КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
УАСГ

22 април 2018 г.

Вариант 1

Задача 1. (1 т.) В аритметична прогресия $S_6 = 9$, а $a_4 - a_2 = 0,4$. Първият член на тази прогресия е:

а) $0,5$; б) 1; в) $1,5$; г) 2.

Решение: След прилагане на съответните формули двете дадени равенства представляват система уравнения за първия член и разликата на прогресията.

Задача 2. (1 т.) Броят на целите числа, за които е дефинирана функцията $f(x) = \sqrt{-1-x} - \lg(25 - x^2)$, е:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

Решение: Трябва $-1 - x \geq 0$ и $25 - x^2 > 0$, а броят на целите числа в интервала $(-5, -1]$ е 4.

Задача 3. (1 т.) Допирателната към графиката на функцията $f(x) = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{\pi x} + 5$ в точката $x = \dfrac{\pi}{4}$ е:

а) $\| Oy$; б) $\| Ox$; в) $\equiv Ox$; г) $\equiv Oy$.

Решение: Производната $f'(x) = \sqrt{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ на $f(x)$ в точката $x = \dfrac{\pi}{4}$ е равна на нула, но $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \neq 0$

Задача 4. (1 т.) В триъгълник ABC страната BC е равна на a, а срещулежащият й ъгъл е 120°. Нека O е центърът на вписаната му окръжност. Радиусът на описаната около $\triangle BCO$ окръжност е:

а) $a\sqrt{3}$; б) a; в) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\dfrac{a}{2}$.

Решение: Очевидно $\sphericalangle BOC = 150^\circ$ и със синусова теорема се получава, че търсеният радиус е a.

Задача 5. (1 т.) Равностранен триъгълник със страна a се завърта около височината си. Обемът на полученото тяло е:

а) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{8}$; б) $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{24}$; в) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{24}$; г) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{8}$.

Решение: Полученото тяло е конус с радиус на основата $\frac{a}{2}$ и височина $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Б	В	Б	Б	В

Задача 6. (5т.) Дадено е уравнението

$$\lg x\left(\lg x^3 - m.\lg x\right) = \lg x^{2m} - 4,$$

където m е параметър.
а) (2 т.) Да се реши уравнението за $m = -7$.
б) (1,5 т.) За кои стойности на параметъра m уравнението има реални корени? За кои m уравнението има единствено решение?
в) (1,5 т.) За кои стойности на параметъра m уравнението има два различни реални корена x_1 и x_2, такива, че $x_1 x_2 = 10^{1-m}$?

Решение: След полагането $\lg x = y$ получаваме уравнението $(3-m)y^2 - 2my + 4 = 0$.

а) За $m = -7$ корените му са -1 и $-\frac{2}{5}$, откъдето корените на даденото уравнение са $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{\sqrt[5]{100}}$.

б) Уравнението има реални корени за $D = m^2 + 4m - 12 \geq 0$ или $3 - m = 0$, т.е. за $m \in (-\infty, -6] \bigcup [2, +\infty)$. Единствено решение се получава за $m \in \{-6, 2, 3\}$.

в) От условието следва, че $1 - m = \lg x_1 + \lg x_2 =$ (по Виет) $\frac{2m}{3-m}$. Оттук $m = 3 + \sqrt{6}$, тъй като за другия корен на полученото уравнение $D < 0$.

