

УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
Катедра "МАТЕМАТИКА"

Приложения на Математическия анализ

Записки на лекции за специалността "Архитектура"

доц. д-р Владимир Тодоров

София, 2004 г.

Приложения на определените интегралы III

Интегралното смятане възниква от твърде разнообразни приложни задачи - пресмятане лица на области и повърхнини, дължини на линии, приложения в различни задачи от физиката, механиката, социологията, икономиката и др. Тук ще разгледаме (всъщност неголяма) част от възможните приложения на интегралното смятане.

10. Векторни функции

Повечето резултати и факти от математическия анализ, които бяха изложени в горния текст имат аналози и за векторни функции на числов аргумент. По - надолу с $\langle a, b \rangle$ ще отбелязваме произволен интервал, тоест символите \langle и \rangle могат да бъдат отворена или затворена скоба, а някоя от крайните точки a и b (или и двете) може да е съответния вид безкрайност.

Векторна функция $\vec{\varphi}$ на аргумента t ; $\vec{\varphi} : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ е правило, което съпоставя на всяка точка t от интервала $\langle a, b \rangle$ някой вектор $\vec{\varphi}(t)$ от стандартното n -мерно евклидово пространство \mathbb{R}^n . Всеки читател, който се смущава от "многомерни" пространства (тоест при $n > 3$) може спокойно да предполага, че n е равно на 2 или 3; разсъжденията и методите са на практика еднакви или твърде аналогични при произволни стойности на n .

И така, векторната функция $\vec{\varphi}$ е набор от обикновени функции (компонентите или координатите на $\vec{\varphi}$) на числов аргумент: $\vec{\varphi}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. При $n = 2$ или $n = 3$ понякога ще използваме класическите означения $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t))$ и съответно $\vec{\varphi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Основните понятия от анализа се пренасят без труд за векторни функции:

10.1 Дефиниция Векторът $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ е граница на функцията $\vec{\varphi}$ при $t \rightarrow t_0$, ако за всяко число i ; $1 \leq i \leq n$ е изпълнено $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = b_i$. Ще записваме това по стандартния начин: $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varphi}(t) = \vec{b}$. Ясно е, че Дефиниция 10.1 може да бъде формулирана и по следния начин:

$$\vec{b} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varphi}(t) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ такава, че ако } 0 < |t - t_0| < \delta, \text{ то } |\vec{\varphi}(t) - \vec{b}| < \varepsilon$$
 (да напомним, че за вектора \vec{x} с $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ означаваме дължината на \vec{x}).

10.1.2 Дефиниция Функцията $\vec{\varphi}$ е непрекъсната в точката $t_0 \in D_f$, ако $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t_0)$.

10.1.3 Изобщо ще казваме, че векторната функция $\vec{\varphi}$ има дадено свойство, ако *всяка* нейна координата (или компонента) притежава въпросното свойство. Например казваме, че $\vec{\varphi}$ е монотонна, ако φ_i е монотонна функция за всяко i (забележете, че съгласно тази дефиниция е възможно например φ_1 да е растяща, а φ_2 да намалява).

В този смисъл ще разглеждаме диференцируеми векторни функции, ПМ и по части монотонни и непрекъснати (ПМН) функции.

10.1.3.1 Дефиниция Функцията $\vec{\varphi}$ е диференцируема в точката t , ако съществува $\varphi'_i(t)$ за всяко i . Производната и ще означаваме както обикновено с $\vec{\varphi}'(t)$ или понякога с $\dot{\vec{\varphi}}(t)$. Докажете, че

$$\vec{\varphi}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\varphi}(t+h) - \vec{\varphi}(t)}{h}.$$

10.1.3.2 Всички теореми, които се отнасят за алгебричните свойства на производните на "обикновените" (често ще казваме, че неекторните функции са *скаларни*) функции.

Например ако λ и μ са константи, то $(\lambda\vec{\varphi} + \mu\vec{\psi})' = \lambda\vec{\varphi}' + \mu\vec{\psi}'$. В сила е и аналогът на теоремата за производна на произведение. Да отбележим обаче, че за векторните функции

има *различни произведения* - произведение на векторна и числова (скаларна) функция, скаларно произведение на векторни функции, а в тримерното пространство можем да образуваме и векторно произведение на векторни функции.

10.1.4 Нека $\lambda(t)$ е диференцируема функция, а $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ са диференцируеми векторни функции. Тогава са изпълнени следните равенства:

$$(a) (\lambda(t)\vec{\varphi}(t))' = \lambda'(t)\vec{\varphi}(t) + \lambda(t)\vec{\varphi}'(t)$$

$$(б) (\vec{\varphi}(t) \cdot \vec{\psi}(t))' = \vec{\varphi}'(t) \cdot \vec{\psi}(t) + \vec{\varphi}(t) \cdot \vec{\psi}'(t), \text{ като произведението тук е скаларно.}$$

Ако $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ са тримерни вектори, то е в сила също така и твърдеството

$$(в) (\vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}(t))' = \vec{\varphi}'(t) \times \vec{\psi}(t) + \vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}'(t).$$

(г) Тъй като комплексните числа също са (или могат да бъдат разглеждани като) вектори, то можем да разглеждаме функции - например $\vec{\varphi}(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ и $w(t) = u(t) + iv(t)$, чиито стойности са комплексни числа. Ясно е, че тогава по дефиниция $z' = x' + iy'$. В този случай са изпълнени твърдествата $(z(t)w(t))' = z'(t)w(t) + z(t)w'(t)$ и $(\frac{z}{w})' = \frac{z'w - zw'}{w^2}$, които се доказват посредством проверка.

(д) Ако f е скаларна функция и можем да образуваме композицията $\vec{r} = \vec{\varphi} \circ f$, то нейната производна се получава от $\vec{r}'(t) = \vec{\varphi}'(p)f'(t)$, за $p = f(t)$ и при условие, че съответните производни съществуват. Това свойство е вярно, защото за всяко i е изпълнено $r'_i(t) = \varphi'_i(p)f'(t)$.

Ще отбележим, че доказателството на всички твърдества (а) - (в) се състои в тяхната проверка - запишете векторните функции посредством техните координати и извършете проверката за съответните скаларни равенства (трябва да признаем, че понякога проверките са досадни). В частност за (в) имаме

$$\vec{\varphi} \times \vec{\psi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} = (\varphi_y\psi_z - \varphi_z\psi_y; \varphi_z\psi_x - \varphi_x\psi_z; \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x),$$

от където например за първата координата на $(\vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}(t))'$ получаваме, че $(\vec{\varphi} \times \vec{\psi})'_x = (\varphi'_y\psi_z - \varphi'_z\psi_y) + (\varphi_y\psi'_z - \varphi_z\psi'_y)$ и по същия начин се постъпва с останалите координатни функции.

Разбира се, досадните изчисления понякога могат да бъдат избегнати. Например за да докажем (в) полагаме $\vec{r}(t) = \vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}(t)$. След това е достатъчно да забележим, че

$$\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t) = \vec{\varphi}(t+h) \times \vec{\psi}(t+h) - \vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}(t+h) + \vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}(t+h) - \vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}(t);$$

$$\frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \frac{(\vec{\varphi}(t+h) - \vec{\varphi}(t))}{h} \times \vec{\psi}(t+h) + \vec{\varphi}(t) \times \frac{(\vec{\psi}(t+h) - \vec{\psi}(t))}{h}.$$

При $h \rightarrow 0$ получаваме 10.1.4 (в).

10.2 И така, теоремите за средни стойности не са вярни векторни функции. Въпреки това все пак може да се каже нещо за нарастването $\vec{\varphi}(\beta) - \vec{\varphi}(\alpha)$ - например $|\vec{\varphi}(\beta) - \vec{\varphi}(\alpha)| \leq M|\beta - \alpha|$, където M е най-голямото от числата $m_i = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |\varphi'_i(t)|$. Това е вярно, защото

теоремата на Лагранж е вярна за всяка функция φ_i . Може обаче да се каже и нещо повече (което впрочем е достатъчно за повечето от приложенията):

10.2.1 Теорема Ако $\vec{r} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ е непрекъснатата векторна функция в $[\alpha, \beta]$ и има производна в (α, β) , то съществува $t_0 \in [\alpha, \beta]$, за което $|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)| \leq |\beta - \alpha|\vec{r}'(t_0)$.

