Непрекъснати и гладки повърхнини. Криви върху повърхнина. Първа квадратична форма на повърхнина.

1. **Векторна фукция на два скаларни аргумента. Непрекъснатост, частни производни и диференцируемост.** Сега аналогично на векторна функция на скаларен аргумент ще дадем следнаото

Определение 1.1. *Правило (съответствие) чрез което на всяка точка* $(u,v)\in D$*, където* $D\subset\mathbb{R}^2$ *е област, се съпоставя единствен вектор* $\vec{r}=\vec{r}(u,v)\in\mathbb{R}^3$ *(*$\mathbb{R}^2$*) се нарича векторна функция на на два скаларни аргумента. Областа* D *се нарича дефиниционна област на векторната функция.*

Ако предположим, че в пространството е въведена декартовата координатна система $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$, то векторът $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$ може да се представи във вида

(1.1) $$\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},\ (u,v)\in D.$$

В горното равенство x, y и z са скаларни функции на променливите u и v. Ясно е, че задаването на една векторнозначна функция е еквивалентно на задаването на три скаларни функции на два аргумента. По същия начин, както при функция на една променлива можем да дадем дефиниция за граница и непрекъснатост. Именно

Определение 1.2. *Казваме, че функцията* $\vec{r}(u,v)$ *има за граница вектора* $\vec{a}$ *при* $u\to u_0$, $v\to v_0$ *ако* $\|\vec{r}(u,v)-\vec{a}\|\to 0$ *при* $(u,v)\to(u_0,v_0)$.

Тук, както обикновено с $\|\vec{b}\|$ сме означили евклидовата дължина на вектора $\vec{b}$.

Определение 1.3. *Функцията* $\vec{r}(u,v)$ *се нарича нарича непрекъсната в точка* $(u_0,v_0)\in D$ *ако границата и при* $(u,v)\to(u_0,v_0)$ *е равна на* $\vec{r}(u_0,v_0)$.

Не е трудно да се докаже, че всички теореми за граница и непрекъснатост на сума и разлика остават в сила и за векторни функции. Освен това, от формулата за дължина на вектор следва също, че съществуването на граница в точка (непрекъснотост в точка и в област) е еквивалентно на съществуването на съответните граници и непрекъснатостта на координатните функции, а от формулите за пресмятане на скаларно, векторно и смесено произведение на вектори следва, че са в сила теореми аналогични на теоремите за граница и непрекъснатост за произведение на скаларни функции. Формулирайте тези твърдения самостоятелно! Сега да дефинираме частна производна на векторна функция.

Аналогично на съответната дефиниция за скаларни функции ще дадем следното

Определение 1.4. *Казваме, че функцията* $\vec{r}(u,v)$ *притежава частни производни в точка* $(u_0,v_0)\in D$ *ако съществуват границите*

(1.2) $$\frac{\partial\vec{r}(u_0,v_0)}{\partial u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{r}(u_0+\Delta u,v_0)-\vec{r}(u_0,v_0)}{\Delta u},\quad \frac{\partial\vec{r}(u_0,v_0)}{\partial v}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\vec{r}(u_0,v_0+\Delta v)-\vec{r}(u_0,v_0)}{\Delta v}.$$

Освен означението, използвано в (2) за краткост частните производни ще означаваме още и чрез $\vec{r}_u'(u_0,v_0), \vec{r}_v'(u_0,v_0)$. Като се използва (1.1), лесно може да се докаже, че съществуването на частните производни на $\vec{r}(u,v)$ е еквивалентно на съществуването на частните производни на координатните функции и са в сила равенствата

(1.3) $$\begin{aligned}\vec{r}_u'(u_0,v_0)&=x_u'(u_0,v_0)\vec{i}+y_u'(u_0,v_0)\vec{j}+z_u'(u_0,v_0)\vec{k},\\ \vec{r}_v'(u_0,v_0)&=x_v'(u_0,v_0)\vec{i}+y_v'(u_0,v_0)\vec{j}+z_v'(u_0,v_0)\vec{k}.\end{aligned}$$

За сума, разлика, скаларно, векторно и смесено произведение на векторни функции на два аргумента са в сила формули, аналогични на формулите за функция на един аргумент. Формулата за производна на сложна функция също остава в сила. По същия начин, както за скаларни функции се въвеждат и частни производни от по-висок ред.

Пример 1.1. Да се намерят частните производни $\vec{r}_u'(u,v), \vec{r}_v'(u,v)$ и $\vec{r}_{uv}''(u,v)$ на функцията $\vec{r}(u,v) = u^2v^3\vec{i} - 2u\vec{j} + v\sin u\vec{k}$.

Решение. Имаме

$$\vec{r}_u'(u,v) = 2uv^3\vec{i} - 2\vec{j} + v\cos u\vec{k},\ \vec{r}_v'(u,v) = 3u^2v^2\vec{i} + \sin u\vec{k},\ \vec{r}_{uv}''(u,v) = 6uv^2\vec{i} + \cos u\vec{k}.$$

Пример 1.2. За функцията $\vec{r}(u,v)$ е известно, че има постоянна дължина, т.е. $\| \vec{r}(u,v) \| = c = const > 0.,\ (u,v) \in D.$ Да се докаже, че $\vec{r}_u',\ \vec{r}_v' \perp \vec{r},\ (u,v) \in D.$

Решение. Ще се възползваме от факта, че $\| \vec{r}(u,v) \|^2 = c^2 = \vec{r}^{\,2}(u,v),\ (u,v) \in D,$ където с $\vec{r}^{\,2}(u,v)$ сме означили скаларния квадрат на $\vec{r}(u,v)$. След като диференцираме относно u и v тъждеството $\vec{r}^{\,2} = c^2$, получаваме $2\vec{r}\vec{r}_u' = 0,\ 2\vec{r}\vec{r}_v' = 0.$ Но от последните две равенства и от факта, че $\vec{r} \neq \vec{0}$ следва, че $\vec{r}_u',\ \vec{r}_v' \perp \vec{r},\ (u,v) \in D,$ което трябваше и да се докаже. Както ще видим по-късно този факт има естествена геометрична интерпретация.

Както за скаларна функция на две променливи да въведем понятието пълно нарастване и диференциал на векторнозначна функция чрез

Определение 1.5. *Пълно нарастване на функцията* $\vec{r}(u,v)$ *в точка* $(u_0,v_0) \in D$, *отговарящо на нарастванията* $\Delta u, \Delta v$ *на аргументите* u,v *и такива, че* $(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \in D$ *наричаме вектора*

(1.4) $$\Delta\vec{r} = \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0),$$

а диференциал

(1.5) $$d\vec{r} = \vec{r}_u'(u_0,v_0)\Delta u + \vec{r}_v'(u_0,v_0)\Delta v.$$

Функцията $\vec{r}(u,v)$ *се нарича диференцируема в точка* $(u_0,v_0) \in D$ *ако пълното нарастване може да се представи във вида*

(1.6) $$\Delta\vec{r} = \vec{a}\Delta u + \vec{b}\Delta v + \vec{\alpha}(\Delta u, \Delta v),$$

където векторите $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *не зависят от нарастванията* $\Delta u, \Delta v$, *а само от точката* $(u_0,v_0) \in D$ *и за векторната функция* $\vec{\alpha}(\Delta u, \Delta v)$ *е изпълненоравенството*

(1.7) $$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\| \vec{\alpha}(\Delta u, \Delta v) \|}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} = 0.$$

Може да се докаже, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са точно частните производни на функцията $\vec{r}(u,v)$ в точка $(u_0,v_0) \in D$, а диференциалът е линейната част (относно $\Delta u, \Delta v$) на нарастването. Съществуването на частните производни не гарантира диференцируемост на $\vec{r}(u,v)$ подобно на случая на скаларни функции. В сила е обаче следното достатъчно условие за диференцируемост.

