УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ
Катедра "МАТЕМАТИКА"

**Елементарни диференциални уравнения**
Записки на лекции по Анализ за специалността "Архитектура"

доц. д-р Владимир Тодоров

София, 2004 г.

**Диференциални уравнения.**

Често явленията и процесите, които ни заобикалят се описват посредством функция или набор от функции. При това от най - общи принципи понякога се получават определени зависимости между въпросните функции и някои от техните производни. Ще напомним, че производнатата на дадена функция представлява скоростта на процеса, който описваме.

**1.0** Процесите, които описваме могат да бъдат от най - различен тип. Нека например $f(t)$ е броя на индивидите от дадена популация, които са заразени от конкретна болест. Ясно е, че скоростта, с която се разпространява заболяването е толкова по - голяма, колкото повече са заразоносителите (т.е. - заболелите в момента $t$). С други думи, *количеството заболели е пропорционално* на скоростта на разпространение на заболяването. Тъй като скоростта на всеки процес е производната на функцията, която го описва, то можем да запишем горното разсъждение така:

**(de1)**
$$f'(t) = \lambda f(t),$$

където $\lambda$ е някакъв коефициент на пропорционалност. Оказва се, че лесно можем да открием от какъв тип е функцията $f$. Наистина, да положим $g(t) = f(t)e^{-\lambda t}$. Тогава $g'(t) = f'(t)e^{-\lambda t} + f(t)\left(e^{-\lambda t}\right)'$ и от **(de1)** получаваме $g'(t) = \lambda f(t)e^{-\lambda t} - f(t)\lambda e^{-\lambda t} \equiv 0$. От основната теорема на интегралното смятане следва, че $g$ е константа; т.е. $g(x) = c$ за някое число $c$ и *всяко* $x$, когато $x$ описва някой интервал. Значи $f(t)e^{-\lambda t} = c$ и съответно $f(t) = ce^{\lambda t}$.

Това е забележително, защото от съвсем елементарни предпоставки успяхме да открием аналитичната закономерност, на която се подчинява (поне в началото си) всяка епидемия. Константите $c$ и $\lambda$ се определят от конкретните свойства на процеса.

**1.1** Уравнението **(de1)** се нарича *диференциално уравнение* (ДУ). Нестрого казано, *диференциално уравнение* се нарича всяко равенство, което съдържа неизвестна функция и нейните производни.

Но например уравнението $f'(t) = f(f(t))$ *не е* диференциално уравнение; би били по - правилно да се каже, че то е *функционално - диференциално* уравнение.

В този раздел ще покажем как се решават уравнения от няколко конкретни вида, които са от значение за курса по механика.

В тази връзка ще отбележим, че решаването на най - простия тип уравнения: $y' = f(x)$ се нарича *пресмятане на неопределен интеграл.* Както знаем, това уравнение има безброй много решения.

**1.1.0** Възможно е читателят да не одобри "изкуствения" похват с който решихме горната задача. Наистина, не беше обяснено как да се досещаме за метода, по който да решаваме уравнения от типа **(de1)**. Те обаче са типични за теорията на диференциалните уравнения, която си има и специфична терминология. Така например решението на дадено уравнение често се нарича негов *интеграл*, първо, защото решаването на диференциални уравнения си е обобщение на действието интегриране и второ, защото решенията често се получават като резултат от интегрирането на различни функции. Понякога се казва също, че е получено посредством *квадратури.*

**1.1.1** От друга, страна за да опишем съвкупността на *всички решения* на дадено ДУ е достатъчно да използваме основната теорема на интегралното смятане. Ето още един конкретен пример.

**1.1.2** Да разгледаме уравнението

$$\textbf{(sv)} \qquad y'(x) = f(y(x))g(x).$$

То може да бъде решено по следния начин. Да означим с $F(y)$ някоя обща примитивна на функцията $\frac{1}{f(y)}$. С други думи, $F$ е непрекъсната и $F'(y) = \frac{1}{f(y)}$ за всички освен евентуално краен брой стойности на $y$. Нека освен това $G(x)$ е ОП на $g(x)$. Сега да отбележим, че ако $y(x)$ е решение на **(sv)** и $H(x) = F(y(x))$, то $H'(x) = G'(x)$. Следователно за някоя константа $c$ е изпълнено $F(y) = H(x) + c$. От тук можем да намерим решението $y(x)$ като открием обратната функция на $F$ в тези интервали, в които това е възможно.

