Иван Димитров

З А П И С К И

на лекции по АНАЛИЗ 2

СОФИЯ, 2015

Съдържание

Предговор **4**

1 Обикновени диференциални уравнения и системи **7**

1.1 Обикновени диференциални уравнения от първи ред 7

1.1.1 Обикновени диференциални уравнения от първи ред, решени спрямо производната 7

1.1.2 Диференциални уравнения с отделящи се променливи и хомогенни диференциални уравнения 20

1.1.3 Диференциални уравнения, приводими към уравнения с отделящи се променливи и към хомогенни уравнения 27

1.1.4 Линейни диференциални уравнения и уравнения на Бернули и Рикати 33

1.1.5 Точни диференциални диференциални уравнения и уравнения, допускащи интегриращ множител 40

1.1.6 Някои диференциални уравнения, нерешени относно производната. Уравнения на Лагранж и Клеро 48

1.1.7 Теореми за съществуване и единственост на решение на задачата на Коши за уравнения от първи ред 53

1.2 Обикновени диференциални уравнения от по-висок ред 56

1.2.1 Диференциални уравнения от по-висок ред – основни понятия. Някои уравнения, допускащи понижение на реда 56

1.2.2 Теореми за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за диференциални уравнения от по-висок ред. 65

1.2.3 Линейни диференциални уравнения от $n-$ти ред – обща теория. 66

1.2.4 Линейни диференциални уравнения от $n-$ти ред с постоянни коефициенти и приводими към уравнения с постоянни коефициенти – уравнение на Ойлер. 79

1.3 Системи диференциални уравнения. 91

1.3.1 Линейни системи уравнения диференциални от първи ред. Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. 91

2 Криви и повърхнини 101

2.1 Криви 101

2.1.1 Векторнозначна функция на скаларен аргумент. Непрекъснати и гладки криви. Естествен параметър. 101

2.1.2 Кривина и торзия на крива . Триедър на Френе. Формули на Френе. 110

2.2 Повърхнини 117

2.2.1 Непрекъснати и гладки повърхнини. Криви върху повърхнина. Първа квадратична форма на повърхнина . . 117

3 Многократни интеграли. Приложения. Несобствени интеграли 125

3.1 Двойни интеграли. 125

3.2 Тройни интеграли. 127

3.3 Смяна на променливите при двоен и троен интеграл. 130

3.4 Геометрични и физични приложения на кратните интеграли. . 137

3.5 Несобствени интеграли. 145

4 Криволинейни интеграли. Приложения. 153

4.1 Криволинейни интеграли от първи род. 153

4.2 Криволинейни интеграли от втори род. 158

Предговор

В настоящите записки на лекции авторът се е придържал основно към материала по дисцилината "МАТЕМАТИЧЕСКИ АНАЛИЗ ВТОРА ЧАСТ", която се чете на всички студенти от УАСГ, изучаващи инженерни специалности. В този си суров вид, записките ни най-малко не представляват учебник, а учебно помагало, имащо за цел да улесни подготовката за изпит на студентите, на които предстои да полагат изпит по тази дисциплина.

Тези записки предстои да бъдат допълвани с още примери, чертежи и задачи за самостоятелна подготовка, литературна справка и др., а също така и корегирани. Затова, авторът приема с благодарност всички забелязани неточности от всякакъв характер на адрес: *vanio_d@mail.bg* или *ivanp_fte@uacg.bg*

Глава 1

Обикновени диференциални уравнения и системи

1.1 Обикновени диференциални уравнения от първи ред

1.1.1 Обикновени диференциални уравнения от първи ред, решени спрямо производната

1. **Обикновени диференциални уравнения – основни понятия.**

а) Някои примери . Нека да разгледаме примери от физиката, които водят до идеята за диференциално уравнение. От курса по анализ 1 част знаем, че ако законът за движение на една материална точка е $x = x(t), t \in [0, T]$,то скоростта на точката е $v(t) = x'(t)$, а ускорението е $a(t) = x''(t)$ (припомнете си механичният смисъл на първата и втората производна на функция). Това означава, че ако ни е известен законът за движение на една материална точка, то чрез диференциране можем да намерим скоростта и ускорението на тази точка. Но в практикатата, най-често се налага да се решава задача, в някакъв смисъл обратна на тази, а именно : ако са ни известни силите, които действат на материалната точка, началното и положение и началната и скорост, (или ако е известна скоростта и началното и положение) да се намери законът за движение на тази материална точка. В най-простите случаи това не е трудно. Например, нека скоростта на една материална точка се изменя по закона

$$v(t) = 2t + 5, t \geq 0$$

и освен това в момента $t = 0$ точката се намира в положение $x(0) = 5$. Тогава, очевидно

$$x(t) = \int x'(t)\, dt = \int v(t)\, dt = \int 2t + 5\, dt = t^2 + 5t + C, \text{ т.е. } x(t) = t^2 + 5t + C.$$

Като заместим в последното равенство с $t = 0$, получаваме $C = 5$, следователно $x(t) = t^2 + 5t + 5$. По подобен начин се решава и задачата за намиране на закона за движение на свободно падаща материална точка от височина h, ако се пренебрегне съпротивлението на въздуха. Наистина, от втория принцип на Нютон получаваме, че

$$mx'' = mg, \ x(0) = 0, \ x'(0) = 0.$$

Тук масата на точката е означена с m, g е земното ускорение, абцисната ос е насочена към центъра на Земята, а кординатното начало $x = 0$ е на височина h от земната повърхност. Като съкратим на m и интегрираме два пъти последователно, получаваме

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

Тъй като в началния момент $t = 0$ по условие $x(0) = 0$ и началната скорост $v(0) = x'(0) = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$ и следователно законът за движение е

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

което е познатият от средния курс закон за свободно падане на материална точка под действие на силата на тежестта. Намерете самостоятелно времето, след което точката ще достигне земната повърхност и скоростта в този момент.

Всъщност, в първия пример ние решихме едно просто диференциално уравнение от вида $x'(t) = f(t)$, където функцията $f(t)$ е известна, с начално условие $x(0) = 5$, откъдето намерихма неизвестната константа C. Във втория пример, използвайки втория принцип на Нютон ($m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$) приложен за праволинейно движение под действие на една единствена сила – силата на тежестта, съставихме диференциалното уравнение (от вида $x'' = f(t)$) и го решихме.

Нека сега малко да усложним модела. Да разггледаме топче с маса m, което е окачено на пружина и на което му действа силата на тежестта, и освен това движението се извършва в среда със съпротивление. Нека отново оста Ox е насочена към центъра на земята. Експериментално е установено, че пружинната сила, отговаряща на отклонение x на топчето от равновесното му положение е $F_{\text{пр}} = -kx$ (закон на Хук при едностранно опъване), където знакът минус показва, че тя е насочена „срещу“ посоката на оклонение на топчето, която в случая е по положителната посока на оста Ox. Също така експериментално е установено, че при относително малки скорости силата на съпротивление е пропорционална на първата степен на скоростта на точката, т.е. $F_{\text{c}} = -k_1 x'$ (тук знакът минус има същия смисъл, като в случая на пружинна сила). Като приложим втория принцип на Нютон за този модел, получаваме уравнението

$$mx'' = -kx - k_1 x' + mg \text{ или } mx'' + k_1 x' + kx = mg.$$

Виждаме, че се получава връзка между неизвестната функция $x(t)$ и нейните производни $x'(t)$ $x''(t)$, която далеч не е толкова очевидна като в първите два примера (а има и случаи, когато силата на съпротивление е пропорционална на квадрата на скоростта и дясната страна на уравнението не е константа).

Тези примери ни навеждат на мисълта, че "диференциално уравнение"трябва да е някаква зависимост между неизвестната функция, нейните производни и независимата променлива. За да дадем строго определение на това що е "диференциално уравнение временно да "изоставим"физическата му интерпретация .

б) Определение и основни понятия

Определение 1.1 ***Обикновено диференциално уравнение от първи ред****, разрешено относно производната, наричаме израз от вида*

$$y^{'} = f(x,y), \ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.1}$$

където функцията $f(x,y)$ е непрекъсната функция на две променливи в областта D от равнината, x е независима променлива, а $y = y(x)$ е неизвестната функция.

Определение 1.2 *Функцията $y = \varphi(x)$, притежаваща непрекъсната производна за всяко $x \in (a,b)$, наричаме* ***решение на уравнението*** *(1.1), ако за всяко $x \in (a,b)$ е изпълнено равенството*

$$\varphi^{'}(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Графиката на функцията $y = \varphi(x)$ наричаме ***интегрална крива*** *на уравнението*

Пример 1.1.1 *Функцията $y = x, \ x \in (-\infty, \infty)$ е решение на уравнението $y' = 1$, а функцията $y = e^x, \ x \in (-\infty, \infty)$ е решение на уравнението $y' = y$.* ■

Да забележим, че в първия случай и функцията $y = x + C$, а във втория – функцията $y = Ce^x$, където C е произволна константа, също са решения на дадените диференциални уравнения. Графиките на всички тези решения, получени при произволни стойности на константите са интегрални криви на тези уравнения.

Често, заедно с уравнението (1.1) е целесъобразно да се разглежда и уравнението

$$x^{'} = \frac{1}{f(x,y)},\ (x,y) \in D_1 \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

с независима променлива y и неизвестна функция $x = x(y)$. Тук се възползвахме от известният от курса по Анализ 1 част факт, че ако за функцията $y = y(x)$ съществува обратната функция $x = x(y)$ и, ако в т. x съществува производната $y^{'}(x)$, то в т. $y = f(x)$ съществува и производната $x'(y)$ и при това $x^{'}(y) = 1/y^{'}(x)$, като в тези точки от D, в които $y'(x) = \infty$ полагаме $x'(y) = 0$ и обратно, ако в някоя точка от D_1 $x'(y) = \infty$, то полагаме $y'(x) = 0$. По този начин към дефиниционната област на (1.1) можем да присъединим и областта D_1, а също и онези точки, в които функците $f(x,y)$ и $1/f(x,y)$ имат отстранимо прекъсване. Например, уравнението $y' = \sin x/x$ можем да считаме дефинирано в цялата равнина, като положим $y'(0) = 1$ а уравнението $y' = y \ln y$ – в областта $G = \{(x,y)|\ y \geq 0,\ x \in \mathbb{R}\}$, като положим $y'(x) = 0$ при $y = 0$ (защо?).

Този подход към диференциалните уравнения, позволява ролята на променливите x и y да считаме еднаква (симетрична) и да напишем уравненията (1.1) и (1.2) в една по-обща (симетрична) форма, а именно, ако $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са непрекъснати функциина на две променливи, дефинирани в една и съща област $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогава под диференциално уравнение, дефинирано в тази област разбираме следнияя израз:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,\ (x,y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2, \tag{1.3}$$

От (1.3) лесно получаваме уравнението (1.1), като положим

$$P(x,y) = f(x,y),\ Q(x,y) = -1$$

и уравнението (1.2), като положим

$$P(x,y) = 1,\ Q(x,y) = -1/f(x,y)$$

и съобразим, че $y'(x) = dy/dx,\ x'(y) = dx/dy$. Освен това уравнението (1.3) допуска сравнително проста геометрична интерпетация.

Следващите понятия са необходими за по-нататъшното изложение.

Определение 1.3 *Правило по което на всяка т. $M(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ се съпоставя единствен вектор $\vec{F}(M)$ се нарича* ***векторно поле****, зададено в D.*

Спрямо една равнинна декартова координатна система полето $\vec{F}$ може да се зададе чрез двойка скаларни функции, дефинирани в олбастта D, по следния начин:

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}, \; (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2. \tag{1.4}$$

Често се използва следното по-кратко означение: $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$. По-нататък предполагаме, че функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати в областта D, заедно със своите частни производни от първи ред.

Определение 1.4 *Правило по което на всяко $t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ се съпоставя единствен вектор $\vec{r}(t)$ се нарича* ***векторнозначна функция****, дефинирана в интервала $[\alpha, \beta]$.*

Спрямо една равнинна декартова координатна система функцията $\vec{r}(t)$ може да се зададе чрез двойка скаларни функции, дефинирани в $[\alpha, \beta]$, по следния начин:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \; t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Съответно, тук краткото означение е $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$. Също така, интервала, в който е дефинирана функцията, може да бъде и отворен, полуотворен или безкраен.

Определение 1.5 *Функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$ се нарича* ***гладка*** *в интервала $[\alpha, \beta]$, ако за всяка точка от този интервал съществува производната и $\vec{r'}(t) = (x'(t), y'(t))$ и освен това $\vec{r'}(t) \neq \vec{0}$.*

Определение 1.6 *Множеството от точки в равнинатата*

$$\gamma = \{\, M(x(t), y(t)) \mid \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta] \,\},$$

където функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$ е гладка в интервала $[\alpha, \beta]$ се нарича ***гладка крива*** *в равнината .*

За да се зададе една крива, обикновено се използва означението

$$\gamma : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \text{ или } \gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \; t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.6}$$

Всяко едно от тези означения наричаме векторно-параметрично уравнение на кривата γ. Тъй като векторнозначни функции и криви са обект на разглеждане в една от следващите глави на настоящите записки, тук няма да се впускаме в подробности. Нека да изясним само най-важното – съществуването на различна от нулевият вектор производна на векторнозначна функция означава, че във всяка точка $M(x(t), y(t))$ от кривата $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$, съществува ненулев допирателен вектор $\vec{r'}(t)$. Освен това, понятието гладка крива обобщава понятието графика на диференцируема функция. Наистина, нека е дадена функцията $y = g(x), x \in [a,\ b]$, за която съществува $g'(x),\ x \in [a,\ b]$. Тогава, както е известно от курса по Анализ 1 част, графиката и се състои от точките $M(x, g(x)),\ x \in [a,\ b]$, като във всяка точка от тази графика съществува допирателна права с ъглов коефициент $k = \operatorname{tg}\,\alpha = g'(x)$. Нека сега разгледаме кривата γ_g с векторно-параметрично уравнение $\gamma_g :\ \vec{r}(x) = (x, g(x)), x \in [a,\ b]$ и допирателен вектор $\vec{r'}(x) = (1, g'(x)) \neq \vec{0}$. Не трудно да се види, че кривата γ_g и графиката на функцията $y = g(x), x \in [a,\ b]$ съвпадат като множества от точки в равнината и освен това допирателните им прави във всяка точка $M(x, g(x)),\ x \in [a,\ b]$ са колинеарни (защо ?). По същия начин може да се зададе и графиката на функция от вида $x = h(y),\ y \in [c,\ d]$, което оставяме за упражнение на читателя.

Понятието решение на диференциално уравнение може да се обобщи.

Определение 1.7 *Казваме, че гладката векторнозначна функция $\vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, е решение на уравнението (1.3) ако за всяка точка от този интервал е изпълнено равенството*

$$P(x(t), y(t))\ x'(t) + Q(x(t), y(t))\ y'(t) = 0. \tag{1.7}$$

Кривата $\gamma : \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ се нарича интегрална крива на уравнението.

Нека да отбележим, че равенство (1.7) може да се интерпретира като скаларно произведение на вектора на полето

$$\vec{F}(t) = (P(x(t), y(t)), Q(x(t), y(t))),$$

разгледано само върху точка от кривата γ и допирателният вектор към кривата в същата тази точка. т.е. върху интегралните криви на уравнението е изпълнено равенството

$$\vec{F}(t).\vec{r'}(t) = 0,\ t \in [\alpha, \beta]. \tag{1.8}$$

Както е известно от курса по ЛААГ, последното равенство означава, че в точките от кривата, в които $\vec{F} \neq \vec{0}$ е изпълнено съотношението $\vec{F} \perp \vec{r'}(t)$. Това дава основание точките от дефиниционната област на полето, в които $\vec{F} = \vec{0}$ да се наричат особени за разглежданото диференциално уравнение,защото нулевият вектор е перпендикулярен на всеки друг вектор.. Всички останали точки от областта D се наричат обикновени или правилни за даденото диференциално уравнение.

От така направените разглеждания следва, че да намерим решение на (1.3) означава да намерим гладка грива, чийто допирателни вектори са перпендикулярни на векторите на полето в точките от тази крива.

в) Начална задача (задача на Коши) за обикновено диференциално уравнение от първи ред. В приложенията, обикновено се търсят не всички решение на едно уравнение, а само това, което удовлетворява и някакво допълнително условие. Най -често това е така нареченото **начално условие**. Грубо казано, ако искаме да знаем точно закона за движение на една материална точка, на която познаваме скоростта като функция на времето, трябва да знаем и „откъде е тръгнала точката“, т.е. къде се е намирала в момента на започване на движението. Геометричният смисъл на такава задача е да се намери онази интегрална крива на уравнението, на която лежи една отнапред дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, която разбира се е от дефиниционната област на уравнението.(черт.!). Такава задача , поставена за едно диференциално уравнениене се нарича ***начална задача или задача на Коши*** за даденото уравнение. Обикновено се записва по следният начин:

$$\left| \begin{array}{l} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right. \quad \text{или } P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \ M_0(x_0, y_0). \tag{1.9}$$

В края на този параграф са формулирани условията за съществуване и единственост на задачата на Коши.

г) Общо и частно решение. Особено решение. Нека отново да разгледаме уравнението

$$y' = f(x, y), \ (x, y) \in D \tag{1.10}$$

и нека за всяко $(x_0, y_0) \in D$ задачата на Коши има единствено решение.

Определение 1.8 *Казваме, че непрекъснато - диференцируемата функция*

$$y = \varphi(x, C) \tag{1.11}$$

*е **общо решение** на това уравнение, ако:*

1. *За всяко $(x, y) \in D$ уравнението (1.11) е разрешимо спрямо константата C т.е. $C = \psi(x, y)$;*

2. *За всяка константа C, получена от горното равенство функцията (1.11) е решение на (1.10).*

Например за уравнението $y' = y$ функцията $y = Ce^x$ е общо решение в областта $D = \mathbb{R}^2$. наистина, лесно се вижда, че за всяко $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имаме $C = ye^{-x}$ и $(Ce^x)' = Ce^x$.

