбира се, $g(x_0) \neq 0$).

Доказателство: Да допуснем, че $\exists\ g'(x_0)$ и $g(x_0) \neq 0$. От теорема 2.9 следва, че за $h(x) = \frac{1}{g(x)}\ \exists\ h'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Нужният резултат се получава от Теорема 2.5 и от това, че $\left(\frac{f}{g}\right)' = (f\frac{1}{g})' = f(\frac{1}{g})' + f'\frac{1}{g}$.

2.12.1 Следствие От 2.12 получаваме, че $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,d(f) - f\,d(g)}{g^2}$.

2.13 Теорема Нека f е непрекъсната и притежава обратна функция g в околността $O = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ на точката x_0. Ако съществува $f'(x_0) \neq 0$, то съществува и $g'(y_0)$, където $y_0 = f(x_0)$ и $g'(y_0)f'(x_0) = 1$.

Доказателство: От Теорема 1.10 следва, че g е непрекъсната в $U = f(O)$ и монотонна (както и f) функция. Ако $x + h \in O$, то полагаме $y_0 + k = f(x_0 + h) \in U$. Ясно е, че $h \to 0 \iff k \to 0$. Тъй като f е диференцируема, то $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \alpha(h)$. Последното равенство може да се запише така: $k = f'(x_0)h + \alpha(h)$. Значи $h = \frac{1}{f'(x_0)}k - \frac{1}{f'(x_0)}\alpha(h)$, тоест $g(y_0+k)-g(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}k - \frac{1}{f'(x_0)}\alpha(h)$. Доказателството ще бъде завършено, ако се убедим, че $\lim\limits_{k\to 0} \frac{\alpha(h)}{k} = 0$, което означава, че $-\frac{1}{f'(x_0)}\alpha(h)$ е безкрайно малка функция на k от ред по-висок от едно. Но това е очевидно: $\frac{\alpha(h)}{k} = \frac{\alpha(h)}{h}\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)}$. За двата множителя имаме съответно $\frac{\alpha(h)}{h} \to 0$ когато h, или което е едно и също k клони към нула и съответно $\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)} \to \frac{1}{f'(x_0)}$.

Тъй като диференциалът е единствен, то $d_{y_0}g(k) = g'(y_0)k$. Както видяхме по - горе линейната част на $\Delta_{y_0}g(k)$ е $\frac{1}{f'(x_0)}k$. Следователно $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

2.14 Примери

2.14.1 В 1.12.3 показахме, че функцията $f(x) = x^2 - 6x + 5$ е обратима в интервала $[3, \infty)$. Тя освен това очевидно е диференцируема. Значи за обратната и функция имаме $g'(y) = \frac{1}{2x-6}$ за всяко y, за което $y = x^2 - 6x + 5$. Изразете $g'(y)$ като функция на y.

2.14.2* Същите разсъждения важат и за 1.12.4. Наистина, функцията $f(x) = x^3 - 3x + 1$ има производна $f'(x) = 3(x^2 - 1)$, при което $f'(x) \neq 0$ за $x \in (-1, 1)$. Значи за всяко y от интервала $(-1, 3)$ съществува $g'(y)$ и $g'(y) = \frac{1}{3(x^2-1)}$ за всяко y, за което $y = x^3 - 3x + 1$.

На този етап е трудно да изразим явно $g'(y)$ като функция на y. Това, което може да се каже, че $g'(y) = \frac{1}{3(4\sin^2\alpha - 1)}$, където α е ъгълът от 1.12.4. Докажете* все пак, че за $y \in (-1, 3)$ имаме $g'(y) = -\frac{2}{3}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3+2y-y^2}}$.

3. Теореми за средните стойности.

Оказва се, че някои от свойствата на производната на дадена функция f определят поведението на f *в качествен* аспект. Тоест дали например f е растяща, или изпъкнала, или има някакви други свойства, зависи в голяма степен от f'. Тази зависимост се получава посредством така наречените *теореми за средните стойности.* Те се появяват след бурното развитие на естествените науки през **XVII-XVIII** в. Създателите на съвременния анализ от тази епоха (Нютон, Лайбниц, Бернули и др.) образно казано са били "затрупани" от множество блестящи открития и педантичното обяснение на много от получените резултати вероятно не е било главната им задача.

То се дава от следващите поколения математици посредством теоремите за средните стойности. Вероятно те са първите примери за плодотворно използване на така наречените "чисти" резултати за съществуване - тоест, доказва се, че даден обект съществува, *без допълнителна информация* за неговите свойства.

3.1 Теорема (Ферма) Нека функцията f е дефинирана в интервала (a, b) и достига най-голямата (най-малката) си стойност в някоя точка $x_0 \in (a, b)$. Ако съществува $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказателство: Да предположим за определеност, че $f(x_0)$ е *най-малката* стойност на f. Тогава за всяко h, за което $x_0+h \in (a,b)$ е изпълнено неравенството $f(x_0+h)-f(x_0) \geq 0$. Следователно $f'_l(x_0) = \lim\limits_{h\to -0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ и $f'_r(x_0) = \lim\limits_{h\to +0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$. По условие функцията f е диференцируема в x_0; значи $0 \leq f'_l(x_0) = f(x_0) = f'_r(x_0) \leq 0$ и $f'(x_0) = 0$.

3.2 Теорема (Рол) Да предположим, че функцията f е непрекъсната в интервала $[a,b]$, диференцируема е в (a,b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува точка $\xi \in (a,b)$, за която $f'(\xi) = 0$.

Доказателство: От Теорема 1.5 следва, че f достига най-малката си и най-голямата си стойности в някои точки x_- и x_+ от $[a,b]$. Ако поне една от точките $x_\pm$ е различна от a и b, то от Теоремата на Ферма следва, че в тази точка производната е нула.

В противен случай $f(x_-) = f(x_+)$ (защото $f(a) = f(b)$) и тъй като $\forall\, x \in (a,b)$ имаме $f(x_-) \leq f(x) \leq f(x_+)$, то f е константа. Значи $f'(x) = 0\ \forall\, x \in (a,b)$.

3.3 Теорема (Коши) Нека функциите f и g са непрекъснати в $[a,b]$ и диференцируеми в (a,b). Съществува точка ξ от (a,b) за която е изпълнено равенството

$$(f(b)-f(a))g'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi)$$

Ако при това $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in (a,b)$, то $g(a) \neq g(b)$ съгласно теоремата на Рол и следователно можем да запишем последното равенство така:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Доказателство: Образуваме функцията

$$h(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$$

Очевидно h е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b). Освен това $h(a) = f(b)g(a) - f(a)g(a) - g(b)f(a) + g(a)f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. Аналогично $h(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. От Теоремата на Рол следва, че съществува $\xi \in (a,b)$, за която $h'(\xi) = 0$.

3.4 Следствие (Теорема на Лагранж; Теорема за средните стойности)

Ако f е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b), то $\exists\, \xi \in (a,b)$, за която $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$.

Доказателство: В Теорема 3.3 полагаме $g(x) = x$.

3.4-c Теоремите за средни стойности *нямат аналози* за функции чиито стойности са комплексни числа. Наистина, нека $f(x) = \cos x + i\sin x$ за $x \in [0,2\pi]$. Да допуснем, че съществува $\xi \in [0,2\pi]$, за което $f(2\pi) - f(0) = f'(\xi)(2\pi - 0) = 2\pi f'(\xi)$. Но $f(0) = f(2\pi)$ и значи $f'(\xi) = 0$. Тоест $-\sin x + i\cos x = 0$. От тук следва, че за някое ξ ще имаме $\sin\xi = \cos\xi = 0$. Предлагаме на читателя да се убеди, че такова ξ не съществува.

Ттеоремите за средните стойности (3.1-3.4) се използват за получаването на по-подробна информация - оценки, пресмятане на стойности на функции, изследване на графици и т.н. за функциите на реален аргумент. Следващите резултати по същество са следствия от Теоремите за средните стойности.

3.5 Теорема Ако функцията f е диференцируема в интервала Δ и $\forall\, x \in \Delta\ f'(x) = 0$, то f е константа.

Доказателство: За всеки две точки $x_1, x_2 \in \Delta$ са изпълнени услвията на Теоремата на Лагранж за интервала $[x_1, x_2]$. Това означава, че за някое $\xi \in (x_1, x_2)$ е вярно равенството $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1 - x_2) = 0$, следователно $f(x_1) = f(x_2)$.

Теорема 3.5 е известна също така като *основната теорема на интегралното смятане*; в нея се твърди, че *единствените функции,* чиято производна е нула в даден интервал са константите. Тя не е вярна ако дефиниционната област не е интервал - посочете някой пример.

3.6 Теорема Ако f е диференцируема в интервала $< a, b >$, то тя е монотонна точно тогава, когато производната и не си мени знака в $< a, b >$.

Доказателство: Ако $x, y \in < a, b >$ и $x < y$, то от теоремата на Лагранж за интервала $[x, y]$ получаваме, че $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$. Това равенство показва, че знакът на разликата $f(y) - f(x)$ съвпада със знака на $f'(\xi)$, тъй като $y - x > 0$.

От доказателятвото на горната теорема се вижда, че ако $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) *за всяко* x от $< a, b >$, то f е *строго растяща* (*строго намаляваща*) в интервала $< a, b >$. Следва да отбележим, че това условие е достатъчно, но не е необходимо за строгата монотонност на f. Например функцията $f(x) = x^3$ е строго растяща в интервала $(-\infty, \infty)$, но $f'(0) = 0$.

Едно друго следствие на теоремите за средните стойности е правилото на Бернули - Лопитал за пресмятане на граници.

Нека $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и функциите f и g са дефинирани в интервала (a, b). Ще казваме, че частното $\frac{f}{g}$ е *неопределеност в точката* a ако $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \pm\infty$. Разбира се, аналогично понятие за неопределеност ще разглеждаме и в случая на леви или десни граници.

3.7 Теорема (Бернули-Лопитал) Нека $\frac{f}{g}$ е неопределеност в точката a, f и g имат производни в интервала (a, b), при което $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

При тези условия границата $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ съществува и е равна на l.

Доказателство:
То е различно в случаите
(**I**) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и
(**II**) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$.

Ще разгледаме само **(I)**. Доказателството на **(II)** изисква по - прецизни (и донякъде протяжни) разсъждения, поради което няма да го разглеждаме в тези лекции. И така, нека са изпълнени равенствата (**I**) и $a \neq \pm\infty$. Тогава можем да додефинираме функциите f и g в точката a, като положим $f(a) = g(a) = 0$ - доопределените функции са непрекъснати в a. Сега е ясно, че можем да приложим теоремата на Коши за функциите f и g и интервала $[a, x]$; $x \in (a, b)$: съществува $\xi \in (a, x)$, за което $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ (забележете, че $g(x) \neq g(a) \; \forall x \in (a, b)$ защото $g'(t) \neq 0 \; \forall t \in (a, x)$).

Тъй като $a < \xi < x$, то от $x \to a$ следва $\xi \to a$, значи $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = l$. При $a = \pm\infty$ можем да извършим смяната $x = \frac{1}{t}$. Ясно е, че за $x \to \pm\infty$ е изпълнено $t \to \pm 0$. Нека $p(t) = f(\frac{1}{t})$ и $q(t) = g(\frac{1}{t})$. От горните разсъждения следва, че ако $\lim\limits_{t \to \pm 0} \frac{p'(t)}{q'(t)} = l$ то

$\exists \lim\limits_{t\to\pm 0}\frac{p(t)}{q(t)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$. Тъй като $p'(t) = -\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t}) = -x^2f'(x)$ и $q'(t) = -x^2g'(x)$, то $\lim\limits_{t\to\pm 0}\frac{p'(t)}{q'(t)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2f'(x)}{-x^2g'(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

3.8 Коментар и задачи Правилото на Бернули - Лопитал (между другото, то има интересна история и в следващия текст ще го наричаме (*колкото и да не е честно*) правило на Лопитал) е само достатъчно условие. Тоест, може да се случи границата $\lim\frac{f'}{g'}$ **да не съществува**, докато $\lim\frac{f}{g}$ да се пресмята без особен труд.

3.8.1 Забележете например, че $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0$ (това се доказва лесно - за частното имаме $x\sin\frac{1}{x}\to 0$, защото $|x\sin\frac{1}{x}|\le|x|$).

От друга страна имаме $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ и $g(x) = x$. Съответно за техните производни се получава $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ и $g'(x) = 1$; значи $\frac{f'}{g'} = f'$. Разгледайте отново 1.4.1 и докажете, че не съществува $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$.

3.8.2 Правилото на Лопитал показва как се пресмятат граници на "неопределености" от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Следва да напомним, че то е валидно *само в тези случаи.* С други думи, ако в частното няма "неопределености", то правилото на Лопитал не е в сила - разгледайте самостоятелно съответните примери.

От друга страна, съществуват и други видове "неопределености"; например не може да се каже "направо" каква е границата на функцията $h(x) = (f(x))^{g(x)}$, ако $\lim f = 1$ и $\lim g = \infty$. Ще означаваме това схематично като $[1^\infty]$. Други възможни неопределености се записват схематично така: $[0\cdot\infty]$, $[0^0]$, $[\infty^0]$ и $[\infty-\infty]$. Всяка от тези неопределенеости се свежда към $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ посредством алгебрични преобразования и логаритмуване. Например $[0\cdot\infty] = \left[\frac{0}{\frac{1}{\infty}}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$, $[\infty-\infty] = \left[\frac{1}{0}-\frac{1}{0}\right] = \left[\frac{0-0}{0\cdot 0}\right] = \left[\frac{0}{0}\right]$ и т.н.

3.8.3 Пресметнете границите

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; (d) $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\ln(1-x)$;

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{100}e^{0,001x}$; (f) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$;

(g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x$; (h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$.

3.9. Елементарни функции.

В математическата литература често се споменават понятия като "елеметарна функция", или "рационална функция", или "трансцендентна функция" и т.н. Най - често обаче там не е обяснено какво значат тези понятия. Поради тази причина тук ще направим кратък коментар на класификацията на основните видове функции, които най - често се използват в инженерните приложения, а също така се изучават и в средното училище. Следва да се отбележи все пак, че такава класификация (направена общо взето според степента на "сложност" на функциите) е доста антропоцентрична (и доста старомодна); често пъти дадена "елементарна" функция съвсем не е такава в обичайния смисъл на тази дума.

Най - простите за изучаване функции са, разбира се, константите. Следващия клас функции, които се изучават сравнително лесно са полиномите. *Полином* е всяка функция P; $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, която на всяко число x съпоставя числото $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$. Ако $a_n\ne 0$, то числото n се нарича степен на P.

Стойностите на полиномите се пресмятат лесно посредством обикновени алгебрични действия. Очевидно дефиниционната област на всеки полином е цялата числова права (нищо не пречи разбира се, да разглеждаме полиноми и в комплексната равнина).

Следващи "по сложност" са рационалните функции. *Рационална* е всяка функция, която е частно на два полинома. Например функцията $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ е рационална. Тя не съвпада с никой полином, защото дефиниционната и област не е цялата права.

3.9.1 Задача Докажете, че рационалната функция $R(x) = \frac{x}{x^2+1}$ също не е полином.

3.9.2 Забележка Разбира се, частното на два полинома може и да е полином - например $\frac{x^4-1}{x^2+1} \equiv x^2 - 1$. По тази причина полиномите понякога се наричат *цели функции* - по аналогия с целите и рационалните числа. Ще отбележи все пак, че от формална гледна точка нещата са малко по - сложни. Например частното $\frac{x^2+x-2}{x-1} = x + 2;\ x \neq 1$ е съкратима дроб, но то *не е* полином, защото не е дефинирано при $x = 1$.

Ако обаче дефинираме функцията f по следния начин:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 3 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

то очевидно f съвпада с полинома $x + 2$.

Горната забележка ни дава основание да напомним, че както редиците, функциите също могат да бъдат записвани анлитично по *безброрй много различни начини.*

Например различните изрази $\sin^2 x + \cos^2 x$ и $e^{-x} 2^{\log_2 e^x}$ очевидно описват константата 1. Аналогично $\frac{1}{x} = \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x}$; изобщо вземете произволен аналитичен израз и го запишете по няколко формално различни начина.

Читателят не бива да се учудва от тази нееднозначност - тя в известен смисъл е нормална. Що се отнася до това, как можем да разпознаем, че две функции съвпадат (т.е., че са един и същ обект), то това е лесно: две функции съвпадат, когато имат еднакви стойности за едни и същи стойности на аргумента - и разбира се, имат еднакви дефиниционни области.

Тези функции, които не могат да бъдат представени аналитично като частно на два полинома (които не са рационални) се наричат *ирационални.* Например функцията $\sqrt{x}$ е ирационална, защото дефиниционната и област е интервалът $[0, \infty)$, докато дефиниционната област на всяка рационална функция е интервалът $(-\infty, \infty)$ евентуално без краен брой точки.

3.9.3* Задача Докажете, че не съществуват полиноми P и Q, за които $\sqrt{x} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ за всяко x от даден (неизроден) интервал $[a, b]$.