Горните разсъждения узаконяват следните действия за решаването на **(sv)**. Записваме **(sv)** по следния начин: $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$ и го разделяме на $\frac{f(y)}{dx}$. Получава се равенството $\frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx$, което след това интегрираме. Тогава решението се записва с квадратури $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)\,dx + c$. Ето няколко примера:

**1.1.3 (а)** Решете уравнението: $y'(x) = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$.

**Решение:** Записваме уравнението по следния начин $\frac{dy}{\operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} x\,dx$; $\operatorname{ctg} y\,dy = -\operatorname{tg} x\,dx$ и след това интегрираме: $\int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = -\int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$. Внасяме в диференциалите $\cos y$ и $\sin x$ и получаваме $\int \frac{1}{\sin y}\,d\sin y = \int \frac{1}{\cos x}\,d\cos x + C$; $\ln|\sin y| = \ln|\cos x| + C$. Сега да отбележим, че *всяко число* може да бъде записано като логаритъм от някое друго число. Значи вместо константата $C$ можем да напишем $\ln c$. Тогава получаваме $\ln|\sin y| = \ln c|\cos x|$; $|\sin y| = c|\cos x|$ и $y(x) = \pm\arcsin(c\cos x)$.

Решете по същия начин уравненията:

**(б)** $\frac{dy}{dx} = -x\frac{1+y^2}{1+x^2}$;

**(в)** $y' = \frac{ye^x}{1+e^x}$ и

**(г)** $(1+y^2)\,dx - (2y + \sqrt{1+y^2})(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\,dy = 0$.

**1.2 Линейни диференциални уравнения от първи ред** Всяко такова уравнение има вида

$$\textbf{(lde-1)} \qquad y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Ще преполагаме, че функциите $a$ и $b$ са в на - общия случай по части монотонни, а решението $y$ е обобщена примитивна. Тоест равенството **(lde-1)** е изпълнено за всички освен евентуално краен брой стойности на $x$. Може да се каже, че множеството от решения на дадено диференциално уравнение се получава като следствие от основната теорема на интегралното смятане.

Уравнението **(lde-1)** се нарича линейно диференциално уравнение от първи ред, защото в него производната $y'$ на търсената функция $y'$ е линейна функция по отношение на $y$. За да решим **(lde-1)** първо предполагаме, че $b = 0$. Тогава **(lde-1)** е от вида $y' = -a(x)y$. Това уравнение се решава по начин, който прилича на разгледаните по - горе разсъждения. Именно полагаме $g(x) = y(x)e^{A(x)}$, където $A(x)$ е *някоя примитивна* (или ОП) на $a$. С други думи $A(x) = \int a(x)\,dx$. По - нататък пресмятаме

$$g'(x) = y'(x)e^{A(x)} + y(x)\left(e^{A(x)}\right)';$$

и след това последователно $g' = y'e^A + y(A)'e^A$ и тъй като $y' = -ay$ и $A' = a$, то $g(x) = -aye^A + yae^A \equiv 0$. Следователно $g$ е константа: $g(x) = c$ за всяко $x$. От тук получаваме, че $y(x)e^{A(x)} = c$; $y(x) = ce^{-A(x)}$, където $A$ е някоя примитивна на $a$. С други думи всяко решение има вида

$$y(x) = ce^{-\int a(x)\,dx}.$$

След това решаваме уравнението **(lde-1)**, като търсим решението му във вида $y(x) = u(x)e^{-A(x)}$, където $u$ е нова неизвестна функция и $A$ е както по - горе. Заместваме $y$ в **(lde-1)** и получаваме $u'e^{-A} - uA'e^{-A} + aue^{-A} = b$; $u'e^{-A} - uae^{-A} + aue^{-A} = b$ и значи $u'e^{-A} = b$. Получаваме последователно $u'(x) = b(x)e^{A(x)}$ и $u(x) = C + \int b(x)e^{A(x)}\,dx$, където $C$ е някаква константа. Окончателно всяко решение на **(lde1)** изглежда по следния начин:

**(gs)**
$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx}\left(C + \int b(x)e^{\int a(x)\,dx}\,dx\right)$$

Израз, който дава всички решения на дадено диференциално уравнение се нарича *общо решение* на това уравнение.

**1.3** Решете уравненията: **(а)** $y' = \frac{y}{x}$; (б) $y'\cos x = y\sin x$; (в) $y' = y^n$ (съставете уравнение за обратната функция на $y$).

**1.1.3 (а)** Да разгледаме уравнението $y' + y\cos x = \cos x\sin x$. Съгласно **(gs)** за решението имаме $a(x) = \cos x$ и $b(x) = \cos x\sin x$. За да напишем решението е достатъчно да пресметнем $\int a(x)\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x$ и $\int b(x)\,dx = \int \cos x\sin x e^{\sin x}\,dx$. За да пресметнем втория интеграл извършваме смяната $u = \sin x$. Интегралът приема вида $\int ue^u\,du$, който след интегриране по части (внасяме в $du$ $e^u$) дава $\int ue^u\,du = ue^u - e^u$; значи $\int \cos x\sin xe^{\sin x}\,dx = \sin xe^{\sin x} - e^{\sin x}$.