10.2.2 Няма да излагаме доказателството на тази теорема. Вместо това ще коментираме механичния и смисъл. Ако желаем да опишем движението на материална точка M в пространството, то на всеки момент t трябва да съпоставим точката $R(t)$, в която се намира M в момента t . R от своя страна е определена еднозначно от радиус-вектора си $\vec{r}(t) =$

$\overrightarrow{OR}(t)$. Обикновено наричат функцията $\vec{r}(t)$ *ходограф* на M . Значи за времето $|\beta - \alpha|$ M се придвижва от точка $A(\alpha)$ ($\overrightarrow{OA} = \vec{r}(\alpha)$) до точката $B(\beta)$. **Средната скорост** на това движение е равна на $\frac{|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)|}{|\beta - \alpha|}$, а скоростта на M във всеки момент от времето t съгласно забележката от 2.2 е равна на $|\vec{r}'(t)|$.

Сега е очевидно, че е невъзможно за всяко t $|\vec{r}'(t)|$ да е по-малка от средната скорост, защото $|\vec{r}(\beta) - \vec{r}(\alpha)|$ е *най-малкото* разстояние между точките A и B .

10.3 Интегрални от векторни функции *Примитивна* $\vec{\Phi}$ на $\vec{\varphi}$ се нарича всяка векторна функция, за която $\vec{\Phi}'(t) = \vec{\varphi}(t)$ за всяко t от дефиниционната област на $\vec{\varphi}$.

Лесно се вижда, че ако \vec{F} е *друга* примитивна на $\vec{\varphi}$, то $\vec{F} = \vec{\Phi} + \vec{c}$, където \vec{c} е константа - вектор. Наистина, ако $\vec{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$, то очевидно

$$\vec{\Phi}(t) = \left(\int \varphi_1(t) dt, \int \varphi_2(t) dt, \dots, \int \varphi_n(t) dt \right).$$

Изобщо ако $\vec{\varphi}$ е ПМ - функция, то $\vec{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$ е *обща примитивна* на $\vec{\varphi}$, ако за всяко k Φ_k е обща примитивна на φ_k .

10.3.1 Казано по-точно, ако $\vec{F} = (F_1, \dots, F_n)$ и $\vec{\Phi}(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ са общи примитивни на $\vec{\varphi}$, то за всяко i съществува константа c_i , за която $F_i = \varphi_i + c_i$. Значи $\vec{F} = \vec{\Phi} + \vec{c}$, където $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$.

10.3.2 Дефиниция Нека $\vec{\Phi}$ е обща примитивна на $\vec{\varphi}$ в интервала $[\alpha, \beta]$. Векторът $\vec{\Phi}(t)|_{\alpha}^{\beta} = \vec{\Phi}(\beta) - \vec{\Phi}(\alpha)$ се нарича *определен интеграл* от $\vec{\varphi}$ върху интервала $[\alpha, \beta]$. Ще го означаваме както и по-рано с $\int_{\alpha}^{\beta} \vec{\varphi}(t) dt$.

Всички свойства на интегралите от скаларни функции, които не засягат теоремите за средни стойности остават в сила и за интегралите от векторни функции. Например можем да напишем няколко формули за интегриране по части, защото има няколко вида произведения. От производна на векторно произведение например получаваме, че

$$\int_{\alpha}^{\beta} \vec{\varphi}'(t) \times \vec{\psi}(t) dt = \vec{\varphi}(\beta) \times \vec{\psi}(\beta) - \vec{\varphi}(\alpha) \times \vec{\psi}(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\varphi}(t) \times \vec{\psi}'(t) dt.$$

Напишете самостоятелно правилата за интегриране по части, които се получават от скаларното произведение и произведението на скаларна и векторна функции.

Аналози освен това нямат тези свойства на "скаларните" интегрални, които са свързани с наредбата на числата. Разбира се, причината за това е, че не е определена наредба за вектори (тоест не може да се каже кой от два дадени вектора е по-голям). Все пак важно за приложенията е следното свойство:

10.3.3 Теорема За всяка векторна ПМ функция $\vec{\varphi}$ е изпълнено неравенството

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\varphi}(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{\varphi}(t)| dt.$$

10.3.3.1 За да докажем горната теорема ще използваме следното популярно неравенство (неравенство на Коши - Буняковски): за n -мерните вектори \vec{a} и \vec{b} е в сила неравенството $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \vec{a}^2 \vec{b}^2$. Наистина, да отбележим, че за всяко x е изпълнено $(x\vec{a} + \vec{b})^2 \geq 0$. Това означава, че квадратното неравенство $\vec{a}^2 x^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})x + \vec{b}^2 \geq 0$ има за решения *всички* числа, което е възможно само ако за дискриминантата му $D = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2$ имаме $D \leq 0$.

Сега можем лесно да се убедим във верността на 10.3.3. За тази цел нека $\vec{a} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{\varphi}(t) dt$,

тоест за всяко i $a_i = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_i(t) dt$ и при фиксирано t $\vec{b} = \vec{\varphi}(t)$. Съгласно 10.3.3.1 $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(t) \leq |\vec{a}| |\vec{\varphi}(t)|$. От 10.1.5 сега получаваме, че

$$\sum_{k=1}^n a_k \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_k(t) dt \leq |\vec{a}| \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{\varphi}(t)| dt.$$

Това означава, че $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \leq |\vec{a}| \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{\varphi}(t)| dt$ и след като съкратим на $|\vec{a}|$ получаваме 10.3.3.

10.3.4 Формула на Тейлор Докажете (както за скаларни интеграли) формулата на Тейлор за векторни функции:

$$(VTL) \quad \vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(\alpha) + \frac{t-a}{1!} \vec{\varphi}'(\alpha) + \dots + \frac{(t-a)^n}{n!} \vec{\varphi}^{(n)}(\alpha) + \int_{\alpha}^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} \vec{\varphi}^{(n+1)}(\tau) d\tau$$

11. Дължина на линия

В следващия текст препологаме както обикновено, че *всички векторни функции*, които разглеждаме притежават ПМ производни до реда, който е необходим.

11.1 И така, векторната функция $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ описва закона на движението на материална точка $R = R(t)$ ($\vec{OR}(t) = \vec{r}(t)$) в пространството. Да допуснем след това, че в някой интервал с център t_0 съществуват производните $\vec{r}'(t)$ и $\vec{r}''(t)$. От формулата на Тейлор получаваме, че

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + (t-t_0)\vec{r}'(t_0) + \int_{t_0}^t (t-\tau)\vec{r}''(\tau) d\tau,$$

и значи $\frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0} = \vec{r}'(t_0) + \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t (t-\tau)\vec{r}''(\tau) d\tau$. Ще покажем след това, че при $t \rightarrow t_0$ остатъкът

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t (t-\tau)\vec{r}''(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{t-\tau}{t-t_0} \vec{r}''(\tau) d\tau$$

също клони към нула (нулевия вектор). Наистина, от 10.3.3 следва, че

$$|\vec{T}(t)| \leq \int_{t_0}^t \left| \frac{t-\tau}{t-t_0} \right| |\vec{r}''(\tau)| d\tau \leq \int_{t_0}^t |\vec{r}''(\tau)| d\tau,$$

защото $\left| \frac{t-\tau}{t-t_0} \right| \leq 1$ - това следва от факта, че "аргументът на интегриране" τ се съдържа в интервала $[t_0, t]$. От друга страна по условие функцията $|\vec{r}''(\tau)|$ е по части монотонна и значи ограничена; нека $|\vec{r}''(\tau)| \leq M$. Следователно $0 \leq \int_{t_0}^t |\vec{r}''(\tau)| d\tau \leq M \int_{t_0}^t d\tau = M|t-t_0| \rightarrow 0$.