3.9.4 Задача Докажете, че следните функции са ирационални

3.9.4
$$f(x) = \sqrt{1+x^2};\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\ f(x) = \frac{x^2}{|x-1|}$$

3.9.4.1
$$f(x) = [x];\ f(x) = \lfloor x \rfloor;\ f(x) = |x|$$

3.9.4.2
$$f(x) = e^x;\ f(x) = \sin x;\ f(x) = \operatorname{tg} x;\ f(x) = \ln|x|$$

Решенията на горните примери не са еднотипни (но не са и сложни) - те използват различни свойства на рационалните функции, които функциите от Задача 3.9.4 не притежават.

Например рационалните функции са диференцируеми (в дефиниционните си области). Поради тази причина $|x|$ не е рационална (не съществува $|x|'_{x=0}$).

Функцията e^x не е рационална, защото $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, а това е невъзможно за рационални функции (докажете, че ако f е рационална, то $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$) и т.н.

Функцията f е *алгебрична*, ако съществуват полиноми $a_n(x), a_{n-1}(x), \cdots, a_1(x), a_0(x)$, за които е изпълнено тъждеството:

$$\text{(a)} \qquad a_n(x)f^n(x) + a_{n-1}(x)f^{n-1}(x) + \cdots + a_1(x)f(x) + a_0(x) \equiv 0 \ \forall x \in D_f$$

Очевидно в условието (а) може да се предполага, че a_n и a_0 не са тъждествено нули. Функция, която не е алгебрична се нарича *трансцендентна*. Например функцията e^x е трансцендентна, защото ако в (а) $x \to -\infty$, то $\forall k > 0 \ \lim\limits_{x\to-\infty} a_k(x)e^{-kx} = 0$ (използвайте например правилото на Бернули - Лопитал), а от тук следва, че $\lim\limits_{x\to-\infty} a_0(x) = 0$, което е невъзможно за ненулев полином. Докажете, че функциите от 3.9.4.2 са трансцендентни.

Функциите от 3.9.4 са алгебрични; например за $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ тъждеството (а) е изпълнено за полиномите $a_2(x) = 1+x^2, \ a_1(x) \equiv 0, a_0(x) = -x^2$. Проверете кои от функциите от 3.9.4.1 са алгебрични.

3.9.5 Разбира се, можем да "класираме" функциите по различни признаци. Общото между тях е степента на сложност на изразяването на дадена функция посредством някоя "формула" (аналитичен израз). Ще отбележим, че *по същия начин* можем да разглеждаме различни класове функции на *комплексен аргумент.* С други думи, можем да говорим за *цели, рационални, алгебрични и трансцендентни функции на комплексен аргумент.*

3.9.6 Единствено изключение от горния текст прави функцията "цяла част". Не съществува цялата част на комплексното число z, защото в дефиницията на цяла част участват понятията "по - голямо" и "по - малко", които нямат аналози за комплексни числа.

3.9.7 В допълнение ще отбележим, че в математическата литература понякога се говори и за "елементарни функции". Нестрого казано елементарна е всяка функция, "която може да се запише с формула". За да опишем кои функции са елементарни, ще фиксираме няколко "наистина елементарни" функции: да разгледаме функциите $E_1(x) \equiv 1$; $E_2(x) = x$; $E_3(x) = e^x$ $E_4(x) = \sin x$. Ще ги наричаме *основни елементарни функции.* Всяка функция, която може да бъде получена от основните елементарни фукции посредством четирите алгебрични действия, умножение с константа, степенуване, образуване на сложна и обратна функции се нарича *елементарна* функция (имаме пред вид, разбира се, *краен брой* от споменатите действия). Например $|x|$ е елементарна защото $|x| = \sqrt{x^2} = E^{-1}(E_1(x).E_1(x))$; където $E(x) = E_1(x).E_1(x)$. Също така $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$ са елементарни, защото $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - E_2(x)) = E_4(\frac{\pi}{2}E_1(x) - E_2(x))$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а $[x]$ не е елментарна функция защото всяка елементарна функция е непрекъсната в дефиниционната си област.

4. Примитивни.

В следващите раздели ще имаме възможност да се убедим в ползата от диференциалното смятане. И ако задачата за пресмятане на производни е важна за приложенията, то е нормално да се очаква, че в същата степен е важна и обратната и задача - да "възстановим" дадена функция по нейната производна.

4.1 Дефиниция Функцията F се нарича *примитивна* функция на f в интервала $\Delta \subset \mathbb{R}$, ako $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in \Delta$.

Не всяка функция има примитивна - например функцията $sgn(x) = \begin{cases} -1 & ako \quad x < 0 \\ 0 & ako \quad x = 0 \\ 1 & ako \quad x > 0 \end{cases}$ (тя се нарича "знакът на x") няма примитивна - докажете го*. (Упътване: *ако допуснем* *противното и $F(x)$ е примитивна на $sgn(x)$, то от теоремата на Лагранж следва, че $F(x) - F(0) = x$ при $x > 0$ и $F(0) - F(x) = x$ при $x < 0$.)*

4.1.1 И така, в този раздел ще разгледаме въпроса за съществуването и пресмятането на примитивни. Забележете, че начина за пресмятането на производни следва директно от дефиницията на производна (във всяка точка производната на дадена функция е граница на диференчното частно).

За жалост, дефиниция 4.1 не предлага директен метод за пресмятане на примитивни. Разбира се, в някои конкретни случаи това не е особен проблем.

(а) Например, функцията x^2 е примитивна на $2x$, защото $(x^2)' = 2x$.

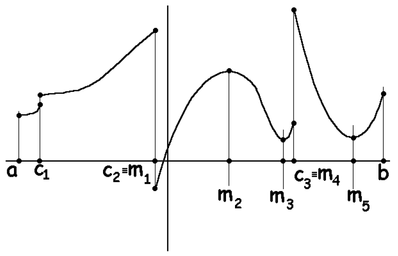
(б) Покажете също, че $x \ln x - x$ е примитивна на $\ln x$.

(в) Открийте някоя примитивна на $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

В следващия текст ще изложим методи за пресмятане на примитивните на някои класове от функции. Не е възможно обаче да предложим на читателя метод за пресмятане на примитивни на *произволни* функции, защото дефиницията на примитивна (за разлика от дефиниция 2.3) *не е конструктивна.*

4.1.2 В допълнение ще отбележим, че въпросът *кои* функции имат примитивни не е тривиален и няма да бъде разглеждан подробно в тези лекции. Ще отбележим все пак, че всяка непрекъсната функция има примитивна. Класът на всички функции, които имат примитивни обаче далеч не се изчерпва с непрекъснатите функции.

В тези лекции ще установим, че *всяка по части монотонна* функция има примитивна. Функцията f е *по части монотонна*, ако дефиниционната и област може да се раздели на краен брой интервали, във всеки от които f е монотонна.



Например функцията, на която графикът е изобразен на горната рисунка е по части монотонна - тя е монотонна във всеки от интервалите (a, m_1), (m_1, m_2), (m_3, m_4), (m_4, m_5) и (m_5, b). В тези лекции ще покажем как се пресмятат примитивните на по части монотонни функции (често ще казваме ПМ функции). Нещо повече, ще решим още по - лесна задача и ще видим как се пресмятат примитивните на монотонни функции. Продължаваме с опростяването на задачата, която си поставяме - в следващия текст ще видим как може да се пресметне примитивната на *растяща* функция f която е определена в интервала $[0, a]$; $a > 0$.

За да видим как става това е важно читателят да е фамилиарен с понятието *цяла част* на числото x. Ето някои от свойствата на цялата част, които ще ни трябват по - късно:

4.1.3 Цяла част Да напомним, че че цялата част $[x]$ на реалното число x е *най - голямото* цяло число, което не надминава x. С други думи, $[x]$ е *единственото* цяло число, за което са изпълнени неравенствата $[x] \leq x < [x] + 1$.

Съобразете самостоятелно, че е равносилно е да се каже, че $[x]$ е *единственото* цяло число, което се съдържа в интервала $(x - 1, x]$. С други думи, $[x]$ е единственото цяло, за което $x - 1 < [x] \leq x$.

Покажете например, че $[2.38] = 2$, $[98.953] = 98$, $[-5] = -5$, $[-1.01] = -2$, $[-6.75] = -7$ и $[-0.0005] = -1$.

4.2 Лема За всяко x е изпълнено $2[x] \leq [2x]$.

Доказателство. По дефиниция $[x] \leq x$, от където получаваме, че цялото число $2[x]$ не надминава $2x$. Това означава,че $2[x] \leq [2x]$, защото $[2x]$ е *най - голямото* цяло, което не надминава $2x$.

Ще ни е нужна освен това и следната тривиална лема:

4.3 Лема За всяко число x е изпълнено $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{[Nx]}{N} = x$.

Доказателството също е директно следствие от дефиницията на понятието цяла част: $[Nx]$ е единственото цяло число, за което $Nx - 1 < [Nx] \leq Nx$. Значи $x - \frac{1}{N} < \frac{[Nx]}{N} \leq x$ и от лемата за двамата полицаи при $N \to \infty$ се получава доказателството на Лема 4.3.

В следващия текст за произволно $x \in [0, a]$ и всяко цяло n с x_n ще означаваме цялото число

$$x_n = \max\{[2^n x] - 1, 0\}.$$

Числата x_n се получават по ясна рецепта и не е трудно да се покаже с примери как зависят от n. Например $\left(\frac{1}{5}\right)_0 = \left(\frac{1}{5}\right)_1 = \left(\frac{1}{5}\right)_2 = \left(\frac{1}{5}\right)_3 = 0$, $\left(\frac{1}{5}\right)_4 = 2$, $\left(\frac{1}{5}\right)_5 = 5$, $\left(\frac{1}{5}\right)_6 = 11$ и т. н.

Пресметнете също така при някои (може и малки) стойности на n следните числа: $\left(\frac{3}{17}\right)_n$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_n$, $\left(\frac{1}{3}\right)_n$ и $\left(\frac{1}{fn}\right)_{15}$, където fn е някой факултетен номер.

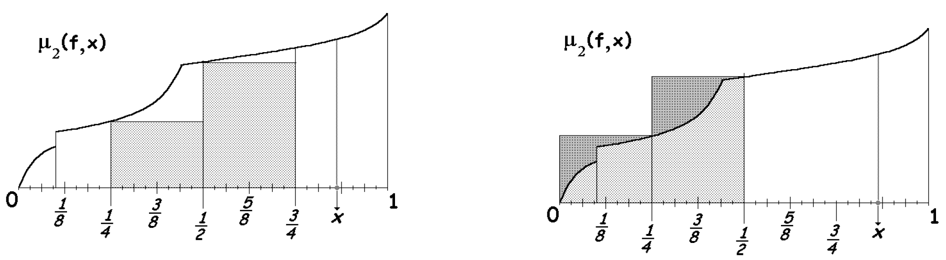
Тези бележки позволяват построим някоя примитивна на f. При това няма да използваме никакви конкретни свойства на f (например аналитична форма или алгебрична структура), освен това, че функцията f е растяща в $[0, a]$.

И така, нека f е растяща функция, дефинирана в интервала $[0, a]$. Фиксираме $x \in [0, a]$ и образуваме редицата

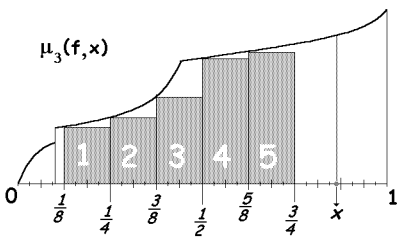
$$\mu_n(f, x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{x_n} f\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

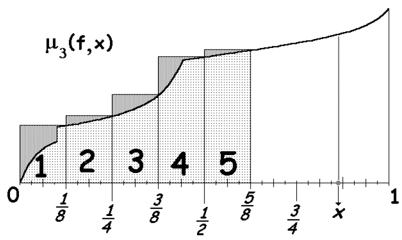
В следващия текст с $M_n(f, x)$ ще означаваме сумата $M_n(f, x) = M_n = \sum\limits_{k=0}^{x_n} f\left(\frac{k}{2^n}\right)$. Значи $\mu_n(f, x) = \frac{1}{2^n} M_n(f, x)$.

Сумите μ са полезни, защото имат геометричен смисъл. По долу показваме, че μ_n може да бъде разглеждана по два начина като сума от лицата на x_n на брой правоъгълници с основи $\frac{1}{2^n}$. Следващите рисунки илюстрират това; там е изобразен графикът на някаква растяща функция f и сумите $\mu_n(f, x)$:

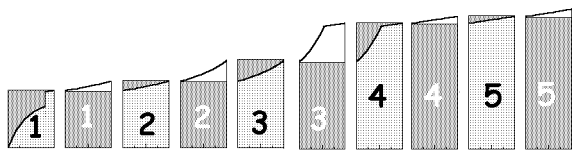


С други думи при $n = 2$ изразът $\mu_2(f, x)$ съдържа две събираеми, умножени с $\frac{1}{2^2}$: те са съответно $f\left(\frac{1}{4}\right)$ и $f\left(\frac{2}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$. Както се вижда на предходната рисунка, те могат да бъдат схващани по два начина: можем да ги разглеждаме като сума на правоъгълници, които са разположени *под графика* на f (отляво) или като сума от лицата на два правоъгълника, които *съдържат графика* на f - в дясната част на горната рисунка. Разбира се това е вярно, защото функцията f е растяща. Наистина, правоъгълникът с основа интервала $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ и височина $f\left(\frac{1}{2}\right)$ например съдържа всяка точка $M(x, f(x))$ (за която $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$) от графика на f, защото от $x \leq \frac{1}{2}$ следва, че $f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$. Това се отнася за рисунката в дясно. Ако транслираме затъмнените правоъгълници на $\frac{1}{4}$ на дясно, ще получим, че $\mu_2(f, x)$ е сума от лицата на (същите) два правоъгълника, които вече *се съдържат* в графика на f (лявата рисунка) - и това отново следва от монотонността на f.



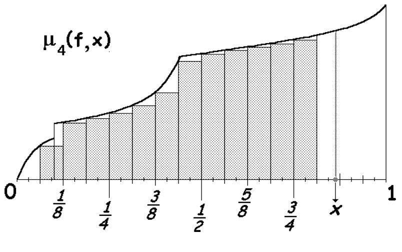


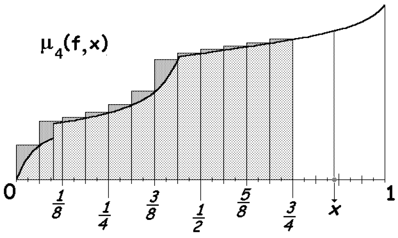
За $n = 3$ имаме $x_3 = 5$, тоест в μ_3 се съдържат 5 събираеми, всяко от които е умножено с $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, поради което може да бъде разглеждано като лице на правоъгълник с основа $\frac{1}{8}$. Височините на тези правоъгълници са съответно $f\left(\frac{1}{8}\right)$, $f\left(\frac{2}{8}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$, $f\left(\frac{3}{8}\right)$, $f\left(\frac{4}{8}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ и $f\left(\frac{5}{8}\right)$. На горната рисунката е показано, че тези правоъгълници могат да бъдат разположени по два начина, а на следващата еднаквите правоъгълници (тези с бели и черни номера) са разположени един до друг. Там също са изобразени тези части от графика на f, които съдържат или се съдържат в съответния правоъгълник.

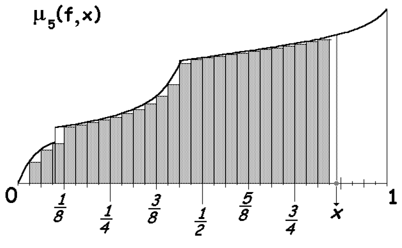


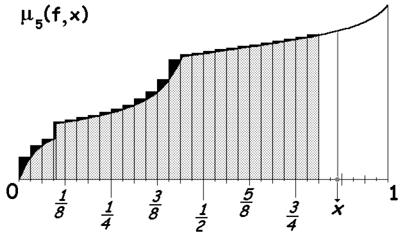
От горната рисунка виждаме, че правоъгълниците, които се съдържат под графика на F се получават след преместване на $\frac{1}{8}$ наляво от същите правоъгълници, които *съдържат* графика на F (еднаквите правоъгълници са означени с еднакви номера). Забележете, че правоъгълниците с еднакви номера са еднакви (т.е. са едни и същи фигури).

На следващите рисунки са показани сумите $\mu_4(f, x)$ и $\mu_5(f, x)$.





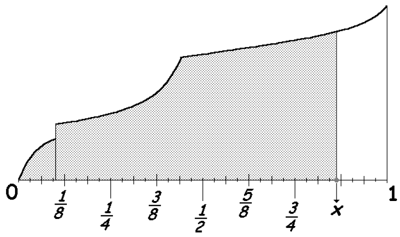




Горните разсъждения и рисунки илюстрират верността на следната лема:

4.4 Лема Редицата $\{\mu_n(f,x)\}$ е сходяща.