За да решим задачата на Коши, за дадено уравнение, ако ни е известно общото му решение, постъпваме по следният начин : във формула (1.11) заместваме $x = x_0,\ y = y_0$, откъдето намираме $C_0 = \psi(x_0, y_0)$ и заместваме получената стойност в (1.11)

$$y = \varphi(x, C_0)$$

Например за уравнението от примера по-горе, ако поставим начално условие $y(1) = 2$, получаваме $C_0 = 2e^{-1}$ и тогава решението на задачата на Коши се дава с функцията $y = 2e^{x-1}$.

Нека да формулираме една важна теорема от анализа, а именно – теоремата за неявната функция (накратко ТНФ).

Теорема 1.1 *(ТНФ , случай на една променлива) Нека:*

1. *в околност на точката (x_0, y_0) функцията $F(x, y)$ има непрекъснати частни производни $F_x^{'}(x, y)$ и $F_y^{'}(x, y)$;*
2. *$F(x_0, y_0) = 0$;*
3. *$F_y^{'}(x_0, y_0) \neq 0$*

Тогава съществува правоъгълник

$$K(x_0, y_0) = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,\ a, b > 0\}$$

с център точката (x_0, y_0), в който уравнението $F(x, y) = 0$ определя единствена функция $y = y(x)$, дефинирана в интервала $(x_0 - a, x_0 + a)$, приемаща значения в интервала $(y_0 - b, y_0 + b)$ и такава, че

1. *$F(x, y(x)) \equiv 0,\ x \in (x_0 - a, x_0 + a)$;*
2. *$y(x)$ е непрекъснато диференцируема в интервала $(x_0 - a, x_0 + a)$ и производната и се пресмята по формулата*

$$y'(x) = -\frac{F_x^{'}(x, y(x))}{F_y^{'}(x, y(x))}.$$

Функцията $y = y(x)$, определена от уравнението $F(x, y) = 0$ (която е решение на уравнението) се нарича **неявна функция**, определена от това уравнение. Да отбележим, че ако сменим ролите на x и y в горното уравнение, можем да получим условие за това то да определя неявна функция от вида $x = x(y)$ в някакъв правоъгълник.

Пример 1.1.2 *Да разгледаме уравнението $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Очевидно $F_x^{'} = 2x$, а $F_y^{y} = 2y \neq 0$ при $y \neq 0$. От уравнението е ясно че $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ за $x \in [-1, 1]$. От друга страна, при $x \in (-1, 1)$ имаме*

$$y'(x) = \pm\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y} = -\frac{F_x^{'}}{F_y^{y}}.$$

Това означава, че даденото уравнение определя две непрекъснато диференцируеми неявни функции, дефинрани в $(-1, 1)$, а именно $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $y_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Да обърнем внимание, че производната $y'(x)$ може да бъде лесно намерена от даденото уравнение, след като го диференцираме относно x, считайки y за неявна функция от x. Наистина, от тъждеството $x^2 + y^2(x) - 1 = 0$ след диференциране относно x, получаваме $2x + 2yy'(x) = 0$, откъдето намираме, че $y'(x) = -x/y, x \in (-1, 1)$ т.е. получихме същия резултат.

Ако решението на (1.10) или (1.3) е дадено в неявен вид (т.е. връзка между променливите x и y) от вида

$$F(x, y, C) = 0 \text{ или } \psi(x, y) = C,$$

то тя се нарича общ интеграл на уравнението. Например за уравнението $2 + y' = 0$ общ интеграл е неявно зададената функция $2x + y = C$.

Общото решение на уравненията (1.3) или (1.10) в параметрична форма се записва така

$$x = \varphi(t, C),\ y = \psi(t, C), t \in \Delta, \tag{1.12}$$

където Δ е някакъв интервал. Да разгледаме уравнението

$$xdx + ydy = 0.$$

Общото му решение в неявна форма е $x^2 + y^2 = C,\ C > 0$, а в параметрична форма е $x = C_1 \cos t,\ y = C_1 \sin t$.

Определение 1.9 *Решение на уравнението (1.10) (или (1.3)), във всяка точка на което имаме единственост на задачата на Коши се нарича* ***частно решение*** *на това уравнение.*

Ако ни е известно общото решение на едно диференциално уравненине, то всяко решение, получено от общото при конкректна допустима стойност на константата (включително и $\pm\infty$) е частно решение.

Определение 1.10 *Решение на уравнението (1.10) (или (1.3)), във всяка точка на което се нарушава единствеността на задачата на Коши се нарича* ***особено решение*** *на това уравнение.*

Особените решения не се съдържат във формулата за общо решение на уравнението, при никакво значение на константата C, включително и при $C = \pm\infty$.

Може да се докаже, че ако дясната страна на уравнението (1.10) е непрекъсната и има частни производни относно y, то особени решения могат да са само тези криви, за които във всяка тяхна точка частната производна $f'_y = \infty$. Тези криви, ако съществуват такива, са подозрителни за особени решения. при това, те са особени решения, ако 1) са решения на даденото уравнение ; 2) във всяка точка от тях се нарушава единствеността на задачата на Коши. От тук, следва например, че ако дясната страна на (1.10) е полином на x и y, то уравнението няма особени решения (Защо?). Също така, може да де покаже, че и уравнението (1.3) няма особени решения, ако функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са полиноми.

Пример 1.1.3 *Да разгледаме уравнението $y' = 2\sqrt{y},\ y \geq 0$. Общото решение се дава с формулата $y = (x + C)^2,\ x \geq -C$, което се вижда с непосредствена проверка. Фамилията интегрални криви на уравнението се състои от „полупараболите“$\gamma_C : y = (x+C)^2,\ x \in [-C, \infty)$. Дясната страна на даденото уравнение е $f(x, y) = 2\sqrt{y}$, чиято частна производна $f'_y = 1/\sqrt{y}$ е равна на $+\infty$ във всяко x. Съгласно казаното по-горе това означава, че правата $y = 0$ (оста Ox) е подозрителна за особено решение. От друга страна функцията $y = 0,\ x \in \mathbb{R}$, чиято графика съвпада с тази права е решение на уравнението, защото за всяко $x \in \mathbb{R}$ е вярно, че $0\,' = 0 = \sqrt{0}$. И тъй като при никаква стойност на константата C от формулата за общото решение не може да се получи решението $y = 0$, то е особено решение. От казаното дотук се вижда също така, че има и решения, които не са нито* ***особени нито частни****. Например, ако разгледаме решението $y(x)$, дефинирано по следният начин : $y(x) = 0,\ x \in (-\infty, 0)$ и $y(x) = x^2$, $x \in [0, \infty)$, то е нито частно, нито особено. Направете чертеж!* ■

Пример 1.1.4 *Уравнението $x(y - 2)dx + (x^2 - 1)(y + 1)dy = 0$ също няма особени решения.* ■

Ако за едно дадено уравнение фамилията интегрални криви от вида

$$\gamma_C : y = \varphi(x, C) \;\text{ или }\; \gamma_C : F(x, y, C) = 0$$

имат **обвивка**, т.е. крива, която във всяка своя точка се допира до крива от семейството интегрални криви, то такава крива също е решение на уравнението и при това особено. Наистина: 1) всяка такава крива е съшо интегрална крива на уравнението, защото в точките на допиране допирателните им прави имат един и същи ъглов коефициент; 2) във всяка точка от кривата се нарушава единствеността решението на задачата на Коши. Уравнението на обвивката (ако има такава) се определя от системата уравнения

$$y = \varphi(x, C),\ \varphi'_C = 0 \text{ или } F(x, y, C) = 0,\ F'_C(x, y, C) = 0.$$

С други думи от системата, получена от уравнението на фамилията и частната му производна по отношение на параметъра C, приравнена на нула, като изключим C, получаваме връзка между променливите x и y, от вида $H(x, y) = 0$. След това трябва да проверим дали получената крива $\Gamma : H(x, y) = 0$ е обвивка на фамилията γ_C или на част от него. По-нататък са разгледани конкретни примери. Нека отбележим, че съществуват и особени решения, които не са обвивки на фамилията от интегрални криви на едно уравнение.

д) Съставяне на диференциално уравнение на фамилия криви. Изогонални и ортогонални траектории. В някои случаи се налага по зададено уравнение на дадена фамилия криви да се напише диференциалното уравнение, което те удовлетворяват. Нека е дадено уравнението на фамилията криви

$$\gamma_C : F(x, y, C) = 0 \tag{1.13}$$

(в неявен вид). Да предположим, че в околност на някоя своя точка $M_0(x_0, y_0)$ кривата може да се зададе с уравнение от вида $y = \varphi(x, C)$ (изпълнени са условията на ТНФ). Тогава в околност на такава точка ъгловият коефициент на допирателната към кривата е $\operatorname{tg} \alpha = y' = \varphi'(x, C)$. Тогава, ако за тъждеството $F(x, y, C) = 0$ (в съответната околност), приложим формулата за производна на сложна функция, получаваме :

$$F'_x(x, y, C) + F'_y(x, y, C)y' = 0. \tag{1.14}$$

За да получим диференциалното уравнение на фамилията криви, от системата уравнения (1.13) и (1.14) изключваме константата C и получаваме зависимост от вида

$$G(x, y, y') = 0. \tag{1.15}$$

Пример 1.1.5 *Да се състави уравнението на фамилията прави*

$$x + 2y = C.$$

Решение. Като диференцираме относно x, получаваме $1 + 2y' = 0$, т.е.

$$y' = -\frac{1}{2}.$$

В този случай не е необходимо да се изключва константата. ■

Пример 1.1.6 *Да се състави уравнението на фамилията параболи*

$$y = Cx^2.$$

Решение. Очевидно $y' = 2Cx$. Сега от даденото уравнение, намираме $C = y/x^2$. Като заместим този израз във формулата за y', получаваме

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

■

Пример 1.1.7 *Да се напише уравнението на фамилията окръжности*

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

Решение. Считайки, че $y = y(x)$, като диференцираме горното равенство относно x, получаваме $2(x - C) + 2yy' = 0$. От друга страна имаме

$$(x - C) = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Окончателно получаваме

$$y' = \pm\frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}.$$

Обяснете защо се получават две диференциални уравнения. Направете чертеж на няколко криви от фамилията! ■

Нека сега да разгледаме задачата за траекториите.

Определение 1.11 *Нека е дадена една фамилия криви γ_C : $F(x, y, C) = 0$, чието диференциално уравнение е (1.15). Кривата Γ се нарича* ***изогонална траектория*** *на тази фамилия, ако тя пресича всяка крива от фамилията под един и същи ъгъл α. Ако $\alpha = \pi/2$ кривата Γ се нарича* ***ортогонална траектория*** *на фамилията γ_C. Черт.!!*

Нека да означим с $u = u(x)$ уравнението на Γ и да разгледаме случая $\alpha \neq \pi/2$. Тогава в пресечнатат точка $M = \Gamma \cap \gamma_C$ са изпълнени равенствата

$$y(x) = u(x) \text{ и } k = \operatorname{tg}\, \alpha = \operatorname{tg}\, (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{u'(x) - y'(x)}{1 + u'(x)y'(x)}, \tag{1.16}$$

където $\operatorname{tg}\, \varphi_1 = y'(x)$ и $\operatorname{tg}\, \varphi_2 = u'(x)$ са ъгловите коефициетни на допирателните в т.M на кривите γ_C и Γ. Тук се възползвахме и от факта, че $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$ (направете чертеж). Като изразим от (1.16) y' чрез k и u', получаваме

$$y' = \frac{u' - k}{u'k + 1}. \tag{1.17}$$

Сега остава да заместим в уравнението на γ_C (1.15) y с u и y' с израза от (1.17). Получаваме

$$G\left(x, u, \frac{u' - k}{u'k + 1}\right) = 0, \tag{1.18}$$

което е търсеното уравнение на изогоналните траектории.

Ако $\alpha = \pi/2$, като е известно условието за перпендикулярност на допирателните в т. M е

$$y'(x) = -\frac{1}{u'(x)}. \tag{1.19}$$

Тогава уравнението на ортогоналните траектории е

$$G\left(x, u, -\frac{1}{u'}\right) = 0. \tag{1.20}$$

Пример 1.1.8 *Да се напише уравнението на траекориите, сключващи ъгъл $\alpha = \pi/4$ с фамилията прави $\gamma_C : x + 3y = C$.*

Решение. Уравнението на дадената фамилия криви е $\gamma_C : y' = -1/3$, а $k = \operatorname{tg}\, \pi/4 = 1$. Тогава съответното уравнение е

$$\frac{u' - 1}{u' + 1} = -\frac{1}{3} \quad \text{или} \quad u' = \frac{1}{2}, \text{ откъдето намираме } \; u = \frac{1}{2}x + C_1.$$

Ясно е, че изогоналните траеткории са също фамилия успоредни прави, всяка права от която сключва ъгъл $\alpha = \pi/4$ със всяка права от дадената фамилия. ■

Пример 1.1.9 *Да се напише уравнението на ортогоналните траекории на фамилията концентрични окръжности $\gamma_C : x^2 + y^2 = C$.*

Решение. Уравнението на дадената фамилия криви е $\gamma_C : y' = -x/y$. Тогава, съгласно (1.20), уравнението на ортогоналните траектории е

$$u\,' = \frac{u}{x}, \text{ откъдето следва, че } u = Cx.$$

Ортогоналните траектории в този случай са също фафили прави през координатното начало, всяка една от които е колинеарна с един от радиусите на окръжностите от дадената фамилия. Направете чертеж! ■

1.1.2 Диференциални уравнения с отделящи се променливи и хомогенни диференциални уравнения

1. Диференциални уравнения с отделящи се променливи.

а)Диференциални уравнения, не съдържащи неизвестната функция или независимата променлива. Най-простият вид диференциални уравнения е известен още от курса по Анализ 1. Това са уравненията от вида:

$$y\,' = f(x) \;\text{ или }\; dy = f\,'(x)\,dx, \;\; x \in (a,\, b), \tag{1.21}$$

където $f(x)$ е непрекъсната функция дефинирана в интервала $(a,\, b)$, който може също така да е безкраен, затворен или полуотворен. В този случай решението, очевидно се дава с формулата

$$y = \int f(x)\,dx + C, \; x \in (a,\, b). \tag{1.22}$$

Всъщност, решението се свежда до намирането на всички примитивни функции на $f(x)$ в дадения интервал. Задачата на Коши в този случай е избирането на конкретна примитивна, минаваща през отнапред дадена точка $M_0(x_0, y_0)$, където x_0 е произволна фиксиранана точка от $(a,\, b)$, а y_0 е произволно реално число (да напомним, че всяка непрекъсната функция, дефинирана в даден интервал, притежава примитивна в този интервал и че формула (1.22) изчерпва съвкупността от всички примитивни на $f(x)$ в този интервал). Сега нека да разгледаме уравнението

$$y\,' = g(y) \;\text{ или }\; dx = \frac{1}{g(y)}\,dy, \;\; y \in (c,\, d), \tag{1.23}$$

което може да се разглежда като уравнение от вида (1.21) с разменени роли на зависимата и независимата променлива. Решението се дава с формулата

$$x + C = \int \frac{1}{g(y)}\,dy, \; y \in (c,\, d). \tag{1.24}$$

Тук трябва да отбележим, че реалните корени на уравнението $g(y) = 0$, ако има такива, са решения на диференциалното уравнение $y' = g(y)$, които могат да се окажат и особени. Ако $g(y)$ е полином, както беше споменато в уводния раздел, уравнението няма особени решения.

Пример 1.1.10 *Да се реши уравнението* $y\,' = \cos^2 y$.

Решение. Записваме уравнението във вида

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dx, \quad \text{откъдето} \quad \int \frac{1}{\cos^2 y} = \int dx + C \quad \text{т.е.} \quad \operatorname{tg} y = x + C,$$

което може да се запише и така:

$$y = \operatorname{arctg}(x + C).$$

Да забележим, че правите с уравнения $y = (2k+1)\pi/2$ (това са корените на уравнението $\cos^2 y = 0$) са решениия на даденото уравнение при това частни, не особени, защото могат да се получат от общото решение при $C = \pm\infty$. ■

б)Диференциални уравнения с отделящи се променливи.

Определение 1.12 *Уранение от вида*

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0, \tag{1.25}$$

където функциите $P_1(x)$ *и* $P_2(x)$ *са непрекъснати в някакъв интервал* $(a,\, b)$, *а функциите* $Q_1(y)$ *и* $Q_2(y)$ *са непрекъснати при* $y \in (c,\, d)$, *се нарича* ***уравнение с отделящи се променливи****.*

Да разгледаме най-напред един частен случай на това уравннение

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \tag{1.26}$$

което се нарича **уравнение с отделени променливи** и към което може да се сведе (1.25). Функциите P и Q считаме непрекъснати в съответните интервали. Нека гладката крива $\gamma : \vec{r} = (x(t), y(t)),\ t \in [\alpha,\, \beta]$ (тук се включват и случаите, когато кривата е графика на функция от вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$) удовлетворява (1.26), т.е.

$$P(x(t))x\,'(t)dt + Q(y(t))y\,'(t)dt = 0, \quad t \in [\alpha,\, \beta] \tag{1.27}$$

Като интегрираме относно t тъждеството (1.27), получаваме

$$\int P(x(t))x\,'(t)dt + \int Q(y(t))y\,'(t)dt = C, \quad t \in [\alpha,\, \beta], \tag{1.28}$$

които след внасяне под знака на диференциала на $x'(t)$ и $y'(t)$, може да се запише във вида

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,\ C = const. \tag{1.29}$$

Ако въведем означенията $F(x) = \int P(x)dx$ и $G(y) = \int Q(y)dy$, то равенство (1.29) може да се напише във вида

$$F(x) + G(y) = C \tag{1.30}$$

Равенство (1.30) представлява общото решение на уравнение (1.26), записано в неявен вид, защото ако при фиксирана стойност на константата напишем кое да е параметрично представяне на кривата, определена от (1.30) след като заместим $x = x(t)$ и $y = y(t)$ и диференцираме относно параметъра t ще получим (1.27), което е еквивалентно на (1.26). Трябва да отбележим, че константата може да приема само определени стойности, които зависят от дефиниционните интервали на функциите P и Q. Задачата на Коши за (1.26) се решава като заместим във формулата за общото решение x и y с x 0 и y_0, откъдето намираме $C_0 = F(x_0) + G(y_0)$ и съответното частно решение $F(x) + G(y) = C_0$. Ако началните данни не са в дефиниционните области на P и Q не се гарантира нито съществуване нито единственост на решението на задачата на Коши. Ако пък в т.$M(x_0, y_0)$ се анулират едновременно и P и Q (особена точка), то през тази точка могат да минават повече от една интегрална крива на уравнението.