Окончателно за решението на нашето уравнение се получава

$$y(x) = e^{-\sin x}\left(C + \sin xe^{\sin x} - e^{\sin x}\right) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1.$$

Да отбележим, че както и следва да се очаква, решенията са безброй много и по различни причини можем да избираме конкретни решения. Например можем да поискаме да намерим такова решение $\tilde{y}$ на уравнението от **(а)**, че да е изпълнено равенството $\tilde{y}(0) = 100$. За да го намерим, заместваме в общото решение $y$ със 100, а $x$ с 0. Ще се получи

$$100 = \tilde{y}(0) = Ce^{-\sin 0} + \sin 0 - 1 = C - 1.$$

Значи $C = 101$ и $\tilde{y}(x) = 101e^{-\sin x} + \sin x - 1$. В този случай ще казваме, че сме решили *задачата на Коши* за уравнението от **(а)**. За упражнение намерете това решение на същото уравнение, за което $y(0) = -1$.

Решете уравненията:

**(б)** $y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(x+1)^n$;

**(в)** $x(x-1)y' + (1-2x)y + x^2 = 0$ **Упътване:** Разделяме уравнението на $x(x-1)$; тогава $a(x) = \frac{1-2x}{x(x-1)}$, а за да пресметнете $\int a(x)\,dx$ трябва да съобразите, че $\frac{1-2x}{x(1-x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}$;

**(г)** $y' - \frac{2}{x}y = x^4$;

**(д)** $(1+x^2)y' + xy = \frac{1}{1+x^2}$ и

**(е)** $(1+y)^2\,dx = (\operatorname{arctg} y - x)\,dy$ **Упътване:** По - обща гледна точка при решаването на ДУ се състои в схващането, че *решение* на дадено ДУ е *всяка функционална зависимост* между променливите $x$ и $y$. В частност, считаме, че сме решили дадено ДУ, ако открием не неизвестната функция $y$, а нейната обратна $x$; или изобщо някоя връзка между променливите $x$ и $y$.

В дадения случай уравнението е записано в симетрична форма (относно $x$ и $y$) и не е трудно да се съобрази, че вероятно ще е по - добре да считаме, че $x$ е *неизвестната функция*, а $y$ е аргумента и.

Тогава получаваме $\frac{dx}{dy} + \frac{1}{1+y^2}x = \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2}$. Като резултат ще получим *обратната* функция $x(y)$ на неизвестната функция $y(x)$: $x(y) = Ce^{-\operatorname{arctg} y} + \operatorname{arctg} y - 1$.

**1.4 Пример** В най - общия си вид задачата за движение на материална точка по дадена крива под действието на силата $mf(s)$ се свежда до откриването на функцията $s(t)$ (на изминатия път) от уравнението

**(de2)** $$s'' = f(s)$$

То е от *втори* ред, защото съдържа втората производна на търсената функция. За да решим това уравнение, първо пресмятаме някоя примитивна на $f$: $F(s) = \int f(s)\, ds$; значи $F'(s) = f(s)$. След това умножаваме уравнението $s'' = F'(s) = f(s)$ с $2s'$: $2s's'' = 2F'(s)s'$. Да забележим, че дясната част е производна на сложната функция $2F(s(t))$, а лявата - на функцията $s'^2(t)$. От основната теорема на интегралното смятане получаваме, че $s'^2(t) = 2F(s(t)) + c$, където $c$ е някаква константа. Значи $s' = \sqrt{2F(s) + c}$.

Ясно е, че от последното равенство не може да се открие направо $s$ като функция на $t$, но можем да потърсим обратната функция $t = t(s)$. Тогава $s'_t = \frac{1}{t'_s}$ и за неизвестната функция $t$ на $s$ получаваме

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2F(s) + c}}$$

и след интегриране спрямо $s$ се получава

$$t(s) = \int \frac{ds}{\sqrt{2F(s) + c}} + c_1,$$

където $c_1$ е нова константа на интегриране.

**1.5 Задача** Решете уравненията $s'' + \omega^2 s = 0$ и $s'' = \frac{m}{s^2}$.

**1.6** Да разгледаме греда $B$, която е разположена на оста $Ox$ в участъка на интервала $[a, b]$ и е закрепена в точките $a$ и $b$. Предполагаме освен това, че във всяка точка $x \in [a, b]$ върху $B$ деиства вертикална сила, равна на $F(x)$. Задачата, която си поставяме е да определим *формата*, която приема $B$ в резултат на натоварването. Ако приемем, че $B$ приема формата на графика $\Gamma_f$ на някоя функция $y = f(x)$, то от законите на механиката следва, че $y$ трябва да е решение на уравнението $\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = F(x)$.