Коментар: Както е видно от горните рисунки, можем да разглеждаме границата на $\{\mu_n(f,x)\}$ *като дефиниция* на лицето на затъмнената област от следващата рисунка (тя е заградена от оста Ox, графика на F и вертикалната права през точката x и обикновено се нарича *криволинеен трапец*):



Доказателство на Лема 4.4 За доказателство ще отбележим първо, че редицата $\{\mu_n(f,x)\}$ е ограничена. Наистина, сумата в $M_n(f,x)$ съдържа не повече от x_n събираеми, всяко от които не надминава $f(x)$. Значи за всеки n и $x \in [0,a]$ имаме $\mu_n(f,x) \leq \frac{1}{2^n} \cdot x_n(x) \leq xf(x)$ (защото $\frac{x_n}{2^n} \leq x$).

След това ще докажем, че $\{\mu_n(f,x)\}$ е растяща редица (това е очевидно, ако се погледнат левите рисунки, но тук ще изложим и несложните строги разсъждения). За да се убедим в това, първо ще покажем, че $x_{n+1} > 2x_n$. Наистина $2x_n = 2[2^n x] - 2$, а от Лема 4.2 знаем, че $2[2^n x] \leq [2 \cdot 2^n x] = [2^{n+1}x]$. Следователно

$$2x_n = 2[2^n x] - 2 \leq [2^{n+1}x] - 2 = x_{n+1} - 1.$$

И така, $x_{n+1} > 2x_n$. Това означава, че в μ_{n+1} се съдържат поне два пъти повече събираеми от μ_n. Ще използваме това, за да оценим разликата $\mu_{n+1} - \mu_n$, при което за да сравним по - лесно сумите умножаваме и делим в μ_n на 2:

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{x_{n+1}} f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) - \frac{2}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{x_n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) =$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{p=0}^{x_{n+1}} f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) - 2\sum_{k=0}^{x_n} f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) \right) = \frac{1}{2^{n+1}}(M_{n+1} - 2M_n).$$

Забележете, че събираемите на M_n са събираеми и на M_{n+1}, при което събираемите на M_n се срещат *два пъти* в разликата $M_{n+1} - 2M_n$. По такъв начин на $2f(\frac{k}{2^n})$ от $2M_n$ съпоставяме събираемите $f(\frac{2k}{2^{n+1}}) = f(\frac{k}{2^n})$ и $f(\frac{2k+1}{2^{n+1}})$ от M_{n+1}, които се получават при $p = 2k$ и $p = 2k+1$. Това е възможно, защото максималната стойност на k е x_n, а на p е x_{n+1} и както стана дума по - горе $x_{n+1} > 2x_n$. Изобщо за да се убедим, че тези разсъждения са тривиални е достатъчно да разгледаме разликата $M_{n+1} - 2M_n$ при малки стойности на n например при $n = 2, 3, 4$ и т.н.

След като групираме събираемите в разликата $M_{n+1} - 2M_n$ по двойки получаваме, че

$$M_{n+1} - 2M_n \geq \sum_{k=0}^{x_n} \left(f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) - f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right) \right) \geq 0.$$

Горното неравенство е в сила, защото f е растяща и следователно $f\left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}\right) \geq f\left(\frac{2k}{2^{n+1}}\right)$ за всяко k.

Окончателно доказахме, че редицата $\{\mu_n(f,x)\}$ е ограничена и растяща, което означава, че е сходяща.

И така, съгласно Лема 4.4 за всяка растяща функция f, дефинирана в интервала $[0,a]$ и всяко фиксирано $x \in [0,a]$ съществува границата

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f,x).$$

4.4.1 Пример. Функцията $f(x) = \sin x$ е растяща в интервала $[0, \frac{\pi}{2}]$. Да видим как работи Лема 4.4 в този случай: фиксираме някое $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и образуваме сумите $\mu_n(f,x)$. Получава се

$$\mu_n(f,x) = \frac{1}{2^n}\left(\sin\frac{1}{2^n} + \sin\frac{2}{2^n} + \cdots + \sin\frac{x_n}{2^n}\right).$$

Сега да си припомним Пример 1.17.1.16 от раздела "матрично смятане" - там беше пресметната сумата **(s)** (в която сега вместо n ще пишем m):

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin m\varphi = \frac{\sin\frac{m+1}{2}\varphi \sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{s}$$

Заместваме след това в **(s)** m с x_n и φ с $\frac{1}{2^n}$ и получаваме, че

$$\mu_n(f,x) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\frac{x_n+1}{2}\frac{1}{2^n}\sin\frac{x_n}{2^n}\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{2^n}\frac{1}{2}}. \tag{is}$$

Нека сега да разгледаме **(is)** когато n клони към ∞. За аргументите в двата синуса в числителя получаваме съответно (спомнете си Лема 4.3), че

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{x_n}{2^{n+1}} = \sin\frac{x}{2}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{x_n+1}{2^{n+1}} = \sin\frac{x}{2}.$$

За знаменателя в **(is)** получаваме последователно

$$2^n \sin\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\sin\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^{n+1}}} \to \frac{1}{2}$$

при $n \to \infty$ (или, което е същото, при $\frac{1}{2^{n+1}} \to 0$). Това следва от $\frac{\sin y}{y} \to 0$ при $y \to 0$ (тук $y = \frac{1}{2^n}$). Окончателно се получава, че при $n \to \infty$ е в сила равенството

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f,x) = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

или казано с други думи $F(x) = 1 - \cos x$.

Следва да отбележим, че всичко, което казахме до тук има аналог и за намаляващи функции - разбира се, след някои очевидни промени. Докажете например, че ако f е намаляща, то сумите $\mu_n(f,x)$ образуват ограничена и *намаляваща* редица.

4.4.2 Задача. Функцията $\cos x$ е намаляваща в интервала $[0,\pi]$. Образувайте "сумите μ" за нея и докажете, че за $x \in [0,\pi]$ имаме $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\cos x, x) = \sin x$.

И така, ще покажем, че функцията F от 4.4 е желаната обобщена примитивна на f. За тази цел ще изучим свойствата на функцията F. Това не е трудно, защото възлите на разбиването на интервала $[0, x]$ са "универсални" - т.е. не зависят от функцията f и от x. Нещо повече, същите разсъждения са в сила за растящи (всъщност и за монотонни изобщо) функции, дефинирани в *произволен* интервал $[a, b]$, в който отново се разглеждат възлите $\frac{k}{2^n}$. В този случай k пробягва числата между $[2^n a] + 1$ и x_n, като

$$x_n = \max\{[2^n x] - 1, [2^n a]\}.$$

В следващия текст обаче за простота ще разглеждаме както досега само растящи функции в интервала $[0, a]$.

4.5 Лема За всеки две числа x и y ($x \leq y$) от интервала $[0, a]$ са в сила неравенствата

$$\textbf{(gpm)} \qquad f(x)(y - x) \leq F(y) - F(x) \leq f(y)(y - x)$$

Доказателство. Разглеждаме разликата (f е растяща):

$$\textbf{(pr)} \qquad M_n(f, y) - M_n(f, x) = \sum_{k=0}^{y_n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) - \sum_{k=0}^{x_n} f\left(\frac{k}{2^n}\right) = \sum_{k=x_n+1}^{y_n} f\left(\frac{k}{2^n}\right).$$

Да отбележим сега, че в горнта сума се съдържат $y_n - x_n$ събираеми (тъй като $x < y$, то при достатъчно голямо n ще имаме $x_n < y_n$).

Сега е лесно да оценим горната сума: всяко събираемо от вида $f\left(\frac{k}{2^n}\right)$ за $k \geq [2^n x]+1$ е по-голямо от $f(x)$, защото $x < \frac{[2^n x]+1}{2^n}$ (да напомним, че $[2^n x] \leq 2^n x < [2^n x] + 1$) и f е растяща. От друга страна очевидно за всяко $k \leq y_n$ имаме $f\left(\frac{k}{2^n}\right) \leq f(y)$, защото $\frac{k}{2^n} \leq \frac{y_n}{2^n} \leq y$.

И така, за всяко n е в сила веригата от неравенства

$$f(x)(y_n - x_n) \leq M_n(f, y) - M_n(f, x) \leq f(y)(y_n - x_n).$$

След като разделим на 2^n получаваме:

$$f(x)\left(\frac{[2^n y]}{2^n} - \frac{[2^n x]}{2^n}\right) \leq \mu_n(f, y) - \mu_n(f, x) \leq f(y)\left(\frac{[2^n y]}{2^n} - \frac{[2^n x]}{2^n}\right).$$

Сега използваме лемите 4.2 и 4.3 и при $n \to \infty$ се получава **(gpm)**.

От неравенството **(gpm)** се получават твърде важни следствия. То показва например, че *каквато и да е растящата функция* f (в смисъл, че F може да е прекъсната дори и в безброй много точки), функцията F е *непрекъсната*.

4.6. Следствие Функцията F е непрекъсната в интервала $[0, a]$. Ако при това f е непрекъсната в точката x, то $F'(x)$ съществува и $F'(x) = f(x)$.

Доказателство Непрекъснатостта е директно следствие от **(gpm)**. Наистина, ако оставим в неравенството **(gpm)** $y \to x$, то от лемата за полицаите получаваме, че $\lim\limits_{y \to x}(F(y) - F(x)) = 0$, защото независимо дали y е по - голямо от x или не, от **(gmp)** се получава, че

$$|F(y) - F(x)| \leq \max\{f(x), f(y)\}|y - x| \leq f(a)|y - x|,$$

тъй като $f(a)$ е *най - голямата* стойност на f.

Да допуснем сега, че f е непрекъсната в точката x. Разделяме неравенството **(gpm)** на $y - x$. При $y > x$ се получава

(gd) $$f(x) \le \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \le f(y).$$

Ако оставим в това неравенство $y \to x$, то от непрекъснатостта на f в x следва, че $f(y) \to f(x)$ и отново от лемата за полицаите получаваме, че $\lim\limits_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x)$. Аналогично се разсъждава и когато $y < x$ (трябва само да умножим **(gd)** с -1).

4.6.1 Коментар Забележете, че за всяка растяща и непрекъсната функция f в $[0, a]$ посредством "сумите μ" решихме задачата за пресмятането (и значи и съществуването) на примитивна F на f.

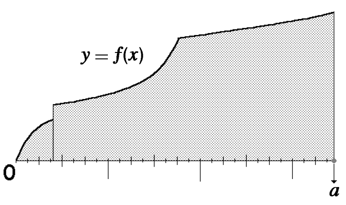
Нещо повече, функцията F е определена и непрекъсната дори когато изходната функция f *не е непременно непрекъсната.*

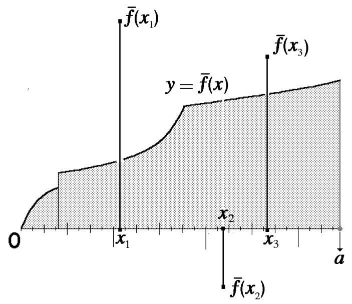
Да резюмираме: F е *непрекъсната* в интервала $[0, a]$ и *диференцируема* във всяка точка, в която е непрекъсната f.

Все пак нека да разгледаме какви са "границите на приложимостта" на разсъжденията върху сумите μ (вижте отново 4.4). Вярно, че във всички предходни разсъждения беше важно, че f е растяща. Това наистина е от значение, но по - прецизният анализ на разсъжденията от 4.4 показва, че там може да се направи нещо повече.

За да поясним как става това, ще си позволим да променяме "малко" функциите, с които си имаме работа.

4.6.2 Дефиниция Нека f е произволна функция. Казваме, че функцията $\overline{f}$ е получена от f посредством *проста модификация*, ако $\overline{f}$ и f се различават само за краен брой стойности на аргументите си. Тоест неравенството $\overline{f}(x) \neq f(x)$ е възможно *само за краен брой стойности* на аргумента x.





На горните рисунки е показана простата модификация $\overline{f}$ на монотонната функция f. В конкретния случай f и $\overline{f}$ имат различни стойности само в точките x_1, x_2 и x_3. В този пример точките $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ и $(x_3, f(x_3))$ са "изхвърлени" от графика на f и са заместени с точките $(x_1, \overline{f}(x_1))$, $(x_2, \overline{f}(x_2))$ и $(x_3, \overline{f}(x_3))$ от графика на $\overline{f}$.

Разбира се, $\overline{f}$ също се получава от f посредством проста модификация, но за нашите цели е важно, че f е монотонна - това я прави "пораждащата" функция. f е пораждаща, защото "сумите μ_n" за функцията $\overline{f}$ се различават евентуално от $\mu_n(f, x)$ в не повече от три събираеми - тези в които участват $\overline{f}(x_1)$, $\overline{f}(x_2)$ и $\overline{f}(x_3)$, и то *само ако* числата x_1, x_2 и x_3 са от вида $\frac{k}{2^n}$ за някои k и n. Всъщност това е (разбира се, нестрого) доказателство на следната теорема.

4.6.3 Теорема Ако $\overline{f}$ е проста модификация на f, то за всяко x е в сила равенството

$$\lim_{n\to\infty} \mu(f, x) = \lim_{n\to\infty} \mu(\overline{f}, x).$$

Теорема 4.6.3 позволява да определим "примитивната" $\overline{F}$ на $\overline{f}$ с равенството $\overline{F} := F$. Свойства от такъв характер обикновено се наричат "глобални свойства" на дадено разсъждение; в случая границата μ на дадена функция f *не зависи* от никоя *конкретна* стойност на f. Ето защо в следващия текст няма да различаваме монотонните фунции и техните прости модификации. С други думи, всичко което се отнася за растящи функции е вярно и за техните модификации (разбира се, освен когато в текста не е отбелязано обратното).

Горните разсъждения правят следната дефиниция естествена:

4.7. Дефиниция Нека f е монотонно растяща функция (или нейна модификация), дефинирана в интервала $[a,b]$. Казваме, че G е *обобщена* примитивна на f (ОП на f), ако за всеки две числа $x < y$ от $[a,b]$ е изпълнено неравенството:

$$f(x)(y-x) \leq G(y) - G(x) \leq f(y)(y-x), \tag{ОП}$$

в което в случая на проста модификация f е *пораждащата* монотонна функция.

В следващия текст ще видим, че обобщените примитивни са важни за приложенията. Тук ще отбележим, че бихме могли да формулираме горната дефиниция и когато f е произволна (не непременно монотонна) функция. Тогава обаче не е ясно как да доказваме, че ОП съществуват (или не).

Очевидно всяка ОП на f в интервала $[a,b]$ функция G е непрекъсната в $[a,b]$ и ако f е непрекъсната в точката x, то производната $G'(x)$ съществува и $G'(x) = f(x)$.

Да отбележим, че ако G е обобщена примитивна на f и λ е константа, то $\Phi = G+\lambda$ също е ОП на f. Наистина, очевидно за всеки $x, y \in [a,b]$ е изпълнено $G(y)-G(x) = \Phi(y)-\Phi(x)$.

Ясно е също, че ако F и G са ОП съответно на растящите функции f и g, то $\lambda F + \mu G$ е ОП на $\lambda f + \mu g$ при $\lambda > 0 < \mu$.

В предходния текст отбелязахме, че ако F е обобщена примитивна на f, то за всяка константа λ функцията $F + \lambda$ е също ОП на f. Естествено е да се запитаме има ли други ОП на F. Оказва се, че основната теорема на интегралното смятане е вярна и за обобщени примитивни.

4.8. Теорема Ако F и G са обобщени примитивни на монотонната функция f в интервала $[a,b]$, то тяхната разлика е константа.

Доказателство: Очевидно можем да предполагаме, че $[a,b] = [0,a]$ и че f е растяща. Нека освен това F е общата примитивна, която построихме в Лема 4.4, а G е някоя обща примитивна на f в смисъла на Дефиниция 4.7. Да фиксираме някое $x \in [0,a]$. За призволно естествено n разглеждаме израза $\Delta_n = G\left(\frac{x_n}{2^n}\right) - G(0)$ и го записваме по следния начин:

$$\Delta_n = G\left(\frac{x_n}{2^n}\right) - G\left(\frac{x_n-1}{2^n}\right) + G\left(\frac{x_n-1}{2^n}\right) - G\left(\frac{x_n-2}{2^n}\right) + G\left(\frac{x_n-2}{2^n}\right) \pm \cdots$$

$$\cdots - G\left(\frac{1}{2^n}\right) + G\left(\frac{1}{2^n}\right) - G(0) = \sum_{k=1}^{x_n}\left(G\left(\frac{k}{2^n}\right) - G\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)$$

Тъй като G е обобщена примитивна, то за всяко k имаме

$$f\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\frac{1}{2^n} \leq G\left(\frac{k}{2^n}\right) - G\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \leq f\left(\frac{k}{2^n}\right)\frac{1}{2^n} \tag{k}$$

Сумираме равенствата **(k)** и получаваме

$$\mu_n(f,x) - \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \le \Delta_n \le \mu_n(f,x).$$

От тези неравенства при $n \to \infty$ получаваме, че

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(f,x) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \le \lim_{n\to\infty} \Delta_n \le \lim_{n\to\infty} \mu_n(f,x)$$

Както вече знаем, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(f,x) = F(x)$, а $\frac{1}{2^n} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right)$ очевидно клони към нула, защото f е ограничена. Съответно за $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n$ получаваме

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} G\left(\frac{x_n}{2^n}\right) - G(0) = G(x) - G(0),$$

защото G е непрекъсната, а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{2^n} = x$. И така, $F(x) \le G(x) - G(0) \le F(x)$, от където получаваме, че $G(x) - G(0) = F(x)$ за всяко x от интервала $[0, a]$. Значи $G(x) = F(x) + \lambda$, където $\lambda = G(0)$.