В някои случаи (далеч не във всички, обаче) от горното равенство (1.30)може да се изрази y като явна функция на x или обратно.

Нека да разгледаме уравнението

$$y' = f(x)g(y),$$

където $f(x)$ и $g(y)$ са непрекъснати функции, дефинирани при $x \in (a, b)$ и съоветно $y \in (c, d)$. Не е трудно да се види, че от записа с производна лесно се минава към записа с диференциали, което се свежда към уравнение (1.26). Наистина, последното уравнение е еквивалентно на уравнението

$$f(x)\, dx - \frac{1}{g(y)}\, dy = 0,$$

което е частен случай на (1.26).

От друга стана ако разделим двете страни на (1.25) на произведението $P_2(x)Q_1(y) \neq 0$. Получаваме

$$\frac{P_1(x)\ Q_1(y)}{P_2(x)\ Q_1(y)}\, dx + \frac{P_2(x)\ Q_2(y)}{P_2(x)\ Q_1(y)}\, dy = 0,$$

или

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy = 0, \tag{1.31}$$

което пак е от вида (1.26). След интегриране на последното равенство, по аналогичен начин заключаваме, че общото решение на (1.25) се дава с формулата

$$F(x) + G(y) = C, \tag{1.32}$$

$$\text{където } F(x) = \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\,dx \ \text{ и } \ G(y) = \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}\,dy.$$

Остава да забележим, че реалните корени на уравненията $P_2(x) = 0$ и $Q_1(y) = 0$ са също решения на диференциалното уравнение (1.25). Наистина, нека $P_2(x_1) = 0,\ x_1 = const$. Тогава параметрично зададената крива

$$\vec{r} = (x_1, t),\ t \in (-\infty, \infty)$$

е интегрална крива на уравнението, защото

$$P_1(x_1)Q_1(t)dx_1 + P_2(x_1)Q_2(t)dt = P_1(x_1)Q_1(t).0 + 0.Q_2(t)dt = 0 + 0 = 0.$$

По аналогичен начин можем да се убедим, че ако $Q_1(y_1) = 0,\ y_1 = const$, то кривата с уравнение

$$\vec{r} = (t, y_1),\ t \in (-\infty, \infty)$$

е интегрална крива на уравнението.

Решенията от този вид могат са частни или особени. Ако функциите $P_2(x)$ и $Q_1(y)$ са полиноми, тези решения обезателно са частни (вж. предишния раздел).

Нека да разгледаме някои примери.

Пример 1.1.11 *Да се реши задачата на Коши за уравнението*

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

при следните начални условия $x = 0$ и $y = 1/2$.

Решение. Уравнението е с разделени променливи. Имаме

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = C$$

или :

$$\arcsin x + \arcsin y = C \quad \text{и в явен вид съответно} \quad y = \sin(C - \arcsin x).$$

Заместваме с дадените начални условия и получаваме

$$C = \arcsin 0 + \arcsin 1/2 = 0 + \pi/6 = \pi/6.$$

Съответното частно решение е

$$y = \sin(\pi/6 - \arcsin x).$$

Уравнението няма особени решения (защо?). ■

Пример 1.1.12 *Да се реши задачата на Коши за уравнението*

$$y\,' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

при следните начални условия: 1) при $x = 1$ *и* $y = 0$*; 2)* $x = 0$ *и* $y = 0$.

Решение. Уравнението е с разделящи се променливи. Имаме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \qquad \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

или :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + C,\ 2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C.$$

В първия случай получаваме $C_1 = 2\sqrt{0} - 2\sqrt{1} = -2$ и съответното частно решение е $2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} - 2$, а във втория съответно $C_2 = 2\sqrt{0} - 2\sqrt{0} = 0$ и съответното частно решение е $2\sqrt{y} = 2\sqrt{x}$ т.е. $y = x,\ x \geq 0$. Сега остава да изследваме случаите $y = 0$, и $x = 0$. Функцията $y = 0,\ x > 0$ е решение на даденото уравнение, а функцията $x = 0,\ y > 0$ е решение на „обърнатото“ уравнение $x' = \sqrt{x}/\sqrt{y}$. При това и двете решения са особени (защо?). ■

2.Хомогенни диференциални уравнения от първи ред.

Определение 1.13 *Уранение от вида*

$$y\,' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.33}$$

където функцията $f(z)$ *е непрекъсната в някакъв интервал* (a, b)*, се нарича* ***хомогенно уравнение от първи ред****.*

Всяко хомогенно уравнение може да се сведе към уравнение с отделящи се променливи посредством полагането

$$y(x) = z(x)x, \tag{1.34}$$

където $z(x)$ е новата неизвестна функция и запазим независимата променлива x. За да направим смяната трябва да изразим $y'(x)$ чрез $z'(x)$. От равенство (1.34) намираме

$$y\,'(x) = (zx)\,' = z\,'(x)x + z(x)x\,' = z\,'x + z.$$

След като заместим в даденото уравнение, получаваме

$$z\,'x + z = f(z), \text{ или } \frac{dz}{dx} = f(z) - z, \tag{1.35}$$

което е уравнение с разделящи се променливи. От (1.35) следва, че

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x} \text{ т.е. } \int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dx}{x} + C_1 \tag{1.36}$$

Нека означим с $F(z)$ интеграла в лявата страна на последното равенство и за удобство да положим $C_1 = \ln C$, $C > 0$. Получаваме $F(z) = \ln C|x|$. Тогава общото решение се дава с формулата

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln Cx, \tag{1.37}$$

където, запазвайки означението C за неизвестната константа считаме, че $Cx > 0$ за да запишем (1.37) без знака за модул. Сега остава да проверим дали уравнението $F(z) - z = 0$ има реални корени, защото ако z_1 е един негов корен, то функцията $z = z_1 = const$ е решение на диференциалното уравнение (1.35), и следователно правата с уравнение $y = z_1 x$ е решение на изходното хомогенно уравнение, което може да е особено или частно.

Забележка 1.1.1 *Ако уравнението е дадено в симетрична форма $P(x, y)\ dx + Q(x, y)\ dy = 0$ можем да проверим дари е хомогенно по два начина: или като го решим спрямо производната или като проверим дали P и Q са хомогенни функции от една и съща степен. Да напомним, че функцията $f(x, y)$ се нарича* ***хомогенна от степен*** *α, ако за всяко $t \neq 0$ е изпълнено равенството $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$. Проверете самостоятелно, че ако P и Q са хомогенни функции от една и съща степен, то уравнението е хомогенно.*

Забележка 1.1.2 *Нека да забележим, че всяко уравнение от вида*

$$x' = g\left(\frac{x}{y}\right)$$

е също хомогенно и може да се реши с полагането $x(y) = u(y)y$, където $u = u(y)$ е новата неизвестна функция, а y е независимата променлива.

Сега да разгледаме някои примери, които илюстрират казаното дотук.

Пример 1.1.13 *Да се реши задачата на Коши за уравнението*

$$y\,' = e^{-y/x} + \frac{y}{x},\ M_0(1, 0).$$

Решение. Уравнението е хомогенно. Полагме $y = z(x)\,x$, намираме

$$y\,'(x) = z\,'(x)\,x + z(x)\,x\,' = z\,'\,x + z$$

и заместваме в даденото уравнение. Последователно получаваме

$$z\,'x + z = e^{-z} + z,\ z\,' = e^{-z},\ e^z dz = \frac{dx}{x},\ \int e^z dz = \int \frac{dx}{x} + \ln C.$$

Тук, за удобство произволната константа я записахме във вида $\ln C$, $C > 0$, което е винаги удобно, когато решаваме хомогенно уравнение. По-нататък, имаме

$$e^z = \ln C_1 x,\ \frac{y}{x} = \ln(\ln C_1 x),\ y = x \ln(\ln C_1 x),\ C_1 = \pm C.$$

Последната формула, по-горе вдясно е явен запис на общото решение на уравнението. Сега от началните условия получаваме $0 = 1 \ln(\ln C_1 1)$, т. е. $\ln C_1 = 1$ от където е ясно, че $C_1 = e$. Търсеното частно решение е

$$y = x \ln(1 + \ln x).$$

Проверете чрез диференциране самостоятелно, че така намерената функция, удовлетворява уравнението и началното условие. ∎

Пример 1.1.14 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$$

Решение. Уравнението е също хомогенно, тъй като функциите

$$P(x, y) = x^2 - y^2 \text{ и } Q(x, y) = 2xy$$

са хомогенни от втора степен. Уравнението може да бъде решено, като в предишния пример. Тъй като в този случай уравнението е записано в симетрична форма, без да го решаваме спрямо y', полагме $y = zx$ и намираме $dy = xdz + zdx$. След това заместваме получения израз за dy в даденото уравнение и изнасяме зад скоби dx и dz. Ако работим вярно трябва да получим уравнение с отделящи се променливи. В този случай имаме

$$(x^2 - x^2z^2)dx + 2xzx(xdz + zdx) = 0,\ (x^2 - x^2z^2 + 2x^2z^2)dx + 2x^3zdz = 0,$$

или

$$x^2(1 + z^2)dx + 2x^3zdz = 0,$$

което очевидно е уравнение с разделящи се променливи. По-нататък, след като разделим двете страни на уравнението на $x^3(1 + z^2) \neq 0$, получаваме

$$\frac{dx}{x} + \frac{2zdz}{1 + z^2} = 0 \ \text{ и след като интегрираме } \ \ln|x| + \ln(1 + z^2) = \ln C.$$

След преработване на получения израз (направете това самостоятелно), общото решение може да се запише така:

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_1^2 \text{ където } C_1 = \pm\frac{C}{2}.$$

Последното уравнение е на фамилия окръжности с център т. $M(C_1, 0)$, лежаща на абцисната ос и радиус $R = C_1$. Да забележим също така, че правата с уравнение $x = 0$ (ординатната ос) е също решение на изходното уравнение, при това е частно (получава се от общото при $C_1 = \infty$). Уравнението няма особени решения, тъй като в този случай $f(z) - z = 1 + z^2 \neq 0$ за реални стойности на z. Има само една особена точка – т.$O(0, 0)$, защото задачата на Коши с начални данни $x_0 = 0,\ y_0 = 0$ има безброй много решения (всички окръжности от фамилията се допират до ординатната ос в тази точка – направете чертеж!). Факта, че т.$O(0, 0)$ е особена се вижда и от изходното уравнение – единственото решение на системата $x^2 - y^2 = 0,\ 2xy = 0$. ■

1.1.3 Диференциални уравнения, приводими към уравнения с отделящи се променливи и към хомогенни уравнения

1. Диференциални уравнения, приводими към уравнения с отделящи се променливи.

а) Диференциални уравнения от вида

$$y' = f(ax + by + c),\ a, b, c = const, \tag{1.38}$$

а f е непрекъсната функция в някакъв интервал Δ. Уравненията от този вид лесно се свеждат към уравнения с отделящи се променливи чрез въвеждане на нова неизвестна фунция

$$z(x) = ax + by(x) + c.$$

Тъй като $z'(x) = a+by'(x)$, като заместим в даденото уравнение, получаваме

$$\frac{z' - a}{b} = f(z), \tag{1.39}$$

което е с отделящи се променливи.

Пример 1.1.15 *Да се реши уравнението*

$$y' = -x^2 - 2xy - y^2$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(0,1)$.

Решение. Уравнението може да се представи във вида $y' = -(x+y)^2$. След като положим $z = x+y$ и диференцираме: $z' = 1+y'$, получаваме уравнението $z' = -1 - z^2$, което е с разделящи се променливи. Тогава

$$\frac{dz}{1+z^2} = -dx,\ \int \frac{dz}{1+z^2} = -\int dx + C,\ \operatorname{arctg} z = \text{-}x\text{+}C, .$$

т.е. $z = \operatorname{tg}\,(-x + C)$. Общото решение на изходното уравнение е

$$y = -x + \operatorname{tg}\,(-x + C),$$

а съответното частно решение е

$$y = -x + \operatorname{tg}\,(-x + \pi/4).$$

■

б) Диференциални уравнения от вида

$$y' = \frac{y}{x} + b(x)y^{\alpha},\ \alpha = const, \tag{1.40}$$

а $b(x)$ е непрекъсната функция в някакъв интервал Δ.

Уравненията от този вид не са хомогенни (частен случай на уравнение на Бернули, което се разглежда в следващата лекция), но чрез полагането $y = zx$ се свеждат към уравнения с отделящи се променливи. Наистина, като заместим $y' = z'x + z$,

$$z'x + z = z + b(x)z^{\alpha}x^{\alpha},\ \text{или}\ z' = b(x)z^{\alpha}x^{\alpha-1}, \tag{1.41}$$

което е уравнение с отделящи се променливи.

Пример 1.1.16 *Да се реши уравнението*

$$y' = \frac{y}{x} + (1+x)\sqrt{y}$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през т. $M(1,1)$.

Решение. След като положим $y = zx$ и диференцираме: $y' = z'x + z$, получаваме уравнението $z'x = (1+x)\sqrt{zx}$, което е с разделящи се променливи. Тогава, при $x \geq 0$ и $z > 0$, получаваме

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \frac{(1+x)}{\sqrt{x}}\,dx + C.$$

След като решим интегралите (направете това самостоятелно), получаваме

$$2\sqrt{z} = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C,$$

а като заместим z с y/x и повдигнем на квадрат двете страни на уравнението, можем да запишем общото решение на изходното уравнение по следния начин:

$$y = x(\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C_1)^2, C_1 = \frac{C}{2}.$$

За да определим константата, заместваме с началните данни в последната формула и получаваме $C_1 = -\frac{7}{3}$ или $C_1 = -\frac{1}{3}$, първата от която не е решение на поставената задача на Коши за това уравнение (Защо?). Съответното частно решение е

$$y = x(\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{3})^2.$$

Какво може да се каже за решението $y = 0$? ■

2. Диференциални уравнения от вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{1.42}$$

където $f = f(z)$ **е непрекъсната функция в някакъв интервал** Δ**, а** $a_i, b_i, c_i,\ i = 1, 2$ **са константи.** Съществуват три различни случая, които са разгледани по-долу.

а)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \lambda = const. \tag{1.43}$$

Тогава уравнението (1.42) придобива вида

$$y' = f(\lambda) = const, \text{ откъдето следва, че } y = f(\lambda)x + C, \tag{1.44}$$

което е общото решение на уравнението.

Пример 1.1.17 *Да се реши уравнението*

$$y' = \sqrt{\frac{2x+4y-6}{x+2y-3}}$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(\sqrt{2}, 3)$ *.*

Решение. Уравнението е еквивалентно на

$$y' = \sqrt{2}, \text{ т.е. } y = \sqrt{2}\,x + C,$$

От началното условие следва, че $C = 1$. Съответното частно решение е $y = \sqrt{2}x + 1$. ■

б)

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda = const \neq \frac{c_1}{c_2}. \tag{1.45}$$

В този случай е удобно да се въведе нова неизвестна функция

$$z(x) = a_2x + b_2y(x). \text{ Тогава } a_1x + b_1y + c_1 = \lambda z + c_1, \tag{1.46}$$

$$y' = \frac{z' - a_2}{b_2} \tag{1.47}$$

и като заместим в (1.42), получаваме

$$\frac{z' - a_2}{b_2} = f\left(\frac{\lambda z + c_1}{z + c_2}\right), \tag{1.48}$$

което е уравнение с отделящи се променливи. До подобен резултат се стига и при полагането $z(x) = a_1x + b_1y$.

Пример 1.1.18 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$y' = \frac{x - 2y + 1}{2x - 4y - 3}.$$

Решение Тук е удобно да положим $z = x - 2y$, откъдето намираме $z' = 1 - 2y'$ и заместваме в даденото уравнение:

$$\frac{1 - z'}{2} = \frac{z+1}{2z-3}, \text{ или } z' = \frac{-5}{2z-3}, \ (2z-3)\,dz = -5\,dx,$$

т.е.

$$\int (2z-3)dz = -5\int dx + C.$$

От тук следва, че $z^2-6z = -10x+C_1,\ C_1 = 2C$. Общото решение на даденото уравнение е

$$(x-2y)^2 + 4x + 12y = C_1$$

Особени решения няма. ■

в) Коефициентите пред x и y удовлетворяват условието

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \tag{1.49}$$

Тогава системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{array} \right. \tag{1.50}$$

има единствено решение $x = \alpha,\ y = \beta$ (защо?). Да сменим променливите в уравнение (1.42) по формулите

$$x = t + \alpha,\ y = z + \beta, \quad \text{където} \quad z = z(t) \tag{1.51}$$

е новата неизвестна функция и да диференцираме относно x равенството $y(x) = z(t(x)) + \beta$. Получаваме $y\,'(x) = z\,'(t)t\,'(x) = z\,'(t)$, защото $t\,'(x) = (x-\alpha)\,' = 1$. Сега като заместим в (1.42) с новите променливи и $y\,'(x)$ със $z\,'(t)$, и отчетем факта, че α и β са решения на (1.50) получаваме

$$z\,' = f\left(\frac{a_1t + b_1z}{a_2t + b_2z}\right), \tag{1.52}$$

което е хомогенно уравнение. Това се вижда, ако разделим числителя и знаменателя на дробта вдясно на t (вж. темата за хом. уравнения). Остава да положим $z(t) = w(t)t$. След като изразим $z\,'$ и заместим в (1.52) стигаме до уравнението

$$w\,'t + w = f\left(\frac{a_1 + b_1w}{a_2 + b_2w}\right), \tag{1.53}$$

което е с отделящи се променливи. След като го решим, остава да се върнем към старите променливи.