11.2 От горните разсъждения се вижда, че изразът $\vec{r}(t_0) + (t-t_0)\vec{r}'(t_0)$ може да бъде разглеждан като "векторен диференциал" на функцията \vec{r} (и ще го схащаме по този начин

в следващите раздели). Това означава, че когато t е близко до t_0 имаме $\vec{r}(t) \approx \vec{r}(t_0) + (t - t_0)\vec{r}'(t_0)$. Съответно $\frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \approx \vec{r}'(t_0)$ е *векторът на средната скорост* в интервала $[t_0, t]$.

Това обяснява защо $\vec{r}'(t_0)$ се схваща в механиката като вектор на скоростта, с която се движи точката $R(t)$.

11.3 Дефиниция Траекторията γ , която описва $R(t)$ се нарича *линия*. Ясно е, γ е образ на интервала $[a, b]$ посредством векторната функция \vec{r} : $\gamma = \vec{r}([a, b]) \subset \mathbb{R}^3$ (или $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, когато \vec{r} приема стойности в \mathbb{R}^2).

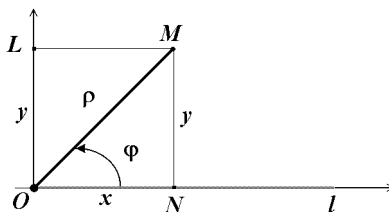
Разбира се, в този случай е естествено *дължината* $|\vec{r}'|$ на вектора \vec{r}' да се възприема като *скоростта на движение на точката R* по протежение на линията γ . Нека след това да означим с $l(t)$ изминатия път от началото на движението в точката A до точката $R(t)$, която е достигната в момента t . Съгласно общите принципи на механиката, $l(t)$ е *обща примитивна на $|\vec{r}'(t)|$* . Това означава, че $l(t) = \int_a^t |\vec{r}'(\tau)| d\tau$. Но дължината на изминатия път е *дължината на съответната част* от линията γ .

11.4 Коментар И така, дължината на дъгата AB е равна на $\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$. Ще отбележим все пак, че тези разсъждения (от съвременна гледна точка) не са коректни. Наистина, трябва първо да сме сигурни, че при условията, които сме поставили за \vec{r}' дъгата, свързваща A и B *изобщо има дължина* (като, разбира се, преди това сме казали *какво е това дължина на линия*). Тук няма да коментираме тези въпроси. Ще отбележим само, че за целите на приложенията в инженерните науки горните разсъждения според нас (и според повечето математици от XIX век) са задоволителни. По аналогия можем да говорим и за дължина на линия в произволно карйномерно пространство:

11.5 Дефиниция Да предположим, че кривата γ в n -мерното пространство \mathbb{R}^n е зададена с векторното параметрично уравнение $\vec{r} = \vec{r}(t)$; $t \in [a, b]$. *Дължината $l(\gamma)$ на линията $\gamma = \vec{r}([a, b])$* по дефиниция е равна на интеграла $\int_a^b |\vec{r}'(t)| dt$.

11.5.1 Има различни способности да се опише дадена линия. Например графикът Γ_f на всяка по части гладка функция f , дефинирана в интервала $[a, b]$ е крива. Наистина, тя допуска параметризацията $\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$, $t \in [a, b]$. Следователно за дължината $l(\Gamma_f)$ имаме $l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.

Може също така да опишем дадена линия посредством *полярни координати*. Нека в равнината да фиксираме ос Ol с начало точката O (Рис. 11.5.1).



Фиг. 11.5.1

Положението на точката M се определя еднозначно от дължината на радиус - вектора $|OM| = \rho \geq 0$ и ориентирания ъгъл φ . Обратното не е вярно: всяка точка от равнината определя еднозначно ρ и с точност цялократно на 2π ъгъла φ . Стандартно се предполага, че φ описва някой интервал с дължина 2π , например $[-\pi, \pi]$ или $[0, 2\pi]$. Понякога обаче са полезни *обобщените полярни координати*, при които $\varphi \in (-\infty, \infty)$. И така, двойката (ρ, φ)

се нарича полярни координати на точката M . Ако разположим ортогонална система Oxy както е показано на Фиг. 11.5.1, то лесно може да се изразят ортогоналните координати $M(x, y)$ посредством полярните $M(\rho, \varphi)$ и обратно. Наистина от рисунката се вижда, че $\overline{ON} = x = \rho \cos \varphi$ и $\overline{OL} = y = \rho \sin \varphi$. Обратно очевидно $\rho^2 = x^2 + y^2$ (което определя еднозначно ρ защото $\rho \geq 0$) и $\varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = -\operatorname{arccotg} \frac{x}{y}$. Разбира се, случаите $x = 0$ или $y = 0$ или $x = y = 0$ не влизат в това решение, но не трябва да забравяме, че O е единствената точка, за която φ е неопределен. Горните равенства определят φ с точност до цяло кратно на π .

И така, ако f е по части гладка функция в интервала $[\alpha, \beta]$, то геометричното място на точки $M(\rho, \varphi)$, за които $\rho = f(\varphi)$ образува линията γ . Ясно е, че ако разглеждаме φ като параметър ще получим уравненията $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi = f(\varphi) \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi = f(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$. Лесно се пресмята, че $x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) = f^2(\varphi) + f'^2(\varphi) = \rho^2 + \rho'^2$. Следователно за дължината $l(\gamma)$ на γ имаме $l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$.

- 11.6** Пресметнете дължината на линиите (графици на функции): а.) $y = \sqrt{px}$, $x \in [0, a]$; б.) $y = e^x$, $x \in [0, x_0]$; в.) $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}$; г.) $y^2 = \frac{x^2}{2a-x}$, $x \in [0, \lambda a]$, $0 < \lambda < 2$; д.) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$, $1 \leq x \leq e$; е.) $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

11.6.1 Пресметнете дължините на линиите, зададени с параметричните си уравнения:

- а.) $\gamma = \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ (циклоида);
 б.) $\gamma = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$ (винтова линия);
 г.) $\gamma = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = t - t^2 \end{cases}$, $t \in [0, 1]$;

11.6.2 Пресметнете дължините на кривите, зададени посредством полярни координати:

- а.) $\rho = a\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (Архимедова спирала);
 б.) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида);
 в.) $\rho = ae^{m\varphi}$ при $\varphi \in [0, \pi]$;
 г.) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$; $\varphi \in [0, 6\pi]$.

12. Лица на области

В предходния текст стана дума, че геометричният смисъл на "границите μ " когато изходната монотонна функция f е неотрицателна е лицето на криволинейния трапец, определен от графика на f . Ако f е отрицателна над някой интервал $[p, q]$, то $\int_p^q f$ е лицето на съответния криволинейен трапец, *взето със отрицателен знак*.

12.1 Това ни подсеща да разглеждаме малко по-сложни области. А именно нека $a_2(x)$ и $b_2(x)$ са дефинирани в $[a_1, b_1]$ и $a_2(x) \leq b_2(x)$ за всяко $x \in [a_1, b_1]$. Разглеждаме областта, която е заградена от графиците на функциите a_2 и b_2 и вертикалните прави през a_1 и b_1 .

12.2 Дефиниция Такава област се нарича *криволинейен трапец*, има аналитичен запис

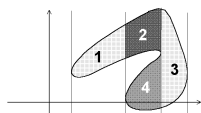
$$\begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1 \\ a_2(x) \leq y \leq b_2(x) \end{cases}$$

и изглежда така (Рис 2.7):



Фиг. 2.7

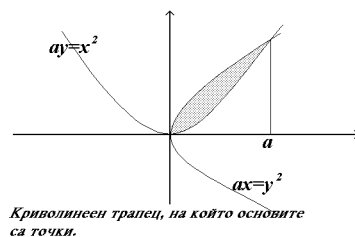
12.3 Разбира се, не всички области са криволинейни трапеци. Следва да отбележим обаче, че достатъчно широк клас от области могат да бъдат представени като сума на краен брой криволинейни трапеци (въпреки, че не всяка област е такава). Областта от Рис. 2.8 например е точно такава. Тя е сума на четири криволинейни трапеца, които на рисунка 2.8 се получават по стандартна процедура - движим успоредна на оста Oy права и отчитаме броя на пресечните и точки с контура на областта.



Фиг. 2.8

Ще отбележим, че това разделяне на областта не е единствено или еднозначно. Например сумата на областите (1) и (2) от горната рисунка е също криволинейен трапец.