4.8.1 Ясно е, че в известен смисъл 4.8 е обобщение на основната теорема на интегралното смятане (3.5), защото се отнася за *общи примитивни.* От друга страна горният резултат се отнася само за прости модификации на монотонни функции.

Очевидно множеството на монотонните функции не е достатъчно за приложенията на математическите методи в естествознанието. Достатъчен за тази цел (както стана дума в предходния текст) е класът на по части монотонните функции.

Ясно е, че можем да използваме предходните разсъждения *за всеки интервал, в който функцията е монотонна* (ще го наричаме интервал на монотонност) на дадена по части монотонна функция, за да получим след донякъде протяжни (в стил "piece by piece") разсъждения някоя нейна обща примитивна. Може обаче да се постъпи по - елегантно:

4.9 Теорема *Всяка по части монотонна функция f е разлика на две* (монотонно) *растящи* функции - да речем g и h: $f(x) = g(x) - h(x)$.

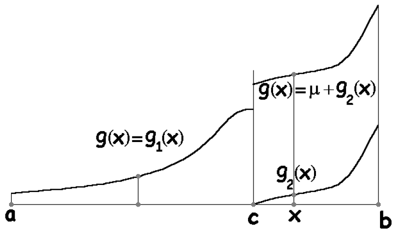
Това следва лесно от две прости забележки:

(а) ако f е *намаляваща*, то за всяка константа λ функциите $g(x) = \lambda$ и $h(x) = \lambda - f(x)$ са растящи и очевидно $f = g - h$.

(б) ако g_1 е растяща в интервала $[a, c]$, а g_2 е растяща в $(c, b]$ $(a < c < b)$, то за всяко достатъчно голямо число μ функцията

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & ako \quad x \in [a, c] \\ \mu + g_2(x) & ako \quad x \in (c, b] \end{cases}$$

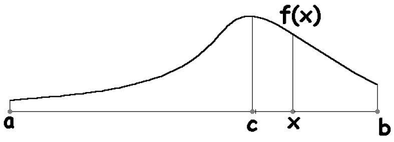
е растяща в интервала $[a, b]$. Наистина, както може да се види от следващата рисунка

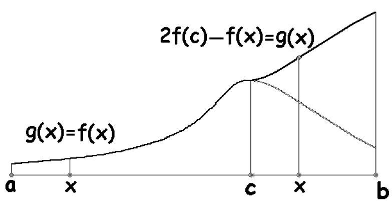


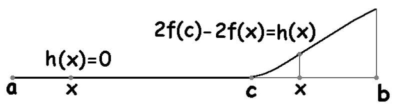
за това е достатъчно да изберем μ така, че да е изпълнено неравенството $g_1(c) \le \mu$.

Нека сега f е ПМ функция в интервала $[a,b]$ и да допуснем, че f е монотонна във всеки от интервалите с краища в точките $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = n$. Ако F е растяща в интервала $[c_{i-1}, c_i]$, то за $x \in [c_{i-1}, c_i]$ полагаме $g(x) = \mu_i + f(x)$ и $h(x) = \mu_i$.

Ако f е намаляваща в $[c_{i-1}, c_i]$, то за $x \in [c_{i-1}, c_i]$ полагаме съответно $g(x) = \mu_i$ и $h(x) = \mu_i - f(x)$. В тези разсъждения избираме константите $\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$ по такъв начин, че функциите g и h да са растящи. Ясно е, че $f = g - h$. Следващата рисунка показва как се прави това, ако имаме един "възел" c.







4.9.1 Забележка Горните разсъждения се нуждаят от доуточняване евентуално във възлите c_i. Те обаче са краен брой и винаги можем да направим прости модификации на разглежданите функции в тези точки.

4.10 Дефиниция И така, всяка ПМ - функция f е разлика на две растящи функции - g и h: $f(x) = g(x) - h(x)$. Нека G и H са ОП съответно на g и h. Ще казваме, че разликата $F(x) = G(x) - H(x)$ е *обща примитивна* **(GP)** на F.

Ясно е, че тук възниква следния проблеми: "разлагането" на f на разлика на две растящи очевидно не е единствено. Какво ще се получи, ако в Дефиниция 4.10 вземем, други функции вместо g и h? Ще разгледаме по - подробно този въпрос.

За тази цел да предположим, че $f(x) = g_1(x) - h_1(x)$ е **друго** "разлагане" на f като разлика на две растящи функции. Нека освен това G_1 и H_1 са **(GP)** на g_1 и h_1. Ясно е, че можем да наричаме функцията $F_1 = G_1 - H_1$ обща примитивна на f със същото право, с каквото и функцията F.

Тъй като $g - h = g_1 - h_1$, то $g + h_1 = g_1 + h$. Забележете, че $g + h_1$ или $g_1 + h$ е растяща функция (защото е сума на такива) и значи $G + H_1$ и $G_1 + H$ са нейни общи примитивни. От Теорема 4.8. следва, че съществува константа λ, за която $G + H_1 = G_1 + H + \lambda$. Значи $G - H = G_1 - H_1 + \lambda$ и следователно $F = F_1 + \lambda$.

4.11.Забележка. Предходната дефиниция се отнася за по части монотонните функции, защото те са главният обект на това изложение. Тя обаче е добра за *всяка функция*, която е разлика на две растящи.

Всяка такава функция се нарича **функция с ограничена вариация**. Функциите с ограничена вариация са важни за приложенията на Математиката в Естествознанието. По наше мнение, те образуват *достатъчен* запас от функции, които всъщност се използват в приложенията на Математиката в инженерните науки.

В следващия текст ще видим, че с ограничена вариация са например всички функции, които имат ограничена производна, а също така и много други.

4.12 Коментар И така, показахме в предходния текст, че всяка функция с ограничена вариация (тоест, която е разлика на две растящи функции) притежава примитивна. Ще отбележим все пак, че не всяка непрекъсната функция е с ограничена вариация. Пример за това се съдържа в 8.5. В 4.1.2 обаче стана дума, че *всяка непрекъсната* функция има примитивна. В частност, функцията от 8.5 има примитивна и ако читателят е любопитен да разбере нещо повече по сходни проблеми, вероятно трябва да прегледа някоя книга по Анализ за студенти по Математика.

4.13 Разделът **4.** (Примитивни) е скромен опит да се "обосноват" (във "възможния минимум") методите, които ще използваме в следващия текст. Въпросът дали това е необходимо за специалист, който е само "консуматор" (дори и активен) на математически методи *само за приложения* вероятно е спорен.

Дори и да допуснем, че **4.** не е от значение за разбирането на следващия текст, то е важно читателят да бъде убеден, че това, с което ще се занимаваме *има смисъл*. Например можем *законно* да пресмятаме лица на някои области. **Приложение 1.** е един от многото аргументи, които поясняват защо е от значение да не се разчита единствено на нивото "интуитивно" разбиране на основните понятия и факти.

5. Приложения на интегралното смятане. I

5.0 Логаритми. Функцията $f(x) = \frac{1}{x}; \quad x \in (0, \infty)$ е непрекъсната и монотонна. От предходния текст следва, че f притежава примитивна F. Тогава за произволна константа c функцията $L = F + c$ също е примитивна. Това означава, че ако положим $c = -F(1)$ ще получим примитивна L, за която $L(1) = 0$.

Оказва се, че L има някои забележителни свойства. Наистина, нека $k > 0$ е произволна константа и да положим $G(x) = L(kx)$. За производната на G получаваме

$$G'(x) = (L(kx))' = L'(kx) \cdot (kx)' = \frac{1}{kx} \cdot k = \frac{1}{x}.$$

Горното равенство показва, че G също е примитивна на $\frac{1}{x}$ и значи за някоя константа C функциите $G(x)$ и $L(x) + C$ съвпадат. С други думи, *за всяко* $x > 0$ е в сила $L(x) + C = G(x) = L(kx)$. Полагаме в това равенство $x = 1$ и получаваме $L(1) + C = 0 + C = L(k \cdot 1) = L(k)$, защото $L(1) = 0$. И така, получаваме, че $C = L(k)$. Значи *за всеки две положителни числа* k и x

$$\textbf{(log)} \qquad L(kx) = L(k) + L(x).$$

Горното равенство е основното характеристично свойство на логаритмичната функция и функцията L *наистина* е логаритъм.

За да докажем това, ще напомним, че L е непрекъсната (защото е примитивна) и растяща (защото производната и $\frac{1}{x}$ е положителна) в интервала $(0, \infty)$ функция. След това да отбележим, че от свойството **(log)** следва директно, че $L(x^n) = nL(x)$ за всяко цяло $n \geq 0$.

Нека сега n е цяло и отрицателно и да положим $m = -n$ (очевидно $m > 0$ е цяло и положително). Тогава

$$0 = L(1) = L(x^n \cdot x^m) = L(x^n) + L(x^m),$$

значи $L(x^n) = -L(x^m) = -mL(x)$ (защото $m > 0$), което пък означава, че $L(x^n) = nL(x)$, тъй като $-m = n$.

След това разглеждаме рационалното число $r = \frac{p}{q}$; $p \in Z$, $q \in N$. За $x > 0$ полагаме $y = \sqrt[q]{x}$. Това означава, че $x^r = y^p$ и тъй като p е цяло, то $L(x^r) = pL(y)$. От друга страна очевидно $x = y^q$ и следователно $L(x) = qL(y)$; $L(y) = \frac{1}{q}L(x)$. Окончателно получаваме, че $L(x^r) = \frac{p}{q}L(x) = rL(x)$ *за всяко рационално* r.

Нека сега α е произволно реално число.

Ако $x > 1$, то $L(x) > 0$ и за всеки две рационални числа a и b, за които $a < \alpha < b$ е изпълнено $x^a < x^\alpha < x^b$. Следователно $L(x^a) < L(x^\alpha) < L(x^b)$ и тъй като a и b са рационални, то получаваме $aL(x) < L(x^\alpha) < bL(x)$.

От друга страна от това, че $L(x) > 0$ следва, че $aL(x) < \alpha L(x) < bL(x)$. Значи числата $L(x^\alpha)$ и $\alpha L(x)$ *се съдържат във всеки интервал от вида* $[aL(x), bL(x)]$, *за който* a *и* b *са рационални и* $a < \alpha < b$. Разбира се, от тук следва, че $L(x^\alpha) = \alpha L(x)$. Аналогично се разсъждава в случая, когато $x \in (0, 1)$.

Тъй като $0 = L(1^\alpha) = \alpha L(1) = 0$, то равенството $L(x^\alpha) = \alpha L(x)$ е изпълнено за всяко $x > 0$ и за всяко α.

5.0.1 Нека $x_0 \neq 1$ - например да изберем $x_0 = 6$ и да положим $y_0 = \frac{1}{L(6)}$ - това е възможно, защото от $6 \neq 1$ следва $L(6) \neq L(1) = 0$ (да напомним, че L е строго монотонна).

5.0.2 Дефиниция. Числото $6^{y_0} = 6^{\frac{1}{L(6)}} = \sqrt[L(6)]{6}$ се нарича *основа на естествените логаритми* и стандартно се означава с буквата e.

Оправдание за горната дефиниция е фактът, че L представлява логаритъм при основа e: $L(x) = \log_e x$ за всяко $x > 0$. За да докажем това е достатъчно да забележим, че $L(e) = 1$ - наистина:

$$L(e) = L(6^{y_0}) = y_0 L(6) = \frac{1}{L(6)} \cdot L(6) = 1.$$

След това ако $x > 0$, то $x = e^{\log_e x}$ и значи $L(x) = L(e^{\log_e x}) = \log_e x \cdot L(e) = \log_e x$. И така, доказахме, че L е логаритмична функция при основа числото e. Обикновено тя се нарича *естествен логаритъм* и за нея има специален символ: $L(x) = \ln x$.

5.0.3 Числото e. Вероятно е нормално да се запитаме какво по - точно е числото, което е основа на логаритъмът, който наричаме "естествен". Това, което може да се каже "от пръв поглед", е че $e > 1$ (защото $L(6) > 0$ и $e = \sqrt[L(6)]{6}$). За да получим повече информация за e ще използваме неравенствата **(gmp)** при $x = 1$ и $y = 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}$ (да отбележим, че тогава $y - x = \frac{1}{n}$):

$$\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n} - 1\right) \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln 1 \leq \left(1 + \frac{1}{n} - 1\right);$$

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

От дясното неравенство се получава, че $\ln(1 + \frac{1}{n})^n \leq 1 = \ln e$ и значи $(1 + \frac{1}{n})^n \leq e$. Аналогично от лявото неравенство получаваме, че $e \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Ако положим $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, то от веригата неравенства

$$\textbf{(e)} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

се получава, че $1 \leq \frac{e}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{n}$. Очевидно е сега, че $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Ще отбележим, че от горното лесно се получава, че $e > 2$. Не толокова очевидно се получава, че $e < 3$. Но при $n = 5$ например получаваме, че

$$2.48832 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 < e < \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.985984$$

5.0.4 Задача*. Друго следствие от **(e)** е следното представяне на e като граница:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

От това равенство следва, че e е ирационално. Докажете* това твърдение. Приблизителната стойност на e е равна на $2.718\,281\,828\,459\ldots$.

5.0.5 Разбира се, от горното лесно се получава производната на функцията $\log_a x$ при произволно $a > 0$; $a \neq 1$: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Значи $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

5.0.6 Показателна функция. Функцията $g(x) = e^x$ е обратна на $f(y) = \ln y$. От теорема 2.13 получаваме, че $g(x)$ има производна и ако $x = \ln y$, то $g'(x)f'(y) = 1$. С други думи $g'(x)\frac{1}{y} = 1$ и значи $g'(x) = y$. Сега от равенството $x = \ln y$ получаваме $y = e^x$ и следователно $(e^x)' = e^x$.

За показателна функция с произволна основа $a > 0$ сега се получава $(a^x)' = a^x \ln a$. Наистина, достатъчно е да съобразим, че $a = e^{\ln a}$ (следователно $a^x = e^{x \ln a}$) и да използваме правилото за диференциране на сложна функция.

5.0.7 Степенна функция. При цели стойности на a ($a = n$) производната на функцията x^n може да се пресметне директно - достатъчно е да разложим $y^n - x^n$ на множители и да положим след това $y \to x$ в частното $\frac{y^n - x^n}{y - x}$ за да се получи известното равенство $(x^a)' = ax^{a-1}$. С малко повече усилия можем да докажем, че то е вярно и за рационални стойности на a. Но при ирационално a съвсем не е очевидно, че $(a^x)' = ax^{a-1}$.

Последното равенство *за произволно* a може да се се получи по следния начин: за $x > 0$ имаме $x^a = e^{a \ln x}$. Значи $(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x}(a \ln x)'$, тоест $(x^a)' = x^a a \frac{1}{x} = ax^{a-1}$.

5.0.8 Примери. Пресметнете производните на функциите:
(а) $x^2 \ln x$; $\ln(x + \log_2 x)$; $\log_x a$; $\ln \ln x$ и $\log_2 \log_3 \log_4 x$;
(б) $x^3 e^x$; e^{x^2}; $2^{a \ln x}$; $e^{\sqrt{\ln x}}$; и $a^{\frac{\log_a x}{x}}$;
(в) $\log_a \frac{a^x - x^a}{a^x + x^a}$; $e^{ax} \ln \sin bx$; $e^{\sin x} + \sin e^x$ и $\log_{1+2^x}(2^x + 3^x)$.

5.1 Обратни тригонометрични функции. Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Тя е монотонна и непрекъсната във всеки от интервалите $(-\infty, 0]$ и $[0, \infty)$. От това следва, че f е по части монотонна и непрекъсната в цялата числова ос, от където следва. Значи тя притежава (обикновена) примитивна, да кажем F. От основната теорема на интегралното смятане следва,че f има безброй много примитивни, всеки две от които се различават с константа. Например съществува единствена примитивна F, за която $F(0) = 0$. Това е вярно, защото ако G е някоя примитивна на f, то $F(x) = G(x) - G(0)$ е също примитивна и очевидно $F(0) = 0$.

Тъй като $F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, то F е растяща и в интервала $(-\infty, \infty)$. За да видим как действа F, ще разгледаме помощната функция $\varphi(t) = F(\operatorname{tg} t)$ например за интервала $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. От правилото за диференциране на сложна функция получаваме, че за всяко $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ съществува $\varphi'(t)$ и

$$\varphi'(t) = F'(\operatorname{tg} t)(\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = 1$$

за всяко t. От основната теорема на интегралното смятане следва, че съществува константа c, за която $\varphi(t) = t + c$ за всяко $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. За да определим c полагаме например $t = 0$: $\varphi(0) = F(\operatorname{tg} 0) = F(0) = 0$. От тук следва, че $\varphi(0) = 0 + c$ и значи $c = 0$. С други думи $F(\operatorname{tg} t) = t$ *за всяко* t от интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. И така, оказва се, че F е *обратната функция* на този клон на tg, който е определен в интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тя се нарича *аркус тангенс* от x и обикновено се бележи с arctg$x$ или $\arctan x$. Функцията arctg е дефинирана в $(-\infty, \infty)$ и приема стойности в интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

За пълнота ще се убедим, че за всяко $x \in (-\infty, \infty)$ е в сила $\operatorname{tg} F(x) = x$. За тази цел нека да положим $x = \operatorname{tg} t$ за някое $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (t съществува, защото функцията tg *приема всички стойности* (вижте 1.7) в интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$). Тогава $\operatorname{tg} F(x) = \operatorname{tg}(F(\operatorname{tg} t)) = \operatorname{tg} t = x$.