Теорема 1.1. Нека функцията $\vec{r}(u,v)$ притежава частни производни от първи ред и те са непрекъснати в областта $D.$ Тогава $\vec{r}(u,v)$ е диференцируема в $D.$

2. Понятие за непрекъсната и гладка повърхнина. Сега ще се възползваме от понятието за непрекъсната и диференцируема векторна функция, за въведем две понятия, които имат голямо значение за математиката и нейните приложения.

Определение 2.1. *Нека $\vec{r}(u,v)$ е непрекъсната векторна функция, дефинирана в областта $D \subset \mathbb{R}^2$. Множеството от точки $S \subset \mathbb{R}^3$, което спрямо фиксирана декартова координатна система $O\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ има представянето*

(2.1) $$S = \{M(x,y,z) : \overrightarrow{OM} = \vec{r} = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},\ (u,v) \in D\}$$

наричаме непрекъсната повърхнина в $\mathbb{R}^3$.(черт. 1.). Векторнозначната функция $\vec{r}(u,v)$, дефинирана при $(u,v) \in D$ наричаме параметрично представяне на повърхността, а променливите u и v -- параметри.

По нататък за краткост повърхнината ще означаваме просто чрез

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in D.$$

Определение 2.2. *Повърхнината $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in D$ се нарича гладка ако:*

1.За всяко $(u,v) \in D$ съществуват $\vec{r}_u',\ \vec{r}_v'$ и са непрекъснати;

2. За всяко $(u,v) \in D$ е изпълнено условието $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' \neq \vec{0}$.

Първото условие гарантира диференцируемост на функцията $\vec{r}(u,v)$ в D, а второто означава, че във всяка точка от S векторите $\vec{r}_u', \vec{r}_v'$ са неколинеарни. Аналогично, повърхнината S ще наричаме $n-$*кратно гладка* ако функцията $\vec{r}(u,v)$ притежава непрекъснати частни производни ред до n включително и е изпълнено и второто условие.

Пример 2.1. Да се определи при какво условие за константите $a_i, b_i, i = 1,2,3$ повърхнината $S : \vec{r} = (a_1u + b_1v + c_1)\vec{i} + (a_2u + b_2v + c_2)\vec{j} + (a_3u + b_3v + c_3)\vec{k},\ u,v \in (-\infty,\infty)$ е гладка и да се определи видът на повърхнината.

Решение. Както лесно се вижда, $\vec{r}_u' = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \vec{a},\ \ \vec{r}_v' = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = \vec{b}$. За да е гладка обаче, съгласно определение 2.2 трябва векторите $\vec{a}, \vec{b}$ да са неколинеарни. Да напишем уравнението на S по следния начин: $S : \vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c},\ u,v \in (-\infty,\infty)$. Както е известно от курса по аналитична геометрия, последното уравнение е на равнина, минаваща през точка $C(c_1, c_2, c_3)$ и успоредна на векторите $\vec{a}, \vec{b}$. Ако $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и са ненулеви, то уравнението е на права, която е гладка крива, но не и гладка повърхнина.

Пример 2.2. Да се покаже, че за повърхнината с уравнение $S : \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\vec{k}$ е нарушено условието за гладкост в т. $O(0,0,0)$.

Решение. Тук за параметри са избрани декартовите координати в равнината. Векторната функция е дефинирана за всяко $x, y \in (-\infty,\infty)$ и освен това

$\vec{r}_x' = \vec{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k},\ \vec{r}_y' = \vec{j} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{k}$ при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, но частните производни не съществуват при $x = 0$ и $y = 0$ (проверете това самостоятелно, като приложите определението за частна производна). Лесно се вижда, че повърхнината е прав кръгов конус с връх в нулата и разположен в полупространтсвото $\{z \geq 0\}$. Условието за гладкост се нарушава само във върха на конуса.

Много често едно и също точково множество в $\mathbb{R}^3$ се налага да бъде зададено по повече от един начин като множество от стойности на векторнозначна функция. По-точно, интересно е при какви условия точковите множествата $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in D$ и

$\widetilde{S}:\widetilde{\vec{r}}=\widetilde{\vec{r}}(s,t),(s,t)\in\widetilde{D}$ съвпадат в пространтјвото. Може да се докаже, че за това е достатъчно векторнозначната функция

$$\vec{\rho}=\vec{\rho}(s,t)=u(s,t)\vec{e}_1+v(s,t)\vec{e}_2,\ (s,t)\in\tilde{D}$$

да изобразява взаимно еднозачно областта $\widetilde{D}$ върху D и да е изпълнено тъждеството

$$\vec{r}(u(s,t),v(s,t))=\widetilde{\vec{r}}(s,t),\ \ (s,t)\in\widetilde{D}$$

и векторите $\vec{\rho}_s',\ \vec{\rho}_t'$ да са неколинеарни (черт. 2). Последното условие в скаларна форма има вида

(2.2)
$$\begin{vmatrix} u_s' & v_s' \\ u_t' & v_t' \end{vmatrix}\neq 0,\ (s,t)\in\widetilde{D}.$$

В такъв случай казваме, че е извършена допустима смяна на параметрите на повърхнината S.

Пример 2.3. Нека $S:\vec{r}=u\vec{i}+v\vec{j}+(u^2+v^2)\vec{k},\ (u,v)\in D=\{(u,v)\,|\,u^2+v^2\leq 1\}$. Да се определи при кои стойности на параметрите ρ,φ смяната

(2.3)
$$u=\rho\cos\varphi,\ v=\rho\sin\varphi,\ (\rho,\varphi)\in\widetilde{D}=\{(\rho,\varphi)\,|\,0\leq\rho\leq 1, 0\leq\varphi<2\pi\}$$

е допустима и да си намери представането на S чрез новите параметри.

Решение. Чрез елементарни пресмятания се вижда, че

(2.4)
$$\begin{vmatrix} u_\rho' & v_\rho' \\ u_\varphi' & v_\varphi' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho\neq 0,\ (\rho,\varphi)\in\widetilde{D}$$

с изключение на контурната отсечка $\rho=0,\ 0\leq\varphi<2\pi$ и, че изображението е взаимно еднозначно. Чрез новите параметри уравнението на S е $\widetilde{\vec{r}}=\rho\cos\varphi\,\vec{i}+\rho\sin\varphi\,\vec{j}+\rho^2\vec{k}.$ Както лесно се вижда, S е часта от ротоционния параболоид с уравнение $z=x^2+y^2$, която се намира над единичния кръг $\{x^2+y^2\leq 1\}$ (черт. 3). В първия случай S е образ на този кръг, а във втория – образ на правоъгълника $\widetilde{D}$.

3. Линии върху повърхнина. Уравнение на допирателна равнина и нормална права към повърхнина. Да си припомним, че гладка линия в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) се задава чрез уравнение от вида $\gamma:\vec{r}=\vec{r}(t),t\in(\alpha,\beta)$ при което $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$ в този интервал. Нека сега $\gamma_0:u=u(t),$ $v=v(t),\ t\in(\alpha,\beta)$ е гладка линия, лежаща в D, а $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in D$ е гладка повърхнина. Да разгледаме векторната функция $\vec{r}_1(t)=\vec{r}(u(t),v(t)),\ t\in(\alpha,\beta)$. От правилото за диференциране на сложна функция, получаваме

(3.1)
$$\vec{r}_1'(t)=\vec{r}_u'u'(t)+\vec{r}_v'v'(t).$$

Ако допуснем, че $\vec{r}_1'(t)=\vec{0}$ при някоя стойност на $t\in(\alpha,\beta)$, то от предположението, че S е гладка следват равенствата $u'(t)=v'(t)=0$, което пък противоречи на гладкостта на γ_0. Следователно линията $\gamma_1:\vec{r}_1=\vec{r}(u(t),v(t)),\ t\in(\alpha,\beta)$ е също гладка линия, лежаща върху повърхнината (черт.4). Освен това се вижда и, че допирателният вектор към γ_1 е линейна комбинация на векторите $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$. Сега нека разгледаме гладките линии върху S, които са образи на правите, успоредни на координатните оси в равнината, в която лежи D. По-точно да фиксираме $v_0 = const$ и да разгледаме линията $\gamma_1 : \vec{r}^{\,u} = \vec{r}(u, v_0),\ (u, v_0) \in D$ и аналогично при фиксирано $u_0 = const$ линията $\gamma_2 : \vec{r}^{\,v} = \vec{r}(u_0, v),\ (u_0, v) \in D$ (черт. 5). Първата от тях наричаме $u-$линия, а втората $v-$линия минаваща през точката $M_1 \in S$, която е образ на точката $M_0(u_0, v_0) \in D$. Ясно е, че през всяка точка от D минава точно една $u-$линия и една $v-$линия. Те се наричат още координатни или параметрични линии върху повърхнината. Ще отбележим също, че те зависят от конкретната параметризация на повърхнината. Посочете пример.