Пресметнете огъването на греда, която е разположена в участъка $[0, 1]$, на която действа силата $F(x) \equiv 1$ (Упътване: ако положим $u(x) = y'(x)$, то получаваме уравнение за $u$, което е от вида 1.1.2).

## 2. Линейни уравнения с постоянни коефициенти

Различни явления се описват от така наречените *линейни* диференциални уравнения (ЛДУ). Казано нестрого, *линейно* е всяко диференциално уравнение, в което неизвестната функция и производните и са от първа степен (понякога казват, което е линейно относно неизвестната функция и нейните производни). Например **(lde-1)** е линейно уравнение от първи ред. Разбира се, можем да образуваме израз, подобен на **(lde-1)**, в които участват производни от по - висок ред на неизвестната функция. Функциите $a(x)$ и $b(x)$ се наричат *коефициенти* на **(lde-1)**.

Разбира се, по аналогия ще наричаме функциите $a_k$, $k = 0, \dots, n-1$ и $b(x)$ *коефициенти* на уравнението

**(lde-n)** $$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

което ще наричаме линейно (диференциално) уравнение от $n-$ти ред.

**2.1** Линейните уравнения са от значение за изучаване на явления от различни раздели на физиката. Ще допълним общата представа как се използват ДУ за изследването например на най - простите механични колебания. Става дума за материална точка с маса $m$, която се движи по протежение на оста $Ox$, при което е свързана с началото посредством еластична сила. Тогава големината на "връщащата" еластична сила е пропорционална на отклонението $x$; тоест равна е на $-kx$, където $k$ е положителна константа, а знакът минус показва, че силата винаги е насочена към началото на координатите. След това да предположим че освен това съществува и сила на триене, която е пропорционална на скоростта $x'$ и насочена, разбира се, в противоположна на скоростта посока; при тези условия силата на триене се измерва с израза $-rx'$, където $r$ е положителна константа (коефициентът на триене).

И накрая ще разгледаме по - общата ситуация, в която действува и външна сила, зададена като функция на времето $f(t)$. При тези условия от основния закон на Нютон следва, че произведението на масата $m$ и ускорението $x''$ трябва да е равнодействаща на сумата от останалите сили - еластичната сила, силата на триене и външната сила. Това се изразява посредством следното уравнение:

$$mx'' + rx' + kx = f(t),$$

което описва движението $x(t)$ на материалната точка. Това уравнение се нарича *уравнение на колебанията*, въпреки, че то съвсем не винаги описва колебателни процеси. Следва да отбележим, че горното уравнение описва различни други неща - то описва значително по точно поведението на трептящ кръг и различни други явления от електротехниката.

**2.2** В общия случай уравнението (когато коефициентите са функции) уравнението **(lde-n)** не може да бъде решено в квадратури. Например уравнението $xy'' - y' + xy = 0$, коефициентите на което са съвсем прости функции, не може да бъде решено в квадратури. Когато обаче коефициентите на лявата част са константи, то има алгоритъм, който дава решението на **(lde-n)** при произволна ПМ функция $b(x)$. Ще го опишем въпросния алгоритъм за уравнения от втори ред. Впрочем, разсъжденията, които излагаме в следващия текст са в сила и за уравнения с постоянни коефициенти от *произволен* ред.

**2.3** И така, за да решим уравнението $y'' + py' + qy = f(x)$, където $p$ и $q$ са константи, първо решаваме *хомогенното* уравнение $y'' + py' + qy = 0$, което се получава от него. Хомогенните уравнения се решават по следния начин:

Първо съставяме алгебричното уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (то се нарича *характеристично уравнение* на съответното ЛДУ), което се получава след като заменим действието диференциране със степенуване. За него са възможни три случая:

**(а)** Уравнението $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ има два реални и различни корена $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - ясно е, че в този случай за дискриминантата му $D = p^2 - 4q$ имаме $D > 0$. Проверете, че тогава функциите $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ са решения на $y'' + py' + qy = 0$. Може след това да се докаже, че *всяко друго решение* $y$ на $y'' + py' + qy = 0$ се изразява посредством $y_1$ и $y_2$ по следния начин: съществуват константи $c_1$ и $c_2$, за които $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