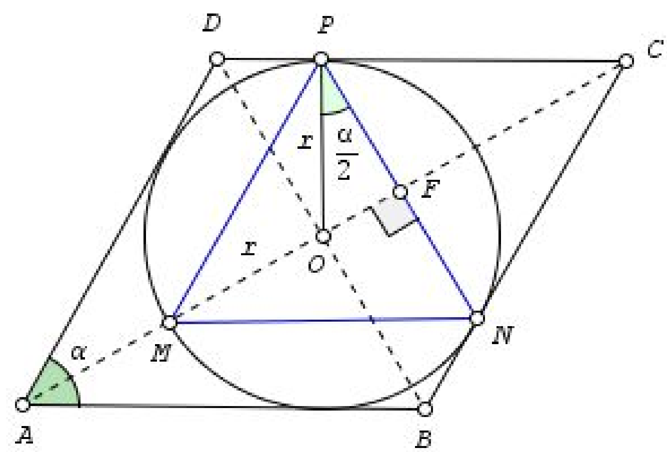
Задача 7. (5т.) Даден е ромб $ABCD$ с остър ъгъл α при върха A, описан около окръжност с радиус r.
а) (1 т.) Да се намери страната на ромба.
б) (2 т.) Да се докаже, че $S_{\triangle MNP} = r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right)$, където точките N и P са допирните точки на окръжността съответно до BC и CD, а M е тази от пресечните точки на окръжността с AC, която е по-близо до A.
в) (2 т.) Да се намери ъгълът α, ако при фиксирано r $S_{\triangle MNP}$ е възможно най-голямо.

Решение:
а) Отношението на височината $2r$ на ромба към страната му е $\sin\alpha$, откъдето страната е с дължина $\frac{2r}{\sin\alpha}$.

б) Нека F е пресечната точка на AC и PN. Очевидно $\sphericalangle OPF = \frac{\alpha}{2}$. Тогава $OF = r\sin\frac{\alpha}{2}$, $PF = r\cos\frac{\alpha}{2}$ и търсеното лице е $\frac{1}{2}PN.FM = r^2\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

в) Функцията $y(\alpha) = \cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sin\alpha$ е дефинирана за $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Производната й е $-\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha$. Тя е равна на 0 само за $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Границите на $y(\alpha)$ в краищата на дефиниционния й интервал са числа по-малки от $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Следователно $\alpha = \frac{\pi}{3}$.



Задача 8. (5т.) В четириъгълната пирамида $ABCDE$ основата $ABCD$ е правоъгълник със страни $AB = a$ и $AD = b$. Ъглите между основата и стените BAE, ADE и DCE са съответно α, 90° и α, където α е остър ъгъл.

а) (1 т.) Да се докаже, че $\sphericalangle BAE$ е прав.

б) (2 т.) Да се пресметне обемът на пирамидата $BCDE$.

в) (2 т.) Да се намерят ъгълът и разстоянието между правите BE и CD, ако $\alpha = 30^\circ$ и $b = 3a$.

Решение:

а) Знаем, че стената ADE и основата сключват прав ъгъл. Нека EH е височина на стената ADE ($H \in AD$). Тогава EH е разстоянието от върха E до равнината $(ABCD)$ (защо?). Сега $AB \perp AD$ и $AB \perp EH$ и значи $AB \perp AE$.

б) От а) следва, че ъгълът между стената BAE и основата е $\sphericalangle DAE$ и е равен на α, също както и $\sphericalangle ADE$, откъдето H е среда AD. От а) EH е височина на пирамидата $BCDE$ и тъй като $EH = AH\,\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{b}{2}\mathrm{tg}\alpha$, то $V_{BCDE} = \dfrac{ab^2}{12}\mathrm{tg}\alpha$.

в) Понеже $AB \parallel CD$, търсеният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle ABE$. Тъй като $AE = \dfrac{AH}{\cos\alpha} = \dfrac{b}{2\cos\alpha}$ и от а) $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \dfrac{\sqrt{4a^2\cos^2\alpha + b^2}}{2\cos\alpha}$, то $\cos\varphi = \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{2a\cos\alpha}{\sqrt{4a^2\cos^2\alpha + b^2}}$. Тогава при $\alpha = 30^\circ$ и $b = 3a$ $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, т. е. φ също е 60°.

Търсеното разстояние d е разстоянието от точката D до равнината (ABE) и може да се намери като височина през върха D в пирамидата $ABDE$. Обемът й е равен на V_{BCDE}, т.е. $V_{ABDE} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$, а $S_{ABE} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Сега $d = \dfrac{3V_{ABDE}}{S_{ABE}} = \dfrac{3a}{2}$. Всъщност до този резултат се стига непосредствено, ако се съобрази, че оста на дадените прави е успоредна на височината през върха D в $\triangle ADE$ (която е и търсената по-горе височина на $ABDE$).