Пример 3.1. Да се определи вида на повърхнината с уравнение $S : \vec{r} = R(\cos\varphi\cos\theta\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\vec{j} + \sin\theta\vec{k}), R > 0,\ 0 < \varphi \le 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ и да се определят координатните линии при тази параметризация.

Решение. Тъй като $x^2(\varphi,\theta) + y^2(\varphi,\theta) + z^2(\varphi,\theta) = R^2$, то повърхнината е сфера с радиус R и център в началото на координатната система. Ясно е също така, че лините $\theta = const$ са паралелите върху сферата, а лините $\varphi = const$ са меридианите (тук считаме, че θ е ъгълът, който сключва радиус-векторът на точка от сферата с равнината Oxy, а φ е ъгълът между проекцията му и положителната посока на оста Ox).

Сега ще дадем геометрична илюстрация на понятието гладка повърхнина. Нека S е гладка повърхнина, а $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ е произволна фиксирана точка от нея. Да нанесем в тази точка векторите $\vec{r}'_u(M_0), \vec{r}'_v(M_0)$, които по предположение са неколинеарни. От аналитичната геометрия еизвестно, че те определят единствена равнина. От формула (3.1) се вижда лесно, че допирателните вектори на всички гладки криви, лежащи върху S и минаващи през т. M_0 лежат в тази равнина. Това ни дава основание да дадем следното

Определение 3.1. *Равнината, минаваща през произволна фиксирана точка M_0 от гладката повърхнина $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ и успоредна на векторите $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$ в същата точка се нарича допирателна равнина към S в т. M_0. Правата през M_0 и колинеарна на вектора $\overrightarrow{N} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ се нарича нормална права към S в т. M_0 (черт.6).*

Условията наложени от опр. 2.2 гарантират съществуването и единствеността на допирателна равнина и нормален вектор (нормална права) към S в произволна нейна точка. Нарушаването на тези условия може да доведе до това, че допирателната равнина не е определена еднозначно или въобще не съществува (пр. 2.2). Уравненията на допирателната равнина $\alpha(M_0)$ и нормалната права $g_n(M_0)$ имат съответно вида

(3.2) $$\alpha(M_0) : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

(3.3) $$g_n(M_0) : \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$

където $A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k} = \overrightarrow{N}(M_0) = \vec{r}'_u(M_0) \times \vec{r}'_v(M_0)$.

4. Други начини за задаване на повърхнина. В някои случаи се оказва възможно и удобно една гладка повърхнина да бъде зададена по друг начин. Например ако

$z = f(x, y),\ (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ *2* е функция на две променливи с непрекъснати частни производни, лесно се вижда, че множеството

(4.1) $$S = \{M(x, y, z) \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

представлява гладка повърхнина в пространството. Наистина, съответното параметрично представяне е

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k},\ (x, y) \in D,\ \vec{r}'_x = \vec{i} + f'_x\vec{k},\ \ \vec{r}'_y = \vec{j} + f'_y\vec{k},$$

които очевидно са неколинеарни вектори и съответният нормален вектор е $\overrightarrow{N} = -f'_x\vec{i} - f'_y\vec{j} + \vec{k}$. В този случай се казва, че повърхнината е явно зададена. Разбира се ако x или y са функции на другите две променлеви, повърхнината също наричаме явно зададена. Например уранението $x = y^2 + z^2$ задава ротационен параболоид с ос Ox. Друг, по-общ е така нареченото неявно задаване. Нека $F(x, y, z)$ е една диференцируема функция на три променливи, дефинирана в някаква област $G \subset \mathbb{R}^3$, за която $F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2 \neq 0$ в G . Тогава множеството от точки в пространството, за които

(4.1) $$S : F(x, y, z) = c = const$$

е гладка повърхнина в $\mathbb{R}^3$ (стига да не е празното или едноточково множество). Наистина, от условието поне една частна производна да е различно от нула в G и теоремата за неявните функции следва, че в околност но всяка точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, за която имаме $F(x_0, y_0, z_0) = c$ уравнението (4.1) определя диференцируема функция на някои две от променливите, чията графика пък е гладка повърхнина. Както е известно от курса по анализ, векторът $\overrightarrow{gradF} = (F'_x, F'_y, F'_z)$ е перпендикулярен към повърхнината.

Например множеството от реални решения на уравнението $x^2 + y^2 + z^2 = c$ при $c < 0,\ c = 0,\ c > 0$ са съответно празното множество, координатното начало и сфера с радиус $R = \sqrt{c}$. Ясно е също така, че цялата сфера не може да бъде зададена като графика на една функция на две променливи.

5. Ориентация на повърхнина. Както е известно от курса по аналитична геометрия риентация на една равнина една равнина в $\mathbb{R}^3$ е удобно да се задава с помощта на избор на ненулев вектор, перпендикулярен на равнината. Това ни дава основание за следното

Определение 5.1. *Ориентация на повърхнината S наричаме избор на ориентация във всяка допирателна равнина към S в т.* $M \in S$ *, т.е. избор на ненулев нормален вектор* $\vec{n}(M)$ *към допирателната равнина в тази точка. При това предполагаме, че изабражението* $\vec{n} : M \to \vec{n}(M)$ *непрекъснато по отношение на т.* $M \in S$ *. Повърхнина, която допуска ориентация се нарича ориентируема, а повърхнина с избрана върху нея ориентация се нарича ориентирана.*

Пример 5.1. Сферата с радиус $R>0$ и център началото на координатната система може да се ориентира с помощта на единичния вектор на външната нормала. Както знаем нормалата към сферата във всяка точка от нея е колинеарна на радиус-вектора на точката. Очевидно изображението е непрекъснато.

Пример 5.2. Нека S е гладка повърхнина, допускаща глобална параметризация $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in D.$ Тогава тя може да се ориентира с помощта на вектора

(5.1) $$\vec{n}(u, v) = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{\left\| \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \right\|}.$$

Пример 5.3. Една неявно зададена повърхнина $S: F(x,y,z)=0$ може да бъде ориентирана с помощта на вектора $\vec{n} = \overrightarrow{grad\,F} / \|\overrightarrow{grad\,F}\|$.
Ако *S* е ориентирана с вектора $\vec{n}(M)$, то вектора $-\vec{n}(M)$ също определя ориентация на *S*. При това ако повърхноста е *свързана*, т.е. ако всеки две точки от *S* могат да се свържат с непрекъсната крива, лежаща изцяло върху *S*, то всяка ориентация съвпада с една от двете посочени по-горе ориентации.