12.4 Пример. а.) Пресметнете лицето на областта, ограничена от лимите с уравнения $ax = y^2$ и $ay = x^2$; $a > 0$ (Рис. 2.9).



Фиг. 2.9

Решение: От рисунката се вижда, че затъмнената област се описва с условията $0 \leq x \leq a$ и $\frac{x^2}{a} \leq y \leq \sqrt{ax}$, т.е. представлява криволинеен трапец. Значи $S = \int_0^a (\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}) dx$; значи $S = \frac{2}{3}x\sqrt{ax}|_0^a - \frac{1}{3a}x^3|_0^a = \frac{a^2}{3}$.

б.) Същото за лицето на областта, заградена от $y = x^2$ и $x + y = 2$ (параболичен сегмент) (Рис.2.10).

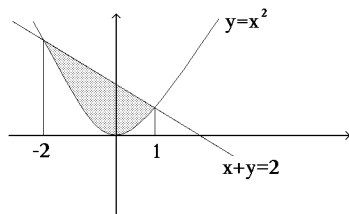


Рис. 2.10

Решение: Пресечните точки на параболата $y = x^2$ и правата $x + y = 2$ са точките $(-2, 4)$ и $(1, 1)$, които са решения на системата $\begin{cases} y = x^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Лесно се вижда, че за $x \in [-2, 1]$

$g(x) \leq f(x)$, където $f(x) = 2 - x$ и $g(x) = x^2$. Това означава, че $S = \int_{-2}^1 (2 - x - x^2) dx =$

$$(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

12.4.1 Пресметнете лицето на криволинейния трапец, заграден от линиите с уравнения:

в.) $y = 2x - x^2$ и $x + y = 0$;

г.) $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0.1$ и $x = 10$;

д.) $y = (1 + x)^2$ и $x = \sin \pi y$, $y = 0$ ($0 \leq y \leq 1$); е.) $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ и

ж.) Лицето на областта определена от неравенството $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \leq 1$, където $A > 0$ и $AC - B^2 > 0$.

13. Риманови суми

13.1 В различни приложни задачи се прави "дискретен модел" на описваното явление. След това се преминава към граница, която се оказва интеграл от някоя функция или израз. За тази цел се използва понятието *сума на Риман*.

13.2 В следващия текст ще разглеждаме крайни подмножества на интервала $[a, b]$, чиито елементи ще наричаме *върхове*. Нека например $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е такова подмножество на $[a, b]$. Винаги ще считаме, че $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и *всички точки, в които f е прекъсната или променя монотонността си* са измежду върховете на τ . Понякога ще наричаме τ *разбиване* на интервала $[a, b]$.

13.3 Нека сега $\tau = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ е разбиване на интервала $[a, b]$.

За всеки интервал $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ избираме след това точка $\xi_i \in \Delta_i$ (която ще наричаме *възела*) и образуваме сумата $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, където както по-горе $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ е дължината на интервала Δ_i . Тя се нарича *сума на Риман на функцията f за разбиването τ на $[a, b]$* , или накратко Риманова сума на f . Ще я отбелязваме със символа $r(f, \tau)$ или просто с $r(f)$, когато е ясно за какво разбиване става дума. Разбира се, Римановата сума зависи и от възлите ξ_i , така че за дадено разбиване съществуват *безброй много Риманови суми*.

13.3.1 И така, при условията от 13.2 можем да сме сигурни, че f е непрекъсната *във всеки* интервал $[x_{i-1}, x_i]$ (освен евентуално в крайните му точки) и е монотонна в

същия интервал. Това ни позволява да използваме теоремата за средните стойности за интервала $[x_{i-1}, x_i]$ (и евентуално за проста модификация на f в него): съществува такова $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, че $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt = f(\eta_i)(x_i - x_{i-1})$. Нека сега F е някоя обобщена примитивна на f . Тогава в разликата $\int_a^b f = F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0)$ прибавяме и вадим $F(x_k)$ за различни стойности на k и получаваме:

$$\int_a^b f = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) \pm \dots \pm F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k,$$

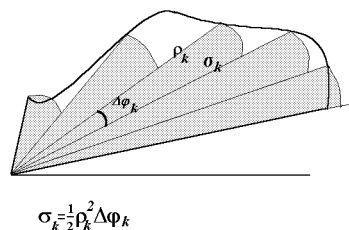
където $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ е дължината на интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

13.3.2 И така, ако f е ПМН функция, то за всяко разбиране τ , което съдържа точките на прекъсване или на "немонотонност" на f равенството $\int_a^b f(x) dx = r(f, \tau)$ е вярно за

подходящ избор на възлите в τ . Това позволява да разглеждаме интеграла $\int_a^b f(x) dx$ като граница на сумите на Риман, когато Δx_k става "произволно малко". Това е вярно, защото колкото дължината Δx_k на интервала $[x_{k-1}, x_k]$ е по-малка, толкова изборът на точката ξ_k е по-несъществен. Разбира се, това твърдение може да бъде казано по-строго (и доказано), но за разбирането на следващия текст е достатъчно да се усвои, че ако апроксимираме нещо с произволни суми на Риман за някоя функция, то в граничен преход получаваме интеграл от тази функция.

Ще използваме сумите на Риман, за да видим как се пресмятат лица на области, които са зададени по друг начин (не непременно като суми на криволинейни трапеци).

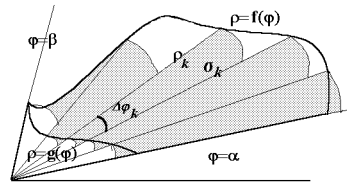
13.7 В доста задачи областта, на която пресмятаме лицето е описана в *полярни координати* $G = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ 0 \leq \varrho \leq f(\varphi) \end{array} \right.$ (Рис. 2.11) или по-общо $G = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ g(\varphi) \leq \varrho \leq f(\varphi) \end{array} \right.$ (Рис. 2.12):



Фиг. 2.11

В този случай принципът за дискретно апроксимиране на величината, която пресмятаме също работи стандартно. Наистина, нека $\tau = \{\alpha_0 = \alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \beta$ е разбиране на интервала $[\alpha, \beta]$. Ако $\varrho_k = f(\varphi_k)$ и $\Delta\varphi_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}$, то лицето на сектора с радиус ϱ_k и централен ъгъл $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ е равно на $\sigma_k = \frac{1}{2} \varrho_k^2 \Delta\varphi_k$, а $\Sigma_\tau = \frac{1}{2} \sum_k \varrho_k^2 \Delta\varphi_k$ е

апроксимация на лицето $\sigma(G)$ на G . Следователно $\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi) d\varphi$ или записано по-кратко $\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2 d\varphi$ (Рис. 2.11).



Фиг. 2.12

В по-общия случай $\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f^2(\varphi) - g^2(\varphi)) d\varphi$.

13.7.1 В този пример $\varrho = f(\varphi)$ и ако е необходимо $\varrho = g(\varphi)$. Пресметнете лицето на областта описана в полярни координати с ограниченията: а.) $\varrho \leq a^2 \cos 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (лемниската); б.) $\varrho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (кардиоида); в.) $a \cos \varphi \leq \varrho \leq a(\cos \varphi + \sin \varphi)$; $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; г.) $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; $\frac{1}{\varphi} \leq \varrho \leq \frac{1}{\sin \varphi}$; д.) $\varrho \leq (3 + 2 \cos \varphi)$ (когато не са посочени границите на φ се предполага, че φ пробягва интервал с дължина 2π); е.) $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varrho \leq \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (параболичен сегмент). ж.) Лицето на областта, заградена от линията $\varrho^2 + \varphi^2 = 1$.

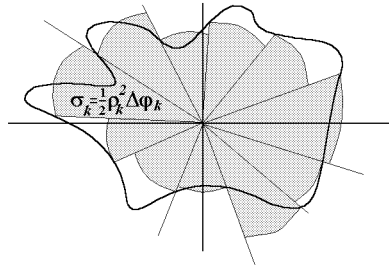
Решение на 13.7.1 ж.). Тъй като $\varrho^2 + \varphi^2 \leq 1$, то $\varphi^2 \leq 1$; $-1 \leq \varphi \leq 1$. За всяко фиксирано φ имаме $\varrho^2 \leq 1 - \varphi^2$ и тъй като $\varrho \geq 0$ то $0 \leq \varrho \leq \sqrt{1 - \varphi^2}$. Следователно $\sigma(S) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \varphi^2) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - \varphi^2) d\varphi = \frac{1}{3}$.