**(б)** Уравнението $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ има два комплексни и различни корена $\lambda_1 \neq \lambda_2$ - ясно е, че в този случай за дискриминантата му $D = p^2 - 4q$ имаме $D < 0$. Да отбележим, че ако $p$ и $q$ са реални, то $\lambda_1$ и $\lambda_2$ са спрегнати $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Проверете, че в този случай функциите $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ са решения на $y'' + py' + qy = 0$. Както и в (а), *всяко друго решение* се получава по следния начин: съществуват константи $c_1$ и $c_2$, за които $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

**(в)** Остана да разгледаме случая $D = 0$. Тогава уравнението $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ има един двоен корен $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Проверете, че в този случай решения са функциите $y_1(x) = e^{\lambda x}$ и $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. Отново *всяко друго решение* $y$ се получава от израза $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

**2.4** Функциите $y_1$ и $y_2$ от 2.3 се наричат *фундаментална система решения* на уравнението $y'' + py' + qy = f(x)$. Ако дясната част на това уравнение не е тъждествено нула, то можем да открием (следвайки Лагранж) някое решение $\eta(x)$ на това уравнение по следния начин: търсим $\eta(x)$ във вида $y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, където $y_1$ и $y_2$ са фундаменталната система решения на хомогенното уравнение $y'' + py' + qy = 0$, а $u_1$ и $u_2$ са неизвестни засега функции. Техните производни могат да бъдат открити от следната алгебрична система:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases},$$

за която може да се докаже, че *има единствено решение* при всяка стойност на $x$. По този начин получаваме производните $u_{1,2}'(x)$ на неизвестните функции, които след това могат да бъдат открити с интегриране. Накрая можем да напишем общото решение на уравнението $y'' + py' + qy = f(x)$: всяка функция, която е негово решение може да бъде записана по следния начин: $y(x) = \eta(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ при някой избор на константите $c_1$ и $c_2$.

**2.5 Примери** В 2.4 и 2.4 изложихме *алгоритъма* (или начина), по който се решават уравнения от втори ред с постоянни коефициенти. Читателят може да се убеди, че функциите $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са решения на съответното хомогенно уравнение във всеки един от случаите, като ги замести в уравнението и извърши елементарна проверка. Другите твърдения (например, че всяко друго решение е $c_1 y_1 + c_2 y_2$) би трябвало да бъдат доказани, но това не влиза в целите на тези лекции. Важното е читателят да разбере как работи алгоритъмът за получаване на решенията на уравнението $y'' + py' + qy = f(x)$, а също така да може да го прилага за решаването на някои основни приложни задачи.

**2.5.1** Да разгледаме уравнението $y'' - 3y' + 2y = 0$. За да получим характеристичното му уравнение заместваме действието диференциране със степенуване, тоест вместо втора производна пишем *втора степен* (на $\lambda$), първата производна се замества с първа степен, а функция $y$, която се схваща като *производна от нулев ред* се замества с $\lambda^0 = 1$. Така получаваме алгебричното уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. То има решения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. От казаното по - горе следва, че функциите $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{2x}$ образуват фундаментална система решения. *Всяко друго решение* $y(x)$ на нашето уравнение има вида $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$, където $c_1$ и $c_2$ са подходящо избрани константи.

**(а)** Нека да видим как изглежда (ако има такова) това решение $y$, за което $y(0) = 0$, а $y'(0) = 1$. Да отбележим, че можем да поставяме две условия за общото решение, защото то зависи от две (в нашия случай) произволни константи. В случая, който се разглежда имаме $0 = y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^{2.0} = c_1 + c_2$. След това от $y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$ и условието $y'(0) = 1$ получаваме $1 = c_1 + 2c_2$. Значи получаваме системата

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases},$$

която има решения $c_1 = -1$ и $c_2 = 1$. Значи решението на задачата на Коши е $y(x) = e^{2x} - e^x$. Намерете за упражнение това решение $y$, за което $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$.

**(б)** Тъй като общото решение зависи от две константи, то можем да поставяме *две* условия за общото решение, които могат да имат твърде общ характер. Едно важно за практиката условие е да поискаме решението да има отнапред зададени стойности при две стойности на аргумента - това е така наречената *гранична задача*. Нека да видим например дали горното уравнение има решение $y$, за което $y(0) = 0$ и $y(\ln 2) = 1$. За тази цел заместваме $x$ с 0 и $\ln 2$ в общото решение: $y(0) = c_1 + c_2$ и $y(\ln 2) = c_1 e^{\ln 2} + c_2 e^{2\ln 2}$; $y(\ln 2) = 2c_1 + 2c_2$. Получаваме системата

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 1 \end{cases},$$

която има решения $c_1 = -\frac{1}{2}$ и $c_2 = \frac{1}{2}$. Значи решението на граничната задачата е $y(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^x)$. Намерете за упражнение това решение $y$, за което $y(0) = 1$ и $y(2) = 0$.