Пример 1.1.19 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

Решение. Като го решим го спрямо производната се вижда, че то е от вида, разгледан по-горе. Решнията на системата

$$\begin{vmatrix} 2x - y = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{vmatrix}$$

са $\alpha = -1/3$, $\beta = 1/3$. След полагането $x = t - 1/3$, $y = z + 1/3$, като отчетем, че $dx = dt$ и $dy = dz$ и заместим в даденото уравнение, получаваме

$$(2t - z)dt + (2z - t)dz = 0.$$

Сега отново полагаме $z = wt$, откъдето намираме $dz = tdw + wdt$ и заместваме в последното уравнение. Имаме

$$(2t - tw)dt + (2wt - t)(tdw + wdt) = 0,$$

или

$$2t(1 - w + w^2)dt + t^2(2w - 1)dw = 0.$$

Делим двете страни на последното уравнение на $t^2(w^2 + w - 1) \neq 0$ и интегрираме:

$$\int \frac{2}{t}dt + \int \frac{(2w - 1)}{(w^2 - w + 1)}dw = \ln C.$$

Първият интеграл е табличен, а за да решим втория, съобразяваме, че

$$d(w^2 - w + 1) = (2w - 1)dw,$$

и той се свежда към табличен. Получаваме

$$\ln t^2 + \ln|w^2 - w + 1| = \ln C, \text{ откъдето следва, че } t^2(w^2 - w + 1) = C_1,$$

т.е.

$$z^2 - zt + t^2 = C_1.$$

Сега да заместим z с $y - 1/3$, а t с $x + 1/3$ (извършете необходимите пресмятания). Общото решение изглежда така:

$$x^2 + y^2 - xy + x - y = C_2, \; C_2 = C_1 - \frac{1}{3}$$

Особени решения няма, има само една особена точка (коя ?). ■

1.1.4 Линейни диференциални уравнения и уравнения на Бернули и Рикати

1. Линейни диференциални уравнения от първи ред.

Определение 1.14 *Уранение от вида*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1.54}$$

където функциите $a(x)$ *са* $b(x)$ *непрекъснати в някакъв интервал* Δ*, а* $y = y(x)$ *е неизвестната функция, се нарича* ***линейно диференциално уравнение от първи ред*** *(ЛДУ от първи ред).*

Терминът "линейно"отразява факта, че производната на неизвестната функция y' е линейна функция на y с коефициенти, зависещи от независимата променлива x. Нека да отбележим, че уравнение от вида

$$x' = a_1(y)x + b_1(y), \tag{1.55}$$

където функциите $a_1(y)$ и $b_1(y)$ са непрекъснати в някакъв интервал, също се нарича ЛДУ от първи ред с независима променлива y и неизвестна функция $x = x(y)$. Нещо повече – има уравнения, които като ги решим спрямо y' не са от нито един от познатите видове, но като разменим ролите на x и y се получава уравнение от вида (1.55).

Оказва се, че за уравненията от вида (1.54), респективно (1.55), винаги може да се намери решение в явен вид, при това дефинирано в целия интервал, в който са дефинирани коефициентите. За да получим формулата за общото решение на (1.54) (другото се решава по същия начин), прилагаме метода на Лагранж, наречен още **метод на вариране на произволната константа**. Най-напред търсим решение на съответното ЛХДУ от първи ред, а именно на уравнението

$$y' = a(x)y, \tag{1.56}$$

което е също така и с отделящи се променливи. Имаме

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx, \text{ откъдето следва, че } \ln|y| = \int a(x)dx + C, \tag{1.57}$$

което може да се напише и така :

$$y = C_1 e^{\int a(x)dx}, \; C_1 = \pm\, e^C. \tag{1.58}$$

Идеята на метода на Лагранж се състои в това, да се замени неизвестната константа C_1 с неизвестна функция $\varphi(x)$, която да определим така , че функцията

$$y = \varphi(x)e^{\int a(x)dx} \tag{1.59}$$

да е решение на уравнението (1.54. За това диферецираме (1.59) и заместваме в (1.54). Получаваме

$$y'(x) = \varphi'(x)e^{\int a(x)\,dx} + \varphi(x)\left(e^{\int a(x)\,dx}\right)' = \varphi'(x)e^{\int a(x)\,dx} + \varphi(x)e^{\int a(x)\,dx}a(x),$$

$$\varphi'(x)e^{\int a(x)dx} + \varphi(x)e^{\int a(x)dx}a(x) = a(x)\varphi(x)e^{\int a(x)dx} + b(x),$$

от където следва че

$$\varphi'(x)e^{\int a(x)\,dx} = b(x), \text{ т.е. } \varphi'(x) = b(x)e^{-\int a(x)\,dx}$$

и следователно

$$\varphi(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx + C. \tag{1.60}$$

Формулата за общото решение на (1.54) получаваме като в (1.59) заместим полученият резултат за (1.60):

$$y = e^{\int a(x)\,dx}\left[C + \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{1.61}$$

От направеното дотук се вижда, че за да решим едно линейно уравнение, първо трябва да го „познаем“, че е линейно и второ – да решим правилно интегралите. Освен това, трябва да се има предвид и, че в някои учебници и сборници общият вид на линейно уравнение се дава с формулата

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.62}$$

и съответно решението с формулата

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]. \tag{1.63}$$

Линейните уравнения нямат особени решения.

Пример 1.1.20 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$x^3y' + 3x^2y - 2 = 0$$

и да се намери онази интегрална крива, минаваща през т. $M(1,1)$.

Решение. Като го решим го спрямо производната се вижда, че то линейно:

$$y' = -\frac{3}{x}y + \frac{2}{x^3},\ \text{в този случай}\ a(x) = -\frac{3}{x},\ b(x) = \frac{2}{x^3},\ x \neq 0.$$

Заместваме във формула (1.61) :

$$y = e^{-\int \frac{3}{x}\,dx}\left[C + \int \frac{2}{x^3}\, e^{\int \frac{3}{x}\,dx}\,dx\right].$$

Последователно намираме

$$\int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln|x|,\ \text{и тъй като}\ e^{3\ln|x|} = |x|^3,\ e^{-3\ln|x|} = \frac{1}{|x|^3}\ \text{(защо?)},$$

то

$$\int \frac{2}{x^3}\, e^{\int \frac{3}{x}\,dx}\,dx = \int \frac{2}{x^3}|x|^3\,dx = \pm 2\,x.$$

Тъй като случаите $x > 0$ и $x < 0$ се разглеждат аналогично, можем да се освободим от модула за сметка на произволната константа C, като ще запазим същото означение за нея. Тогава общото решение може да се запише така

$$y = \frac{1}{x^3}\,(C + 2\,x)\ \text{ или }\ y = \frac{C}{x^3} + \frac{2}{x^2},\ x \neq 0.$$

Сега да заместим x и y с единица. Получаваме

$$1 = C + 2, C = -1.\ \text{Съответното частно решение е}\ y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}.$$

■

Пример 1.1.21 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$$

Решение. Това уравнение не е нито с отделящи се променливи нито хомогенно нито линейно с неизвестна функция y (защо?).

Като го решим го спрямо $x'(y) = 1/y'(x)$ се вижда, че то е ЛДУ с неизвестна функция x. Наистина

$$x' = \frac{2y-1}{y^2}x + 1,\ \left(a(y) = \frac{2y-1}{y},\ b(y) = 1\right),\ y \neq 0.$$

Заместваме във формула (1.61), като разменим ролите на x и y:

$$x = e^{\int (2y-1)/y^2\,dy}\left[C + \int\ e^{-\int (2y-1)/y^2 dy}\ dy\right].$$

Пресмятаме

$$\int \frac{2y-1}{y^2}\,dy = 2\int \frac{1}{y}\,dy - \int \frac{1}{y^2}dy = 2\ln|y| + \frac{1}{y} = \ln y^2 + \frac{1}{y}$$

и следователно (както в предишния пример), получаваме

$$e^{\ln y^2 + 1/y} = y^2 e^{1/y},\ \text{ и } e^{-\ln y^2 - 1/y} = \frac{1}{y^2}e^{-1/y}.$$

За втория интеграл получаваме

$$\int \frac{1}{y^2}\,e^{-1/y}\,dy = \int e^{-1/y} d\,(-1/y) = e^{-1/y}.$$

Общото решение е:

$$x(y) = y^2(Ce^{1/y} + 1).$$

■

2. Бернулиеви диференциални уравнения .

Определение 1.15 *Уранение от вида*

$$y\,' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \tag{1.64}$$

където функциите $a(x)$ *са* $b(x)$ *непрекъснати в някакъв интервал* Δ, $y = y(x)$ *е неизвестната функция, а* $\alpha = const$, $\alpha \neq 0, 1$ *се нарича* ***диференциално уравнение на Бернули*** .

Най-напред да забележим, че случаите $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$ са вече познати. В първия случай се получава линейно уравнение, а във втория – уравнение с отделящи се променливи. Във всички останали случаи даденото уравнение може да се сведе към линейно чрез подходяща смяна на неизвестната функция.

Нека да разделим двете страни на (1.64) на $y^{\alpha} \neq 0$. Имаме

$$y\,'y^{-\alpha} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x), \tag{1.65}$$

в което правим смяна на неизвестната функция по формулата

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) \tag{1.66}$$

и диференцираме двете страни на горното равенство:

$$z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'(x). \tag{1.67}$$

Сега остава да забележим, че можем заместим израза в лявата страна на (1.65), който е $y'y^{-\alpha}$ с $z'/(1-\alpha)$ (разбира се и $y^{1-\alpha}$ със z) и да умножим двете страни на уравнението с $1-\alpha$. Получаваме уравнението

$$z' = a(x)(1-\alpha)z + b(x)(1-\alpha), \tag{1.68}$$

което е линейно с коефициенти $a_1(x) = a(x)(1-\alpha)$ $b_1(x) = b(x)(1-\alpha)$ и неизвестна функция z. Намираме общото му решение $z(x) = \varphi(x, C)$ по фомула (1.61) , след което се връщаме към изходната функция :

$$y(x) = \varphi(x, C)^{1/(1-\alpha)}, \tag{1.69}$$

което е и общото решение на (1.64). Остава да отбележим, че при $\alpha > 0$ функцията $y \equiv 0$ е също решение на (1.64), при това особено, ако $0 < \alpha < 1$ и частно при $\alpha > 1$.

Пример 1.1.22 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$y' - 9x^2y - 3(x^5 + x^2)y^{2/3} = 0.$$

Решение. Решаваме го спрямо y' и виждаме, че то е Бернулиево с неизвестна функция y и $\alpha = 2/3$. Наистина

$$y' = 9x^2y + 3(x^5 + x^2)y^{2/3}$$

Делим двете страни на последното уравнение на $y^{2/3} \neq 0$.

$$y'y^{-2/3} = 9x^2y^{1/3} + 3(x^5 + x^2).$$

Полагаме $y^{1/3} = z$, откъдето намираме

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y' = z'.$$

След заместване по-горе, се получава линейното уравнение

$$z' = 3x^2z + (x^5 + x^2).$$

Сега от формулата за решение на линейно уравнение следва, че

$$z = e^{\int 3x^2dx}\left[C + \int (x^5 + x^2)e^{-\int 3x^2dx}dx\right],$$

т.е.
$$z = e^{x^3}\left[C + \int (x^5 + x^2)e^{-x^3} dx\right].$$
Втория интеграл решаваме, като внесем x^2 под знака на диференциала и интегрираме по части:
$$\int (x^5 + x^2)e^{-x^3}\, dx = \frac{1}{3}\int (x^3 + 1)e^{-x^3} 3x^2\, dx = \frac{1}{3}\int (x^3 + 1)e^{-x^3}\, dx^3.$$
За удобство полагаме $x^3 = t$. По-нататък, получаваме
$$\frac{1}{3}\int (t + 1)e^{-t}\, dt = -\frac{1}{3}\int (t + 1)\, de^{-t} = -\frac{1}{3}(t + 1)e^{-t} + \frac{1}{3}\int e^{-t}\, d(t + 1) =$$
$$= -\frac{1}{3}(t + 1)e^{-t} + \frac{1}{3}\int e^{-t}\, dt = \frac{1}{3}(t + 1)e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-t}\, dt = -\frac{1}{3}e^{-t}\,(t + 2).$$
Тогава
$$\int (x^5 + x^2)e^{-x^3}\, dx = -\frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3 + 2\right).$$
Общото решение на линейното уравнение е
$$z = e^{x^3}\left[C - \frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3 + 2\right)\right]$$
Сега от полагането следва, че $y = z^3$, т.е. общото решение на Бернулиевото уравнение е
$$y = e^{3x^3}\left[C - \frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3 + 2\right)\right]^3.$$
Остава да забележим, че $y = 0$ също решение на изходното уравнение, при това особено ($\alpha = 2/3 \in (0, 1)$). ■

3. Уравнение на Рикати.

Определение 1.16 *Уранение от вида*

$$y\,' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \tag{1.70}$$

където функциите $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ са непрекъснати в някакъв интервал Δ, $y = y(x)$ е неизвестната функция, се нарича ***диференциално уравнение на Рикати*** *.*

С други думи, това е уравнение, в което y' е квадратна функция на y с непрекъснати коефициенти, зависещи от x. Да обърнем внимание, че случаите $a(x) \equiv 0$ и $c(x) \equiv 0$ са вече изучени (защо?).

Характерна особеност на този вид уравнения е, че общото им решение не винаги може да бъде намерено. Например уравнението

$$y' = x^2 + y^2$$

е уравнение на Рикати с коефициенти $a(x) = 1$, $b(x) = 0$ и $c(x) = x^2$, на което не е известно точното решение въпреки, че изглежда доста просто.

Но, ако е известно едно частно решение на (1.70) $y = y_1(x)$, то това уравнение може да бъде сведено към линейно чрез полагането

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \tag{1.71}$$

където z е новата неизвестна функция. За да се убедим в това, намираме y':

$$y' = y_1' - \frac{1}{z^2}z'$$

и заместваме в (1.70). Получаваме

$$y_1' - \frac{1}{z^2}z' = a(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + b(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right) + c(x).$$

Като преработим последния израз и отчетем факта, че y_1 е решение на (1.70), стигаме до уравнението.

$$-\frac{1}{z^2}z' = 2a(x)\frac{1}{z} + a(x)\frac{1}{z^2} + b(x)\frac{1}{z}. \tag{1.72}$$

След като умножим двете страни на (1.71) по $-1/z^2$ получаваме

$$z' = -(2a(x) + b(x))z - a(x), \tag{1.73}$$

което е линейно относно неизвестната функция z. Тъй като дясната страна на всяко уравнение на Рикати е полином от втора степен спрямо y, то няма особени решения.

Пример 1.1.23 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x,$$

ако е известно, че притежава частно решение от вида $y_1(x) = ax + b$.

Решение. Уравнението е Рикатиево. Трябва да определим константите a и b така, че $y_1(x)$ да го удовлетворява. За да ги намерим диференцираме и заместваме в даденото уравнение. Получаваме

$$ax = (ax+b)^2 - (2x+1)(ax+b) + x^2 + 2x.$$

След разкриване на скобите и подреждане по степените на x, стигаме до равенството

$$(a^2 - 2a + 1)x^2 + (2ab - 2a + 2b + 2)x + b^2 - b = 0,$$

което трябва да е изпълнено за всяко x. Като приравним коефициентите пред степените на x на 0 и решим получената система за a и b, намираме $a = 1$ и $b = 0$, т.е. частното решение има вида $y_1 = x$. Полагаме $y = x + 1/z$, откъдето намираме

$$y\,' = 1 - \frac{1}{z^2 z\,'}$$

и заместваме отново в изходното уравнение :

$$x\left(1 - \frac{z\,'}{z^2}\right) = \left(x + \frac{1}{z}\right)^2 - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z}\right) + x^2 + 2x.$$

Като извършим всички необходими пресмятания, стигаме до уравнението

$$z\,'x = z - 1, \text{ откъдето } \int \frac{dz}{z-1} = \int \frac{dx}{x} \text{ или } z = Cx + 1$$

Окончателно получаваме

$$y = x + \frac{1}{Cx+1}.$$

■

1.1.5 Точни диференциални диференциални уравнения и уравнения, допускащи интегриращ множител

1. Точни диференциални уравнения.

Определение 1.17 *Уравнението*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{1.74}$$

където функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са дефинирани и непрекъснати в областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$, се нарича ***точно****, ако съществува диференцируема функция $U = U(x,y)$, дефинирана в D и такава, че са изпълнени равенствата:*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \text{ и } \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y),\ (x,y) \in D. \tag{1.75}$$

Нека кривата γ с параметрично уравнение

$$\gamma : \vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},\ t \in \Delta, \tag{1.76}$$

лежаща в D е интегрална крива на (1.74). Тогава

$$\begin{aligned} \frac{dU(x(t),y(t))}{dt} &= U_x^{'}(x(t),y(t))\ x\,'(t) + U_y^{'}(x(t),y(t))\ y\,'(t) = \\ &= P(x(t),y(t))\ x\,'(t) + Q(x(t),y(t))\ y\,'(t) = 0,\ t \in \Delta. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Но това означава, че върху γ функцията U е равна на константа. Тъй като γ е произволно избрана интегрална крива на уравнението, това означава, че върху всяко решение на (1.74) е изпълнено равенството

$$U(x,y) = C = const. \tag{1.78}$$

С други думи, от последната формула при всички допустими стойности на константата се получават решенията на (1.74), записани в неявен вид – т.е. формула (1.78) е общото решение на (1.74). Ако предположим, че функцията $U(x,y)$ притежава непрекъснати частни производни от втори ред в D, то необходимо условие уравнението (1.74) да е точно в областта D е да е изпълнено тъждеството

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},\ (x,y) \in D. \tag{1.79}$$

Наистина, като диференцираме, като диферецираме първото от равенствата в (1.75) относно x, а второто относно y, получаваме

$$\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{Q(x,y)}{\partial x},\ (x,y) \in D. \tag{1.80}$$

Равенство (1.79) следва от теоремата за равенство на вторите смесени производни на на функция на две и повече променливи. При някои допълнителни предположения за областта D условието (1.79) е и достатъчно за да бъде (1.74) точно диференциално уравнение.

Определение 1.18 *Областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$ се нарича* ***едносвързана****, ако за всяка затворена начупена линия, лежаща изцяло в D и многоъгълникът, който е заграден от тази линия, също лежи изцяло в D. (Чертеж!).*

С други думи, една област в равнината се нарича едносвързана, ако в нея няма „дупки“. Например, лист хартия с произволна форма може да послужи за „реален“ модел на едносвързана област. Но, ако изрежем един или повече отвори вътре в листа (дори само да пробием листа с игла) ще получим област, която не е едносвързана. За едносвързани области е вярна следната теорема.