5.2. Коментар. *Разбира се, бихме могли да разгледаме тангенса в друг интервал, например* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. *Тогава, повтаряйки горните разсъждения за константата с при* $t = \pi$ *получаваме* $F(\operatorname{tg}(\pi)) = 0 = \pi + c$ *и значи* $c = -\pi$. *Следователно* $F(\operatorname{tg}(t)) = t - \pi$ *за всяко* $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ *и функцията* $G(t) = \pi + F(t)$ *е обратната функция на клона на тангенса, който е определен в интервала* $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

5.3 По същия начин разглеждаме функцията $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тя е непрекъсната в интервала $(-1, 1)$ и е монотонна във всеки от интервалите $(-1, 0]$ (намаляваща) и $[0, 1)$ (растяща).

Както в предходния текст от това следва, че F притежава примитивна в интервала $(-1, 1)$. При което можем да изберем такава примитивна F, че $F(0) = 0$. Да положим след това $\psi(t) = F(\sin(t))$ за $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Стандартни пресмятания показват, че

$$\psi'(t) = F'(\sin t) \cdot (\sin t)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} \cdot \cos t = \frac{1}{|\cos t|} \cdot \cos t = 1,$$

защото за $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ е изпълнено $|\cos t| = \cos t$.

Отново от основната теорема на интегралното смятане получаваме, че $\psi(t) = t + c$, където c е константа. За да определим нейната стойност, полагаме $t = 0$: $\psi(0) = F(\sin 0) = F(0) = 0$. От друга страна $\psi(0) = 0 + c$ и значи $c = 0$.

И така, за всяко $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ е изпълнено равенството $F(\sin t) = t$. Това означава, че F е *обратната функция* на $\sin t$ в интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Тя обикновено се означава с $\arcsin x$ (чете се "аркус синус" от x).

С други думи, ако $t = F(x)$, то $\sin t = x$, което означава, че $\sin F(x) = x \ \forall x \in (-1, 1)$.

5.4 Нека след това да положим $\tau = \frac{\pi}{2} - t$. Тогава $\cos \tau = \sin t = x$. Значи ако означим $G(x) = \frac{\pi}{2} - F(x)$, ще получим $G(\cos \tau) = G(\sin t) = \frac{\pi}{2} - F(\sin t) = \frac{\pi}{2} - t = \tau$.

С други думи, G е *обратната функция* на cos. Тя обикновено се означава със символа $G(x) = \arccos x$ (чете се "аркус косинус" от x).

От равенството $G(x) = \frac{\pi}{2} - F(x)$ очевидно получаваме, че $(\arccos x)' = G'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.4.1 Докажете, че $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$. **Упътване:** разбира се, това следва почти направо от начина, по който определихме функцията $\arccos x$. От друга страна можем да използваме, че ако производните на две функции съвпадат в даден интервал, то те се различават с константа там. В случая е достатъчно да проверите, че $(\cos(\arcsin x))' = \left(\sqrt{1 - x^2}\right)'$. От това следва, че съществува константа c, за която $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} + c$ за $x \in (-1, 1)$. За да определите c, положете в последното равенство $x = 0$.

5.4.2 Следва да отбележим, че с аналогични разсъждения могат да се доказват най - различни тъждества. Докажете например, че

(a) $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

(б) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$;

(в) $\sin(2\operatorname{arctg} x) = \frac{2x}{1+x^2}$ и $\cos(2\operatorname{arctg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

(г) Докажете, че $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$, ако е в сила $xy \leq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 1$. (Упътване: разглеждайте y като константа, а x като променлива.)

(д) Докажете, че ако $xy < 1$, то $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

(е) Пресметнете $\sin(3\arcsin x)$ (по - точно докажете, че това е полином) и $\sin(4\arcsin x)$.

5.5 Сега можем да напишем функцията g от 2.14.2:

$$g(y) = 2\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right)\right)$$

и съответно нейната производна (вижте 8.14.4):

$$g'(y) = -\frac{2\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right)\right)}{3\sqrt{3+2y-y^2}}.$$

5.5.1 От правилото за диференциране на сложна функция непосредствено се получава, че

$$\left(2\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right)\right)\right)' = -\frac{2\cos\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{1-y}{2}\right)\right)}{3\sqrt{3+2y-y^2}}.$$

5.6 Пресметнете при малки стойности на n функцията $T_n(x) = \cos(n\arccos x)$. T_n се нарича *полином на Чебишов* и има важни за теорията на апроксимациите свойства.

(а) Докажете, че $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) \equiv 0$.

(б) Решете уравнението $T_n(x) = 0$ (Упътване: решете го при $n = 2, 3, 4, 5$ и 6; ако все още не е ясно кои са решенията, преминете към следващия текст).

6. Неопределен интеграл. Основни похвати за пресмятане на неопределени интеграли.

6.1 Да предположим, че ПМ функцията f е дефинирана в интервала $< a, b >$ (в общия случай - произволен). Тогава f има безброй много общи примитивни и *всеки две от тях се различават с константа.*

Ако F е обща примитивна на f и C е константа, то очевидно функцията $F + C$ е също **(GP)** на F. Обратно, ако функциите F и G са дефинирани в даден интервал $< a, b >$ и за ПМ функцията f е изпълнено $F'(x) = G'(x) = f(x)$ за всяко $x \in < a, b >$, за което f е непрекъсната, то съгласно основната теорема на интегралното смятане съществува константа C, за която $F(x) = G(x) + C$ за всяко $x \in < a, b >$.

6.2 Дефиниция *Множеството от всички примитивни f, които са дефинирани в даден интервал Δ се нарича неопределен интеграл от функцията f в Δ и се означава със символа $\int f(x)\,dx$.*

Ако F е **(GP)** на f, то пишем $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, при което се подразбира, че C може да е произволно число (очевидно по - правилно би било да пишем $\int f(x)\,dx = \{F(x) + C | C \in \mathbb{R}\}$). По такъв начин символът $\int f(x)\,dx$ се използва за обозначаването както на цялото множество от примитивни, така и на някоя конкретна примитивна. Този начин на означения е (разбира се) некоректен, но е общоприет; приемаме го и ние. Разбира се, от това следва, че *всяко* равенство между неопределени интеграли трябва да се разбира като равенство с точност до константа.

Знакът $\int$ се нарича интеграл. Разбира се, достатъчно е да напишем само $\int f$, за да обозначим множеството от примитивните на f. Означението $\int f(x)\,dx$ се използва за удобство. Например изразът $\int xy$ не е добър, защото не е ясно спрямо коя променлива се пресмята примитивната; би могло да смятаме, че това е x и тогава $\int xy = \frac{x^2y}{2}$. Разбира се, ако интегрираме относно y ще получим $\frac{xy^2}{2}$. Символът dx отстранява такива неясноти, защото една от неговите функции е да покаже спрямо *коя променлива интегрираме*. В нашия пример е ясно, че равенствата $\int xy\,dx = \frac{x^2y}{2}$ и $\int xy\,dy = \frac{xy^2}{2}$ са коректни и еднозначни в достатъчна степен.

По късно ще видим по кои други причини означението $\int f(x)\,dx$ е удобно. Ще отбележим в допълнение, че формално погледнато символите $\int$ и dx могат да бъдат тълкувани като отваряща и затваряща скоби съответно. От тази гледна точка пресмятането на неопределени интеграли по същество се състои в усвояването на техниката на разкриването на тези скоби по някои специфични правила.

6.2.1 Забележка В следващия текст ще изложим примери някои стандартни техники за пресмятането на интеграли (примитивни). Добре е при това читателят да има пред вид, че когато пресмятаме интеграла на дадена функция, то в същото време пресмятаме и интеграла на *всяка нейна проста модификация.*

Основни свойства на неопределения интеграл

Ще преполагаме, че разглежданите функции са дефинирани в един и същ интервал. Следните равенства се получават директно от дефиницията на неопределения интеграл.

1. $\int dF(x) = F(x) + C$

2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

3. Ако f_1 и f_2 имат примитивни, то примитивна има и фунлцията $f_1 + f_2$ и $\int(f_1 + f_2) = \int f_1 + \int f_2$.

4. Ако k е константа, то $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$.

5. Ако $\int f(t)\,dt = F(t)$ то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)$ при $a \neq 0$.

За пресмятането на интеграли ще използваме тези и някои други правила, за които ще стане дума по - късно. Ще ни е нужен освен това и известен запас от интегралите на някои основни елементарни функции.

Следващите равенства могат да бъдат проверени посредством диференциране. Например $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, защото $(\sin x + C)' = (\sin x)' + C' = \cos x$. Ето някои от основните интеграли (с точност до константа):

1. $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$; $\alpha \neq -1$ за $x \in (0,\infty)$. Разбира се, когато подинтегралната функция има смисъл в по - голям интервал, то равенството остава в сила; например $\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$ за $x \in (-\infty,\infty)$.

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ във всеки интервал, който не съдържа нулата.

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$ за $a > 0$, $a \neq 1$. В частност $\int e^x\,dx = e^x$.

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{cotg}x$.

7. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a}$.

8. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} = -\arccos\frac{x}{a}$; $x \in (-a, a)$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}|$.

С помощта на горните интеграли (които ще наричаме *таблични*) и на свойствата **1 - 5** можем да пресмятаме интеграли от по - сложни изрази; например

$$\int (3\sin x - 5 + 2x + 8\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2+3})\, dx = -3\cos x - 5x + x^2 + \ln x^8 - \frac{4}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Изложените до тук правила за интегриране ни позволяват да пресмятаме интегралите на всички полиноми: ако $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, то $\int P(x)\, dx = C + a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1}$. Ето и някои други примери:

(i) $\int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$ - следва от интеграл No 3 от таблицата и от свойство номер пет.

(ii) Тъй като $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cx+d}$, то $\int \frac{ax+b}{cx+d}\, dx = \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|cx+d| + C$.

6.3 Задача Докажете, че

$$\int \frac{\sin 2nx}{\sin x}\, dx = C + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

В известен смисъл правилата за пресмятане на интеграли са всъщност правила за пресмятане на производни, разгледани в обратен ред. Ето как изглежда например правилото за интегриране на произведение:

6.4 Интегриране по части Нека f и g са диференцируеми в интервала Δ. Както знаем, $(fg)' = f'g + fg'$. Последното равенство може да бъде записано така: $\int (f(x)g(x))'\, dx = f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\, dx + \int f(x)g'(x)\, dx$. Формулата за интегриране по части обикновено се използва в следната форма:

(pi)
$$\int f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\, dx$$

Тъй като $dg(x) = g'(x)\, dx$, то често пишат $\int f(x)\, dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\, df(x)$ или просто $\int f\, dg = fg - \int g\, df$.

6.4.1 Пример

(a) За да пресметнем $\int x^n \ln x\, dx$, $n \neq -1$ е достатъчно да забележим, че $x^n = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'$. След това можем да използваме формулата **(pi)**:

$$\int \ln x \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)'\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

(б) Нека $I = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$. Използваме съкратения запис на формулата за интегриране по части и получаваме

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\,d\sqrt{x^2+a^2} = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx =$$

$$x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx =$$

$$x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}).$$

Значи $I = x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$, което означава, че $2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$. Следователно

$$I = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right)$$

Често при интегрирането по части е полезно действието "внасяне в диференциала". То представлява всъщност равенството $f(x)\,dx = dF(x)$, където F е някоя примитивна на f. Значи за да се внесе някоя функция в диференциала, трябва да е известна някоя нейна примитивна.

(в) Да пресметнем интегралите $I = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ и $J = \int e^{ax}\sin bx\,dx$. За тази цел в I и J внасяме в диференциала e^{ax}: $I = \frac{1}{a}\int \cos bx\,de^{ax}$ и $J = \frac{1}{a}\int \sin bx\,de^{ax}$, след което интегрираме по части. Получава се $I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}J$ и аналогично за J имаме $J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I$. Значи за да се пресметнат I и J е достатъчно да се реши системата

$$\begin{cases} I = \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}J \\ J = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I \end{cases},$$

която има решения $I = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$ и $J = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax}$.

6.4.2 Задачи Приложете метода "интегриране по части" към следните интеграли:

$$\int \mathrm{arctg} x\,dx; \quad \int x^2\arcsin x\,dx; \quad \int \frac{\arccos x}{x^2}\,dx$$

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx; \quad \int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx; \quad \int \sin x\cdot\ln(\mathrm{tg}\,x)\,dx$$

6.5 При условие, че функциите f и g имат производни от достатъчно висок ред, можем да интегрираме по части многократно: докажете с многократно интегриране по части равенството

$$\textbf{(mpi)} \qquad \int f g^{(n+1)}\,dx = f g^{(n)} - f' g^{(n-1)} + f'' g^{(n-2)} - \cdots + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)} g\,dx$$

Например ако $f = P$ е полином от $n-$та степен и в **(mpi)** положим съответно $g^{(n+1)}(x) = e^{ax}$ или $g^{(n+1)}(x) = \cos bx$ или $g^{(n+1)}(x) = \sin bx$, то получаваме последователно:

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{P}{a} - \frac{P'}{a^2} + \frac{P''}{a^3} - \cdots\right);$$

$$\int P(x)\sin bx\,dx = \sin bx\left(\frac{P'}{b^2} - \frac{P'''}{b^4} + \cdots\right) - \cos bx\left(\frac{P}{b} - \frac{P''}{b^3} + \cdots\right);$$

$$\int P(x)\cos bx\,dx = \sin bx\left(\frac{P}{b}-\frac{P''}{b^3}+\cdots\right)-\cos bx\left(\frac{P'}{b^2}-\frac{P'''}{b^4}+\cdots\right).$$

6.6 Смяна на променливата Нека $F(x)=\int f(x)\,dx$ и φ е диференцируема функция. Лесно можем да проверим, че тогава

$$\textbf{(cv)}\qquad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))$$

Наистина, това следва от правилото за диференциране на сложна функция: $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$.

Методът за смяна на променливата може да бъде използван ефективно при пресмятането на интеграли на функции от различни класове. Често той се използва по следния начин. Ако при пресмятането на $\int f(x)\,dx$ се окаже, че е целесъобразно да се положи $x=\varphi(t)$, то пресмятането на изходния интеграл се свежда до пресмятането на интеграла $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = G(t)$. Тогава $\int f(x)\,dx = G(\psi(x))+C$, където $\psi=\varphi^{-1}$ е обратната функция на φ (разбира се, става дума за примитивни и *обратни функции* върху тези интервали, в които те съществуват).

6.6.1 Пример

(а) Да пресметнем интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$; $a<x<b$. По - внимателният анализ на подинтегралната функция показва, че може би е целесъобразно да направим смяната $x=\varphi(t)=a\cos^2 t+b\sin^2 t$; $0<t<\frac{\pi}{2}$. Съгласно правилото за смяна на променливите, достатъчно е да пресметнем интеграла $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$, където $f(x)=\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$. След това пресмятаме $f(\varphi(t))$ и $\varphi'(t)$: $x-a=a\cos^2 t+b\sin^2 t-a=a(\cos^2 t-1)+b\sin^2 t = -a\sin^2 t+b\sin^2 t=(b-a)\sin^2 t$. Аналогично получаваме $b-x=(b-a)\cos^2 t$, значи $f(\varphi(t))=\frac{1}{(b-a)\sin t\cos t}$ (забележете, че $b-a>0$ и за $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ $\sin t>0$ и $\cos t>0$). По - нататък имаме $\varphi'(t)=-2a\cos t\sin t+2b\sin t\cos t=2(b-a)\sin t\cos t$. След като заместим получаваме $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt=\int\frac{2(b-a)\sin t\cos t}{(b-a)\sin t\cos t}\,dt=\int 2\,dt=2t$. За да получим окончателния отговор трябва да решим уравнението $x=a\cos^2 t+b\sin^2 t$, което не представлява особена трудност: $x=a(1-\sin^2 t)+b\sin^2 t=a+(b-a)\sin^2 t$; $\sin^2 t=\frac{x-a}{b-a}$. От последното уравнение получаваме $\sin t=\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$ и $t=\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}$. Значи $\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$.

(б) Понякога смяна на променливата може да се извърши "индиректно" посредством внасяне в диференциала на подходяща функция. Например за да се пресметне интеграла $\int\sin^4 x\cos x\,dx$ е достатъчно да внесем $\cos x$ в диференциала: $\cos x\,dx = d\sin x$; значи

$$\int\sin^4 x\cos x\,dx=\int\sin^4 x\,d\sin x=\int t^4\,dt$$

където $t=\sin x$. Фактически тук е извършена смяната $x=\arcsin t$. Тъй като $\int t^4\,dt=\frac{t^5}{5}$, то $\int\sin^4 x\cos x\,dx=\frac{\sin^5 x}{5}$.