Определение 5.1. *Параметризацията на* $S: \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ се *нарича съгласувана с ориентацията* $\vec{n}(M),\ M \in S$, *ако за всяка т. M, за която* $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u,v)$ *векторите* $\vec{r}_u', \vec{r}_v'$ *и* $\vec{n}(M)$ *образуват дясна тройка вектори (или все едно равенството* (5.1) *е изпълнено във всяка точка от S, която е образ на точка от областа D).*
Нека да отбележим, че съществуват и неориентируеми повърхности, например листа на Мьобиус (черт. ...), която се получава като залепим двете противоположни страни на правоъгълника *ABCD*, слепвайки *A* с *C* и *B* с *D*. Ясно е, че върху тази повърхнина може да се избере нормален вектор, който се изменя непрекъснато по отношение на т.*M* от повърхнината. Освен това тя очевидно е свързана повърхнина. Въпреки това ,ако “обиколим” по линията *PQ* , свързваща средите на *AD* и *BC* и отчетем , че при слепването *P* ще съвпадне с *Q* то очевидно $\vec{n}(P) = -\vec{n}(Q)$. Но това означава, че глобално върху цялата повърнина не може да се изберат две страни, както например при цилиндъра, който се получава като залепим *A* с *B* и *D* с *C*.

6. Първа основна форма на повърхнина. Придружаващ триедър на Гаус за гладка повърхнина. Нека $S: \vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in D$ е гладка повърхнина а $M(x,y,z) \in S$ е произволна точка от нея. Да разгледаме дясната тройка вектори $(\vec{r}_u', \vec{r}_v', \overrightarrow{N})$, $\overrightarrow{N} = \vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$, дефинирана във всяка точка от повърхнината.

Определение 6.1. *Съвкупността* $(M, \vec{r}_u', \vec{r}_v', \overrightarrow{N})$ *наричаме придружаващ триедър на Гаус за повърхнината* *S* .
Да положим $E = \vec{r}_u'^2, G = \vec{r}_v'^2, F = \vec{r}_u'\vec{r}_v',\ D(u,v) = EG - F^2$.

Определение 6.2. *Квадратичната форма* $I(\lambda,\mu) = E\lambda^2 + 2F\lambda\mu + G\mu^2,\ \lambda,\mu \in \nabla$ *наричаме първа основнана повърхнината.*
От самата и дефиниция е ясно, че тя е строго положително определена, защото $D(u,v) > 0$.
Първата основна форма има прост геометричен смисъл. Нека разгледаме диференциалът на векторната функция, задаваща повърхнината. По дефиниция $d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$ (тук полагаме $\Delta u = du,\ \Delta v = dv$ -- диференциали на независимите променливи). Да пресметнем $\| d\vec{r} \|^2$. Очевидно

(5.1) $$\| d\vec{r} \|^2 = d\vec{r}\, d\vec{r} = \vec{r}_u'^2 (du)^2 + 2\vec{r}_u'\vec{r}_v' du dv + \vec{r}_v'^2 (dv)^2 = I(du,dv).$$

Последното равенство показва, че първата основна форма дава квадрата на дължината на диференциала на векторната функция. Това се използва за намиране на дължини на дъги от криви, лежащи върху *S*. Наистина, нека $\gamma: \vec{r}_1 = \vec{r}(u(t),v(t)),\ t \in (\alpha,\beta)$ е крива върху *S*. Тогава

(5.2) $$\| d\vec{r}_1(t) \|^2 = \| d\vec{r} \|^2 = E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2 = (Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t))(dt)^2,$$

и ако с ds означим диференциала на дъгата от кривата, то както знаем $ds = \| d\vec{r}_1(t) \| = \| \vec{r}_1'(t) \| \, dt$ и за дължината на дъгата от кривата получаваме

$$s = \int_\alpha^\beta \| \vec{r}_1'(t) \| \, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{Eu'^2(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{I(u'(t), v'(t))}\, dt \,. \tag{5.3}$$

Първата основна форма може да се използва също и за намиране на ъгъл между две криви, лежащи върху повърхнината. в тяхната пресечна точка. Нека са дадени кривите $\gamma_1 : \vec{r}_1 = \vec{r}(u_1(t), v_1(t)),\ t \in (\alpha, \beta)$ и $\gamma_2 : \vec{r}_2 = \vec{r}(u_2(\tau), v_2(\tau)),\ \tau \in (\alpha_1, \beta_1)$ и $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(\tau_0)$. Да означим ъгъла между допирателните им в пресечната точка с φ. Тогава

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r}_1(t_0) d\vec{r}_2(\tau_0)}{\| d\vec{r}_1(t_0) \| . \| d\vec{r}_2(\tau_0) \|} \,. \tag{5.4}$$

Разбира се в последната формула можем да заместим и с изразите за $\vec{r}_1'(t_0)$ и $\vec{r}_2'(\tau_0)$ и техните дължини, но така или иначе коефициентите на първата основна форма пак ще се появят при намирането на скаларното произведение.Отново обръщаме внимание на факта, че те зависят само от точката върху повърхнината, но не и от конкретната крива минаваща през тази точка и лежаща върху повърхнината.

Забележка 6.1. Да обърнем внимание, че когато $u-$линиите и $v-$лините са ортогонални $F = 0$ и първата основна форма придобива вида $E(du)^2 + G(dv)^2$, щоето показва, че е удобно да се избере но възможност такава параметризация, при която това е налице.

Пример 6.1. Да се намери ъгълът между кривите в пресечните им точки, лежащи върху ротационният параболоид $S : \vec{r} = u\vec{i} + v\vec{j} + (u^2 + v^2)\vec{k},\ (u, v) \in V^2$ и които са образ на правите $g_1 : u = v,\ g_2 : u + v = 2$.

Решение. Тъй като правите имат само една пресечна точка $M'(1,1)$ в равнината на променливите (u, v), а параболоида е повърхнина без самопресичане ($\vec{r}(u_1, v_1) \neq \vec{r}(u_2, v_2)$ винаги щом $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$), то и техните образи имат само една пресечна точка върху параболоида -- $M(1,1,2)$. Да пресметнем коефициентите на първата основна форма. Имаме $E = \vec{r}_u'^2 = 1 + 4u^2, G = \vec{r}_v'^2 = 1 + 4v^2, F = \vec{r}_u'\vec{r}_v' = 4uv,$ като в съответната точка имат стойности $E = 5, G = 5, F = 4.$ Сега да параметризираме кривите, като за параметър изберем u. Очевидно $\gamma_1 : \vec{r}_1 = u\vec{i} + u\vec{j} + 2u^2\vec{k},\ \vec{r}_2 = u\vec{i} + (2-u)\vec{j} + (4 - 4u + 2u^2)\vec{k}.$ След което пресмятаме $\vec{r}_1'(u) = \vec{i} + \vec{j} + 4u\vec{k},\ \vec{r}_2'(u) = \vec{i} - \vec{j} + (4u - 4)\vec{k}.$ Полагаме $u = 1$ и директно пресмятаме скаларното произведение на допирателните вектори. Получаваме: $\vec{r}_1'(1) = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k},\ \vec{r}_2'(1) = \vec{i} - \vec{j} + 0\vec{k},\ \vec{r}_1'(1)\vec{r}_2'(1) = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$, което и трябваше да се очаква (защо?). Получете същия резултат като използвате коефициентите на първата основна форма.

Нормална кривина. Втора основна форма на повърхнина.