Теорема 1.2 *Нека функциите $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и частните им производни $P_y^{'}(x,y)$ и $Q_x^{'}(x,y)$ са непрекъснати в едносвързаната област $D \subseteq \mathbb{R}^2$ Тогава необходимото и достатъчно условие да съществува диференцируема функция $U = U(x,y)$, дефинирана в областта D и такава, че $U_x^{'}(x,y) = P(x,y)$ и $U_y^{'}(x,y) = Q(x,y)$ е в D да е изпълнено равенството (1.79).*

Намирането на функцята $U(x,y)$ може да стане по едната от следните формули (обосновката на този факт е предмет на темата за криволинейни интеграли от втори род) :

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x,s)\,ds \quad \text{или} \quad U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s)\,ds, \tag{1.81}$$

където $M_0(x_0,y_0)$ е произволна фиксирана точка от D, а $M(x,y)$ е коя и да е точка от същата област, а интегрирането се извършва по отсечките, успоредни на координатните оси и свързващи т.$M_0(x_0,y_0)$, т.$N(x,y_0)$ и $M(x,y)$ или т.M_0, т.$L(x_0,y)$ и т.M. Направете чертеж! Ако вече сме намерили функцията U, общото решение на (1.74) се дава с формула (1.78).

За да решим задачата на Коши за уравнението (1.74) е достатъчно с конкретните начални данни $M_0(x_0,y_0) \in D$ да заместим в (1.78), от където намираме точната константа $C_0 = U(x_0,y_0)$. Съществуването и единствеността на решението на задачата на Коши е гарантирано в случай, че точката $M_0(x_0,y_0) \in D$ не е особена, т.е.

$$\vec{F}(M_0) = P(x_0,y_0)\vec{i} + Q(x_0,y_0)\vec{j} \neq \vec{0}. \tag{1.82}$$

Точните диференциални уравнения нямат особени решения, а само отделни особени точки.

Нека да разгледаме и един друг (най-често прилаган на практика) начин за намиране на функцията $U(x,y)$. От равенството $U'_x = P(x,y)$ (първото равенство в (1.75)) следва, че

$$U(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y), \tag{1.83}$$

като при интегрирането на y гледаме като на константа и затова добавяме засега неизвестната фукция $\varphi(y)$ ($\varphi'_x(y) = 0$). Сега от една страна имаме равенството $U'_y(x,y) = Q(x,y)$, а от друга

$$U'_y(x,y) = \left(\int P(x,y)dx\right)'_y + \varphi'(y). \tag{1.84}$$

Като ги приравним, получаваме

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \left(\int P(x,y)dx\right)'_y. \tag{1.85}$$

Ако работим вярно се получава, че дясната страна на (1.85) зависи само от y (като се диференцира дясната страна на (1.85) относно x, от теоремата за равенство на смесените производни и от (1.75) следва, че тази производна е равно на нула). Така стигаме до уравнението

$$\varphi'(y) = g(y), \quad \text{откъдето намираме} \quad \varphi(y) = \int g(y)dy. \tag{1.86}$$

Тогава общото решение на уравнението (1.74) може да се запише във вида

$$\int P(x,y)dx + \int g(y)dy = C. \tag{1.87}$$

Не трудно да се види, че ако се тръгне от второто равенство на (1.75) се стига до същият резултат само, че неизвестната функция зависи само от x.

Пример 1.1.24 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$(2x + 3y - 5)dx + (3x - 4y + 3)dy = 0$$

и да се намери интегралната крива на това уравнение, минаваща през т.$M_0(2,3)$.

Решение. Тук $P = 2x + 3y - 5$, $Q = 3x - 4y + 3$ и равенството $P'_y = 3 = Q'_x$, което се изпълнява в цялата равнина, се проверява лесно. Обърнете внимание, че уравнението е и от тези, които могат да се приведат към хомогенно уравнение, но ако го решим като такова уравнение, пресмятанията ще са доста по-дълги. Да приложим метода, изложен по-горе. Тогава

$$U = \int (2x+3y-5)dx + \varphi(y) = x^2+3xy-5x+\varphi(y),\ U'_y = 3x+\varphi'(y) = 3x-4y+3,$$

откъдето следва, че

$$\varphi\,'(y) = -4y + 3, \quad \text{или} \quad \varphi(y) = -2y^2 + 3y.$$

Общото решение на това уравнениение е

$$x^2 + 3xy - 5x - 2y^2 + 3y = C.$$

За да намерим константата C заместваме в последното равенство с $x = 2$ и $y = 3$ и получаваме $C = 3$. Съответното частно решение е

$$x^2 + 3xy - 5x - 2y^2 + 3y = 3.$$

Ако тръгнем от условието $U'_y = Q = 3x - 4y + 3$, получаваме

$$U = \int 3x-4y+3dy+\psi(x) = 3xy-2y^2+3y+\psi(x) \text{ и } 2x+3y-5 = U'_x = 3y+\psi'(x),$$

което означава, че

$$\psi\,'(x) = 2x - 5,\ \psi(x) = x^2 - 5x \text{ и съответно } U = 3xy - 2y^2 + 3y + x^2 - 5x,$$

която е същата функция. ■

Забележка 1.1.3 *Може да се покаже, че ако областта D не е едносвързана въпреки наличието на условие (1.79) може уравнението (1.74) да не точно, т.е. да не съществува функция $U(x, y)$ такава, че да се изпълняват равенствата (1.75) или получената функция да бъде многозначна. Но във всяка едносвързана подобласт D_1 на D условието (1.79) гарантира, че уравнението е точно.*

Забележка 1.1.4 *Фунцията $U(x, y)$, дефинирана в едносвързаната област D и удовлетворяваща уравнението (1.74) се нарича* ***потенциална функция, или само потенциал****, а полето $\vec{F}$, което тя поражда чрез* *формулите (1.75) се нарича* ***потенциално, или консервативно*** *векторно поле. Линиите $\gamma_C : U(x,y) = C$ се наричат* ***еквипотенциални линии на полето****- т.е. линии, върху които потенциала е един и същ. Да се реши едно точно диференициално уравнение означава по съответното потенциално векторно поле, дефинирано в едносвързаната област D да се намерят еквипотенциалните линии на полето. Потенциалните силови полета играят важна роля в много задачи от физиката и механиката. Примери на потенциални силови полета са полето на точков електричен заряд с големина q, поставен в точка от равнината (или в пространството), също така гравитационното силово поле, създадено от материална точка с маса m.*

2. Диференциални уравнения, допускащи интегриращ множител. Сега нека се опитаме да решим една такава задача: отново е дадено уравнението (1.74), но условието (1.79) не изпълнено. Задачата е при какви условия съществува функция $\mu = \mu(x,y) \neq 0$ и такава, че уравнението

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{1.88}$$

да е точно в някаква едносвързана област D в равнината. Ако такава фунция съществува за даденото уравнение тя се нарича **интегриращ множител** за това уравнение. Съгласно теорема 1.2, необходимото и достатъчно условие за това е да бъде изпълнено равенството

$$(\mu(x,y)\ P(x,y))'_y = (\mu(x,y)\ Q(x,y))'_x,\ (x,y) \in D. \tag{1.89}$$

След като извършим диференцирането в (1.89) и преработим, получаваме

$$\mu'_x Q - \mu'_y P = \mu(P'_y - Q'_x), \tag{1.90}$$

което е уравнение, съдържащо частни производни, т.е. задачата за намиране на интегриращ множител за дадено уравнение може да се окаже и по-трудна от решаването на самото уравнение. За това най-често се търси интегриращ множител от някакъв по-специален вид $\mu = \mu(\omega)$, където $\omega = \omega(x,y)$, в частен случай $\omega = x$ или $\omega = y$. Нека потърсим достатъчно условие за съществуването на интегриращ множител от вида $\mu = \mu(\omega(x,y))$. Ако предположим, че такъв наистина съществува, то

$$\mu'_x = \mu'(\omega)\,\omega'_x \ \text{ и } \ \mu'_y = \mu'(\omega)\,\omega'_y.$$

След като заместим в (1.89) и преработим, стигаме до уравнението

$$\mu'_\omega = \frac{P'_y - Q'_x}{Q\omega'_x - P\omega'_y}\,\mu. \tag{1.91}$$

Сега е ясно, че ако множителят пред μ в (1.91) зависи само от ω, .т. е. има вида $g = g(\omega)$, то за μ получаваме уравнение с отделящи се променливи

$$\mu_\omega^{'} = g(\omega)\mu, \text{ откъдето следва, че } \mu = e^{\int g(\omega)\, d\omega}, \ (C = 1). \tag{1.92}$$

В частност, ако търсим множител $\mu = \mu(x)$, т.е. $\omega = x$ и очевидно $\omega_x^{'} = 1$, $\omega_y^{'} = 0$. Такъв съществува, когато

$$\frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q} \equiv g(x) \text{ и тогава } \mu(x) = e^{\int g(x)\, dx}. \tag{1.93}$$

Ако търсим множител от вида $\mu = \mu(x)$, аналогично $\omega = y$, $\omega_x' = 0$, $\omega_y' = 1$ и такъв съществува, когато

$$\frac{P_y' - Q_x'}{-P} \equiv g(y) \text{ и следователно } \mu(y) = e^{\int g(y) dy}. \tag{1.94}$$

Често срещани интегриращи множители при решаване на подобни уравнения са, когато ω е една от следните функции : $x \pm y$, xy, $x^2 \pm y^2$ и др.

След като намерим интегриращ множител за едно уравнение, можем да го решим по метода, изложен в точка 1 от тази тема. Но може да се случи следното: 1) да загубим решения на изходното уравнение, които могат да се окажат особени; 2) може да получим и чужди решения. Първият от тези случаи е възможен, ако намереният интегриращ множител μ е равен на безкрайност върху някаква крива, която е интегрална крива на изходното уравнение, а вторият, ако μ се анулира, отново върху някаква крива, която може и да е решение на новополученото уравнение, но не и на изходното.

Пример 1.1.25 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$(\sqrt{x^2 - y} + 2x)\, dx - dy = 0,$$

ако е известно, че съществува интегриращ множител от вида $\mu = \mu(x^2 - y)$, *т.е.* $\omega = x^2 - y$.

Решение. Тук $P = \sqrt{x^2 - y} + 2x$, $Q = -1$ Тогава $P_y^{'} = -1/(2\sqrt{x^2 - y})$, а $Q_x^{'} = -1$ За да проверим дали множителя пред μ в (1.91) зависи само от ω, пресмятаме $\omega_x' = 2x$ и $\omega_y' = -1$ и заместваме в същият този израз :

$$\frac{P_y^{'} - Q_x^{'}}{Q\omega_x^{'} - P\omega_y^{'}} = \frac{-1/(2\sqrt{x^2 - y})}{-2x + (\sqrt{x^2 - y} + 2x)} = -\frac{1}{2(x^2 - y)} = -\frac{1}{2\omega}$$

Уравнението за $\mu(\omega)$ в този конкретен случай има вида :

$$\frac{d\mu}{d\omega} = -\frac{1}{2\omega}\mu, \text{ откъдето намираме } \mu = e^{-1/2\int 1/\omega d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y}}.$$

Сега умножаваме двете страни на даденото уравнение с намереният интегриращ множител и получаваме уравнението

$$\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-y}}\right)dx - \frac{dy}{\sqrt{x^2-y}} = 0,$$

което, разбира се е точно (ако сме работили вярно). Тогава

$$U = \int\left(1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2-y}}\right)dx + \varphi(y) = x + 2\int\frac{d(x^2-y)}{2\sqrt{x^2-y}} + \varphi(y) =$$

$$= x + 2\sqrt{x^2-y} + \varphi(y).$$

Лесно се вижда, че $\varphi(y) = const$, което значи, че общото решение дададеното уравнение може да се запише така :

$$x + 2\sqrt{x^2-y} = C$$

Сега остава да проверим, дали не сме изгубили някое решение на изходното уравнение (или не сме придобили някое чуждо решение, което не го удовлетворява). Тъй като, в конкретния случай интегриращият множител $\mu(x,y)$ не се анулира никъде, придобити решения няма. От друга страна, кривата с уравнение $y = x^2$ не е решение на полученото точно уравнение, защото върху тази крива полето не е дефинирано ($P(x,y) = \infty$ и $Q(x,y) = \infty$ върху нея), докато, както се вижда тя е интегрална крива (решение) на първоначално зададеното уравнение. При това, както се вижда особено, защото не може да се получи при никаква стойност на константата. ■

Забележка 1.1.5 *Нека обърнем внимание на факта, че всъщност класът на точните уравнения и на тези които допускат интегриращ мнодител е много широк. Например, всяко уравнение с отделени променливи е точно, защото в този случай $P(x,y) = P(x)$ и $Q(x,y) = Q(y)$, откъдето следва, че $P_y^{'} = Q_x^{'} = 0$. Освен това всяко уравнение с отделящи се променливи допуска интегриращ множител (защо?). От тук в частност следва, че и всяко хомогенно уравнение след съответното полагане се свежда до уравнение, допускащо интегриращ множител.*

1.1.6 Някои диференциални уравнения, нерешени относно производната. Уравнения на Лагранж и Клеро

В тази лекция са разгледани някои видове уравнениия, нерешени стпрямо производната, т. е. уравнения от вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.95}$$

където функцията $F(x, y, z)$ е непрекъсната заедно с частните си производни от първи ред $F'_y(x, y, z)$ и $F'_z(x, y, z)$ за всяка т.$M(x, y, z)$ от областта $G \subseteq \mathbb{R}^3$.

1. Диференциални уравнения, в които производната се среща на степен по-висока от първа. Нека да разгледаме някои примери.

Пример 1.1.26 *Да се реши уравнението*

$$y'^2 - 4x^2 = 0$$

и да се намерят онези интегрални криви, които минават през точките $M(1, 2)$ и $O(0, 0)$.

Решение. Уравнението се представя като произведение $(y'-2x)(y'+2x) = 0$, т.е. $y = 2x$ или $y = -2x$, откъдето намираме $y = x^2 + C$ $y = -x^2 + C$ Общото решение има вида

$$(y + x^2 - C)(y - x^2 - C) = 0.$$

Интегралните криви са две семейства параболи, с оси съвпадащи с оординатната ос (Чертеж!). Като заместим в уравнението на първото семейство параболи с координатите на т.$M(1, 2)$, получаваме $C = 1$, във второто – $C = 3$. Това означава, че през тази точка минават две интегрални криви

$$y = x^2 + 1 \text{ и } y = -x^2 + 3,$$

но това не е нарушение на единствеността на решението на задачата на Коши, защото ъгловите коефициенти на допирателните на двете криви в т.$M(1, 2)$ са различни (проверете!). Като заместим с кординатите на т.$O(0, 0)$ в уравненията и на двете фамилии криви, получаваме $C = 0$. Решенията, които минават през тази точка са четири:

$$y = x^2,\ y = -x^2,\ y = \begin{cases} y = -x^2,\ x < 0, \\ y = x^2,\ x \geq 0 \end{cases} \text{ и } y = \begin{cases} y = x^2,\ x < 0, \\ y = -x^2,\ x \geq 0. \end{cases}$$

Вижда се, че тази точка е особена и за всичките четири решениия, минаващи през нея е изпълнено равенството $y'(0) = 0$. ■

Пример 1.1.27 *Да се реши уравнението*

$$y'^3 - 8xy = 0$$

с начално условие $y(0) = 0$

Решение. Единственото реално решение относно y' е $y' = 2\sqrt[3]{xy}$, което е уравнение с разделящи се променливи. Следователно

$$y^{-\frac{1}{3}}\,dy = 2x^{\frac{1}{3}}\,dx, \quad \int y^{-\frac{1}{3}}\,dy = 2\int x^{\frac{1}{3}}\,dx + C, \quad \text{и} \quad \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + C,$$

което може да се запише и така

$$y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}} + C_1.$$

Сега от началното условие, получаваме $C = 0$, а съответните частни решениа са $y = \pm x^2$. Да забележим, че функцията $y = 0$ е също решение на това уравнение, при това особено (защо?). По колко решения минават през всяка точка от абцисната ос? ■

2. Диференциални уравнения, в които не участва независимата променлива или неизвестната функция. При някои от тези уравнения решението се търси в параметричен вид $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, като за параметър е удобно да се избере производната на неизвестната функция.

а) Уравнения от вида

$$y = f(y') \tag{1.96}$$

В това уравнение предполагаме, че функцията f е диференцируема в някакъв интервал. Да положим $y' = p$ (или някаква друга буква). Тогава $y = f(p)$ и остава да изразим и x чрез p. Като диференцираме уравнението $y = f(p)$ относно x считайки, че $p = p(x)$, получаваме

$$y'(x) = f'(p)p'(x), \quad \text{откъдето} \quad dx = \frac{f'(p)}{p}dp \text{ т.е. } x(p) = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C.$$

Тук се възползвахме от полагането $y' = p$ и факта, че $dx/dp = (dp/dx)^{-1}$. Общото решение на (1.96) в параметричен вид е

$$x(p) = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C, \quad y(p) = f(p). \tag{1.97}$$

б) Уравнения от вида

$$x = g(y') \tag{1.98}$$

Тук отново търсим решение в параметричен вид, използвайки същото полагане, като в предишното уравнение. Тогага $x = g(p)$. Да диференцираме последнотот равенство относно p. Очевидно $dx/dp = g'(p)$. Сега от равенството $dy = y'(x)\,dx$ следва, че $dy = p\,g'(p)\,dp$ и $y(p) = \int p\,g'(p)\,dp + C$. Общото решение на (1.98) се дава с формулата

$$x = g(p),\ y = \int pg'(p)\,dp + C. \tag{1.99}$$

Пример 1.1.28 *Да се реши уравнението*

$$y = \frac{1}{2}y'^2 + 2y'$$

с начално условие $y(1) = 0$.