(в) Посредством смяна на променливите можем да "узаконим" например такива действия: $\int\frac{1}{\cos^2 5x}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\cos^2 5x}\,d(5x)=\frac{1}{5}\operatorname{tg}5x$ или $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}}=-\int\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\,d(-x)= -\int\frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\,d(1-x)=-\arcsin(1-x)$. Това означава, че имаме формалното право да изнасяме множители от знака за диференциал пред интеграла, а също така и да прибавяме константи към израза под диференциала.

(г) За пресмятането на интеграла $\int\frac{xe^{\operatorname{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$ е удачно да положим $x=\operatorname{tg}t$ (изобщо често пъти смяната на "неприятни" изрази с нови променливи е добра идея). Получаваме последователно:

$$1+x^2 = 1+\mathrm{tg}^2\, t = \frac{1}{\cos^2 t}; \quad (1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos^3 t}; \quad xe^{\mathrm{arctg}x} = \mathrm{tg}te^t;$$

$$\int \frac{xe^{\mathrm{arctg}x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int e^t \sin t\, dt = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)e^t.$$

При тези пресмятания имаме пред вид, че $x \in (-\infty, \infty)$ и $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Следователно $\int \frac{xe^{\mathrm{arctg}\, x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{1}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}e^{\mathrm{arctg}\, x}$.

6.7 Задача Нека f е монотонна и непрекъсната функция и нека g е нейната обратна. Докажете, че ако

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

то

$$\int g(x)\, dx = xg(x) - F(g(x)) + C$$

Упътване: обикновено равенства между неопределени интеграли се доказват посредством диференциране. Разгледайте за упражнение примерите
$f(x) = e^x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \ln(x^2 + x)$ за $x \in (-\infty, -1)$.

Методите за пресмятане на интеграли, които разгледахме до тук са са класическият апарат за пресмятане на неопределени интеграли. Те са полезни при пресмятането на интегралите от някои *класове* от функции - например класът от всички полиноми. При което под "пресмятане" се разбира да се изрази интегралът посредством някой аналитичен израз (така наречената "крайна форма", или както се казва, в експлицитен вид).

За разлика от пресмятането на производни, да пресмятаме примитивни в експлицитен вид не е винаги възможно. Наистина, ако читателят си припомни какво е елементарна функция, лесно ще съобрази, че производната на всяка елементарна функция е също елементарна.

Оказва се, че действието интегриране не запазва елементарните функции. Например e^{x^2} притежава примитивна $F(x)$ в интервала $(-\infty, \infty)$, защото е по части монотонна. Може да се докаже обаче, че $F(x)$ *не е елментарна.*

Отговорът на въпроса при какви условия интегралът на дадена функция е елементарна функция е далеч извън рамките на този курс, а и не е от значение (по наше мнение) за приложенията на Математиката в техническите науки.

Ще отбележим все пак, че за някои важни за приложенията класове от функции има правила, по които те се решават - такива са интегралите от рационални фукции и тези, които се свеждат до тях. Впрочем не е трудно да се намерят достатъчно добри системи - като "Matematica" или "Syslab" например, които решават такива задачи.

6.8 Тук няма да обсъждаме как се пресмятат интеграли от рационални функции. Ще отбележим само, че *всяка* рационална функция може да бъде представена като сума на полином и дроби от вида $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$ и $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\beta}$, при което полиномът x^2+px+q е *неразложим* (тоест, дискриминантата му е отрицателна). Те се наричат *елементарни дроби.* Предлагаме на читателя да съобрази самостоятелно как се решава интеграла $\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}\, dx$. След отделяне на точен квадрат интегралите от елементарни дроби от втория вид се свеждат до интеграли от вида $\int \frac{t}{(t^2+a^2)^\beta}\, dt$ и $\int \frac{1}{(t^2+a^2)^\beta}\, dt$.

Първият интеграл се пресмята лесно:

$$\int \frac{t}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^\beta}\,d(t^2+a^2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\beta)(t^2+a^2)^{\beta-1}} & ;\ \beta \neq -1 \\ \frac{1}{2}\ln|t^2+a^2| & ;\ \beta = -1 \end{cases}$$

За да се пресметне интеграла $J_\beta = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt$, го умножаваме и делим с a^2. След това трябва да се прибави и извади t^2 в числителя:

$$J_\beta = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(t^2+a^2)^{\beta-1}}\,dt - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt = \frac{1}{a^2}J_{\beta-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt.$$

В последния интеграл интегрираме по части:

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^\beta}\,dt = \frac{1}{2a^2}\int \frac{t}{(t^2+a^2)^\beta}\,d(t^2+a^2) = \frac{1}{2a^2(1-\beta)}\int t\,d(t^2+a^2)^{1-\beta}$$

$$= \frac{1}{2a^2(1-\beta)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{\beta-1}} - \frac{1}{2a^2(1-\beta)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{\beta-1}}.$$

Следователно

$$J_\beta = \frac{1}{a^2}J_{\beta-1} - \frac{1}{2a^2(1-\beta)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{\beta-1}} + \frac{1}{2a^2(1-\beta)}J_{\beta-1};$$

$$\textbf{(ef)} \qquad J_\beta = \frac{3-2\beta}{2a^2(1-\beta)}J_{\beta-1} - \frac{1}{2a^2(1-\beta)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{\beta-1}}.$$

Равенството **(ef)** представлява рекурентна връзка между J_β и $J_{\beta-1}$. Тъй като $J_1 = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{t}{a}$, то задачата за пресмятането на интеграли от елементарни дроби е решена.

6.9 Задача Пресметнете:

(а) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$. Упътване: можем да преобразуваме функцията в интеграла по следния начин:
$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2}$. Значи $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Отговор: $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2}\mathrm{arctg}x + C$.

(б) $\int \frac{dx}{x^4+1}$. Упътване: $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$.

Отговор: $\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}(x\sqrt{2}-1) + C$.

6.10 Пример Ето още няколко примера.

(6.10.1) Да разгледаме $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}$; $a > 0$. Тъй като функцията под интеграла има смисъл при $x \in (0,a)$, то $\frac{x}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \sqrt[4]{\frac{x}{(a-x)}}$ и следователно $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}}\,dx = \int \sqrt[4]{\frac{x}{(a-x)}}\,dx$. Извършваме след това смяната $\frac{x}{a-x} = t^4$ или $x = \varphi(t) = \frac{at^4}{1+t^4}$. Тъй като $\varphi'(t) = \frac{4at^3}{(1+t^4)^2}$, то $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = a\int \frac{t^4}{1+t^4}\,dt$.

(6.10.2) Често е полезно да се извърши смяната $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t$, когато трябва да решаваме интеграли от тригонометрични функции. Наистина, имаме $\sin x = \frac{2t}{t^2+1}$, $\cos x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ и $x'(t) = \frac{2}{t^2+1}$.

В някои частни случаи интеграла $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ се рационализира по - лесно с някоя от смените $x = \arcsin t$, $x = \arccos t$ или $x = \mathrm{arctg}\, t$. Това е така, когато R има някои допълнителни свойства. Например ако $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то е добре да се положи $x = \arccos t$; при $R(\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ е по - удачна смяната $x = \arcsin t$ а ако $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ смяната $x = \mathrm{arctg}\, t$ също рационализира интеграла.

Ето няколко примера:

(а) $\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\, dx$ - в този случай можем да положим $x = \arccos u$ или $x = 2\,\mathrm{arctg}\, t$. Ще се получат следните интеграли от рационални функции: $\int \frac{du}{u^2-2}$ или $2\int \frac{2t}{t^4+6t^2+1}\, dt$. Ясно е, че втората смяна води до значително по - лесен интеграл.

(б) Пресметнете $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\, dx$; $\int \frac{dx}{2\cos x-\sin x+5}\, dx$; $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$.

(в) Докажете, че съществуват единствени константи A, B и C, за които:

(1)
$$\int \frac{a_1 \cos x + b_1 \sin x + c_1}{a\cos x + b \sin x + c}\, dx = Ax + B \ln |a\cos x + b\sin x + c| +$$
$$+C \int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$$

(2)
$$\int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^n} = \frac{A\sin x + B\cos x}{a\cos x + b\sin x} + C\int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^{n-2}}.$$

6.11 Интеграли от вида $\int R(f(x))\, dx$, където R е рационална функция, а f е функция, чиято обратна има рационална производна. Очевидно ако това е така и φ е обратната на f, то след смяната $x = \varphi(t)$ получаваме интеграла от рационалната функция: $\int R(t)\varphi'(t)\, dt$.

Такива са например $\int R(e^x)\, dx$, смяната е $x = \varphi(t) = \ln t$; $\int R(\mathrm{tg}\, x)\, dx$, където полагаме $x = \mathrm{arctg}\, t$ и т.н.

6.12 Общи задачи Пресметнете интегралите:

(a)
$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}; \quad \int \frac{1+e^{\frac{x}{2}}}{(1+e^{\frac{x}{4}})^2}\, dx; \quad \int \frac{\mathrm{tg}\, x}{(\mathrm{tg}\, x)^2 + 4\,\mathrm{tg}\, x + 3}\, dx$$

(b*)
$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{2+\sin 2x}}; \quad \int \frac{x\mathrm{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx; \quad \int \frac{dx}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}; \quad \int \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x\, dx$$
$$\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\, dx; \quad \int \frac{ax+b}{x^2+1}\,\mathrm{arctg}\, x\, dx; \quad \int (2x+3)\arcsin(\sqrt{2x-3})\, dx;$$

(c)
$$\int |x^2 - 3|x| + 2|\, dx; \quad \int \frac{1}{|x|+x^2}\, dx; \quad \int e^{-|x|}\, dx;$$
$$\int (|1+x| - |1-x|)\, dx; \quad \int \max(1, x^2+x-1)\, dx; \quad \int [x]|\sin \pi x|\, dx$$

и $\int f(x)\, dx$, където $f(x)$ е разстоянието до най - близкото цяло число.

7. Определен интеграл.

7.0 Повечето твърдения в следващия текст са доказани за функции, които притежават примитивни. Разбира се, за нашите цели е достатъчно да разглеждаме ПМ функции. Понякога ще предполагаме, че разглежданите функции са в допълнение непрекъснати.

Нека сега f е дефинирана в някой интервал Δ, $[a,b] \subset \Delta$ и F е обща примитивна **(GP)** на f в интервала Δ.

7. Дефиниция Ще казваме, че че числото $F(b) - F(a)$ е *определен интеграл* от функцията f върху интервала $[a,b]$, $(a < b)$. Тази дефиниция е добра, защото позволява незабавно да пресмятаме определени интеграли. Като неин минус ще отбележим, че тя (поне привидно) зависи от изборът на примитивната F. Че това не е така се вижда лесно, ако си спомним, че *всяка друга обща примитивна* G на f в интервала $[a,b]$ се различава от F с константа (следствие от основната теорема на интегралното смятане). Тоест ако G е (друга) обща примитивна на f в $[a,b]$, то съществува такава константа C, че $F(x) = G(x) + C \quad x \in [a,b]$. Тогава имаме $F(b) - F(a) = (G(b) + C) - (G(a) + C) = G(b) - G(a)$. И така, дефиницията е коректна и стойността на определения интеграл не зависи от изборът на примитивната на f. Често вместо $F(b) - F(a)$ ще пишем $F(x)|_a^b$. От дефиницията се вижда също така, че итегралът от f върху $[a,b]$ зависи само от функцията f и интервала $[a,b]$. Ще го отбелязваме с някой от символите $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, или $\int\limits_a^b f$, или $\int\limits_{[a,b]} f$. Ще отбележим също, че записът $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не зависи от променливата x; тя се използва, както ще видим по-късно, за удобство. По такъв начин $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(y)\,dy = \int\limits_a^b f(t)\,dt = \cdots$, но например означенията $\int\limits_a^b f(a)\,da$ или $\int\limits_a^b f(f)\,df$ очевидно нямат смисъл.

7.1 Пресметнете интегралите:

$\int\limits_0^a \frac{dx}{b-x} \quad (0 < a < b)$; $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$; $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$; $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$; $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,dx$; $\int\limits_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$; $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$ и $\int\limits_0^2 |1-x|\,dx$.

7.2 Докажете (с пресмятане), че:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\,dx = \begin{cases} 0 & ako \quad m \neq m \\ \pi & ako \quad m = n \end{cases} \;;$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,dx = \begin{cases} 0 & ako \quad m \neq m \\ \pi & ako \quad m = n \end{cases}$$

и $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0$.

7.3 Да разгледаме функцията $H(x) = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$ и нека F е примитивна на f. От дефиниция 7.1 е ясно, че $H(x) = F(\psi(x)) - F(\varphi(x))$, значи ако φ и ψ са диференцируеми, то е в сила равенството

$$H'(x) = F'(\psi(x))\psi'(x) - F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\psi(x))\psi'(x) - f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Пресметнете $F'(x)$, ако $F(x)$ е равно съответно на: $\int\limits_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\,dt$; $\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \frac{\cos t}{t}\,dt$; $\int\limits_{x^2}^{e^x} \frac{dt}{\ln t}$; $\int\limits_{\ln x}^{1} \frac{e^t}{t}\,dt$.

Свойства на определените интеграли.

От дефиниция 7. се получават директно някои свойства на определените интеграли:

(7.4.1) $\int\limits_a^b (f+g) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$.

(7.4.2) Ако k е константа, то $\int\limits_a^b kf = k\int\limits_a^b f$.

(7.4.3) Ако $a < c < b$, то $\int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f = \int\limits_a^b f$. Наистина, ако F е някоя примитивна на f, то това равенство може да се запише по следния начин: $F(b)-F(a) = F(b)-F(c)+F(c)-F(a)$.

(7.4.4) От дефиниция 1.1 следва, че $\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f$; следователно $\int\limits_a^a f = 0$.

(7.5) Ако $a < b$ и $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

Доказателство: Нека F и G са **(GP)** на f и g, за които $F(a) = G(a) = 0$. Образуваме функцията $H(x) = F(x) - G(x)$ (вижте, че е вярно и за ОП). Ясно е, че $H'(x) = f(x) - g(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Следователно H е намаляваща в интервала $[a,b]$, което означава, че $H(a) \le H(b)$. Но $H(a) = 0$, а $H(b) = F(b) - G(b) = F(b) - F(a) - (G(b) - G(a)) = \int\limits_a^b f - \int\limits_a^b g$ (да напомним, че $F(a) = G(a) = 0$). Значи $\int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b g$.

7.6 Ако f е по части монотонна, то такава е и функцията $|f|$. В този случай за всяко $x \in [a,b]$ е изпълнено $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Значи

$$-\int_a^b |f| \le \int_a^b f \le \int_a^b |f|,$$

от където получаваме следното важно свойство на определения интеграл: $\left|\int\limits_a^b f\right| \le \int\limits_a^b |f|$.

7.6.1 Теорема (за средните стойности) Ако f има примитивна в $[a,b]$, то съществува точка $\xi \in [a,b]$, за която $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.

Теорема 7.6.1 е теоремата на Лагранж, изказана по друг начин. Наистина, ако F е примитивната на f, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a).$$

7.6.2 Теорема (втора теорема за средните стойности) Нека f и g са непрекъснати и по части монотонни в $[a,b]$. Ако $g(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то съществува $\xi \in [a,b]$, за което $\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Наистина, ако m и M са съответно най-малката и най-голяма стойности на f в $[a,b]$ (такива има), то $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$. Значи

$$\textbf{(II)} \qquad m\int_a^b g \le \int_a^b fg \le M\int_a^b g$$

По-нататъшните разсъждения са в две посоки: нека първо $\int\limits_a^b g = 0$. Тогава $\int\limits_a^b fg = 0$ и значи равенството $0 = \int\limits_a^b fg = f(\xi)\int\limits_a^b g = 0$ е вярно за всяко $\xi \in [a,b]$.

Нека $\int\limits_a^b g \neq 0$. Тогава $\int\limits_a^b g > 0$ и от **(II)** следва, че $m < \frac{1}{\int\limits_{[a,b]} g}\int\limits_{[a,b]} fg < M$. Тъй като m и M са стойности на f, то съществува $\xi \in [a,b]$ (защото f е непрекъсната), за което $f(\xi) = \frac{1}{\int\limits_{[a,b]} g}\int\limits_{[a,b]} fg$ с което теоремата е доказана.

7.6.3 Теоремите 7.6.1 и 7.6.2 се използват за различни полезни оценки.

Например $\frac{b-a}{3} \le \int\limits_a^b \frac{1}{2+\sin^n x}\,dx \le b-a$ е вярно, защото $\int\limits_a^b \frac{1}{2+\sin^n x}\,dx = \frac{1}{2+\sin^n \xi}(b-a)$ за някое ξ и $-1 \le \sin^n \xi \le 1$ (всъщност, ако n е четно, оценката е по - прецизна).

7.7 Директно от дефиниция 7. се получават аналози на методите за интегриране по части и смяна на променливата при определени интеграли.

7.7.1 (ip) За да интегрираме по части определени интеграли, е достатъчно да допуснем, че f и g са диференцируеми и имат по части монотонни производни в затворения интервал $[a,b]$. Тогава

$$\textbf{(ip)} \qquad \int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

или записано по друг начин $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int\limits_a^b g(x)\,df(x)$.