1. **Изображение на Вайнгартен. Втора основна форма.** В следващите разсъждения

предполагаме, че $S : \vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in D$ е двукратно гладка повърхнина, т.е. съществуват производните от втори ред и са непрекъснати в $D.$ Нека означим с $\vec{n}$ единичния нормален вектор към $S.$ При нашите предположения той е дефиниран във всяка точка от повърхнината и тъй като $\vec{n} \perp \vec{r}'_u,\ \vec{n} \perp \vec{r}'_v$, то очевидно са изпълнени равенствата

(1.1) $$\vec{n}.\vec{r}'_u = 0,\quad \vec{n}.\vec{r}'_v = 0.$$

Но освен това $\vec{n}^2 = 1$ и от правилата за диференциране получаваме

(1.2) $$2\vec{n}\vec{n}'_u = 0,\ 2\vec{n}\vec{n}'_v = 0 \text{, т.е. } \vec{n} \perp \vec{n}'_u,\ \vec{n} \perp \vec{n}'_v.$$

Следователно частните производни на $\vec{n}$ лежат в допирателната равнина към повърхнината. Тъй като $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ са неколинеарни, те образуват базис в тази равнина. Сега нека да означим с $\vec{n}_1 = \vec{n}'_u,\ \vec{n}_2 = \vec{n}'_v$ и да разложим тези вектори по базиса $\vec{r}'_u$, $\vec{r}'_v$. Имаме

(1.3) $$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= \gamma_1^1\vec{r}'_u + \gamma_1^2\vec{r}'_v,\\ \vec{n}_2 &= \gamma_2^1\vec{r}'_u + \gamma_2^2\vec{r}'_v\end{aligned} \quad \text{или матрично} \quad \begin{pmatrix}\vec{n}_1\\ \vec{n}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_1^1 & \gamma_1^2\\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{r}'_u\\ \vec{r}'_v\end{pmatrix}.$$

Да означим тази матрица с W . Тя определя линеен оператор, който ще означаваме по същия начин, изобразяващ допирателната равнина към повърхнината в себе си, при това $W\vec{r}'_u = \vec{n}_1,\ W\vec{r}'_v = \vec{n}_2$. Това изображение се нарича *изображение на Вайнгартен.*

То има следният геометричен смисъл – на всеки вектор от допирателната равнина към S то съпоставя вектор от допирателната повърхнина към единичната сфера (да не забравяме, че когато u, v пробягват областта D векторът $\vec{n}$ пробягва част от единичната сфера, а неговите производни $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ лежат в допирателната равнина към сферата.

Сега да въведем означенията

(1.3) $$L = \vec{n}\vec{r}''_{uu},\quad M = \vec{n}\vec{r}''_{uv},\quad N = \vec{n}\vec{r}''_{vv}.$$

Сега като диференцираме равенства (1.1) и отчетем, че $\vec{r}''_{uv} = \vec{r}''_{vu}$ получаваме

(1.4) $$L = -\vec{n}_1\vec{r}'_u = -\vec{n}'_u\vec{r}'_u,\quad M = -\vec{n}_2\vec{r}'_u = -\vec{n}'_v\vec{r}'_u = -\vec{n}_1\vec{r}'_v = -\vec{n}'_u\vec{r}'_v,\quad N = -\vec{n}_2\vec{r}'_v.$$

Определение 1.1. *Квадратичната форма* $II(\lambda,\mu) = L\lambda^2 + 2M\lambda\mu + N\mu^2,\ \lambda,\mu \in \nabla$ *наричаме втора основна форма на повърхнината.*

При $\lambda = du,\ \mu = dv$ тя придобива вида $II(du,dv) = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2.$ Както лесно се вижда ако разгледаме $k-$тата степен на изображението на Вайнгартен т.е. изображение с матрица $W^k,\ k = 0,1,2,...$ можем да дефинираме $k+1-$ва квадратична форма на повърхнината по формулата

(1.5) $$\varphi^{k+1}(\lambda,\mu) = (-1)^k W^k(\vec{p}).\vec{p},\ \text{ за всеки вектор } \vec{p} = (\lambda,\mu).$$

Очевидно при $k = 0$ получаваме $\varphi^1(\lambda,\mu) = \vec{p}.\vec{p} = \|\vec{p}\|^2$, което е първата основна форма, а при $k = 1$ след известни пресмятания се получава, че

(1.6) $$\varphi^2(\lambda,\mu) = -W(\vec{p}).\vec{p} = II(\lambda,\mu) \text{ и че } \gamma_1^1 = L,\ \gamma_1^2 + \gamma_2^1 = 2M,\ \gamma_2^2 = N.$$

Може да се докаже, че първата основна форма не зависи от конкретната параметризация на повърхнината, т.е. тя представлява инвариант на повърхнината, а втората основна форма и изображението на Вайнгартен са инвариантни евентуално до знак. При смяна на координатната система двете основни форми и изображението на Вайнгартен са инвариантни. При произволна еднаквост първата форма не се изменя, докато втората и изображението на Вайнгартен не се изменят само при движение.

2. Нормална кривина. Нека отново $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in D$ е двукратно гладка повърхнина и $M\in S$ е произволна нейна точка. Да разгледаме вектора $d\vec{r}=\vec{r}_u'du+\vec{r}_v'dv$, лежащ в допирателната равнина построена в т. M. Тогава т. M, векторът $d\vec{r}$ в тази точка и нормалният вектор $\vec{n}$ в същата точка определят единствена равнина μ_n, наречена нормално сечение на S в т. M. Кривината на кривата $c=\mu_n\cap S$ в т. M се нарича нормална кривина или кривина на нормално сечение. Сега , аналогично на триедъра на Френе, с всяка крива минаваща през т. M може да се свърже един триедър по следния начин: ако $\vec{t}$ е единичният нормален вектор към кривата в тази точка, а $\vec{n}$ е единичната нормала към повърхнината, да означим с $\vec{p}=\vec{n}\times\vec{t}$. Очевидно $\vec{p}$ лежи в допирателната равнина на S в т. M и получения триедър е дясно ориентиран. Нека кривата c е зададена със своите вътрешни уравнения $c:u=u(s),\ v=v(s),\ s\in[a,b]$ чрез естествения параметър. Тогава уравнението на c върху S е $c:\vec{r}=\vec{r}(u(s),\ v(s)),\ s\in[a,b]$. По подобен начин, както при извода на формулите на Френе се установяват равенствата

(2.1)
$$\begin{aligned}\vec{t}'&=\gamma\vec{p}+\nu\vec{n}\\ \vec{p}'&=-\gamma\vec{t}+\alpha\vec{n}\ .\\ \vec{n}'&=-\upsilon\vec{t}-\alpha\vec{p}\end{aligned}$$

От друга страна формулите на Френе за същата линия имат вида

(2.2)
$$\begin{aligned}\vec{t}'&=\chi\vec{n}_1\\ \vec{n}&=-\chi\vec{t}+\tau\vec{b}\,,\\ \vec{b}'&=-\tau\vec{n}_1\end{aligned}$$

където χ и τ са съответно кривината и торзията на същата крива, а $\vec{n}_1$ е нормалата към кривата (но не и към повърхнината). Лесно се вижда, че векторите $\vec{n}_1,\vec{b},\vec{p},\vec{n}$ са компланарни и лежат в нормалната равнина към кривата в т. M. Ако означим с φ ориентирания ъгъл между $\vec{n}_1,\vec{n}$ и отчетем, че двойката вектори $\vec{n}_1,\vec{n}$ е еднакво ориентирана с векторите $\vec{p}$ и $\vec{n}$ и при съответните предположения за гладкост на линията и повърхнината, можем да считаме, че поне в околност на т. M φ е гладка функция на параметъра s. След известни пресмятания получаваме следните зависимости:

(2.3)
$$\gamma=\chi\sin\varphi,\ \nu=\chi\cos\varphi,\ \alpha=\varphi'+\tau\ .$$

Коефициентите във формули (2.1) се наричат, както следва: $\gamma-$ *геодезична торзия на линията върху повърхнината,* $\upsilon-$*нормална кривина на линията върху повърхнината, а* $\alpha-$*геодезична кривина на линията върху повърхнината.*

Лесно може да се покаже, че за нормалната кривина е изпълнено равенството

(2.4) $$\nu = \frac{II(\dot{u},\dot{v})}{I(\dot{u},\dot{v})},$$

където с точки се означени производните относно произволен параметър на кривата. От тази формула се вижда също, че нормалната кривина е инвариантна с точност до знак при смяна на параметрите на повърхнината и освен това е вярна и следната

Лема 2.1 Всички лини върху повърхнината, минаващи през фиксирана т. M от повърхнината и които имат един и същи допирателен вектор в тази точка имат една и съща нормална кривина в точка M.