13.7 Да предположим, че контурът на областта G е зададен с параметрични уравнения: $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$; $t \in [a, b]$. От връзката между декартови и полярни координати имаме $\varrho^2 = x^2 + y^2 = g^2 + h^2$ и $\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{h}{g}$. Ако сега в интеграла $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi) d\varphi$ извършим смяната $x = g(t)$ (тогава разбира се ще имаме $y = h(t)$) ще получим последователно $\varrho^2 = g^2 + h^2$ и $d\varphi = d \arctg \frac{y}{x} = (\arctg \frac{h(t)}{g(t)})' dt$. Тъй като

$$d\varphi = \left(\arctg \frac{h(t)}{g(t)} \right)' dt = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{g^2}} \frac{h'g - hg'}{g^2} dt = \frac{h'g - hg'}{h^2 + g^2} dt$$

получаваме формулата $\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_a^b (h'g - hg') dt = \frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y) dt$.

Ще отбележим, че за произволни области тези разсъждения трябва да се доуточнят; впрочем това са технически подробности - с тази формула може да се пресмята лицето на произволна област, на която контурът и е затворена линия с параметрични уравнения от типа, посочен в началото на 13.7. Ще отбележим в допълнение, че изразът $\frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y) dt$ е положителен само когато областта се "обхожда" по направление на растенето на φ .



Фиг. 2.13

В нашия случай това е против часовниковата стрелка, както е показано на горната рисунка. Разбира се, досадно е всеки път да се съобразява как се обхожда контурът на G в зависимост от вида параметричните уравнения. Но за да се пресметне лицето това не е необходимо: интегралът $\frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y) dt$ дава лицето с точност до знак. Тоест абсолютната му стойност е равна на лицето на G . Това означава, че пресмятате интеграла $\frac{1}{2} \int_a^b (xy' - x'y) dt$ и вземате знак плюс.

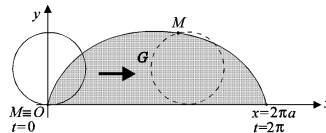
13.7.1 а.) Да разгледаме областта G , която е ограничена от кривата

$$\gamma = \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

(циклоида) и интервала $\gamma' = [0, 2a\pi]$. Можем да напишем параметричните уравнения на този интервал.

Те имат вида $x = \varphi(t)$, където φ е *например* функцията $\varphi(t) = a(4\pi - t)$; $t \in [2\pi, 4\pi]$, а $y(t) = 0$. Казваме "например", защото няма значение точно коя функция е φ - наистина, от $y = 0$ следва, че върху отсечката $[0, 2a\pi]$ изразът $xy' - x'y$ е тъждествено нула.

Значи $\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} (xy' - x'y) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - x'y) dt + \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} (xy' - x'y) dt$, и тъй като за $t \in [2\pi, 4\pi]$ $y = 0$, то $\int_{2\pi}^{4\pi} (xy' - x'y) dt = 0$. Окончателно $\sigma(G) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - x'y) dt = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (t \sin t - \sin^2 t - (1 - \cos t)^2) dt$. След пресмятането на този интеграл се получава $-3\pi a^2$ и от горната забележка следва, че лицето на областта е равно на $3\pi a^2$. Кривата, която загражда тази област се нарича, както споменахме по-горе циклоида и представлява траекторията на точка от окръжност с радиус a , която се търкаля без хлъзгане по оста Ox (областта е затъмнена):



Пресметнете лицето на областта, ограничена от кривата:

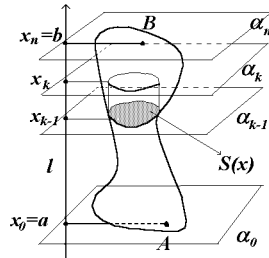
- б.) $\gamma = \begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t^3 \end{cases}, t \in [0, 2];$
 в.) $\gamma = \begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t) \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi];$

$$\begin{aligned} \text{г.) } \gamma &= \begin{cases} x = a \cos t \\ y = \frac{a \sin^2 t}{2 + \sin t} \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]; \\ \text{д.) } \gamma &= \begin{cases} x = \frac{c^2}{a^2} \cos^3 t \\ y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t \end{cases}, \quad (c^2 = a^2 - b^2), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

14. Пресмятане на обеми

Идеята за суми на Риман дава възможност да се пресмятат обеми на пространствени области. Нека G е област в пространството и да изберем някоя ос l , която отъждествяваме с числовата ос. Разглеждаме след това подвижна равнина α , която е перпендикулярна на l (равносилно разглеждаме ортогоналната проекция на G върху l). Да допуснем, че α пресича l във всяко x от някакъв интервал $[a, b]$. Да допуснем също така, че $\forall x \in [a, b]$ е известно лицето $S(x)$ на областта, която отсича от G равнината, която минава през x и е перпендикулярна на l (Рис. 2.13). Тогава за обема $v(G)$ на G имаме $v(G) = \int_a^b S(x) dx$.

Наистина, да разгледаме някое разбиване $\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ на интервала $[a, b]$. Равнините, минаващи през точките x_k разбиват G на слоеве. Ако разбиването е достатъчно дребно, можем да заменим обема на слоя между равнините α_{k-1} и α_k с обема на правия цилиндър с основа $\alpha_{k-1} \cap G$, която има лице $S(x_{k-1})$. Обемът на този цилиндър е $V_k = S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = S(x_{k-1})\Delta x_k$ (Рис. 2.13). Както знаем, ако $S(x)$ е по части непрекъснатата в $[a, b]$, сумите $v_\tau(G) = \sum_{k=1}^n V_k$ имат за граница $\int_a^b S(x) dx$.



Фиг. 2.13

По дефиниция ще считаме, че $v(G) = \lim_{\tau} v_\tau(G) = \int_a^b S(x) dx$. По рано вече обсъждахме целесъобразността на дефиниция от този тип; впрочем това е класическият подход за определяне на обем, лице дължина на дъга и пр.

И така, можем да пресмятаме обеми, ако знаем лицето $S(x)$ за всяко x . Но ние знаем да смятаме лица. Ето няколко примера:

14.1 Да се пресметне обема на пресечен конус, на който основите са елипси с полуоси A, B и a, b , а височината му е равна на h .

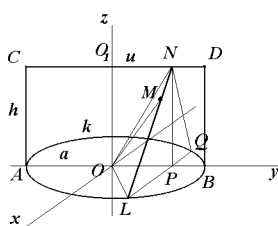
14.1.1 Окръжността k има за център началото на координатната система и радиус a . Върху оста Oy е взет диаметъра AB , а равнината Oyz е фиксирана отсечката CD , която е успоредна и равна на AB и е на разстояние h от нея. От точката N на CD е построен перпендикуляр NP към AB в Oyz , а в равнината Oxy през P е прекаран перпендикуляр към Oy , който пресича k в точките L и Q . Когато N описва CD отсечките NL и NQ описват повърхнина, която се нарича *коноид*. Да се намери обема на коноида с основа k и височина h (Рис. 2.14).

Решение. Ще напишем първо уравнението на коноида. Да положим за тази цел $OP = O_1N = u$. Лесно е да се пресметнат координатите на точките от Рис. 2.14. Наистина

имаме $N(0, u, h)$, $P(0, u, 0)$ и следователно $L(\sqrt{a^2 - u^2}, u, 0)$. Нека $M(x, y, z)$ е произволна точка от LM . Очевидно $\overrightarrow{LM} = t\overrightarrow{LN}$, значи $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + t\overrightarrow{LN}$. Координатният запис е $(x, y, z) = (\sqrt{a^2 - u^2}, u, 0) + t(-\sqrt{a^2 - u^2}, 0, h)$, тоест имаме системата

$$\begin{cases} x = (1 - t)\sqrt{a^2 - u^2} \\ y = u \\ z = th \end{cases}$$

от която трябва да изключим параметрите u и t . Това не е проблем: решаваме последните две уравнения относно u и t и заместваме в първото. Имаме последователно $u = y$, $t = \frac{z}{h}$ и $x = (1 - \frac{z}{h})\sqrt{a^2 - y^2}$. Всъщност това е вече уравнението на (част от) коноида; повдигаме на квадрат и опростяваме, за да получим $x^2h^2 + y^2(z - h)^2 = a^2(z - h)^2$.