7.7.2 (cv) За смяната $x = \varphi(t)$ на променливата в $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ може да послужи всяка функция $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, която е *върху* (това означава, че образът на интервалът $[\alpha,\beta]$ е $[a,b]$) и има по части монотонна производна φ' в $[\alpha,\beta]$. Тогава очевидно ще имаме

$$\textbf{(cv)} \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \pm\int_a^b f(x)\,dx$$

за *всяка* функция f, която има примитивна.

Наистина, както споменахме в 6.6, ако F е (обща) примитивна на f, то $F(\varphi(t))$ е (обща) примитивна на $f \circ \varphi$ и значи

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \pm\int_a^b f(x)\,dx.$$

В тази верига равенства не е очевидно само, че $F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \pm(F(b) - F(a))$. За да го докажем ще напомним, че φ е "върху". От това следва, че или $a = \varphi(\alpha)$ и тогава $b = \varphi(\beta)$ и знакът в **(cv)** е "$+$", или че $a = \varphi(\beta)$ и значи $b = \varphi(\alpha)$ и знакът е "$-$".

7.7.3 Ясно е, че е по принцип е достатъчно да правим смяна на променливите само в неопределени интеграли - както показахме в точка 6.6. Понякога обаче е по - удобно да се използва **7.7 (cv)**. Да пресметнем например интеграла

$$I = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\, dx.$$

Можем да постъпим по два начина: първо, достатъчно е да се пресметне някоя примитивна F на $\frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}$, и тогава $I = F(1) - F(0)$. Дали това е удачен избор зависи от начина, по който пресмятаме F. Например в този случай е подходяща смяната $x = \varphi(t) = \left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2$. Тогава $\sqrt{x} = \left|\frac{1-t^2}{2t}\right|$ и $\sqrt{1+x} = \left|\frac{1+t^2}{2t}\right|$ и $\varphi'(t) = \frac{t^4-1}{2t^3}$.

Сега остава да намерим някой интервал $[\alpha, \beta]$, чиито образ посредством φ е интервалът $[0, 1]$. За тази цел решаваме уравненията $\varphi(t) = 0$ (то има две решения - 1 и -1) и $\varphi(t) = 1$, което има четири решения: $-1-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$ и $1+\sqrt{2}$.

Убедете се сами, че образът на всеки от интервалите $\Delta_1 = [-1-\sqrt{2}, -1]$, $\Delta_2 = [-1, 1-\sqrt{2}]$, $\Delta_3 = [\sqrt{2}-1, 1]$ и $[1, 1+\sqrt{2}]$ посредством φ е равен на интервала $[0, 1]$. Можем да изберем всеки от тях; нека $[\alpha, \beta] = [-1-\sqrt{2}, -1]$. Имаме $\varphi(\alpha) = 1$ и $\varphi(\beta) = 0$. Следва да отбележим, че ако $t \in [-1-\sqrt{2}, -1]$, то $\sqrt{x} = \frac{1-t^2}{2t}$ и $\sqrt{1+x} = -\frac{1+t^2}{2t}$.

След като се преработят съответните изрази, получаваме

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}\, dx = -\int\limits_{-1-\sqrt{2}}^{-1} \frac{1}{1-t}\frac{t^4-1}{2t^3}\, dt.$$

Пресметнете този интеграл самостоятелно. В допълнение ще отбележим, че изписването на F е по - трудоемка задача и не е необходимо за пресмятането на горния интеграл.

7.7.4 (cv) (а) Пресметнете интегралите: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{4-4x}}\, dx$; $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$; $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\, dx$; $\int\limits_0^{0,75} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\, dx$.

(б) Може ли в интеграла $\int\limits_0^2 x\sqrt[3]{1-x^2}\, dx$ да положим $x = \sin t$? Коментар: Забележете, че ако извършим формално тази смяна, ще получим правилната примитивна на $x\sqrt[3]{1-x^2}$ даже *в интервала* $(-\infty, \infty)$. Въпреки това, смяната е законна само в интервала $[-1, 1]$.

7.7.5 (ip) (а) Ето едно типично приложение на интегрирането по части: $\int\limits_0^1 \arcsin x\, dx = x\arcsin x|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - 0 - (\sqrt{1-x^2}|_0^1) = \frac{\pi}{2} + 1$. Тук $f(x) = \arcsin x$ а $g(x) = x$.

(б) Друг типичен случай, в който е целесъобразно да интегрираме по части е пресмятането на интеграла $I_{(m,n)} = \int\limits_0^1 x^m(1-x)^n\, dx$.

Тук можем да положим например $f(x) = (1-x)^n$ и $g'(x) = x^m$. Очевидно тогава $g(x) = \int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. Забележете, че всъщност g е интегралът на избраната от нас функция - обикновено това преобразуване се нарича внасяне в диференциала, защото сега можем да запишем $I_{(m,n)} = \frac{1}{m+1}\int\limits_0^1 (1-x)^n\, dx^{m+1} = \frac{1}{m+1}(x^{m+1}(1-x)^n|_0^1 - \int\limits_0^1 x^{m+1}\, d(1-x)^n)$. Забелязваме след това, че $x^{m+1}(1-x)^n|_0^1 = 0$ и $d(1-x)^n = -n(1-x)^{n-1}$ и получаваме $I_{(m,n)} = \frac{n}{m+1}I_{(m+1,n-1)}$ (числата m и n са цели). И така по същия начин получаваме $I_{(m,n)} =$

$\frac{n}{m+1} I_{(m+1,n-1)} = \frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)} I_{(m+2,n-2)} = \cdots = \frac{n!}{(m+1)\cdots(m+n)} I_{(m+n,0)}$. Тъй като интегралът $I_{(m+n,0)}$ е табличен и се пресмята елементарно, то за отговора можем да напишем $I_{(m,n)} = \frac{n!m!}{(m+n+1)!}$.

7.7.6 Пресметнете интегралите:

$\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$; $\int\limits_0^{\pi} x^3 \sin x\,dx$; $\int\limits_1^{e} \ln^3 x\,dx$; $\int\limits_0^1 x^m (\ln x)^n\,dx$; $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

15. Приложения на интегралното смятане. II

8.1. На пръв поглед понятието определен интеграл не е особено полезно, защото не се различава по същество от неопределения.

Това не е съвсем вярно. В следващия текст излагаме многобройни приложения на определените интеграли.

Ще започнем с важната за приложенията формула на Тейлор. В нея се вижда как посредством многократно интегриране по части (на определени интеграли) може да се изучава структурата на дадена функция (например - да пресмятаме стойностите на тази функция с *произволно голяма точност*) значително по - прецизно, отколкото подозира "средностатистическият" читател.

Идеята тук се основава на равенството **(mpi)**, което представя интеграла от $fg^{(n+1)}$ като сума от някои функции. Идентична на **(mpi)** идея позволява да представим твърде общи функции като сума на полином (чиито стойности се пресмятат с прости алгебрични операции) и някакъв "остатък". В следващия текст показваме как става това.

8.2 Нека функцията f притежава непрекъснати и по части монотонни производни от достатъчно висок ред в интервала Δ и $[a,x] \subset \Delta$.

Разглеждаме интеграла $T_k(x) = \int\limits_a^x f^{(k)}(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt$. Ще интегрираме T_k по части, като за тази цел внасяме в диференциала (спомнете си правилото за интегриране по части) функцията $\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}$. За тази цел трябва да напишем в диференциала някоя примитивна на тази функция, например:

$$\int \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}\,dt = -\frac{1}{(k-1)!}\int (x-t)^{k-1}\,d(x-t) = -\frac{(x-t)^k}{k!}.$$

Получава се $T_k(x) = -\int\limits_a^x f^{(k)}(t)\,d\frac{(x-t)^k}{k!}$, след което интегрираме по части:

$$T_k(x) = -f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\,\Big|_a^x + \int\limits_a^x \frac{(x-t)^{(k)}}{k!}\,df^k(t);$$

$$(\mathbf{T})_{(k)} \qquad T_k(x) = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^{(k)}}{k!}\,dt =$$

$$= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + T_{k+1}$$

Да забележим, че при $k=1$ имаме $T_1 = \int\limits_a^x f'(t)\frac{(x-t)^0}{0!}\,dt = \int\limits_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$ защото f е примитивна на f'.

Продължаваме този процес и пишем за $k = 1, 2, \ldots, n-1, n$ последователно равенствата:

$$T_1 = \frac{x-a}{1!} f'(a) + T_2$$
$$T_2 = \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + T_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$T_{n-1} = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + T_n$$
$$T_n = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + T_{n+1}$$

Сега събираме тези равенства, съкращаваме еднаквите събираеми в двете страни и пренесяме $f(a)$ отдясно. Получава се:

$$\textbf{(TL)} \qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Тъждеството **(TL)** се нарича **формула на Тейлор** и играе твърде важна роля в изучаването на функциите. В частност ако събираемото

$$\textbf{(RTL)} \qquad R_n(x) = R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

клони към нула при $n \to \infty$, то можем да пресмятаме стойностите на $f(x)$ с произволна точност. Можем да запишем остатъкът R_n и по друг начин, ако използваме Теорема 7.1.6.2. Тогава можем да положим например $g(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$. Ако $f^{(n+1)}$ е непрекъсната в $[a, x]$, то получаваме

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_a^x (x-t)^n\, dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left(\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \Big|_a^x \right) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

където ξ е някоя точка от интервала $[a, b]$.

И така, ако f има непрекъснати производни до ред $n+1$ включително в интервала Δ и a и x са точки от Δ, то тя е сума на полинома

$$\textbf{(PT)} \qquad P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^k}{n!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

на променливата $(x-a)$ и остатъка R_n. Ако при някое фиксирано x се случи да е изпълнено $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, то очевидно ще е изпълнено и равенството $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$. В частния случай $a = 0$ **(TL)** се нарича формула на Маклорен. Този частен случай е (психологически) по - удобен, защото тогава f е сума на полином на x и съответния остатък.

8.3 Примери

8.3.1 $f(x) = \sin x$ и $x_0 = 0$. За да напишем формулата на Тейлор в този пример трябва да пресметнем $f^{(n)}(0)$; $n = 0, 1, 2, \cdots$. За тази цел докажете, (например по индукция), че $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. Специално при $x = 0$ получаваме

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & ; \quad n = 2k \\ (-1)^k & ; \quad n = 2k-1 \end{cases}$$

Следователно

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}x \pm \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_k$$

където $R_k = \frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin(\xi + k\pi)$ и ξ е точка от интервала $(0, x)$. Ясно е, че $|R_n| \leq \frac{|x|^{2k}}{(2k)!}$ и че можем да преполагаме $|x| \leq \frac{\pi}{2}$. Това означава, че стойностите на sin могат да бъдат пресмятани лесно с произволна точност. Рзбира се, не е необходимо да ограничаваме x, тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0\ \forall x$ (докажете последното равенство), но е естествено да се предпочитат малки по модул стойности на x.

8.3.2 Докажете, че числото $\sin 1$ (един радиан) е ирационално.

8.3.3 Покажете, че

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \pm \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + R_n(x),$$

където $R_n(x) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\cos(\xi + k\pi + \frac{\pi}{2})$ за някое $\xi \in (0, x)$.

8.3.4 $f(x) = e^x$ и $x_0 = 0$. Тъй като $(e^x)^{(n)} = e^x;\ \forall n$, то $f^{(n)}(0) = 1\ \forall n = 0, 1, 2, \ldots$. Следователно

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

където $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$ за някое $\xi \in (0, x)$. Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ за всяко фиксирано x.

8.4 От изложените до тук примери се вижда, че формулата на Тейлор може да бъде използвана за пресмятането на стойностите на функции. Идеята е съвсем естествена: $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$ и ако $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, то очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$. Значи при достатъчно големи n можем да използвме стойността на $p_n(x)$ вместо $f(x)$.

8.5 Ще отбележим, че при условията от предходната точка (тоест ако $\lim R_n = 0$ за някое x) то $f(x)$ е сума на степенния ред

$$\textbf{(TS)} \qquad f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a),$$

който се нарича *ред на Тейлор* на функцията f в точката a. В частния случай $a = 0$ получаваме редът

$$\textbf{(MS)} \qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0),$$

който съответно ще наричаме ред на Маклорен на f. От тук получаваме, че ако **(MS)** е сходящ за някое x_0, то той е абсолютно сходящ в интервала $(-x_0, x_0)$. След полагането $x - a = y$ получаваме, че ако **(TS)** е сходящ при някое x_0, то той е абсолютно сходящ за всяко x от интервала $(a - x_0, a + x_0)$. Напишете редовете на Маклорен за функциите e^x, $\sin x$, $\cos x$ (понякога се казва, че сме "развили" дадена функция в степенен ред).

8.5.1 За да развием например функцията $f(x) = \ln(1 + x)$ в ред на Маклорен трябва за всяко n да пресметнем $f^{(n)}(0)$. Това не е трудно: $f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$, значи $f'(0) = 1$. По - нататък пресмятаме последователно производните на $f'(x)$: $f''(x) = (f'(x))' = -(1+x)^{-2}$; $f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$; $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$ и изобщо $f^{(n)}(x) = (-1)^{(n-1)}(n-$

$1)!(1+x)^{-n}$. Значи за всяко естествено n е изпълнено $f^{(n)}(0) = (-1)^{(n-1)}(n-1)!$. Заместваме след това $f^{(n)}(0)$ в **(MS)** и получаваме (забележете, че $f(0) = 0$):

$$\textbf{(sln)} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n+1)}\frac{x^n}{n}.$$

Докажете, че радиусът на сходимост на този ред е равен на 1. За кои точки извън интервала $(-1, 1)$ този ред е сходящ?

И така, разложихме функцията $\ln(1+x)$ в ред на Тейлор. Със съжаление ще признаем обаче, че горните разсъждения са непълни и нищо не ни гарантира, че сумата на реда **(sln)** наистина е $\ln(1+x)$. И ако някой по - наивен читател изпадне в недоумение защо да не така, ще напомним, че *изобщо не сме изследвали остатъкът в* **(sln)**. А това е важно - *възможно редът на Тейлор на дадена функция да е сходящ в някой интервал, но сумата му да не е равна на стойностите на функцията.*

В следващия текст ще покажем с примери, че това е така. Преди да се заемем с тях обаче, ще отбележим все пак, че сумата на **(sln)** *наистина* е равна на $\ln(1+x)$ за $x \in (-1, 1)$. За тази цел ще направим оценка на остатъка $R_n(x)$ (вижте **(RTL)**) при $a = 0$.

И така: $R_n(x) = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$, където, разбира се, $f(t) = \ln(1+t)$. Тъй като $f^{(n+1)}(t) = (-1)^n n!(1+t)^{-(n+1)}$, то след като заместим се получава $R_n = (-1)^n \int\limits_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt$. В последното равенство $0 \le t \le x < 1$ и значи $x - t < 1$. Следователно $|R_n| \le \int\limits_0^{|x|} \frac{1}{(1+t)^{n+1}}\, dt = \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{(1+|x|)^n})$, от където получаваме, че $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. В последната оценка се появи $|x|$, за да обхванем случая $x < 0$. Разгледайте този случай отделно, без да изплзвате модули (тогава интеграла за R_n имаме $\int\limits_0^x = -\int\limits_x^0$).

8.6 Бином на Нютон Друг важен пример представлява развитието на функцията $f(x) = (1+x)^\alpha$. Нютон е използвал това развитие, за да получи най - разнообразни следствия.

И така, пресмятаме производните на f: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$; $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$; $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$ и изобщо $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Значи $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ за $n = 1, 2, \ldots$.

Ще отбележим между другото, че ако α е *естествено* число (т.е. цяло и положително), то $f^{(n)}(x)$ не е тъждествено нула само за *краен брой стойности* на n. Ясно е, че в този случай редът на Тейлор представлява крайна сума.

Продължаваме по - нататък и пишем редът на Маклорен за f. За да бъде по - обозрим записа, ще напишем предварително коефициента пред x^n в реда на Маклорен. Той е равен на

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n};$$

тоест това е биномен коефициент с *не непременно цяло* α. Това не е чудно: изразът $\binom{A}{n}$ има смисъл и когато A е комплексно число и дори когато A е квадратна матрица (и в някои раздели от Математиката се използва точно в този смисъл).

Значи редът на Маклорен на $(1+x)^\alpha$ има следния вид:

$$\textbf{(ns)} \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Разбира се, това равенство е вярно само за тези стойности на x, за които остатъкът $R_n(x)$ клони към нула. Да го напишем по - подробно:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt$$

Тъй като радиусът на сходимост на **(ns)** е равен на 1 (докажете го), то е достатъчно да докажем, че ако $-1 < x < 1$, то $R_n(x) \to 0$. Тук ще разгледаме случая $-1 < x \le t \le 0$, предлагаме на читателя да разгледа

самостоятелно случая $0 \le t \le x < 1$.