**(в)** След като знаем да решаваме хомогенното уравнение $y'' - 3y' + 2y = 0$, можем да решаваме и уравнението $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ за всяка ПМ функция $f$. За тази цел съставяме системата

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0 \\ u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} = f(x) \end{cases},$$

Тя има решение $u_1'(x) = -f(x)e^{-x}$, $u_2'(x) = f(x)e^{-2x}$. Съответно $u_1(x) = -\int f(x)e^{-x}\,dx$ и $u_2(x) = \int f(x)e^{-2x}\,dx$. За общото решение на уравнението $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ сега получаваме израза $y(x) = (c_1 + u_1(x))e^x + (c_2 + u_2(x))e^{2x}$, където $c_1$ и $c_2$ са произволни константи.

**(г)** Решете уравненията $y'' - 3y' + 2y = 1$; $y'' - 3y' + 2y = e^x$; $y'' - 3y' + 2y = x$ и $y'' - 3y' + 2y = \sin x$. За всяко от тях намерете това решение $y$, за което $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

**2.5.2** По същия начин, за да решим уравнението $y'' - 2y' + 2y = 0$ съставяме характеристичното му уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$. Неговите решения са $\lambda_1 = 1 - i$ и $\lambda_2 = 1 + i$. Тук сме в ситуацията от 2.3 (б). Имаме съответно $\alpha = \beta = 1$ и значи фундаменталната система решения е $y_1(x) = e^x \cos x$ и $y_1(x) = e^x \sin x$. С други думи *всяко решение* $y$ на $y'' - 2y' + 2y = 0$ има вида $y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$, където $c_1$ и $c_2$ са произволни константи.

**(а)** Напишете това решение $y$ на $y'' - 2y' + 2y = 0$, за което $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

**(б)** Същото при условията $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$ и $y(0) = 1$; $y(1) = 0$.

**(в)** За да решим уравнението $y'' - 2y' + 2y = f(x)$ трябва първо да се реши системата

$$\begin{cases} u_1' e^x \cos x + u_2' e^x \sin x = 0 \\ u_1' e^x(\cos x - \sin x) + 2u_2' e^x(\cos x + \sin x) = f(x) \end{cases},$$

която е равносилна на

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \sin x = 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x = f(x)e^{-x} \end{cases}$$

Горната система има решения $u_1'(x) = -f(x)e^x \sin x$ и $u_2'(x) = f(x)e^x \cos x$. След като пресметнем съответните интеграли, получаваме общото решение на $y'' - 2y' + 2y = f(x)$, което изглежда така: $y(x) = (c_1 + u_1(x))e^x + (c_2 + u_2(x))e^{2x}$. Решете за упражнение уравненията $y'' - 2y' + 2y = 1$; $y'' - 2y' + 2y = e^x$; $y'' - 2y' + 2y = \sin x$ и* $y'' - 2y' + 2y = x$. Намерете тези решения, за които $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$.

**2.5.3** Като пример за третия случай ($D = p^2 - 4q = 0$) разглеждаме уравнението $4y'' - 12y' + 9y = 0$. Неговото характеристично уравнение е $4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = 0$ и има решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{3}{2}$. Забележете, че формално досега не сме разглеждали уравнения от този вид; при нас коефициентът пред $y''$ винаги е единица. Разбира се, това не бива да смущава читателя - в случая можем да разделим с 4. Съгласно 2.3 (в) фундаменталната система решения на това уравнение се състои от функциите $y_1(x) = e^{\frac{3}{2}x}$ и $y_2(x) = xe^{\frac{3}{2}x}$. Значи общото решение изглежда така: $y(x) = e^{\frac{3}{2}x}(c_1 + c_2 x)$

**(а)** Напишете това решение $y$ на $4y'' - 12y' + 9y = 0$, за което $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$.

**(б)** Същото при условията $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$ и $y(0) = 1$; $y(1) = 0$.

**(в)** За да решим уравнението $4y'' - 12y' + 9y = f(x)$ трябва първо да се реши системата

$$\begin{cases} u_1' e^{\frac{3}{2}x} + x u_2' e^{\frac{3}{2}x} = 0 \\ \frac{3}{2} u_1' e^{\frac{3}{2}x} + (u_2' + \frac{3}{2} x u_2') e^{\frac{3}{2}x} = \frac{1}{4} f(x) \end{cases},$$

от която получаваме $u_1(x) = -\frac{1}{4} x f(x) e^{-\frac{3}{2}x}$ и $u_2(x) = \frac{1}{4} f(x) e^{-\frac{3}{2}x}$. След като пресметнем съответните интеграли, получаваме общото решение на $4y'' - 12y' + 9y = f(x)$, което изглежда така: $y(x) = (c_1 + u_1(x))e^x + (c_2 + u_2(x))e^{2x}$. Решете за упражнение уравненията $4y'' - 12y' + 9y = 1$; $4y'' - 12y' + 9y = e^{-\frac{3}{2}x}$; и $4y'' - 12y' + 9y = x$. Намерете тези решения, за които $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$.