Фиг. 2.14

За да намерим обема ще пресичаме коноида с равнини успоредни на Oxy които, разбира се са перпендикулярни на Oz . Тоест тук оста l е Oz . За всяка такава равнина $z = z_0$ е фиксирано. Значи ако положим $z = z_0$ в уравнението на коноида ще получим уравнението на сечението: $x^2h^2 + y^2(z_0 - h)^2 = a^2(z_0 - h)^2$. Разделяме последното уравнение на $a^2(z_0 - h)^2$ и получаваме

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(z_0 - h)^2}{h^2}} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

което е уравнение на елипса с полуоси $\frac{a(h - z_0)}{h}$ и a (да отбележим, че $0 \leq z_0 \leq h$). Лицето на елипса с полуоси p и q е πpq , значи $S(z) = \pi a \frac{a(h - z_0)}{h} = \pi \frac{a^2}{h}(h - z)$. Следователно $V = \pi \frac{a^2}{h} \int_0^h (h - z) dz = \pi \frac{a^2}{h} \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2} \pi a^2 h$, което е точно половината от обема на прав къгов цилиндър със същите основа и височина.

14.1.2 Пресметнете обема на областта, заградена от повърхнините с уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}$, $z = 0$.

Решение. Трябва да пресметнем обема на клина, изрязан от елиптичния цилиндър, изобразен на Рис. 2.15 посредством равнина.

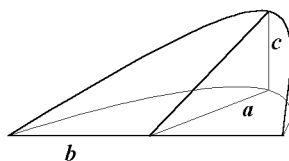


Рис. 2.15

От рисунката се вижда, че тази област има успоредни сечения, които са правоъгълници. Ако фиксираме $z = z_0$ ще получим $x_0 = \frac{az_0}{c}$ и $y^2 = b^2(1 - \frac{x_0^2}{a^2}) = b^2(1 - \frac{z_0^2}{c^2}) = \frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_0^2)$. Значи имаме $|y_0| = \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z_0^2}$, тоест сечението е правоъгълник със страни $2|y_0| = 2\frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z_0^2}$ и $x_0 = \frac{az_0}{c}$. Тъй като $0 \leq x_0 \leq a$, то $0 \leq z_0 \leq c$ и тогава $S(z) = 2\frac{az}{c}\frac{b}{c}\sqrt{c^2 - z^2}$. За обема имаме $V = 2\frac{ab}{c^2} \int_0^c z\sqrt{c^2 - z^2} dz = \frac{2}{3}abc$.

14.1.3 Пресметнете обема на областта, заградена от повърхнините с уравнения

а.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

б.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, z = \pm c$;

в.) $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$;

г.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1$ и

д.) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2$.

14.2 Обемът на областта, получена от ротацията на криволинейния трапец

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

е равен на $\pi \int_a^b f^2(x) dx$, защото $\forall x \in [a, b] S(x) = \pi f^2(x)$ (лице на кръг).

Аналогично обемът на тялото, получено от ротацията на

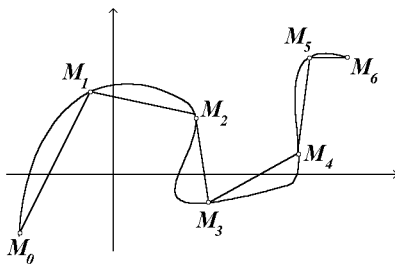
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

е равен на $\pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$ (лице на кръгов пояс).

14.2.1 Пресметнете обема на ротационното тяло а.) $y = b(\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}$; б.) $y = e^{-x}, x \in [1, e]$; в.) $y = 2x - x^2, y = 0$ г.) $x^2 + (y - b)^2 = a^2, 0 < a \leq b$ (тор). Упътване (намерете y като функция на x).

15. Обем на ротационна повърхнина

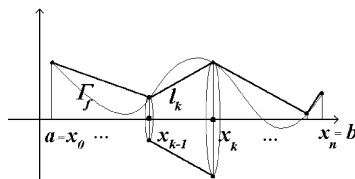
15.0 Нека l е права и γ е линия в равнината. Посредством определен интеграл може да се пресмята лицето на ротационната повърхнина, която се получава от завъртането на γ около l . Естествено, отново работа върши дискретният модел. Разглеждаме разбиране на γ -точките M_0, M_2, \dots, M_6 (Рис. 2.16).



Фиг. 2.16

Нека след това проекцията на M_k върху l е m_k , а разстоянието на M_k до l е r_k (тук отъждествяваме l с числовата ос). Например от завъртането на M_1M_2 около l се получава околната повърхнина на пресечен конус с радиуси на основите r_1 и r_2 и височина $|m_1 - m_2|$. Лесно е да се пресметне, че лицето на получената повърхнина е равно на $\sigma_1 = \pi(r_1 + r_2)|m_1 - m_2|$. Ясно е, че $\sigma_0 + \sigma_2 + \dots + \sigma_6$ е приближение на лицето σ на ротационната повърхнина. Ако сега разгледаме редица от издребняващи разбивания на γ , то границата на съответните лица (ако съществува) е естествено да наричаме лице на ротационната повърхнина.

Не е трудно да се разгледа общия случай, но за да избегнем технически затруднения ще разгледаме ситуацията, когато $l = Ox$, а $\gamma = \Gamma_f$ е график на функцията f в интервала $[a, b]$ (Рис. 2.17). Разбиваме интервала $[a, b]$ посредством възлите $\tau = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$



Фиг. 2.17

и разглеждаме начупената линия с възли в точките $(x_k, f(x_k))$. При ротацията на сегмента l_k около оста Ox се получава пресечен цилиндър с радиуси на основите $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ и образуваща l_k . Лицето на пресечения конус е $\pi(y_{k-1} + y_k)l_k$, където $\forall k$ имаме $y_k = f(x_k)$. За сумата от лицата на пресечените конуси получаваме $\sigma_\tau = \pi \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k)l_k = 2\pi \sum_{k=1}^n y_k l_k + \pi \sum_{k=1}^n (y_{k-1} - y_k)l_k$ (прибавяме и вадим y_k). Тъй като $\max_k |y_{k-1} - y_k| \rightarrow 0$, то лесно се вижда, че $\pi \lim_{\tau} \sum_{k=1}^n (y_{k-1} - y_k)l_k = 0$. Значи $\lim_{\tau} \sigma_\tau = 2\pi \lim_{\tau} \sum_{k=1}^n y_k l_k$. За дължината на сегмента l_k имаме $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$. От теоремата за средните стойности следва, че $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, значи $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k))^2(x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(x_k - x_{k-1})$, където ξ_k е някаква точка от интервала $[x_{k-1}, x_k]$.

Окончателно имаме $\lim_{\tau} \sigma_\tau = 2\pi \lim_{\tau} \sum_{k=1}^n f(x_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(x_k - x_{k-1})$. Остава само да съобразим, че σ_τ е близка до Римановата сума $r(f, \tau) = 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}(x_k - x_{k-1})$ на функцията $g(x) = f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}$. Това е така, защото f е равномерно непрекъснатата, $y_k = f(x_k)$ и $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, откъдето следва, че разликата $|y_k - f(\xi_k)| \rightarrow 0$ равномерно, когато $\max_k |y_{k-1} - y_k| \rightarrow 0$.

И така, $\lim_{\tau} |\sigma_\tau - r(f, \tau)| = 0$, от където следва, че

$$\lim_{\tau} \sigma_\tau = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Тук допускахме, че $f \geq 0$. В общия случай $\sigma(\Gamma_f) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$.