Решение. Да положим $y' = t$. Тогава $y = \frac{1}{2}t^2 + 2t$. Сега да диференцираме последното равенство относно x. Получаваме $y' = t\,t'(x) + 2t'(x)$. След като заместим y' с t и $t'(x)$ с $1/x'(t)$, след леки преобразувания, стигаме до уравнението

$$dx = \left(1 + \frac{2}{t}\right)dt \quad \text{т.е.} \quad x(t) = t + \ln|t| + C.$$

Общото решение на даденото уравнение в параметричен вид е

$$x(t) = t + \ln|t| + C,\ y(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t.$$

За да намерим неизвестната константа, полагаме $y = 0$, откъдето намираме $t_1 = 0$, $t_2 = -4$ и заместваме във първото уравнение $x = 1$ и $t = -4$ и следователно $C = 5 - \ln 4$, тъй като при $t_1 = 0$ логаритъмът не е дефиниран. Решение ли е функцията $y(x) = 0$ и какво – особено или частно? ■

Пример 1.1.29 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$x = y'\ln y'.$$

Решение. Уравнението е от вида (1.98). Да положим $y' = t > 0$. Тогава $x = t\ln t$. Сега да диференцираме последното равенство относно t. Получаваме

$$dx = (\ln t + 1)\,dt.$$

Тогава

$$dy = y'\,dx = t(\ln t + 1)\,dt \text{ и } y = \int (t\ln t + t)\,dt + C = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t + C.$$

Общото решение на даденото уравнение в параметричен вид е

$$x(t) = t\ln t,\ y(t) = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t + C,\ t > 0.$$

■

3. Уравнения на Лагранж и Клеро.
а) Уравнение на Лагранж

Определение 1.19 *Уранение от вида*

$$y = \varphi(y\,')x + \psi(y\,'), \tag{1.100}$$

където функциите φ и ψ са непрекъснато диференцируеми в някакъв интервал $(a,\,b)$ и $\varphi(y') \neq y'$, се нарича ***уравнение на Лагранж.***

След известна „подготовка“ уравнението на Лагранж може да се сведе към линейно диферециално уравнение. За тази цел, да положим $y' = p(x)$ и да потърсим решение на уравнението в параметрична форма (т.е.да изразим x и y като функции на параметъра). Да запишем даденото уравнение във вида

$$y = \varphi(p)\ x + \psi(p) \tag{1.101}$$

и да диференцираве последното равенство относно x. Получаваме

$$y' = \varphi\,'(p)\ p\,'x + \varphi(p)\ x\,' + \psi\,'(p)\ p\,'. \tag{1.102}$$

Сега да заместим $y\,'$ с p и да изнесем вдясно $p\,'$ зад скоби и да прехвърлим вляво $\varphi(p)$ (разбира се $x\,' = 1$, защо?). Тогава

$$p - \varphi(p) = (\varphi\,'(p)x + \psi\,'(p))p\,'. \tag{1.103}$$

Сега да забележим, че ако разменим ролите на p и x и се възползваме от факта, че $x\,'(p) = 1/p\,'(x)$, при $p - \varphi(p) \neq 0$, получаваме уравнението

$$x\,'(p) = \frac{\varphi\,'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi\,'(p)}{p - \varphi(p)}, \tag{1.104}$$

което е линейно уравнение с неизвестна функция x и независима променлива p, чието общо решение може да се запише (вж. лекцията за лин. у-ие) във вида:

$$x(p) = CA(p) + B(p),\ C = const.$$

Тогава, след като заместим вече полученият израз за x в уравнението (1.101), получаваме общото му решение в параметрична форма:

$$x(p) = x(p) = CA(p) + B(p),\ y(p) = CA_1(p) + B_1(p). \tag{1.105}$$

Остава да разгледаме случая, когато $p - \varphi(p) = 0$. Ако това уравнение има реални корени $p = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$, като заместим в (1.101), получаваме

$$y = p_i x + \psi(p_i),\ i = 1, 2, \ldots, k. \tag{1.106}$$

Всяка от тези линейни функции е рещение на уравнението (1.101), които могат да се окажат и особени решения.

а) Уравнение на Клеро

Определение 1.20 *Уранение от вида*

$$y = y\,'x + \psi(y\,'), \tag{1.107}$$

*където функцията ψ е непрекъснато диференцируема в някакъв интервал $(a,\ b)$ се нарича **уравнение на Клеро**.*

Уравнението на Клеро може да се реши по същият начин, както уравнението на Лагранж. Отново полагаме $y' = p(x)$, заместваме в (1.107), диференцираме относно x и след преработка получаваме уравнението

$$(x + \psi\,'(p))p\,' = 0, \tag{1.108}$$

което се разпада на уравненията $p\,' = 0$ или $x + \psi\,'(p) = 0$. От първото от тях следва, че $p = C = const$. Като заместим в (1.107), получаваме

$$y = Cx + \psi(C), \tag{1.109}$$

което е уравнение на фамилия прави. Тази формула дава общото уравнение на уравнението на Клеро. От уравнението $x = -\psi\,'(p)$, заедно с (1.107) получаваме параметричното уравнение на кривата

$$\gamma : \begin{cases} x = -\psi\,'(p) \\ y = -\psi\,'(p)p + \psi(p), \end{cases} \tag{1.110}$$

която обикновено се оказва особено решение на уравнението на Клеро. Може да се докаже, че ако $\psi''(p)$ има постоянен знак в някакъв интервал $(a,\ b)$, всяка права от фамилията (1.109) се допира до кривата кривата γ в т. $M(-\psi\,'(C), -\psi\,'(C) + \psi(C))$(Защо?).

До уравнение на Клеро се стига винаги, когато се търси крива със свойство на допирателната, не зависещо от точката на допиране. При това от геометрична гледна точка, интересно е особеното решение.

Пример 1.1.30 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$y = 2xy\,' - y\,'^2.$$

Решение. Уравнението е уравнение на Лагранж. Като следваме метода, изложен по-горе и след като положим $y\,' = p$, получаваме

$$y = 2xp - p^2,\ y' = 2xp\,' + 2p - 2pp' \ \text{ или } -p = (2x - 2p)p',\ x\,' = -\frac{2}{p}x + 2.$$

Като решим съответното линейно уравнение, получаваме общото решение в параметрична форма

$$x(p) = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p,\ y(p) = \frac{2C}{p} + \frac{1}{3}p^2,\ p \neq 0.$$

Случаят $p = 0$ води до решението $y = 0$, което е частно решение. ■

Пример 1.1.31 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$y = xy\,' + y\,'^2.$$

Решение. Това е уравнение на Клеро. След като положим $y\,' = p$ и диференциране относно x получаваме

$$y = xp + p^2,\ y\,' = xp\,' + p + 2pp\,',\ 0 = (x + 2p)p,$$

откъдето следва, че

$$x = -2p \text{ или } p = C = const.$$

Като заместим в изходното уравнение с $p = C$, получаваме фамилията прави $g_C : y = Cx + C^2$, а като заместим пак там с $x = -2p$ и изключим параметъра p, получаваме уравнението на парболата $\gamma : y = -x^2/4$. Не трудно да се съобрази, че всяка права от фамилията $\{g_C\}$ се допира до γ в т. $M(-2C, -C^2)$. Това показва, че γ е особено решение за това уравнение. Направете чертеж и всички необходими пресмятания! ■

1.1.7 Теореми за съществуване и единственост на решение на задачата на Коши за уравнения от първи ред

1. Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за уравнения, решени спрямо производната. Да разгледаме задачата на Коши

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0. \tag{1.111}$$

Едно достатъчно условие за съществуване на единствено решение на тази задача се дава от следната теорема.

Теорема 1.3 *Нека функцията $f(x, y)$ е непрекъсната в областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и притежава непрекъсната частна производна относно y в тази област. Тогава за всяка точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ съществува околност на точката $O_h(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \, : \, |x - x_0| \leq h, \ \ h > 0\}$, в която съществува единствено решение $y = y(x)$ на задачата (1.111).*

Идея за доказателство. Идеята се състои в това, да разгледаме задача, еквивалента на задачата (1.111), а именно задачата за намиране на решение на интегралното уравнение

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y) dt \tag{1.112}$$

с неизвестна функция y и да приложим към тази задча т.нар. *метод на последователните приближения* , който се състои в построяването на редица от функции $\{y_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ чрез рекурентната формула

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t)) dt, \ k = 1, 2, \ldots, \tag{1.113}$$

с начално приближение $y_0(x) \equiv y_0$. Може да се докаже, че при наложените условия за дясната страна на уравнението, редицата от функции простроена по описания по-горе начин клони към функция $\tilde{y}(x)$, дефинирана в достатъчно малка околност на x_0 и която е решение на задачата на Коши, при това единствено.

Оказва се обаче, че ако поискаме само непрекъснатост на дясната страна, решението съществува, но може да не е едниствено (теорема на Пеано).

За ЛДУ от първи ред е в сила една по-силна теорема от теорема 1.2.

Теорема 1.4 *Нека функциите $a(x)$ и $b(x)$ са непрекъснати в интервала $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Тогава за всяка точка $M_0(x_0, y_0)$, такава че $x_0 \in \Delta$, а $y_0 \in (-\infty, +\infty)$ е произволно фиксирано число, съществува единствено решение на уравнението*

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1.114}$$

*удовлетворяващо началното условие $y(x_0) = y_0$ и **дефинирано в целия интервал** Δ.*

Забележка 1.1.6 *За нелинейни диференциални уравнения подобен факт не е в сила дори, когато дясната част на уравнението (функцията $f(x, y)$) е дефинирана в цялата равнина. Това се вижда от следния пример. Да разгледаме задачата на Коши за уравнението*

$$y\,' = y^2 x,\ y(0) = 1,\ \textit{чието общо решение е}\ \ y = \frac{1}{C - x^2}\quad \textit{(проверете !).}$$

Като заместим сначалните данни, получаваме $C = 1$ и съответното частно решение е

$$y = \frac{1}{1 - x^2},$$

което е дефинирано само в итнервала $(-1, 1)$ въпреки , че дясната страна на това уравнение $f(x, y) = xy^2$ е дефинирана в цялата равнина.

2. Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за уравнения, нерешени спрямо производната. Нека отново да се спрем на пример 1.1.25, разгледан в предишната лекция – уравнението $y\,'^2 - 4x^2 = 0$, от което следва, че $y\,' = 2x$ или $y\,' = -2x$. Ако търсим решение на задачата на Коши например в т. $M(1, 1)$, получаваме двете интегрални криви $\gamma_1 : y = x^2$ и $\gamma_2 : y = -x^2 + 2$. Това „явление“ не бива да се схваща, обаче като нарушение на единствеността на решението на задачана на Коши в дадената точка, тъй като в този случай става дума за две отделни уравнения, които следват от изходното уравнение. Освен това и ъгловите коефициенти на двете криви в т.$M(1, 1)$ са различни – $k_1 = 1$, а $k_2 = -1$ (нека да напомним, че особена точка е такава точка, през която минават две или повече интегрални криви на уравнението, но всичките те имат една и съща допирателна, или точка, в която полето $\vec{F} = \vec{0}$!). От тези съображения следва, че теоремата за съществуване и едниственост на решението на задачата на Коци за уравннение от вида

$$F(x, y, y\,') = 0 \tag{1.115}$$

би трябвало да има по-различна формулировка от тази на теорема 1.2.

По-нататък предполагаме, че фуннкцията $F(x, y, z)$ е дефинирана и непрекъсната, заедно с частните си производни относно y и z в множеството $G \subseteq \mathbb{R}^3$, което има вида

$$G = \{(x, y, z)\ :\ (x, y) \in G',\ z \in (c, d)\}\,,$$

където G' е област в равнината.

Определение 1.21 *Точката* $(x_0, y_0) \in G'$ *се нарича обикновена точка за диференциалното уравнение (1.115), ако:*
1) уравнението $F(x_0, y_0, z) = 0$ *има краен брой корени* $z_i \in (c, d)$, $i = 1, 2, \dots, k$ *;*
2) във всяка една от тези точки имаме $F'_z(x_0, y_0, z_i) \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Ако поне в едно от решенията z_{i_0} *е изпълнено равенството* $F'_z(x_0, y_0, z_{i_0}) = 0$ *за някое* $1 \leq i_0 \leq k$*, точката се нарича особена за (1.115).*

За обикновените точки на уравнението (1.115) е в сила следната теорема.

Теорема 1.5 *Нека точката* $(x_0, y_0) \in G'$ *е обикновена за уравнението (1.115). Тогава за всяко решение* z_i $i = 1, 2, \dots, k$ *на уравнението* $F(x_0, y_0, z) = 0$ *задачата на Коши за (1.115) с начално условие* $y(x_0) = y_0$ *притежава единствено решение* $y = f_i(x)$*, което удовлетворява условието* $f'_i(x_0) = z_i, i = 1, 2, \dots, k$ *и което е дефинирано в достатъчно малка околност на точката* (x_0, y_0).

1.2 Обикновени диференциални уравнения от по-висок ред

1.2.1 Диференциални уравнения от по-висок ред – основни понятия. Някои уравнения, допускащи понижение на реда

1. Диференциални уравнения от по-висок ред. Задача на Коши. Общо решение.

Определение 1.22 *Уранение от вида*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.116}$$

където функцията F *е непрекъсната като функция на* $n+2$ *променливи в някаква област* $D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$*, се нарича* ***диференциално уравнение от*** n***-ти ред.*** *Функцията* $y = \varphi(x)$*, чийто производни са непрекъснати до ред* n *включително в някакъв интервал* $(a,\ b)$*, се нарича* ***решение*** *на уравнението (1.116), ако равенството* $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$ *е тъждество при* $x \in (a,\ b)$.

Графиката на всяко решение на уравнението (1.116) наричаме интегрална крива на това уравнение, която може да се търси също в неявен вид $\Phi(x, y) = 0$ или в параметричен вид $x = \varphi(t), y = \psi(t)$.

Ако от равенство (1.116) може да се изрази старшата производна $y^{(n)}$, то уравнението придобива вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{1.117}$$

и се нарича **уравнение от n-ти ред, решено спрямо старшата производна**. Частен случай тези уравнения са уравненията от вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = g(x), \tag{1.118}$$

където функциите $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ $g(x)$ са непрекъснати в някакъв интервал $(a,\ b)$ и $a_0(x)$ не е тъждествено равна на нула при $x \in (a,\ b)$.

Уравнението (1.118) се нарича **линейно диференциално уравнения от n-ти ред**. Ако $g(x) \equiv 0$ в $(a,\ b)$ уравнението се нарича **линейно хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред, (накратко ЛХДУ от n-ти ред)**, а в противен случай **линейно нехомогенно диференциално уравнение от n-ти ред, (накратко ЛНХДУ от n-ти ред)**.

Определение 1.23 *Задачата за намиране на решение $y = y(x)$ на уравнението (1.116), удовлетворяващо началните условия*

$$y = y_0,\ y' = y'_0, \dots,\ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \textit{при} \quad x = x_0, \tag{1.119}$$

където $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ са зададени числа от дефиниционната област на (1.116) (начални данни)се нарича ***задача на Коши или начална задача*** *за това уравнение.*

Условията, които гарантират съществуване и единственост на решението на задачата на Коши са формулирани в един от следващите параграфи.

Поради това, че уравненията от втори ред са много важни за практиката, нека да разгледаме по-подробно този случай. За уравнение от втори ред, решено спрямо производната

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.120}$$

задачата на Коши се състои в намиране на решение, удовлетворяващо началните условия $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$, което геометрично означава, че се търси интегрална крива , минаваща през дадена точка $M_0(x_0, y_0)$ и освен това в тази точка е зададен и наклона на допирателната $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0) = y'_0$. (Чертеж!).

За да дадем механично тълкуване на задачана на Коши за уравнение от втори ред нека да разгледаме диференциалното уравнение, описващо движението на на материална точка с маса равна на единица, под действие на сила с направление по оста Ox. Уравнението има вида

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}). \tag{1.121}$$

В това уравнение независимата променлива t има смисъл на време, x е положението на материалната точка в момента t, а $\dot{x}$ и $\ddot{x}$ са съответно скоростта и ускорението на същатата точка в този момент. Функцията $f(t, x, \dot{x})$ има смисъл на резултантната сила, действаща върху точката в момента t. Читателят вече навярно се досеща, че уравнение (1.121) не е нищо друго освен вторият принцип на Нютон, приложен за материалната точка. Решението на това уравнение е закона за движение на материалната точка, под действие на силата f, която считаме известна. Задачата на Коши в този случай е да се намери този закон за движение, който удовлетворява началните условия $x(t_0) = x_0$ – дадено начално положение на точката, а $\dot{x(t_0)} = \dot{x_0} = v_0$ – дадена начална скорост на точката. Т. е. за да определим еднозначно движението на една материална точка, движеща се под действието на някаква известна сила, трябва да знаем още от "къде е тръгнала точката"и с каква начална скорост е "тръгнала"да се движи.

По подобен начин, както при уравнение от първи ред (вж. уводната лекция) може да се въведе понятието **общо решение** на уравнението (1.116) само, че тук трябва де се вземе предвид, че общото решение зависи от n (колкото е реда на уравнението) произволни константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и има вида $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ и затова решението на дадачата на Коши води до решаването на ситема уравнения за неизвестните константи. Например, ако за уравнението(1.120) сме намерили общото решение $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, за неизвестните константи получаваме системата

$$
\left| \begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2) \\ \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2) \end{array} \right. , \tag{1.122}
$$

от която можем да определим еднозначно C_1 и C_2. Да напомним, също така, че решение на (1.116) или (1.117), във всяка точка на което задачата на Коши има единствено решение се нарича **частно**. Ако функцията $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ е общо решение на (1.116) или (1.117), то всяко решение, получено от него при произволни допустими значения на константите, включително $\pm\infty$ е също частно решение. Решенията, във всяка точка на които се нарушава единствеността на решението на задачата на Коши се наричат **особени**.

2. Диференциални уравнения от по-висок ред, които допускат понижение на реда. В много случаи уравненията от вида (1.116) или (1.117) допускат понижение на реда с няколко единици и свеждане до познати диференциални уравнения от първи ред. Тук са разгледани само някои от тях.

а) Уравнения от вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1.123}$$

Тук предполагме, че функцията е непрекъсната в даден итнервал $(a,\ b)$. За такива уравнения задачата на Коши има единствено решение (вж. следващата лекция) при произволни начални данни $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и $x_0 \in (a,\ b)$. Общото решение на това уравнение може да се намери чрез последователно интегриране. От (1.123) следва, че

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,\ y^{(n-2)} = \int y^{(n-1)}(x)dx = \int \left\{ \int f(x)dx \right\} dx + C_1 x + C_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

$$y(x) = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{n \text{ пъти}} f(x)\ dx\, dx \ldots dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Като съобразим, че факторелите в знаменателите могат да бъдат "погълнати"от произволните константи, последното равенство може да бъде записано във вида

$$y = \underbrace{\int\int \ldots \int}_{n \text{ пъти}} f(x)\, dx\, dx \ldots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n, \tag{1.124}$$

което е и общото решение на даденото уравнение.