**2.5.4** Решете уравненията: **(а)** $y'' + 3y' + 2y = ax$;

**(б)** $2y'' + y' - y = 0$, $y(1) = 2$ и $y'(1) = 1$;

**(в)** $y'' + 4y' + 4y = 1$, $y(0) = 0$ и $y(1) = 1$;

**(г)** $9y'' - 6y' + y = x$, $y(0) = 1$ и $y(\ln 27) = 0$;

**(д)** $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$ и $y'(0) = 7$;

**(е)** $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$ (първо съставете уравнение за $u = y''$).

**2.6** Уравненията с постоянни коефициенти от по - висок ред се решават по сходен метод. Първо се разглежда съответното хомогенно уравнение и се съставя неговото съответно канонично уравнение. Да разгледаме като пример следното уравнение:

**(e3)**
$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = f(x)$$

от трети ред, в което дясната част $f(x)$ е по части монотонна функция. Съставяме характеристичното уравнение на съответното хомогенно на **(e3)** $(y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0)$: $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$. Неговите решения са $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $\lambda_3 = 3$. От тук можем да направим заключението, че функциите $y_k = e^{kx}$, $k = 1, 2, 3$ образуват *фундаментална система* решения в смисъл, че *за всяко* решение $y(x)$ на хомогенното уравнение съществуват такива константи $c_1$, $c_2$ и $c_3$, че $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$.

За да решим *нехомогенното уравнение* търсим някакво решение $\eta(x)$ във вида $\eta(x) = u_1(x)e^x + u_2(x)e^{2x} + u_3(x)e^{3x}$, където $u_k(x)$, $k = 1, 2, 3$ са неизвестни функции. Техните производни могат да бъдат открити като решения на системата

**(ps3)**
$$\begin{cases} u_1' y_1(x) + u_2' y_2(x) + u_3' y_3(x) = 0 \\ u_1' y_1'(x) + u_2' y_2'(x) + u_3' y_3'(x) = 0 \\ u_1' y_1''(x) + u_2' y_2''(x) + u_3' y_3''(x) = f(x) \end{cases},$$

която има *единствено решение* за всяко фиксирано $x$. Функциите $u_k(x)$ се намират след това с интегриране. *Общото решение* на нехомогенното уравнение изглежда по следния начин: $y(x) = (c_1 + u_1(x))y_1(x) + (c_2 + u_2(x))y_2(x) + (c_2 + u_2(x))y_3(x)$.

В нашия случай получаваме системата

$$\begin{cases} u_1' e^x + u_2' e^{2x} + u_3' e^{3x} = 0 \\ u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} + 3u_3' e^{3x} = 0 \\ u_1' e^x + 4u_2' e^{2x} + 9u_3' e^{3x} = f(x) \end{cases}$$

Нейното решение е $u_1'(x) = \frac{1}{2}f(x)e^{-x}$, $u_2'(x) = -f(x)e^{-2x}$ и $u_3'(x) = \frac{1}{2}f(x)e^{-3x}$.

Решете уравненията $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = x$, $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 1$, $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = e^{ax}$ и $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \sin ax$.

**2.6.1** Ето още няколко примера, в които даваме допълнително и фундаменталната система решения:

**(а)** Решете уравнението $y''' - y'' + y' - y = f(x)$. Проверете, че фундаменталната система е $y_1 = e^x$, $y_2 = \cos x$ и $y_3 = \sin x$. Напишете решенията, ако $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = e^x$ и $f(x) = \sin x$.

**(б)** Решете уравнението $y''' - 3y'' + 3y' - y = f(x)$. Фундаменталната система решения е $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ и $y_3 = x^2e^x$. Напишете решенията, ако $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = e^x$ и $f(x) = \sin x$.

**(в)** Решете уравнението $y''' - 3y' + 2y = f(x)$. Открийте фундаменталната система решения (отг. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ и $y_3 = e^{-2x}$). Напишете решенията, ако $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = e^x$ и $f(x) = \sin x$.

**3.** В заключение ще отбележим, че теорията на диференциалните уравнения е важен раздел на съвременната приложна и абстрактна математика. Както се вижда от горните примери решенията на най - простите диференциални уравнения се намират посредством интегриране (квадратури). По тази причина процеса на пресмятането на решенията на дадено уравнение понякога също се нарича интегриране.