Главни направления и главни кривини. Гаусова и средна кривина на повърхнина.

1. Главни направления и главни кривини. Нека отново $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in D$ е двукратно гладка повърхнина, т.е. съществуват производните от втори ред и са непрекъснати в D. Нека означим с $\vec{n}$ единичния нормален вектор към S. При нашите предположения той е дефиниран във всяка точка от повърхнината. Освен това във всяка точка от допирателната равнина към повърхнината е дефинирано изображението но Вайнгартен.

Определение 1.1. *Направленията в допирателната равнина към повърхнината, определени от собствените вектори на изображението на Вайнгартен се наричат главни направления на повърхността S в точка P от тази повърхност.*

Тъй като матрицата W на този оператор е симетрична, то във всяка точка от повърхността или има две взаимно перпендикулярни главни направления, или всички направления са главни. Наистина, собствените стойности λ_1 и на λ_2 на W винаги са реални и ако са различни има два взаимно перпендикулярни собствени вектора $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, ако $\lambda_1=\lambda_2$ то изображението е хомотетия и всеки ортонормиран базис в допирателната равнина е базис от собствени вектори.

Определение 1.2. *Главна кривина на повърхността в точка $P\in S$ наричаме нормалната кривина в главно направление през същата точка.*

От определението е ясно, че за да намерим главните направления в дадена т. $P\in S$ е достатъчно да намерим собствените вектори на W. Нека $\vec{p}_i,\ i=1,2$ са собствените вектори на оператора, отговарящи на λ_i. Тогава съгласно формула (2.4) от предишния параграф имаме

(1.1) $$\nu(\vec{p}_i)=\frac{II(\vec{p}_i)}{I(\vec{p}_i)}=-\frac{W(\vec{p}_i)\vec{p}_i}{\vec{p}_i\vec{p}_i}=\frac{-\lambda_i\vec{p}_i\vec{p}_i}{\vec{p}_i\vec{p}_i}=-\lambda_i,\ i=1,2.$$

Това равенство изяснява геометричния смисъл на собствените значения на оператора на Вайнгартен – те са равни на взетите със знак минус стойности на главните кривини. За в бъдеще ще означаваме главните кривини с k_1 и k_2 и ще считаме , че $k_1\geq k_2$. Ако в накоя точка от повърхността е изпълнено равенството $k_1=k_2$, то всичките направления в тази точка ще считаме главни.

Определение 1.1. *Ортонормиран базис* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ *в допирателната равнина в точка* $P \in S$*, чийто базисни вектори са колинеарни с главните направления се нарича базис на главните направления в тази точка от повърхнината.*

Очевидно условието, с което се характеризира този базис е $W(\vec{e}_i) = -k_i \vec{e}_i$, $i = 1,2$. Оказва се, че нормалната кривина в произволна фиксирана точка от S се определя напълно от кривината в главните направления. Наистина, нека $\vec{e}$ е произволен единичен допирателен вектор в точка $P \in S$. Тогава той се разлага по базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ по следния начин: $\vec{e} = \cos\theta.\vec{e}_1 + \sin\theta.\vec{e}_2$ за някое $\theta \in [0;2\pi)$. След заместване във формула (1.1) получаваме:

$$(1.2) \quad \nu(\vec{e}) = -\frac{W(\vec{e})\vec{e}}{\vec{e}\vec{e}} = -W(\cos\theta.\vec{e}_1 + \sin\theta.\vec{e}_2)\vec{e} = -(-\cos\theta.k_1\vec{e}_1 - \sin\theta.k_2\vec{e}_2)(\cos\theta.\vec{e}_1 + \sin\theta.\vec{e}_2) =$$

$$= k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Тук отчетохме факта, че $\vec{e}$ е единичен вектор и следователно $\vec{e}\vec{e} = \vec{e}^2 = 1$. Окончателно за нормалната кривина се получава така наречената формула на Ойлер:

$$(1.3) \qquad \nu(\vec{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

С нейна помощ лесно се доказва следната

Теорема 1.1 *Главните кривини в дадена точка* $P \in S$ *са екстремалните значения на нормалната кривина по направление на допирателния вектор* $\vec{e}$*, когато този вектор се върти около точка* P.

Доказателство: От тъждеството $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$ и формула (1.3) получаваме $\nu(\vec{e}) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = k_1 \cos^2\theta + k_2(1 - \cos^2\theta)$. Очевидно максималната стойност се достига при $\theta = 0$, а минималната при $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Гаусова и средна кривина на повърхнина.

Определение 2.1. *Величините* $K = k_1 k_2$ *и* $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ *се наричат съответно* ***гаусова*** *и* ***средна*** *кривина на повърхнината в дадената точка.*

Както е известно от линейната алгебра, важна характеристика на всеки линеен орератор са детерминанатата и следата (сумата от диагоналните елементи) на матрицата на оператора. Те не се променят при произволна ортогонална трансформация на координатната система. Да забележим, че в базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ матрицата на оператора на Вайнгартен има каноничен вид:

$$(2.1) \qquad W = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}.$$

Тогава, както лесно се вижда $\det(W) = k_1 k_2 = K$, $Tr(W) = -(k_1 + k_2) = -2H$, или

$$(2.2) \qquad K = \det(W), \quad H = -\frac{1}{2} Tr(W).$$

Сега нека означим съответно с

$$(2.3) \qquad A = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

матриците на първата и втората основна форма. След известни пресмятания се получава, че

$$(2.4) \qquad W = A^{-1}B = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ -FL + EM & -FM + EN \end{pmatrix}.$$

Тогава като използваме (2.2) и (2.3), лесно се вижда, че

(2.5) $K=\det(W)=\det(A^{-1}B)=\dfrac{\det(B)}{\det(A)}=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2},\quad H=-\dfrac{1}{2}Tr(W)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}.$

Равенствата в (2.5) означават, че коефициентите на първата и втора основна форма определят напълно гаусовата и средна кривина.

Пример 2.1. Да разгледаме повърхнината**,** получена от права, която в началния момент съвпада с оста *Ox*, движи с постоянна скорост по направление на *Oz* и се върти с постоянна ъглова скорост около *Oz*. Орбитите на точките от тази права образуват повърхнина, която може да се зададе параметричо по следния начин : $\vec{r}=u\cos v\,\vec{i}+u\sin v\,\vec{j}+bv\vec{k},\ b>0,\ (u,v)\in\mathbb{R}^2$. Повърхнината с това уравнение се нарича хеликоид. След кратки пресмятания (предоставяме ги на читателя за упражнение) получаваме:

(2.5) $\vec{r}_u'=\cos v\,\vec{i}+\sin v\,\vec{j}+0\vec{k},\ \vec{r}_v'=-u\sin v\,\vec{i}+u\cos v\,\vec{j}+b\vec{k},\ E=1,\ G=b^2+u^2,\ F=0$

(2.6) $$\vec{n}=\frac{\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'}{\|\vec{r}_u'\times\vec{r}_v'\|}=\frac{b\sin v}{\sqrt{b^2+u^2}}\vec{i}-\frac{b\cos v}{\sqrt{b^2+u^2}}\vec{j}+\frac{u}{\sqrt{b^2+u^2}}\vec{k},$$

(2.7) $$L=\vec{r}'_u\vec{n}_u'=0,\ N=\vec{r}'_v\vec{n}_v'=0,\ M=\vec{r}'_u\vec{n}_v'=\vec{r}'_v\vec{n}_u'=\frac{b}{\sqrt{b^2+u^2}},$$

(2.8) $$W=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{b}{\sqrt{b^2+u^2}}\\ \dfrac{b}{\sqrt{(b^2+u^2)^3}} & 0\end{pmatrix}.$$