Пример 1.2.1 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$y''' = xe^{2x}$$

и да се реши задачата на Коши при начални данни $y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$

Решение. Последователно намираме:

$$y'' = \int y'''(x)dx = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int xe^{2x}d2x = \frac{1}{2}\int xde^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}\int e^{2x}d2x = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_1,$$

$$y' = \int y''(x)dx = \frac{1}{2}\int xe^{2x}dx - \frac{1}{4}\int e^{2x}dx + \int C_1 dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}) - \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x + C_2 = \frac{1}{4}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2,$$

$$y = \int y'(x)dx = \frac{1}{4}\int xe^{2x}dx - \frac{1}{4}\int e^{2x}dx + C_1\int xdx + C_2\int 1dx + C_3,$$

$$y = \frac{1}{8}xe^{2x} - \frac{3}{16}e^{2x} + C_1\frac{1}{2}x^2 + C_2x + C_3.$$

Последният ред в горната формула е общото решение на уравнението. Сега от началните данни , намираме

$$1 = y(0) = -\frac{3}{16} + C_3,\ 0 = y'(0) = -\frac{1}{4} + C_2,\ -2 = y''(0) = -\frac{1}{4}C_1,$$

откъдето намираме

$$C_1 = -\frac{7}{4}\ ,\ C_2 = \frac{1}{4}\ ,\ C_3 = \frac{19}{16}\ .$$

Следователно търсеното частно решение е

$$y = \frac{1}{8}xe^{2x} - \frac{3}{16}e^{2x} - \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{19}{16}\ .$$

■

б) Уравнения от вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0,\ 1 \le k < n. \quad (1.125)$$

Уравнения от посочения вид допускат понижение на реда с k единици като направим полагането $y^{(k)}(x) = z(x)$, където $z(x)$ е новата неизвестна функция. Очевидно

$$z'(x) = y^{(k+1)}(x),\ z''(x) = y^{(k+2)}(x), \dots, z^{(n-k)}(x) = y^{(n)(x)}$$

и като заместим в (1.125) получаваме уравнението

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \tag{1.126}$$

Ако последното уравнение може да бъде интегрирано и можем да намерим функцията $z = g(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ в явен вид, като се върнем към старата неизвестна функция, получаваме уравнението

$$y^{(k)} = g(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}), \tag{1.127}$$

което е уравнение от вида, разгледан в подточка а). Като частен случай на уравнение от вида (1.125), винаги може да бъде понижен реда на линейно уравнение от вида

$$y^{(n)} = a(x)y^{(n-1)} + b(x),$$

като положим $y^{(n-1)}(x) = z(x)$, получаваме линейно уравнение от първи ред:

$$z' = a(x)z + b(x).$$

Пример 1.2.2 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$xy''' = y'' + x^2$$

Решение. Да положим $y''(x) = z(x)$.Тогава $y''' = z'$ и уравнението придобива вида

$$z' = \frac{1}{x}z + x,$$

което е линейно уравнение от първи ред. По фомулата за общото решение на линейно уравнение (вж. лекцията за ЛДУ от първи ред), получаваме

$$z = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C + \int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{\ln|x|}\left[C + \int xe^{-\ln|x|}dx\right],$$

$$z = |x|\left[C + \int \frac{x}{|x|}dx\right] = C_1x + x^2,\ C_1 = \pm C.$$

Получихме, че $y'' = C_1x + x^2$. Това е уравнение от вида разгледан в предишната подточка. Тогава

$$y' = \int x^2dx + \int C_1xdx + C_2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2,\ y = \int y'(x)dx + C_3$$

и следователно общото решение е:

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{C_1}{6}x^2 + C_2x + C_3.$$

■

в) Уравнения не съдържащи независимата променлива. Всяко едно уравнение от този вид може да се запише така:

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.128}$$

Тези уравненията допускат понижение на реда с единица, чрез полагането

$$y'(x) = z(y), \tag{1.129}$$

където z е новата неизвестна функция, а y считаме за независима променлива в новополученото уравнение. Чрез диференциране относно x, (разбира се тук $z = z(y(x))$ се разглежда като сложна функция та x), получаваме

$$y'' = (y')' = z'(y)y'(x) = z'z,$$

$$y''' = (y'')' = (z'(y)z)' = z''(y)y'(x)z + z'(y)z'(y)y'(x) = z''z^2 + z'^2 z$$

и т.н. Ясно е, че по този начин, $y^{(k)}(x)$ се изразява като някаква функция на $z^{(k-1)}(y),\ k = 1, 2, \dots, n$, което води до понижаване на реда на изходното уравнение с единица, т.е. получаваме уравнение от вида

$$\Phi(y, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0. \tag{1.130}$$

Пример 1.2.3 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$1 + y'^2 = 2yy''.$$

Решение. Полагаме $y'(x) = z(y)$. Тогава $y'' = z'z$ от където следва, че

$$1 + z^2 = 2yz'z.$$

Получаваме уравнение с отделящи се променливи. След разделяне на променливите се получава

$$\frac{2zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y}, \text{ откъдето, след интегриране намираме}$$

$$\ln(1+z^2) = \ln(C_1 y), \text{или } 1 + y'^2 = C_1 y, \text{т.е. } y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Това е уравнение е с разделящи се променливи. Като го интегрираме, получаваме

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \int dx + C_2$$

и следователно общото решение е:

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{C_1}{6}x^2 + C_2 x + C_3.$$

■

г) Уравнения, които са хомогенни относно неизвестната функция и нейните производни. Това са уравнения от вида (1.116) в които функцията F е хомогенна от степен $m \neq 0$ относно $y, y', \ldots, y^{(n)}$. Това означава, че лявата му страна допуска представянето

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = y^m F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right). \tag{1.131}$$

С други думи, уравнението може да се запише по следния начин

$$F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0. \tag{1.132}$$

При тези уравнения редът също може да бъде намален с единица, чрез полагането

$$y'(x) = y(x)z(x), \tag{1.133}$$

където $z(x)$ е новата неизвестна функция. Нека изразим y'' и y''' чрез $z(x)$ и нейните производни. Като диференцираме относно x последното равенство, получаваме

$$\begin{aligned} y'' &= y'z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' &= y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z''). \end{aligned} \tag{1.134}$$

Ясно е, че ако продължим по този начин, за всяко $k = 1, 2, \ldots, n$ можем да изразим $k-$ тата проиводна на y чрез $k-1$–вата производна на z. След като заместим получените изрази за производните на y в изходното уравнение, получаваме уравнение от вида

$$G(x, z, z', \ldots, z^{(k-1)}) = 0, \tag{1.135}$$

което е уравнение от ред $n-1$. Да предположим, че можем да намерим общото му решение $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$. Тогава, като заместим z с y'/y във последната формула

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

и интегрираме полученото уравнение с отделящи се променливи, получаваме

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx}. \tag{1.136}$$

Формула (1.136) дава общото решение на разглежданото уравнение.

Пример 1.2.4 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$x^2 yy'' = (y - xy\,')^2.$$

Решение. Уравнението е хомогенно относно y, $y\,'$ и y'', защото функцията $F(x, y, y', y'') = x^2 yy'' - (y - xy')^2$ е хомогенна от степен две, относно y, y' и y''. След като разкрием скобите вдясно и разделим двете страни на $y^2 \neq 0$, получаваме

$$x^2 \frac{y''}{y} = 1 - 2x\frac{y\,'}{y} + x^2 \frac{y\,'^2}{y^2}$$

Полагаме $y\,'/y = z$. Съгласно формула (1.134), $y''/y = z^2 + z'$. Като заместим и преработим получения израз, стигаме до уравнението

$$z\,' = -\frac{2}{x}z + \frac{1}{x^2},$$

което е линейно с неизвестна функция z. От фомулата за общото решение на линейно уравнение (вж. съответната лекция) следва, че

$$z = e^{-\int 2/xdx}\left[C_1 + \int \frac{1}{x^2} e^{\int 2/xdx} dx\right] = e^{-2\ln|x|}\left[C_1 + \int \frac{1}{x^2} e^{2\ln|x|} dx\right],$$

$$z = \frac{1}{x^2}\left[C_1 + \int 1dx\right] = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}.$$

Тогава

$$\frac{y\,'}{y} = \frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}, \text{ т.е. } \frac{dy}{y} = \left(\frac{C_1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx.$$

След като интегрираме последното уравнение, получаваме

$$\ln|y| = -\frac{C_1}{x} + \ln|x| + C \text{ или } |y| = e^C e^{-C_1/x}|x|.$$

Общото решение можем да запишем във вида

$$y = C_2 x e^{-C_1/x}, \text{ където } C_2 = \pm e^C.$$

Остава да забележим, че $y = 0$ е също решение на даденото диференциално уравнение, при това частно (защо?). ■

Съществуват и други видове диференциални уравнения, на които може да бъде понижен реда и които могат да бъдат намерени в (цитат).

1.2.2 Теореми за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши за диференциални уравнения от по-висок ред.

Тук са формулирани достатъчни условия за съществуване и еднниственост на решението на задачата на Коши за диференциално уравнение от $n-$ти ред. За простота е разгледан случая на уравнение от $n-$ти ред, решено спрямо производната, т. е. за уравнения от вида (1.117). В сила е следната теорема.

Теорема 1.6 ***(Пеано)*** *Нека функцията $f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ е непрекъсната в областта $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Тогава за всяко x_0 такова, че точката $(x_0, y_0, y\,'_0 \dots, y_0^{n-1}) \in D$ в достатъчно малка околност на x_0 съществува решение $y = y(x)$ на уравнението (1.117), което удовлетворява началните условия (1.119).*

За да се гарантира и единствеността на решението, дори само в околност на т. x_0, обаче само непрекъснатостта на дясната страна не е достатъчна. Теоремата, формулирана по-долу е аналогична на теорема 1.2 (отнасяща се за уравнение от първи ред) и която гарантира и единственост на решението.

Теорема 1.7 ***(Пикар)*** *Нека функцията $f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ е непрекъсната в областта $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, заедно с частните си производни f'_y f'_{y_i}, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Тогава за всяко x_0 такова, че точката $(x_0, y_0, y'_0 \dots, y_0^{n-1}) \in D$ съществува **единствено** решение $y = y(x)$ на уравнението (1.117), дефинирано в достатъчно малка околност на x_0 и което удовлетворява началните условия (1.119).*

За ЛДУ от $n-$ти ред (вж. (1.118)) теоремата за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши има по-силна форма.

Теорема 1.8 *Нека функциите $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и $g(x)$ са непрекъснати в интервала $(a,\ b) \subseteq \mathbb{R}$ и $a_0(x) \neq 0$ при $x \in (a,\ b)$. Тогава за всяко фиксирано $x_0 \in (a,\ b)$ и произволни фиксирани $y_0,\ y_0^{'}, \dots,\ y_0^{n-1} \in \mathbb{R}$ съществува **единствено** решение $y = y(x)$ на уравнението (1.118), удовлетворяващо началните условия*

$$y(x_0) = y_0,\ y^{'}(x_0) = y_0^{'}, \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

*и дефинирано **в целия интервал** $(a,\ b)$.*

Следствие 1.1 *Съответното ЛХДУ ($g(x) = 0$ при всяко $x \in (a,\ b)$) при **нулеви** начални данни има само **нулевото решение** $y(x) = 0$. Защо?*

1.2.3 Линейни диференциални уравнения от $n-$ти ред – обща теория.

1. Линейни диференциални уравнения от $n-$ти ред – основни понятия.

а) Определение и примери.

Определение 1.24 *Уравнение от вида*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x), \tag{1.137}$$

където функциите $a_i(x), i = 0, 1, \ldots, n, a_0(x) \neq 0$ и $f(x)$ са непрекъснати в някакъв интервал $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, а $y^{(i)}, i = 0, 1, \ldots, n$ са неизвестната функция и нейните производни (тук и по-нататък полагаме $y^{(0)}(x) = y(x)$) ***линейно нехомогенно диференциално уравнение от n-ти ред. Ако*** *$f(x) \equiv 0, x \in \Delta$* ***уравнението се нарича хомогенно линейно диференциално уравнение от n-ти ред****. Функцията $y = \varphi(x)$, чийто производни са непрекъснати до ред n включително в някакъв интервал $\Delta_1 \subseteq \Delta$, се нарича* ***решение*** *на уравнението (1.137), ако равенството(1.137), се превръща в тъждество, след като заместим $y(x)$ с $\varphi(x)$ и съответно нейните производни с производните на $\varphi(x)$ при $x \in \Delta_1$. Ако $a_i(x) = a_i = const.$ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ уравнението (1.137) се нарича* ***линейно диференциално уравнение с постоянни коефициенти.***

По - нататък, за удобство, са използвани означенията "ЛХДУ"и "ЛНХДУ"за хомогенните и съответно за нехомогенните линейни диференциални уравнения.

Пример 1.2.5 *Уравнението*

$$x^2y' - xy = x^3$$

е ЛНХДУ от първи ред и може да се реши по известната формула за линейно уравнение от първи ред (вж. съотв. лекция!), а уравнението

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

ЛХДУ от 2-ри ред с постоянни коефициенти. Както лесно се вижда функцията $\varphi(x) = e^x$ е едно решение на второто уравнение (проверете). ■

С цел на по-компактен запис да въведем едно означение. Нека са дадени функциите $a_i(x),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n$, които са непрекъснати в интервала $\Delta \subseteq \mathbb{R}$, а $y(x)$ е произволна функция, притежаваща непрекъснати производни до ред n включително за всяко $x \in \Delta$.

Определение 1.25 *Изображението, което на функцията $y(x)$ съпоставя непрекъсната функция $f(x)$ по формулата*

$$L[y] := a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{'} + a_n(x)y = f(x), \tag{1.138}$$

се нарича ***линеен диференциален оператор от*** $n-$***ти ред***.

От свойствата на операцията диференциране, следва че за всеки две функции $y_1(x),\ y_2(x)$ и произволни константи $C_1,\ C_3$ е в сила равенстното :

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2], \tag{1.139}$$

от което се вижда, че то е вярно и за прозволен краен брой функции и константи.

Пример 1.2.6 *Нека $n = 2$, $a_0(x) = x$, $a_1(x) = -2x$, $a_2(x) = 1$ и $y(x) = e^{2x}$. Тогава*

$$L[e^{2x}] = x(e^{2x})^{''} - 2x(e^{2x})^{'} + 1.e^{2x} = 4xe^{2x} - 4xe^{2x} + e^{2x} = e^{2x}$$

■

Този пример показва, ако е даден операторът L и фунцията y да се намери "образа"на y под действието на оператора не трудно. От гледна точка на диференциалните уравнения, по интересна е обратната задача: ако е даден операторът L, да се намерят всички функции $y(x)$, за които

$$L[y] = 0 \tag{1.140}$$

и съответно, ако е даден операторът L и произволна непрекъсната функция $f(x)$, да се намерят всички функции $y(x)$, за които

$$L[y] = f(x). \tag{1.141}$$

Както лесно се забелязва, тези две уравнения са еквивалентни на решаването хомогенното и съответно на нехомогенното диференциално уравнение от (1.137). По-нататък за краткост за хомогенното и нехомогенното уравнение са използвани означенията (1.140) и респективно (1.141). За решенията на хомогенното уравнение е в сила следната теорема.

Теорема 1.9 *Нека функциите $y_1(x), y_2(x)\ldots, y_k(x),\ k \in \mathbb{N})$ са решения на (1.137) и $C_1, C_2, \ldots, C_k$ са произволни константи. Тогава функцията*

$$y(x) = \sum_{i=0}^{k} C_i y_i(x). \tag{1.142}$$

също е решение на уравнението (1.137).

Доказателство. От факта, че $L[y_i(x)] = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$ и свойствата на оператора L следва, че

$$L[y(x)] = L[\sum_{i=1}^{k} C_i y_i(x)] = \sum_{i=1}^{k} C_i L[y_i(x)] = \sum_{i=1}^{k} C_i 0 = 0. \tag{1.143}$$

Твърдението на теоремата показва, че произволна линейна комбинация от решения на хомогенното уравнение е също негово решение. Нека да отбележим, че това свойство на решенията е **характерно само за линейните уравнения!**

б) Линейна зависимост и независимост на функции. Детерминанта на Вронски.

Определение 1.26 *Функциите $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x),\ n \in \mathbb{N}$, се наричат* ***линейно зависими*** *в интервала Δ, ако съществуват константи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не всичките равни на нула и такива, че за всяко $x \in \Delta$ е изпълнено равенството*

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \ldots + \alpha_n u_n(x) = 0. \tag{1.144}$$

Функциите $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x),\ n \in \mathbb{N}$ се наричат ***линейно независими*** *в интервала Δ, ако равенството (1.127) е възможно само в случай, че $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.*

Пример 1.2.7 *Нека $u_1(x) = 1,\ u_2(x) = 2 + 3x,\ u_3(x) = 3x$ и съответно $\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = -1$ и $\alpha_3 = 1$. Тогава*

$$\alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) + \alpha_3 u_3(x) = 2.1 + (-1)(2 + 3x) + 1.3x = 2 - 2 - 3x + 3x = 0,$$

за всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Съгласно определението функциите са линейно зависими. ■

Пример 1.2.8 *Нека сега $u_k(x) = x^k,\ k = 0 \div n$ и нека за някакви константи $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ е изпълнено равенство (1.127), т.е.*

$$\alpha_0.1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n = 0$$

за всяко x от някакъв интервал Δ. Но това е възможно само ако $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ (защо?). Съгласно определението функциите $1, x, x^2, \ldots, x^n$ са линейно независими. ■

За набор от n функции, притежаващи непрекъснати производни до ред $n - 1$ включително, за всяко $x \in \Delta$ съществува едно необходимо условие за линейна зависимост, което в много случаи се проверява по-лесно.

Определение 1.27 *Детерминантата*

$$W(x,u_1,u_2,\dots,u_n)=\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x)\\ u_1'(x) & u_2'(x) & \dots & u_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix} \tag{1.145}$$

се нарича ***детерминанта на Вронски*** *за системата функции* $u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x)$.