Да предположим, че γ е зададена посредством параметричните си уравнения

$$\gamma: \begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

(забележете, че другите способи да се опише дадена крива са частни случаи). Посредством сходни разсъждения се вижда, че лицето $\sigma(\Gamma)$ на ротационната повърхнина Γ , която се получава от ротацията на γ около някоя права l се дава от израза

$$2\pi \int_a^b d(t, l) \sqrt{g'^2(t) + h'^2(t)} dt,$$

където $d(t, l)$ е разстоянието от точката $(g(t), h(t))$ до правата l .

15.1 Пресметнете лицата на повърхнините, образувани от ротацията на γ около Ox , ако кривата γ има уравнение :

- а.) $y = x\sqrt{\frac{x}{a}}, x \in [0, a]$;
- б.) $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}, |x| \leq b$;
- в.) $y^2 = 2px, 0 \leq x \leq x_0$;
- г.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
- д.) $x^2 + (y - b)^2 = a^2, 0 < a < b$ (лице на тор);

Решение на 15.1 д.): Тази задача може да бъде решена по различни начини. Можем например да разглеждаме окръжността k от Рис. 1.18 като сума от графиците на две функции: $f_+(x) = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ (горната полуокръжност) и $f_-(x) = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ (долната полуокръжност).



Фиг. 2.18

Съответно ще имаме $f'_\pm = -\pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Значи $\sqrt{1 + f'^2_\pm(x)} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ и

$$S = 2\pi \left(\int_{-a}^a f_-(x) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + \int_{-a}^a f_+(x) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \right) = 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

Окончателно получаваме $S = 4\pi^2 ab$. Друг начин да решим тази задача се получава, ако напишем параметричните уравнения на окръжността k : $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b + a \sin t \end{cases}$. Тогава $S =$

$$2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} (b + a \sin t) a dt, \text{ защото } \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = a.$$

- е.) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ и
- ж.) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, |x| \leq b$.

15.2 Тук предлагаме няколко задачи, в които кривата е зададена параметрично или посредством полярни координати. Ще напомним, че ако кривата γ е зададена с равенството $\varrho = f(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]$, то параметричните уравнения на γ са $\begin{cases} x = f(\varphi) \cos \varphi \\ y = f(\varphi) \sin \varphi \end{cases}$

15.2.1 Пресметнете лицето на повърхнината, която се получава от ротацията на

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

а.) около оста Ox ; б.) около оста Oy ; в.) около правата $y = a$.

15.2.2 Пресметнете лицето на повърхнината, образувана от ротацията на кривата

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$$

около правата $y = x$.

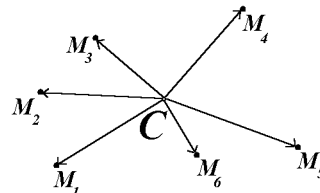
15.2.3 Пресметнете лицето на повърхнината, образувана от ротацията на кривата

а.) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ около полярната ос;

б.) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ около оста $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

16. Приложения на интегралите в механиката

16.1 Център на тежестта. Да напомним, че ако е дадена система материални точки $\mu_n = \{(M_k, m_k)\}_{k=1}^n$ (m_k е масата на M_k), то *център на тежестта* на μ_n се нарича тази точка C , за която $\sum_{k=1}^n m_k \overrightarrow{CM_k} = \vec{0}$. Рис. 2.19 показва как приблизително изглежда центърът на тежестта.



Център на тежестта

Фиг. 2.19

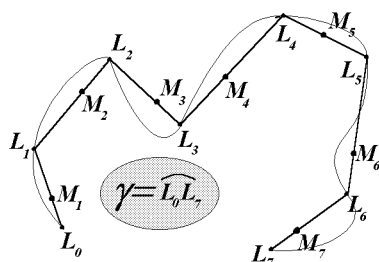
Както е известно, за радиус-вектора на центъра на системата μ_n имаме $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m}(m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OM_n})$, където $m = \sum_{k=1}^n m_k$ е общата маса на системата. В частност, за

координатите (x_C, y_C, z_C) на C имаме $x_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k$, $y_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k$ и $z_C = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k z_k$, където $M_k(x_k, y_k, z_k)$. Когато имаме единични маси, разбира се, $m_k = 1$ и $m = n$.

Нека сега γ е материалната дъга

$$\gamma = \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

и $\tau = \{L_0, L_1, \dots, L_n\}$ е разбиване на γ (Рис. 2.20). Можем да разгледаме начупената линия с върхове $L_k = (x(t_k), y(t_k), z(t_k))$ и да допуснем, че плътността ρ на сегмента $[L_{k-1}, L_k]$ е постоянна и равна на плътността $\rho(\xi_k)$ в някоя точка $(x(\xi_k), y(\xi_k), z(\xi_k))$ от дъгата (L_{k-1}, L_k) .



Фиг. 2.20

Тогава масата m_k на $[L_{k-1}, L_k]$ е равна на $\varrho(\xi_k)|L_{k-1}, L_k|$. Освен това смятаме, че цялата маса е съсредоточена в някоя точка $M_k \in [L_{k-1}, L_k]$. По такъв начин центърът на тежестта S_n на системата материални точки $\mu_n = \{(M_k, m_k)\}_{k=1}^n$ е добра апроксимация на центъра на тежестта C на γ . Няма да разглеждаме подробно граничния преход в този случай - след стандартни разсъждения се получава, че координатите (x_C, y_C, z_C) на центъра на тежестта на γ се оказват равни съответно на

$$x_C = \frac{1}{\alpha} \int_a^b \varrho(t)x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt;$$

$$y_C = \frac{1}{\alpha} \int_a^b \varrho(t)y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt;$$

$$z_C = \frac{1}{\alpha} \int_a^b \varrho(t)z(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

където $\alpha = \int_a^b \varrho(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$ е масата на материалната дъга γ .

16.1.1 Намерете центъра на тежестта на материалната дъга:

а.) $\gamma = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, t \in [0, t_0], \varrho = 1; \\ z = bt \end{cases}$

б.) $\gamma = \begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, t \in [0, t_0], \varrho = kt; \\ z = bt \end{cases}$

в.) $y^2 = 2px, x \in [0, p], \varrho(x) = 1;$

г.) $y^2 = 2px, x \in [0, p], \varrho(x) = x;$

д.) $\gamma = \begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \varrho = 1, t \in [0, 2\pi]; \end{cases}$

е.) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x > 0, y > 0;$

ж.) Докажете първата теорема на Гулден: лицето на повърхнината, образувана от ротацията на плоската линия γ около непресичащата я права l е равно на дължината на γ , умножена с дължината на окръжността, която описва центъра на тежестта на γ (става дума за хомогенна дъга).

Пресметнете с теоремата на Гулден лицето на повърхнината, която се получава от ротацията на линията от подточка д.) около правата $x = 4\pi a$. Същото за в.) и правата $y = p\sqrt{2}$.

16.2 Център на тежестта на равнинни области. Момент от ред k на точката

M спрямо оста l се нарича числото $J_k = d^k m$, където d е разстоянието от M до l , а m е масата на M (Рис. 2.21).

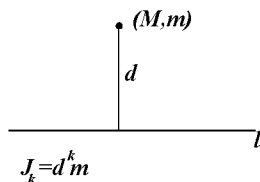
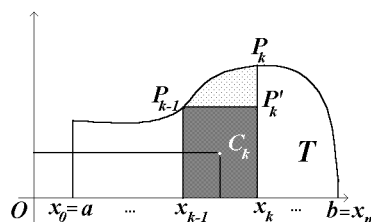


Рис. 2.21

Сумата от моментите на няколко материални точки се нарича момент на системата материални точки. В механиката са от значение моментите J_1 (статични моменти) и J_2 (инерчни моменти). От 16.1 е ясно, че координатите на центъра на тежестта на линията γ са статичните моменти на γ , разделени на масата на γ . От казаното по-горе е ясно как можем да дефинираме съответните моменти на непрекъснати тела - те са граници на суми, които приближават съответния обект.

Ето например как може да се пресметнат статичните моменти на криволинейния трапец T (Рис. 2.22).