Има най различни похвати за интегрирането на диференциални уравнения от различни специални класове. Различни справочници и сборници съдържат (по думите на известния руски математик В. Арнолд) до $1,6.10^3$ уравнения.

Всичките тези методи обаче имат поне два важни недостатъка. Първият се състои в това, че далеч не всяко уравнение може да бъде решено в квадратури. Даже такова просто уравнение като $\frac{dy}{dx} = y^2 - x$ не може да бъде решено в квадратури. Това означава, че решенията му не могат да бъдат изразени посредством краен брой операции от елементарни функции и интеграли от тях.

От друга страна дори и в тези случаи, в които можем да интегрираме дадено уравнение, формулата, която дава общото решение най често не е от особена полза за приложение, защото е твърде комплицирана. По тази причина е по - малко полезна от някоя лесна за използване формула, която дажа не точното, а приближено решение на суответното уравнение. Сходна ситуация възниква при решеването не само на диференциални уравнения. Например уравнението $x^3 - 3x = 2a$ може да бъде получено явно по известната формула на Кардано:

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Ако обаче ни трябва приблизирелната стойност на корен на горното уравнение, то е по удачно да забележим, че $x \approx -\frac{2}{3}a$ е добра апроксимация на корен на горното уравнение при малки стойности на $|a|$.

Точно по същия начин уравнението на махалото $x''(t) + \sin x(t) = 0$ може да бъде решено в квадратури. Наистина, то е от вида *(de2)* и значи можем да постъпим по описания там начин: $2x'x'' = 2x' \sin x$, от където получаваме $(x'^2)' = (2\sin x)'$ и съответно $x'^2 = c + 2\sin x$, където $c$ е константа. Значи $x'(t) = \pm\sqrt{c + 2\sin x(t)}$. Тогава за обратната функция $t = t(x)$ на $x(t)$ получаваме последователно $t'(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{c+2\sin x}}$ и $t(x) = \pm\int \frac{dx}{\sqrt{c+2\sin x}} + d$, където $d$ е друга константа на интегриране.

По такъв начин получаваме обратната функция на решението на уравнението на махалото, изразена като интеграл. Той обаче в общия случай (при произволно $c$) не е елементарна функция (т.е., не е решим експлицитно). От друга страна повечето въпроси за поведението на махалото се решават по - лесно (и със задоволителна точност) посредством приближеното уравнение на махало с малки колебания $x''(t) + x(t) = 0$.

**3.1** Съществуват множество методи за *приблизително решаване* на диференциални уравнения. Те наистина не дават *точни* решения, но могат да бъдат прилагани към доста общи и произволни уравнения. Един съвсем елементарен похват например е да търсим неизвестното решение като сума на безкраен степенен ред по метода на неопределените коефициенти.

В 2.2 споменахме, че уравнението $xy'' - y' + xy = 0$ не може да бъде решено посредством квадратури. Още повече нехомогенното уравнение $xy'' - y' + xy = f(x)$ може да бъде решено експлицитно. При тези обстоятелства можем да се опитаме да открием решение по следния начин: развиваме функцията $f(x)$ в степенен ред: $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ и търсим решението $y(x)$ като сума на степенния ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, коефициентите на който са неизвестни. Можем да ги намерим, като заместим $y$ в уравнението; за тази цел пресмятаме съответните производни:

$$xy''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} = 2a_2 x + 3.2a_3 x^2 + 4.3a_4 x^3 + \cdots ;$$

$$-y'(x) = -\sum_{l=1}^{\infty} l a_l x^{l-1} = -a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 - 4a_4 x^3 + \cdots$$

и

$$xf(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+1} = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots$$

и ги събираме. Получаваме

$$xy'' - y' + xy = -a_1 + a_0 x + (3a_3 + a_1)x^2 + (8a_4 + a_2)x^3 + \cdots = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots .$$

Това е равенство на два степенни реда *при всяко* $x$, от където следва, че те имат еднакви коефициенти. Като резултат се получава линейна система с безброй много неизвестни и безброй много уравнения. В дадения случай имаме $-a_1 = b_0$, $a_0 = b_1$ и за $n \geq 2$ е изпълнено $(n^2 - 2n)a_{n+1} + a_{n-1} = b_n$.

**3.2** Напишете няколко коефициента $a_n$ ако: (а) $f(x) \equiv 0$; (б) $f(x) = x^2$ и $f(x) = \sin x$.

**3.3** Решете приближено (примерно до $x^3$) уравненията: $xy'' - y = x^2$ и $y'' - 2xy' + y = 1$.