Собствените значения на *W* са

(2.9) $$\lambda_{1,2}=\pm\frac{b}{b^2+u^2}\ \text{и съответно}\ K=k_1k_2=-\frac{b^2}{b^2+u^2},\ H=0.$$

Класификация на точките върху повърхнина

1. Локално задаване на повърхност в явен вид. Оскулачен параболоид. Да разгледаме ориентираната повърхност $S:\vec{r}=\vec{r}(u,v),\ (u,v)\in D$ и нека $P\in S$ е произволна фиксирана нейна точка.Може да се покже, че в $\mathbb{R}^3$ съществува дясно ориентирана координатна система с начало в т. P и околност на същата точка от *S* такива, че в тази координатна система повърхнината може да се представи като графика на диференцируема функция на две променливи. Наистина, нека $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ е базиса в допирателната равнина , определен от главните направления, а $\vec{n}$ е нормалният вектор към S в тази точка. Очевидно базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ винаги може да бъде избран така, че

тройката вектори $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{n})$ да е дясно ориентирана. Тогава координатната система $(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{n})$ (тази координатна система се нарича още репер на Дарбу) е дясно ориентирана декартова координатна система в $\mathbb{R}^3$.Без загуба на общност, да означим отново с *x, y* и *z* декартовите координати на точките спрямо тази координатна система и спрямо нея параметричното представяне на *S* с $\vec{r}=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$ това представяне се различава от първоначалното само с постоянния вектор $\overrightarrow{OM}$.Очевидно т. *P* има нулеви координати. Освен това векторите $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ лежат в допирателната равнина към повърхнината в тази точка, която съвпада с равнината определена от $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Тъй като S е гладка повърхнина, то $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ са неколинеарни и следователно съществува взаимно еднозначно изображение на допирателната равнина в т. M в себе си, което на двойката вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ съпоставя векторите $\vec{r}'_u$ и $\vec{r}'_v$ и детерминантата на изображението е различно от нула защото $z'_u(u_0, v_0)= 0$, $z'_v(u_0, v_0)=0$, а $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq \vec{0}$. Следователно изразяването на u и v чрез x и y е допустима смяна на параметрите в някоя достатъчно малка околност P (защо?) и новото параметрично задаване на S в тази околност на т. P има вида $\vec{r}_1(x, y) = x\vec{i}+y\vec{j}+z(u(x, y), v(x, y))\vec{k}$. Но това означава, че повърхнината локално е зададена като графика на двукратно диференцируемата функция

$$f(x, y) = z(u(x, y), v(x, y)).$$

Тогава лесно могат да бъдат пресметнати матриците *A, B* и *W* в дадената т. *P*. При явно задаване, както лесно се вижда имаме:

(1.1) $$\vec{r}'_{1x} = (1;0; f'_x),\ \vec{r}'_{1y} = (0;1; f'_y),\ \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x + f'^2_y}}(-f'_x;-f'_y;1).$$

Но в т. P $\vec{n} = (0;0;1)$ и следователно $f'_x(0,0) = 0$, $f'_y(0,0) = 0$. Тогава в тази точка коефициентите на първата и втората основна форма съответно са

(1.2) $$E = 1, F = 0,\ G = 1,\ L = -f''_{xx}(0,0),\ M = -f''_{xy}(0,0),\ N = -f''_{yy}(0,0).$$

От друга страна векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имат главни направления и в тази точка W трябва да е диагонална, а това означава, че $M = -f''_{xy}(0,0) = 0$ и $k_1 = f''_{xx}(0,0)$, $k_2 = f''_{yy}(0,0)$.

Сега ще използваме локалното представяне на повърхноста за изследването и в околност на дадена фиксирана точчка . Нека си мислим, че *S* е зададена явно по описания по- горе начин и са в сила (1.1) и (1.2). Да напишем формулата на Тейлор за $f(x, y)$ за т. *P*(0;0). Съгласно направените предположения, получаваме

(1.3) $$f(x, y) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 + \alpha(x^2 + y^2),\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\alpha(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

Определение 1.1. *Оскулачен параболоид за S в т. P се нарича повърхнината с уравнение*

(1.4) $$z = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2y^2.$$

Наистина, както е известно от курса по аналитична геометрия, повърхнината зададена с уравнението (1.4) в общия случай е параболоид с връх в началото на координатната система. Като сравним разлагането (1.3) и уравнението (1.4) виждаме, че графиката на двукратно диференцируема функция с точност до безкрайно малка величина от втори ред съвпада с този параболоид.

2. Класификация на точките от повърхнината. Едно от приложенията на оскулачния параболоид е определянето на типа на точките от повърхнината.

Определение 1.2. *Фиксирана точка P от повърхнината се нарича:*

а) точка от елиптичен тип ако в P е изпълнено $K = k_1 k_2 > 0$*;*

б) точка от хиперболичен тип (седлова точка) ако в P $K = k_1 k_2 < 0$*;*

в) точка от параболичен тип ако в P $K = k_1 k_2 = 0$*;*

г) точка на закръгленост (омбилична точка) ако в P $k_1 = k_2 \neq 0$*;*

е) равнинна точка на ако в P $k_1 = k_2 = 0$.

В точките от елиптичен тип параболоида е елиптичен и в околност на тази точка повърхнината е разположена от една страна на допирателната равнина, в точките от хиперболичен тип е хиперболичен параболоид и *S* е разположена от двете страни на допирателната равнина в околност на тази точка. В омбиличните точки оскулачният параболоид е ротационен, а разположението е като в елиптичния случай и в случайте в) и е) той е или параболичен цилиндър или съвпада с допирателната равнина към повърхнината. В сила е следната

Теорема 2.1. *Повърхнината S и оскулачният параболоид имат в общата точка на допиране P обща допирателна равнина, едно и също изображение на Вайнгартен и равна нормална кривина във всяко направление.*

Доказателство. Следва непосредствено от определението на допирателен параболоид и от пресмятането на елементите на матриците *A, B* и *W* в т. *P* .

Да напомним, че една повърхност *S* се нарича *свързана* ако всеки две точки от нея могат да се свържат с непрекъсната крива, лежаща изцяло върху *S*. За свързани повърхнини е вярна следната теорема, която ще формулираме без доказателство.

Теорема 2.2. *Свързана повърхнина, чийто всички точки са омбилични, е сфера (или част от сфера), а свързана повърхнина, чийта всички точки са равнинни е равнина (или част от равнина).*

Асимптотични и геодезични линии

1.Асимптотични допирателни и асимптотични линии върху повърхнина.

Определение 1.1. *Една допирателна права към повърхнина се нарича асимптотична когато нормалната и кривина е равна на нула.*

От определението следва, че правата g, допирателна към повърхнината *S* нарича асимптотична, когато за всеки вектор $\vec{p} = (\lambda_1, \lambda_2)$ лежащ върху g е изпълнено равенството

(1.1) $$II(\lambda_1, \lambda_2) = L\lambda_1^2 + 2M\lambda_1\lambda_2 + N\lambda_2^2 = 0\,.$$

Ясно е, че ако една точка е равнинна($k_1 = k_2 = 0$), то всяка допирателна през нея е асимптотична. Но ако една точка е омбилична ($k_1 = k_2 \neq 0$), то и $I(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ и следователно в такава точка не съществуват асимптотични допирателни. Броя на асимптотичните допирателни през фиксирана точко от *S* може да се изследва с помощта на знака на $\det(B) = LN - M^2$, който се запазва при смяна на параметрите, смяна на координатната система и при еднаквост в пространството. Възможни са следните случаи:

1) $\det(B) < 0$ (*K*<0). Тогава квадратното уравнение (1.1) има две реални решения за отношението λ_1/λ_2 . Те определят две неколинеарни асимптотични допирателни. Такава точка се нарича *хиперболична точка* (ср. с пред.параграф) от повърхнината, а повърхнина съставена само то такива точки се нарича хиперболична повърхнина.