Фиг. 2.22

Стандартната процедура действа и в този случай: разглеждаме разбиране $\tau = \{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, b = x_n\}$ и нека $(x_{k-1}, R_{k-1}, P_k, x_k)$ е вертикалната ивица, която правите $x = x_{k-1}$ и $x = x_k$ изрязват от T . Заменяме я с правоъгълника $\Pi_k = (x_{k-1}, P_{k-1}, P'_k, x_k)$ с основа $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и височина $y_k = f(x_{k-1})$. След това заменяме правоъгълника с центъра на тежестта му C_k с маса $y_k \Delta x_k$ (или $\rho(x_{k-1}) y_k \Delta x_k$, ако е зададена плътност $\rho = \rho(y)$).

Разстоянието от C_k до Ox е $\frac{1}{2} y_k$, а до Oy е $x_{k-1} + \frac{1}{2} \Delta x_k \approx x_{k-1}$. Значи $J_1^x = \frac{1}{2} y_k^2 \Delta x_k$ (или $J_1^x = \frac{1}{2} \rho(y_k) y_k^2 \Delta x_k$) е статичния момент на Π_k спрямо Ox и съответно $J_1^x = x_{k-1} f(x_{k-1}) \Delta x_k$ (или $J_1^x = \rho(y_k) x_{k-1} f(x_{k-1}) \Delta x_k$). Сумата на тези моменти е Риманова сума съответно на

функциите $\frac{1}{2} f^2(x)$ и $x f(x)$, така че за криволинейния трапец T имаме $J_1^x(T) = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx$ и

$J_1^y(T) = \int_a^b x f(x) dx$. Координатите x_C и y_C на центъра на тежестта C на T сега се получават

от равенствата $x_C = \frac{J_1^y(T)}{S(T)}$ и $y_C = \frac{J_1^x(T)}{S(T)}$, където $S(T) = \int_a^b f(x) dx$ е лицето на T . По общо,

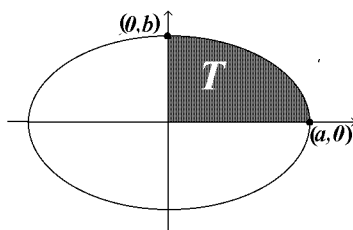
ако $T = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$, то $J_1^x(T) = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx$, $J_1^y(T) = \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx$ и

$S(T) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$. Ако плътността на съответното тяло е дадена с правилото $\rho =$

$\rho(x)$, то съответните формули изглеждат така: $J_1^x(T) = \frac{1}{2} \int_a^b \rho(x)(f^2(x) - g^2(x)) dx$, $J_1^y(T) = \int_a^b x \rho(x)(f(x) - g(x)) dx$ и $S(T) = \int_a^b \rho(x)(f(x) - g(x)) dx$.

16.2.1 Намерете центъра на тежестта на четвърт елипса:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right.$$

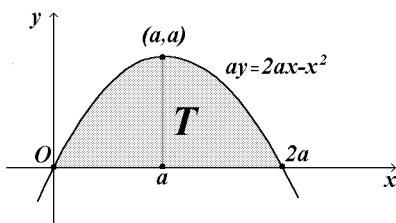


Фиг. 2.23

Решение: Имаме $J_1^x = \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{2a^2} (a^3 - \frac{1}{3}a^3) = \frac{ab^2}{3}$ и $J_1^y = \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{b}{2a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} d(a^2 - x^2) = \frac{a^2 b}{3}$. Тъй като лицето на елипсата е πab , то $S(T) = \frac{1}{4} \pi ab = \frac{\pi ab}{4}$ и $x_C = \frac{J_1^y(T)}{S(T)} = \frac{\frac{a^2 b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}$, аналогично $y_C = \frac{4b}{3\pi}$. Пресметнете инерчните моменти на същото тяло.

16.2.1.2* Намерете координатите на центъра на тежестта на осминка елипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

16.2.2 а.) Пресметнете координатите на центъра на тежестта на параболичния сегмент T , ограничен от кривите $ay = 2ax - x^2$ ($a > 0$) и $y = 0$ (Рис. 2.24).



Фиг. 2.24

б.) Намерете инерчните моменти J_2^x и J_2^y на T и пресметнете радиусите на инерция r_x и r_y ; т.е. числата, определени от от съотношенията

$$J_2^x = S(T)r_x^2 \quad ; \quad J_2^y = S(T)r_y^2,$$

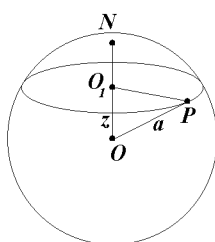
където $S(T)$ е лицето на сегмента.

16.2.3 а.) Пресметнете координатите на центъра на тежестта на кръговия сегмент $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y \geq b$ ($0 \leq b < a$);

б.) Пресметнете координатите на центъра на тежестта на елиптичния сегмент $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, $0 \leq p \leq y \leq b$.

16.2.4 Пресметнете координатите на центъра на тежестта на полукълбото $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$.

Решение: Тъй като Oz е ос на симетрия, то центърът на тежестта C има координати $(0, 0, z_C)$. Нека $0 \leq z \leq a$, $OO_1 = z$ където O е центърът на кълбото (Рис. 2.25). Равнината, която минава през O_1 и е перпендикулярна на $ON = Oz$ пресича кълбото по кръг с радиус $O_1P = \sqrt{a^2 - z^2}$, то можем да съсредоточим масата му (πO_1P^2) в центъра на тежестта O_1 . Значи е достатъчно да намерим центъра на тежестта на материалната отсечка $ON = [0, a]$, върху която е дадена плътността $\rho(z) = \pi(a^2 - z^2)$. За статичния момент имаме $J_1^z = \int_0^a z\rho(z) dz = \pi \int_0^a z(a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^4}{4}$. От друга страна обемът на полукълбото е $\frac{2}{3}\pi a^3$. Частното на тези два израза дава $z_C = \frac{3}{8}a$.



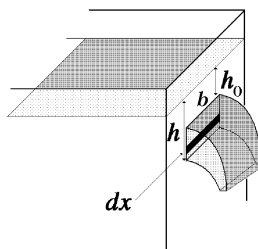
Фиг. 2.25

16.2.4.1 Пресметнете координатите на центъра на тежестта на сферичния пояс $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $b \leq z \leq c$.

16.2.5 Пресметнете координатите на центъра на тежестта на пресечен конус с височина h и основи a и b .

16.2.6 Пресметнете координатите на центъра на тежестта на коноида от Пример 14.1.1.

Пример Както вече споменахме в предходния текст, интегралното смятане има разнообразни приложения в различни области на естествознанието. В този пример ще разгледаме резервоар запълнен с вода, в стената на който е изрязан хоризонтален отвор с формата на правоъгълник на разстояния h_0 и h от нивото на водата и ширина b .



Поставяме си за задача да определим разхода на вода, тоест количеството течност, което изтича за единица време. За да я решим ще използваме формулата на *Торичели*, съгласно която на дълбочина x водата изтича със скорост $\sqrt{2gx}$, където g земното ускорение на морското ниво.

В този случай *от елементарната ивица*, която е разположена на разстояние x от нивото на водата, и има височина dx и ширина b за единица време ще изтича $dQ = \sqrt{2gxb} dx$ вода (забележете, че в тези разсъждения предполагаме, че през *малката* ивица водата изтича *равномерно*). Сега му е времето да поясним, че би трябвало да образуваме сумите на Риман за интервала $[h_0, h]$ и поради хипотезата, че скоростта на изтичане е непрекъснатата функция (и, разбира се, *по части монотонна*), те са сходящи към съответния интеграл. В

инженерната литература обаче се разсъждава още по - директно: интегрираме равенството $dQ = \sqrt{2gxb} dx$ (тоест виждаме, че $Q(x)$ е обща примитивна на $\sqrt{2gxb} dx$) и получаваме $Q = \sqrt{2gb} \int_{h_0}^h \sqrt{x} dx$; значи $Q = \frac{2}{3} \sqrt{2gb} \left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}} \right)$. При $h_0 = 0$ се получава формула за разхода на вода през правоъгълен водосток: $Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2gb} h^{\frac{3}{2}}$, където μ е емпиричен коефициент, който внася поправка за сметка на вискозитета (вътрешното триене) на конкретната течност. В заключение ще отбележим, че посредством такива несложни разсъждения може да се прави модел на по - комплексни явления. Представете си например, че g *също се променя* (да речем, като функция на x).