Тема 5. Преобразуване на Фурие.

5.1. Класическо преобразуване на Фурие.

5.2. Бързо преобразуване на Фурие.

5.3. Приложения.

5.1. Класическо преобразуване на Фурие.

Преобразуване на Фурие

Ако разгледаме набор от периодични функции с продължителност Т, то сумарната функция може да представи произволна функция на този интервал

Фиг. 2.2

Тези периодични функции имат различна амплитуда и фаза. Те се представят в комплексна форма чрез формулата на Ойлер

$$e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath.\sin\varphi$$

$$e^{\imath k\omega_0 t} = \cos(k\omega_0 t) + \imath\sin(k\omega_0 t)$$

където основната честота се определя от периода L на функцията

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$$

Сумата от тези функции има вида

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\imath k\omega_0 x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k\right|.e^{\imath\varphi_k}.e^{\imath k\omega_0 x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|c_k\right|.e^{\imath(k\omega_0 x+\varphi_k)}$$

Тази зависимост се нарича обратно преобразуване на Фурие

Комплексните коефициентите на преобразуванието на Фурие се получават по зависимостта:

$$c_k = \frac{1}{L}\int_0^L g(x).e^{-\imath k\omega_0 x}dx \qquad\qquad k = (-\infty, \infty)$$

Тази зависимост представлява правото преобразуване на Фурие в комплексна форма.

За реална изходна функция тригонометричната форма на правото преобразуване на Фурие има вида:

$$A_k = 2.a_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x).\cos(k\omega_0 x).dx \text{ и} \qquad\qquad k = (0, \infty)$$

$$B_k = 2.b_k = \frac{2}{L}\int_0^L g(x).\sin(k\omega_0 x).dx$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)dx \text{ за еквивалентност с } A_k$$

а на обратното е съответно:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k.\cos(k\omega_0 x) - \sum_{k=1}^{\infty} B_k.\sin(k\omega_0 x)$$

Тема 7. Числени характеристики на случайни процеси и сигнали.

7.1. Числени характеристики на случайните процеси.

Ако изучаваното явление е случайно, то всяка негова реализация се осъществява при определени условия, които не се повтарят при други независими наблюдения на това явление. За пълното описание на процеса е необходимо да се отчита множеството от всички реализации (т.е. целият ансамбъл $\{x(t)\}$).

Явленията които се изследват обикновено се разглеждат в непрекъснато време и обикновено е необходимо да се разглежда безкрайно множество от реализации $N \to \infty$. Значението на реализацията в момента t_j не може да се определи по точни формули, но е необходимо да се опише във вероятностни термини.

2.2.1. Вероятностни функции

От инженерна гледна точка вероятността може да се определи чрез относителната честота на неговата реализация.

$$\operatorname{Pr} ob[A] = \lim_{N\to\infty} \frac{N[A]}{N}$$

Вероятността се определя като границата на честотата на настъпване на събитието А, когато броят изпитания клони към безкрайност.

Функция на разпределение

Ако ни интересува събитието, че значението не превишава ξ единици

Т.е. $A = \{x(t_j) \le \xi\}$

Вероятността за такова събитие е

$$\operatorname{Pr} ob[x(t_j) \le \xi] = \lim_{N\to\infty} \frac{N[x(t_j) \le \xi]}{N}$$

където $N[x(t_j) \le \xi$ е броят реализации, които в момента t_j не превишават ξ.

Ако величината ξ приема различни значения, то ще получим функция, която с енарича функция на разпределение на случайния процес $\{x(t)\}$ за момента от време t_j. Тя се определя чрез зависимостта

$$P_x(\xi, t_j) = P(x, t_j) = \operatorname{Pr} ob[x(t_j) \le \xi]$$

Функцията на разпределение задава вероятността за това, че мигновеното значение $x(t_j)$ в даден момент t_j не превишават дадено значение ξ. За нестационарни процеси тази вероятност зависи от момента на време t_j.

В случаи, когато случайният процес е стационарен и ергодичен функцията на разпределение не зависи от времето и може да бъде определена по една единствена реализация $x(t)$ посредством зависимостта

$$P(x) = \operatorname{Pr} ob[x(t) \le \xi] = \lim_{T\to\infty} \frac{T[x(t) \le \xi]}{T}$$

където $T[x(t) \le \xi]$ представлява общото време, в течение на което реализацията $x(t)$ се намира не по-високо от нивото ξ. При тази постановка функцията на разпределение определя вероятността за това, че мигновеното значение $x(t)$ в произволен момент не превишава дадено значение ξ.

2.2.2. Плътност на вероятност

Тема 8. Спектрална плътност.

8.1. Определение и свойства на спектралната плътност.

8.2. Взаимна връзка между спектралната плътност и корелационните матрици.

8.3. Примери за използване във Висшата геодезия.

8.1. Определение и свойства на спектралната плътност.

Функциите на спектрална плътност могат да се определят по следните три начина:

А) посредством ковариационните функции;

Б) посредством крайно преобразуване на Фурие;

Б) чрез филтрация, повдигане на квадрат и осредняване.

Между тези функции могат да се получат важни съотошения.

Определяне посредством крайно преобразуване на Фурие

За двойка реализации $x_k(t)$ и $y_k(t)$ на стационарни случайни процеси $\{x_k(t)\}$ и $\{y_k(t)\}$, които са дефинирани на крайния интервал от време $0 \le t \le T$ се дефинира функцията

$$S_{xy}(f,T,k) = \frac{1}{T} X_k^*(f,T) Y_k(f,T)$$

където

$$X_k(f,T) = \int_0^T x_k(t) e^{-\iota 2\pi f t} dt$$

$$Y_k(f,T) = \int_0^T y_k(t) e^{-\iota 2\pi f t} dt$$

Величините $X_k(t)$ и $Y_k(t)$ представляват право преобразуване на Фурие за краен интервал (крайно преобразуване на Фурие), $X_k^*(t)$ е величина комплексно спрегната на $X_k(t)$. Такива преобразувания съществуват за широк клас процеси.

Разпространена грешка представлява това, че по аналогия с периодични процеси взаимната спектрална плътност с еопределя по формулата

$$S_{xy}(f,k) = \lim_{T \to \infty} S_{xy}(f,T,k)$$

Това определение не е подходящо за стационарни случайни процеси от общ вид, защото при Т клонящо към безкрайност оценката $S_{xy}(f,T,k)$ на величината $S_{xy}(f,k)$ не се подобрява в статистически смисъл, т.е. тя не става състоятелна. Правилното определяне на величината $S_{xy}(f)$ се дава от следната зависимост:

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \to \infty} E\left[S_{xy}(f,T,k) \right]$$