2) $\det(B) > 0$ (*K*>0). Ясно е, че (1.1) не притежава реални решения относно λ_1/λ_2 . Такава точка наричаме *елиптична*. През нея не минават реални асимптотични допирателни, а повърхнина съставена от такива точки наричаме *елиптична повърхнина.*

3) $\det(B) = 0$ (K=0). В този случай уравнението има един реален двоен корен, който определя една реална асимптотична допирателна. Точката наричаме *параболична* и респективно повърхнина съставена само от такива точки наричаме *параболична повърхнина.*

Определение 1.1. *Една линия върху повърхнината се нарича асимптотична линия, ако във всяка нейна точка допирателната и е асимптотична.*

От определението веднага следва, че линията $c : u = u(t),\ v = v(t)$ е асимптотична точно когато вътрешните и уравнения удовлетворяват диференциалното уравнение

$$(1.2) \qquad Lu'^2(t) + 2Mu'(t)v'(t) + Nv'^2(t) = 0.$$

Ако повърхнината е хиперболична, то през всяка нейна точка минават две асимптотични линии, които са решения на диференциалните уравнения

$$(1.3) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{-M \pm \sqrt{M - NL}}{N}.$$

Може да се докаже, че е възможна препараметризация на повърхнината така, че новите координатни линии да са точно интегралните криви на уравненията (1.3) Множеството от асимптотични линии върху повърхнината се нарича асимптотична мрежа върху *S*.

Ако хиперболичната повърхнина е параметризирана спрямо асимптотичните си линии може да се докаже, че $L = N = 0$ (защо?) за всяка точка от повърхнината. От дефиницията е ясно също така, че елиптичните повърхнини не притежават асимптотични линии. Да разгледаме случай на параболична повърхнина, която не притежава равнинни точки. Във всяка точка от нея имаме $LN - M^2 = 0$. Можем да считаме, че $N \neq 0$, изразяваме $L = M^2/N$. Тогава уравнението (1.2) придобива вида

$$(1.4) \qquad Mu'(t) + Nv'(t) = 0,\ N\frac{dv}{du} + M = 0,$$

откъдето следва, че през всяка точка от повърхнината минава само една асимптотична линия. Може да се докаже, че ако една повърхнина има във всяка точка гаусова кривина нула и няма равнинни точки, то тя развиваема повърхнина т.е. състои се от точките лежащи върху правите на развиваем рой прави (*рой прави* наричаме семейство от прави, зависещо от един параметър, а *развиваем рой* – рой прави, който е или *коничен* – всички прави от него минават през една фиксирана точка и през точка от една крива, или *цилиндричен* – правите на роя са успоредни на фиксиран вектор, или *допирателен* – съвкупността от допирателните към дадена линия). По-обща геометрична характеристика на асимптотичните линии върху повърхнина се дава от следната теорема, която ще формулираме без доказателство.

Теорема 1.1. *Една двукратно гладка линия върху двукратно гладката повърхнина S е асимптотична тогава и само тогава, когато е права, или правилна линия (втората производна на векторната функция задаваща линията е различна от нула във всяка точка от линията), чиято оскулачна равнина съвпада с допирателната равнина към S в точките от линията.*

2. Геодезични линии върху повърхнина. При изследването на тези свойства на повърхнината, които се запазват при изображенията запазващи разстоянията, важна роля играят геодезичните линии. По отношение на много свойства те са близки до правите в равнината.

Определение 1.1. *Параметризираната крива* $\gamma:\vec{\rho}=\vec{\rho}(t),\ t\in[\alpha;\beta]$, *лежаща върху повърхнината S се нарича геодезична линия(или просто геодезична), ако за всяко* $t\in[\alpha;\beta]$ *векторът* $\vec{\rho}''(t)$ *е перпендикулярен на допирателната равнина към S в точките от* γ.
От определението следва, че във всяка точка от кривата оскулачната и равнина е перпендикулярна на допирателната равнина към повърхнината.

Пример 2.1. Всяка права е геодезична със своята линейна параметризация е геодезична на всяка повърхнина на която лежи. Наистина $\vec{\rho}''(t)=0$, а нулевият вектор е ортогонален на всяка равнина.

Пример 2.2. Върху кръговия цилиндър с уравнение $x^2+y^2=1$ кривата с уравнение $\vec{\rho}(t)=(\cos(at+b),\sin(at+b),mt+n)$ е геодезична линия, защото векторът $\vec{\rho}''(t)=(-a^2\cos(at+b),-a^2\sin(at+b),0)$ е перпендикулярен на повърхността на цилиндъра (всщност $\vec{\rho}''(t)\perp\overrightarrow{gradF}=(2x,2y,0)$. Лесно се вижда, че при $a=0$ се получава права, съвпадаща с една образуваща на цилиндъра, при $m=0$ е окръжност, перпендикулярна на оста на цилиндъра и в общия случай – винтова линия.

Пример 2.3. Нека $S^2:x^2+y^2+z^2=1$ е единичната сфера в пространството. Тогава всяка голяма окръжност γ, лежаща върху сферата е геодезична. Това следва от факта, че такава окръжност може да се параметризира така: $\gamma:\vec{\rho}(t)=\cos t.\vec{e}_1+\sin t.\vec{e}_2$,
$t\in[0;2\pi)$, където равнината в която лежи тя е определена от началото т. O и двойката еденични и ортогонални вектори $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$. Очевидно $\vec{\rho}''=-\vec{\rho}$ за всяко $t\in[0;2\pi)$, а $\vec{\rho}(t)$ е перпендикулярен на допирателната равнина (защо?).
За геодезичните линии върху произволна повърхнина е в сила следната

Теорема 2.1. *Нека кривата* $\gamma:\vec{\rho}=\vec{\rho}(t),\ t\in[\alpha;\beta]$ *е геодезична върху* S. *Тогава* $\|\vec{\rho}'(t)\|=const.$

Доказаателство. От очевидното равенство $0=2\vec{\rho}'(t)\vec{\rho}''(t)=(\vec{\rho}'^2)',\ t\in[\alpha;\beta]$ *следва, че* $\|\vec{\rho}'(t)\|=const.$

Следствие 2.1. *Всяка геодезична, различна от една точка е гладка крива.*
Това следва от факта, че $\|\vec{\rho}'(t)\|=a=const\neq 0$.
Лесно се вижда, че ако кривата $\gamma:\vec{\rho}=\vec{\rho}(t),\ t\in[\alpha;\beta]$ е геодезична върху S, то и нейната параметризация чрез естествения параметър $s(t)=\int_\alpha^t\|\vec{\rho}'(\lambda)\|d\lambda=a(t-t_0)$.
Може да се докаже, че геодезичните на дадена повърхност удовлетворяват система обикновени диференциални уравнения от втори ред. От конкретния вид на тази система следват важните факти:
1. При изометрично изображение на една повърхнина върху друга $F:S\to S_1$, геодезичните преминават в геодезични т.е., ако кривата $\gamma:\vec{\rho}=\vec{\rho}(t)$ е геодезична върху S, то $\gamma_1:\vec{\rho}_1=F(\vec{\rho}(t))$ е също геодезична върху S_1;
2. За всяка точка $P\in S$ и за всеки ненулев допирателен вектор $\vec{p}$, лежащ в допирателната равнина към S в т. P съществува единствена геодезична, минаваща през P и чийто допирателен вектор е $\vec{p}$. Този факт се опира на теоремата за съществуване и единственост на решението на система ОДУ и за това има локален характер – съществуването е гарантирано само в околност на т. P;
3. От всички гладки криви свързващи две точки P и Q от S, където Q е произволна точка от някоя околност на P, най-малка дължина има геодезичната, която ги свързва.