И така, $|\int\limits_0^x (x-t)^n(1+t)^{\alpha-n-1}\,dt| \le |\int\limits_0^x |x|^n\,dt| = |x|^{n+1}$, защото при горните условия $|x-t| \le |x|$ и $0 < 1+t \le 1$. От това следва, че $|R_n(x)| \le \frac{|\alpha||\alpha-1|\cdots|\alpha-n|}{n!}|x|^{n+1}$. За да докажем, че $R_n \to 0$, ще положим

$$a_n = \frac{|\alpha||\alpha-1|\cdots|\alpha-n|}{n!}|x|^{n+1} \ge 0.$$

Докажете, че $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|$. (Упътване: тъй като $|x| < 1$, то от критерия на Даламбер **(da1)** следва, че редът $\sum a_n$ е сходящ.) Следователно $a_n \to 0$ и от $|R_n| \le a_n$ се получава $R_n \to 0$. Като допълнение ще отбележим, че сходимостта на **(ns)** при $x = \pm 1$ изисква по - прецизни разсъждения, които тук няма да излагаме.

8.6.1 Пример Да напомним, че сумата $1+q+q^2+\cdots+q^n$ на геометрична прогресия с частно q първи член 1 е равна на $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Полагаме тук $q = -x^2$ и получаваме

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \pm \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

След това, следвайки Лайбниц, интегрираме последното равенство в интервала $[0,1]$:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 x^4\,dx \pm \cdots + (-1)^n\int_0^1 x^{2n}\,dx + r_n,$$

където $r_n = (-1)^{n+1}\int\limits_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx$. Окончателно се получава

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1} + r_n.$$

За да оценим r_n ще забележим, че $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \le x^{2n+2}$, следователно

$$|r_n| \le \int\limits_0^1 x^{2n+2}\,dx = \frac{1}{2n+3}.$$

След като положим $n \to \infty$ получаваме следното забележително равенство, открито преди около четири века от Лайбниц:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \pm \cdots + (-1)^n\frac{1}{2n+1} \pm \cdots$$

8.7 Горните примери показват как се развива функция в ред на Тейлор. Очевидно за да напишем редът на Тейлор на f в точката a е достатъчно f да притежава безброй много производни в някоя околност на a. Освен всичко друго това показва, че редът на Тейлор в точката a е единствен. За да докажем, че сумата му е равна на изходната функция обаче е необходимо да сме сигурни, че остатъкът клони към нула. При това, както читателят е забелязал, това е обикновено по - трудоемката (и неприятна) част. За съжаление, не можем да я "заобиколим": възможно е да се случи редът на Тейлор да е сходящ **за всяко** x, но сумата му да не е равна на изходната функция за никоя стойност на x, която е различна от a.

8.7.1 Всяка функция, която е равна на сумата на своя ред на Тейлор в даден интервал се нарича *аналитична* в този интервал. Горните примери показват, че не е достатъчно f да притежава безброй много производни, за да е аналитична.

8.7.2 Докажете, че ако съществува константа C със следното свойство: за всяко $x \in [a, b]$ и за всяко естествено n е изпълнено

$$|f^{(n)}(x)| \leq C|x|^n,$$

то f е аналитична в $[a, b]$.

8.8 Нека $f(x_0) = 0$. x_0 се нарича корен с кратност k на f, ако най-ниската степен на $x-x_0$ в полинома на Тейлор е равна на k. С други думи, трябва да е изпълнено $f^{(k-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Намерете кратността на корена $\frac{\pi}{4}$ на уравнението $2\sin^2 x - 1 = 0$. Проверете, че числото 0 е корен на уравнението $e^{x^2} - \cos^2 x = 0$ и определете кратността му.

Формулата на Тейлор има различни приложения в анализа. Едно от тях се състои в намирането на достатъчни условия за съществуването на локални екстремуми на функции.

8.9 Дефиниция Функцията f има локален екстремум в точката x_0, ако съществува околност O на x_0 в която $f(x_0)$ е най-голямата (най - малката) стойност на f.

От теоремата на Ферма знаем, че ако x_0 е точка на локален екстремум за f и $\exists\ f'(x_0)$, to $f'(x_0) = 0$. Това е, разбира се, само необходимо условие за съществуването на екстремум. Че то не е достатъчно можем да се убедим като разгледаме например функцията x^3: $(x^3)'_{x=0} = 3.(0^2) = 0$ и въпреки това x^3 няма екстремум, защото е строго растяща.

8.9.1 Теорема Нека f е дефинирана в околността O на точката x_0 и производната $f^{(n+1)}$ е непрекъсната в точката x_0. Да допуснем освен това, че

$$\textbf{(E)} \qquad f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0 \neq f^{(n+1)}(x_0)$$

Ако n е четно, то f няма екстремум в точката x_0.

Ако n е нечетно, то x_0 е точка на екстремум на f. При това ако $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ to x_0 е точка на локален минимум, а ако $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ то в x_0 имаме локален максимум.

Доказателство: Съгласно формулата на Тейлор

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x)$$

където $r_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$; $\xi \in (x_0, x)$. От условието **(E)** следва, че

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Тъй като $f^{(n+1)}$ е непрекъсната в точката x_0, то съществува околност $U \subset O$ на x_0 в която ако $\xi \in U$ то $f^{(n+1)}(\xi)$ има същия знак като $f^{(n+1)}(x_0)$. Тогава знакът на $f(x) - f(x_0)$ зависи единствено от знака на $(x-x_0)^{n+1}$. Той е постоянен точно когато $n+1$ е четно число. В този случай знакът на $f(x) - f(x_0)$ се определя от знака на $f^{(n+1)}(x_0)$. Ако например

$f^{(n+1)}(x_0) > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0 \ \forall \ x \in U$ и значи x_0 е точка на локален минимум $(f(x) > f(x_0))$.

Ако $n+1$ е нечетно (и значи n е четно), то очевидно в никоя околност на x_0 знакът на $f(x) - f(x_0)$ не е постоянен, следователно там няма екстремум.

Теорема 8.9.1 не третира случая, когато *всички* производни на f в точката x_0 са нули.

8.9.3 Пример При по-повърхностен анализ изглежда, че Теорема 8.9.1 не е нужна, за да се намерят точките на екстремум на дадена функция - бихме могли да просто да определим нейните интервали на монотонност.

За съжаление, по този начин не винаги е възможно да се отделят точките на екстремум. Например функцията

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2+\sin\frac{1}{x}) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

има при $x = 0$ абсолютен минимум и $f'(0) = 0$, но f не е монотонна в никой интервал от вида $(-\varepsilon, 0)$ или $(0, \varepsilon)$ за $\varepsilon > 0$.

8.10 Кратни примитивни Нека функцията f има примитивна F_1 в интервала Δ. Можем да пресметнем примитивната F_2 на F_1; след това примитивната на F_2 и т.н. Изобщо, n-та примитивна на f в Δ се нарича такава функция G, че $G^{(n)}(x) = f(x) \quad \underset{\in}{x}\Delta$. Например ако $f(x) = x$, to $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1$, $F_2(x) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$; $F_3(x) = \frac{x^4}{24} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$ и т.н. Ясно е, че можем да избираме константите произволно, например да поискаме $F_3(2) = F_2(2) = F_1(2) = 0$. Изобщо докажете, че ако F и G са примитивни от ред n на една и съща функция f, то разликата $F - G$ е полином от степен $n-1$.

8.11 Докажете, че функцията $F_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$ е $n+1$-та примитивна на f (*теорема на Коши*).

Упътване: Напишете формулата на Тейлор за функцията F, за която $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$:

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1!}F'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + R_n(x).$$

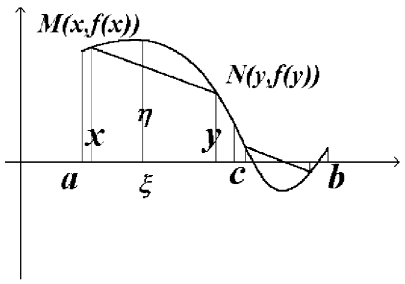
Значи $F(x) = R_n(x) = \int\limits_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}F^{(n+1)}(t)\,dt$ (спомнете си формулата **(TL)**). Да забележим след това, че в интеграла е *производната* на F от ред $n+1$; значи *относно подинтегралната функция* F е *примитивна* от същия ред.

9. Изследване на функции.

Изложението до тука съдържа по - важните факти от "класическия математически анализ". То позволява да се изучават свойствата на елементарните функции с достатъчна за приложенията прецизност. Вече сме в състояние да кажем как се изучават по - важните свойства на дадена функция.

9.1 Дефиниция Казваме, че функцията f е изпъкнала нагоре (надолу) в интервала $< a, b >$, ако за всеки две точки $x, y \in < a, b >$ графика на f е разположен над (под) хордата с краища $(x, f(x))$ и $(y, f(y))$.

Ако в точката x_0 f сменя изпъкналостта си, то ще казваме, че x_0 е *инфлексна* точка на f. Теоремите за средните стойности позволяват да изследваме функциите за свойството изпъкналост. На следващата рисунка f е изпъкнала нагоре в $[a, c]$ и надолу в $[c, b]$. В този случай c е инфлексна точка на f.



9.2 Теорема Ако функцията f има втора производна в интервала $< a, b >$ и $f''(x) \leq 0\ \forall x \in< a, b >$ ($f''(x) \geq 0\ \forall x \in< a, b >$), то f е изпъкнала нагоре (надолу) в $< a, b >$.

Доказателство: Ще разгледаме само случая, когато f е изпъкнала нагоре. Нека $x, y \in< a, b >$ и $x < y$. Уравнението на правата, която минава през точките $M(x, f(x))$ и $N(y, f(y))$ е $\eta = \frac{\xi-y}{x-y} f(x) + \frac{\xi-x}{y-x} f(y)$, където ξ и η са текущите координати. Това, че f е изпъкнала нагоре означава, че в интервала $[x, y]$ е изпълнено неравенството $f(\xi) - \eta(\xi) \geq 0$. Тъй като при $x \neq y$, имаме $1 = \frac{\xi-y}{x-y} + \frac{\xi-x}{y-x}$, то

$$1.f(\xi) - \eta(\xi) = \frac{\xi-y}{x-y} f(\xi) + \frac{\xi-x}{y-x} f(\xi) - \frac{\xi-y}{x-y} f(x) - \frac{\xi-x}{y-x} f(y) =$$

$$\frac{\xi-y}{x-y}(f(\xi) - f(x)) + \frac{\xi-x}{y-x}(f(\xi) - f(y))$$

След това при $x < \xi < y$ прилагаме теоремата на Лагранж за $(f(\xi) - f(x)$ и $(f(\xi) - f(y))$. От нея следва, че съществуват числа $\alpha \in (x, \xi)$ и $\beta \in (\xi, y)$, за които $f(\xi) - f(x) = f'(\alpha)(\xi - x)$ и $f(\xi) - f(y) = f'(\beta)(\xi - y)$. Значи

$$f(\xi) - \eta(\xi) = \frac{(\xi-y)(\xi-x)}{x-y} f'(\alpha) + \frac{(\xi-y)(\xi-x)}{y-x} f'(\beta) =$$

$$\frac{(\xi-y)(\xi-x)}{x-y}(f'(\alpha) - f'(\beta))$$

Използваме отново теоремата на Лаграж и получаваме $f'(\alpha) - f'(\beta) = f''(\gamma)(\alpha - \beta)$ за някое $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

$$f(\xi) - \eta(\xi) = \frac{(\xi-y)(\xi-x)(\alpha-\beta)}{x-y} f''(\gamma)$$

Тъй като $x < \alpha < \xi < \beta < y$, то множителят

$$\frac{(\xi-y)(\xi-x)(\alpha-\beta)}{x-y}$$

е отрицателен. Следователно знакът на $f(\xi) - \eta(\xi)$ зависи единствено от $f''(\gamma)$. В нашия случай $f(\xi) - \eta(\xi) \geq 0$ тогава и само тогава, когато $f''(\gamma) \leq 0$.

Резултатите, които получихме досега дават възможност да направим схема на графика на дадена функция f. Наистина, можем да определим интервалите на монотонност на f посредством знака на производната и.

В тези точки x, в които $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не съществува f евентуално има екстремуми, в горния текст има някои достатъчни условия за това.

Знакът на f'' дава информация за изпъкналостта на f. Съответно точките, в които f'' е нула или пък не съществува, може да са инфлексни.

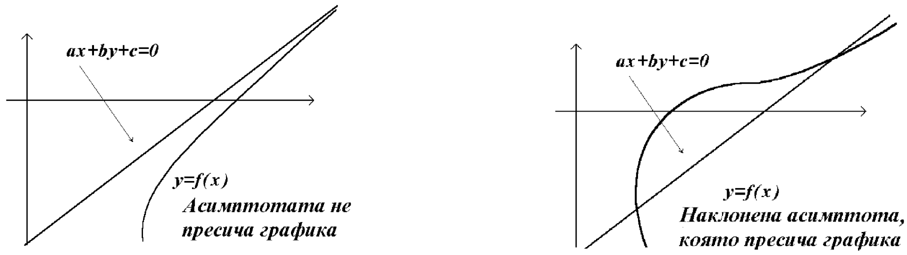
Известна допълнителна информация за поведението на дадена функция се получава от асимптотите и (ако разбира се, съществуват).

9.3 Дефиниция а) Правате с уравнение $l: ax+by+c=0 \quad (b \neq 0)$ е *асимптота* (наклонена асимптота) на функцията f (в $+\infty$ или $-\infty$), ако за разстоянието $d(x)$ между точката $M(x, f(x)$ от графика на f и l е изпълнено $\lim_{x\to+\infty} d(x)=0$, съответно $\lim_{x\to-\infty} d(x)=0$.

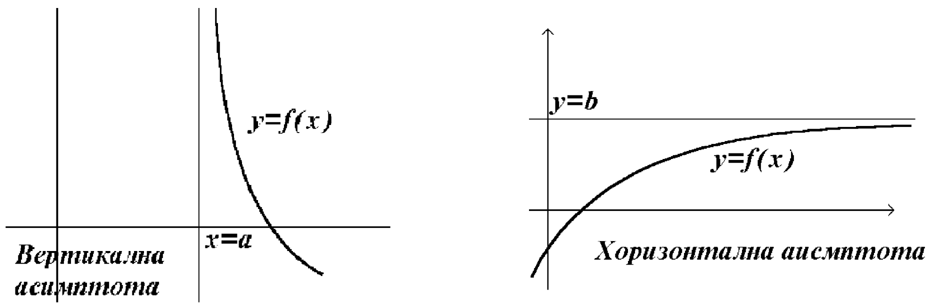
б) Вертикалната права l с уравнение $l: x=a$ е асимптота на f, ако $\lim_{x\to a\pm 0} f(x)=\pm\infty$ (вижте рисунките по - долу).

Да видим как може да се открият наклонените асимптоти на дадена функция f. За разстоянието d имаме $d(x)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}|ax+bf(x)+c|$. Ясно е, че $d(x)\to 0 \iff |ax+bf(x)+c|\to 0;\ x\to\pm\infty$. Ако това е така, то очевидно $\frac{|ax+bf(x)+c|}{|x|}=|a+b\frac{f(x)}{x}+\frac{c}{x}|\to 0$ и тъй като $\frac{c}{x}\to 0$ при $x\to\pm\infty$, то трябва да е изпълнено $a+b\frac{f(x)}{x}\to 0$; значи $\frac{f(x)}{x}\to -\frac{a}{b}$. След това можем да определим c от равенството $c=-\lim(ax+bf(x))$ ако, разбира се, последната граница съществува. Често е удобно да се търси декартовото уравнение на l: $l: y=kx+m$, където $k=-\frac{a}{b}$ и $m=-\frac{c}{b}$. Разбира се, в този случай ще имаме $k_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ и $m_\pm=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

В доста от учебните пособия (ръководства или учебници) се създава впечатлението, че графикът на f се доближава неограничено към правата l без да я пресича (поне "от известно място нататък", тоест в някой безкраен интервал). Че това не е така можем да се убедим например като разгледаме функцията $f(x)=x+\frac{1}{x}\sin x;\ x>0$. Покажете, че правата $l: y=x$ е асимптота на f, която пресича графика на f във всяка точка от вида $k\pi$.



Вертикалните асимптоти се намират по - лесно: това са всички прави l с уравнения $l: x=a$, за които лявата или дясна граница (или и двете) на f в точката a е някакъв вид безкрайност.



Ако пък съществува някоя от границите $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm b$, то правата $l_+ : y=b_+$, съответно $l_- : y=b_-$ са хоризонтални асимптоти на f.

От казаното до тук се вижда, че "изследването" на на дадена функция f се състои в установяването на някои общи свойства на f и построяването на скица на нейния график.

За тази цел е достатъчно да се открие поведението и общите свойства на f в дефиниционната и област и в нейните краища (ако тя съдържа безкрайни или отворени интервали), да се определят точките на прекъснатост, интервалите на монотонност, изпъкналост, екстремните и инфлексни точки, асимптотите на f и т.н. След това може да се нарисува графика на f.

9.4 Задачи

9.4.1 Намерете асимптотите на функцията

$$f(x) = \frac{4x^5 + 13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}$$

9.4.2 Изследвайте функциите:

9.4.2.1
$$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x}}$$

9.4.2.2
$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$$

9.4.2.3
$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

9.4.2.4
$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

9.4.2.5
$$f(x) = \arccos \sin x^2.$$