Теорема 1.10 *(Необх. условие за лин. зависимост.) Нека функциите* $u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x), n=2,3,\dots$ *притежават нерекъснати производни до ред* $n-1$ *включително за всяко* $x\in\Delta$. *Тогава ако те са линейно зависими в* Δ, *то*

$$W(x,u_1,u_2,\dots,u_n)=0 \quad \text{за всяко} \quad x\in\Delta. \tag{1.146}$$

Доказателство. Нека функциите $u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x)$ са линейно зависими в Δ. Тогава, съгласно определението за линейна зависимст съществуват константи $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, не всичките равни на нула и такива, че за всяко $x\in\Delta$ е изпълнено равенството

$$\alpha_1u_1(x)+\alpha_2u_2(x)+\dots+\alpha_nu_n(x)=0. \tag{1.147}$$

Нека да диференцираме тъждество (1.130) последователно $n-1$ пъти. Тогава, заедно с изходното равенство и получените чрез диференциране, получаваме следната система от n равенства (даже тъждества)

$$\left|\begin{array}{lllllll} \alpha_1u_1'(x) & + & \alpha_2u_2'(x) & + & \dots + & \alpha_nu_n'(x) & = 0\\ \alpha_1u_1''(x) & + & \alpha_2u_2''(x) & + & \dots + & \alpha_nu_n''(x) & = 0\\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \multicolumn{7}{l}{\alpha_1u_1^{(n-1)}(x)+\alpha_2u_2^{(n-1)}(x)+\ \dots\ +\alpha_nu_n^{(n-1)}(x)=0.} \end{array}\right. \tag{1.148}$$

Системата (1.148) може да се разглежда като хомогенна система линейни уравнения относно константите $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$, и която по предположение притежава ненулево решение при всяко $x \in \Delta$. Но това означава, както е известно от курса по ЛААГ, че детерминантата и е равна на нула за всяко $x \in \Delta$. Остава да забележим, че тази детерминанта е всъщност детерминантата на Вронски за функциите $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$.

От тази теорема следва едно достатъчно условие за линейна независимост на система функции.

Следствие 1.2 *Нека функциите $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ са $n-1$ пъти непрекъснато диференцируеми в интервала Δ и съществува поне едно $x_0 \in \Delta$, такова, че $W(x_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$. Тогава те са линейно независими в Δ.*

Доказателство. Ако допуснем, че са линейно зависими, от доказаната по-горе теорема би следвало, че детерминантата на Вронски е тъждествено равна на нула в Δ, включително и в точката $x_0 \in \Delta$, което пък противоречи на предположението, че $W(x_0, u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$. Следователно дадената система функции е линейно независима в Δ.

Пример 1.2.9 *Нека $u_1(x) = x^3,\ u_2(x) = x^4,\ u_3(x) = x^5$ Проверете, че са линейно незевисими.*

Решение. Наистина

$$W(x, u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 & x^5 \\ 3x^2 & 4x^3 & 5x^4 \\ 6x & 12x^2 & 20x^3 \end{vmatrix} = x^9 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{vmatrix} = 2x^9 \neq 0$$

за всяко $x \neq 0$. Съгласно следствието, доказано по-горе, функциите са линейно независими за всяко $x \in (-\infty, \infty)$. Обърнете внимание, че анулирането на детерминантата на Вронски в отделни точки (в случая при $x = 0$) не влияне на линейната независимост на дадената система функции. ■

Пример 1.2.10 *Нека $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ са различни реални или комлексни числа. Тогава функциите $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ са линейно независими в произволен интервал Δ.*

Решение. Проверете самостоятелно, че в този случай

$$W(x, e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}) = e^{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)x}\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \neq 0,$$

където $\tilde{W}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ е детерминантата на Вандермонд за числата $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ и която, както е известно от курса по ЛААГ, е различна от нула при $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq j$ ■ ■

б) Фундаментална система решения на ЛХДУ от $n-$ти ред. Да разгледаме линейното хомогенно уравнение от $n-$ти ред

$$L[y] = 0 \tag{1.149}$$

(вж. 1.137). Както беше показано по-горе, линейна комбинация от произволен краен брой негови решения е също решение. Лесно се вижда, също така, че функцията $y(x) \equiv 0$ е също решение на (1.149), което наричаме **нулево** или **тривиално** решение. Оказва се, че уравненията от този вид имат точно толккова на брой линейно независими решения, колкото е редът им.

Определение 1.28 *Всяка система от n (колкото е редът на уравнението) линейно независими решения на (1.131) при $x \in \Delta$ (тук и понататък интервала Δ предполагаме, че е отворен) се нарича* ***фундаментална система решения*** *или накратко* ***ФСР***.

Теорема 1.11 *Нека функциите $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x),\ \ n = 2, 3, \ldots$ са непрекъснати за всяко $x \in \Delta$. Тогава за уравнението*

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{'} + a_n(x)y = 0 \tag{1.150}$$

съществуват безброй много ФСР.

Доказателство. Нека x_0 е произволна фиксирана точка от $_0$. За уравнението (1.133) да разгледаме задачите на Коши (n на брой, записани по стълбове):

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0) = \lambda_1 & y_2(x_0) = 0 & \ldots & y_n(x_0) = 0 \\ y_1^{'}(x_0) = 0 & y_2^{'}(x_0) = \lambda_2 & \ldots & y_n^{'}(x_0) = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0 & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0 & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) = \lambda_n, \end{array} \tag{1.151}$$

където $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ са произволни ненулеви константи. Всичките тези начални задачи притежават единствено решене съгласно теоремата за съществуване и единственост за линейни уравнения от n-ред (вж. теор. (1.7) и сл. (1.1)). От друга страна решенията $y_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ са линейно независими, тъй като детерминантата на Вронски за тези решения

$$W(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \neq 0. \tag{1.152}$$

Следователно така построените решения на (1.150) са една ФСР за това уравнение. Тъй като константите $\lambda_i \neq,\ i = 1, 2, \ldots, n$ могат очевидно да бъдат избрани по безброй начини (както и точката $x_0 \in \Delta$), то за всяко конкретно ЛХДУ съществуват безброй много ФСР.

Забележка 1.2.1 *ФСР за които* $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$ *се нарича нормирана.*

Следващата теорема установява едно важно свойство на фундаменталните системи решения на ЛХДУ.

Теорема 1.12 *Нека функциите* $y_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ *са решения на (1.150) при* $x \in \Delta$. *Тогава те образуват ФСР за уравнението тогава и само тогава, когато* $W(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ *за всяко* $x \in \Delta$.

Доказателство.
Достатъчност. Нека $W(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$. Тогава решенията $y_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ са линейно независими в Δ и следователно са ФСР.
Необходимост. Нека $y_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ са ФСР. Да допуснем, че съществува $x_0 \in \Delta$, такова, че $W(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) = 0$. Тогава хомогенната ситема линейни уравнения

$$
(1.153) \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{array} \right.
$$

притежана поне едно ненулево решение $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_n^0$. Нека да разгледаме функцията

$$
(1.154) \qquad y(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^0 y_k(x),
$$

която като линейна комбинация от решения също е решение на (1.150), при това както следва от (1.153) и на задачата на Коши с нулеви начални данни. Тогава от теоремата за съществуване и единственост за ЛДУ от $n-$ти ред (вж.), следва, че $y(x) \equiv 0$ за $x \in \Delta$. Но това означава, че функциите $y_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ са линейно зависими в Δ, което противоречи на факта, че са ФСР на (1.150). Следователно $W(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$.

Оказва се, че ако е дадена една система от n линейно независими функции в даден интервал Δ и притежаващи в този интервал непрекъснати производни до $n-1$-ви ред включително, то съществува единствено ЛХДУ, чиято

ФСР е дадената система функции. Наистина, нека функциите $y_1, y_2, \dots, y_n$ удовлетворяват споменатите изисквания. Да разгледаме уравнението

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) & y'(x) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0, \tag{1.155}$$

което е ЛХДУ от ред n. При това, ако детерминанатта на Вронски е различна от нула в Δ, то като решим (1.155) относно $y^{(n)}$, се получава ЛХДУ с нерекъснати коефициенти в Δ, а ако съществува $x_0 \in \Delta$ такова, че $W(x_0, y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0)) = 0$, то при поне един от коефициетите на уравнението (разрешено спрямо старшата производна) има точка на прекъсване при $x = x_0$.

Пример 1.2.11 *Нека $y_1(x) = e^x$ и $y_2(x) = e^{2x}$.*

Решение. Уравнението (1.155) в този случай има вида

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & y \\ e^x & 2e^{2x} & y' \\ e^x & 4e^{2x} & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

от където след кратки пресмятания се получава уравнението

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \;\text{ или }\; y'' = 3y' - 2y.$$

в този случай уравнението е с постоянни коефициенти (и следователно непрекъснати за всяко $x \in (-\infty, \infty)$). Обърнете внимание, че

$$W(x, e^x, e^{2x}) = e^{3x} \neq 0,\; x \in (-\infty, \infty)$$

■

Пример 1.2.12 *Да се напише уравнение с ФСР $y_1(x) = x,\; y_2(x) = x^2$.*

Решение. Съответното уравнение е

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y^{'} \\ 0 & 2 & y^{''} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad x^2y^{''} - 2xy^{'} + 2y = 0.$$

като го решим спрямо старшата производна, получаваме

$$y^{''} = \frac{2}{x}y^{'} - \frac{2}{x^2}y,$$

т.е. коефициентите на последното уравнение са прекъснати в нулата. Причината е, че

$$W(x, y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 \text{ и следователно } W(0, y_1(0), y_2(0)) = 0.$$

■

в) Общо решение. Следващата теорема дава описание на всички решения на едно ЛХДУ от $n-$ти ред.

Теорема 1.13 *Нека функциите $y_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$ образуват ФСР на (1.133) при $x \in \Delta$. Тогава:*
а) ако $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи, то функцията

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x) \tag{1.156}$$

е решение на (1.133) ;
б) ако $y_0(x)$ е произволно решение на (1.150), то съществуват константи $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ такива, че

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x). \tag{1.157}$$

Доказателство.
Твърдение а) на теоремата следва непосредствено от свойствата на оператора

L (вж. теор.). За установяване на верността на второто твърдение нека да изберем произволно $x_0 \in \Delta$ и да разгледаме системата линейни уравнения

$$
(1.158) \quad \left| \begin{array}{l}
C_1 y_1(x_0) \quad + \quad C_2 y_2(x_0) \quad + \quad \ldots + \quad C_n y_n(x_0) \; = \; y_0(x_0) \\[2ex]
C_1 y_1^{'}(x_0) \quad + \quad C_2 y_2^{'}(x_0) \quad + \quad \ldots + \quad C_n y_n^{'}(x_0) \; = \; y_0^{'}(x_0) \\[2ex]
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\[2ex]
C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \; \ldots \; + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}(x_0).
\end{array} \right.
$$

Системата (1.158) притежава единствено решение по отношение на незвестните константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$, защото детерминантата и е детерминантата на Вронски за функциите $y_i(x),\; i = 1, 2, \ldots, n$, които са ФСР за уравнението (1.150). Нека означим с $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ наборът от константи, който е решение на (1.158) да образуваме функцията

$$
(1.159) \qquad \tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x),
$$

която, съгласно свойствата на оператора L, е също решение на уравнението при начални данни

$$
\tilde{y}(x_0) = y_0(x_0),\; \tilde{y}^{'}(x_0) = y_0^{'}(x_0),\; \ldots,\; \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}(x_0).
$$

Същите начални данни, обаче удовлетворява и решението $y_0(x)$. Съгласно теоремата за съществуване и единственост за ЛДУ от $n-$ти ред двете решения съвпадат в целия итнервал Δ, т.е. $\tilde{y}(x) = y_0(x)$ и

$$
(1.160) \qquad y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x).
$$

Теоремата е доказана.

Забележка 1.2.2 *От доказателството на последната теорема лесно се вижда един факт (който следва и от теоремата за същeствуване и единственост), а именно, че всяко ЛХДУ $n-$ти ред при нулеви начални данни притежава само нулевото (тривиалното)решение. Наистина, ако в дясната страна на системата (1.141) има само нули, то*

$$
C_1^0 = C_2^0 = \ldots = C_n^0 = 0.
$$

При $n = 2$ този факт има следната механична интерпретация: да разгледаме задачата на Коши за линейното уравнение от втори ред с нулеви начални данни

$$\left| \begin{array}{l} m\ddot{x} = a(t)\dot{x} + b(t)x \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0, \end{array} \right.$$

което има само нулевото решение. Това не бива да ни учудва, защото решението на това уравнение описва закона за движение на материална точка на която не действат никакви външни сили (например сила на тежестта и др.) и която в началния момент не е отклонена от равновесното положение и има нулева начална скорост. Естествено е да се очаква, че точката остава в покой т.е. $x(t) \equiv 0,\ \dot{x(t)} \equiv 0$ за всяко $t > 0$.

2. Линейни нехомогенни диференциални уравнения от $n-$ти ред. Общо решение. Метод на Лагранж. В тази точка се дава връзка между решението на едно ЛНХДУ и съответното му хомогенно уравнение.

а) Общо решение. Нека да разгледаме ЛНХДУ от $n-$ти ред. Както знаем, то може да бъде записано по следния начин:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y^{'} + a_n(x)y = f(x), \tag{1.161}$$

или накратко

$$L[y] = f(x), \tag{1.162}$$

където функциите $a_k(x),\ k = 0, 1, \ldots, n$ и $f(x)$ са непрекъснати в Δ, а $a_0(x) \neq 0$ за всяко $x \in \Delta$. Нека да означим с $y(x)$ общото решение на хомогенното уравнение, а с $\eta(x)$ – някое частно решение на нехомогенното уравнение т.е. за всяко $x \in \Delta$ са изпълнени равенствата $L[y(x)] = 0$ и съответно $L[\eta(x)] = f(x)$. Съгласно теоремата от подточка в) на точка 1) $y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k y_k(x)$, където $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи, а $y_k(x),\ k = 1, 2, \ldots, n$ е произволна ФСР на $L[y] = 0$.

Теорема 1.14 *В сила са твърденията :*

а) Функцията

$$Y(x) = y(x) + \eta(x) \tag{1.163}$$

е решение на (1.162)

б) ако $Y_0(x)$ е произволно решение на (1.162), то съществуват константи $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ такива, че

$$Y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x) + \eta(x) \tag{1.164}$$

Доказателство.
Първото твърдение следва от факта, че

$$L[Y(x)] = L[y(x)] + L[\eta(x)] = 0 + f(x) = f(x) \tag{1.165}$$

За да докажем второто, нека забележим, че ако $Y_0(x)$ е произволно решение на (1.162), то $Y_0(x) - \eta(x)$ е решение на хомогенното уравнение. Наистнина,

$$L[Y_0(x) - \eta(x)] = L[Y_0(x)] - L[\eta(x)] = f(x) - f(x) = 0, \tag{1.166}$$

което означава, че функцията $y_0(x) = Y_0(x) - \eta(x)$ е решение на хомогенното уравнение и следователно (вж. предишната теорема) съществуват константи $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ такива, че

$$y_0(x) = Y_0(x) - \eta(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x) \text{ или } Y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 y_k(x) + \eta(x). \tag{1.167}$$

Теоремата е доказана. ■

Функцията $Y(x)$ от (1.161) е **общото решение на** (1.162). Според доказаната теорема, за да намерим общото решение на едно ЛНХДУ от $n-$ти ред трябва най-напред да намерим общото решение на съответното хомогенно уравненние $y(x)$ (или което е все едно – една произволна ФСР на хомогенното уранвнение)и едно какво и да е частно решение на нехомогенното $\eta(x)$ и да ги съберем двете : $Y(x) = y(x) + \eta(x)$. Задачата на Коши за едно ЛНХДУ от $n-$ти ред се решава по същия начин, като в случая на ЛХДУ, с тази разлика, че в дясната част на системата от която се определят неизвестните константи (вж. (1.141)), вместо $y^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$ стоят числата $Y^{(k)}(x_0) - \eta^{(k)}(x_0),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$. Детерминантата на системата е също детерминантата на Вроснки за ФСР на хомогенното уравнение, която е различна от нула, т.е. системата притежава единствено решение по отношение на константите. Не бива да се забравя, че в този случай началните данни се отнасят за $Y(x)$, а не за $y(x)$!

Забележка 1.2.3 *Нека да обърнем внимание на следния факт: ако за уравнението $L[y] = f(x)$ е изпълнено че $f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$ и $\eta_i(x)$ е решение на уравнението $L[\eta_i] = f_i(x),\ .1, 2, \ldots, m$, то $\eta(x) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i(x)$ е решение на уравнението $L[\eta] = \sum_{i=1}^{m} f_i(x)$, защото очевидно*

$$L[\eta] = L\left[\sum_{i=1}^{m} \eta_i(x)\right] = \sum_{i=1}^{m} L[\eta_i] = \sum_{i=1}^{m} f_i(x). \tag{1.168}$$

а) Метод на Лагранж. Нека да разгледаме един метод за намиране на частно решение на уравнението $L[y] = f(x)$, като предполагаме, че е известна една ФСР за съответното хомогенно уравнение $L[y] = 0$. Този метод е известен като **метод на Лагранж.** или **метод на вариране на константите.** По подобен начин се извежда и формулата за общото решение на ЛДУ от първи ред. С оглед на по-кратки пресмятания да разгледаме случая на уравнение от трети ред. Нека е дадено уравнението

$$a_0(x)y^{'''} + a_1(x)y^{''} + a_2(x)y^{'} + a_3(x) = f(x),\ x \in \Delta, \tag{1.169}$$

за което предполагаме, че сме намерили една ФСР $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$. Да потърсим частно решение на даденото уравнение във вида

$$\eta(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x),\ x \in \Delta, \tag{1.170}$$

където функциите $C_i(x), i = 1, 2, 3$ трябва да се определят така, че $\eta(x)$ да е частно решение на даденото уравнение. За тази цел да намерим $\eta^{'}(x)$. Получаваме

$$\begin{aligned} \eta^{'}(x) &= C_1^{'}(x)y_1(x) + C_2^{'}(x)y_2(x) + C_3^{'}(x)y_3(x)+ \\ &+C_1(x)y_1^{'}(x) + C_2(x)y_2^{'}(x) + C_3(x)y_3^{'}(x),\ x \in \Delta, \end{aligned} \tag{1.171}$$

Сега, нека да наложим условието

$$C_1^{'}(x)y_1(x) + C_2^{'}(x)y_2(x) + C_3^{'}(x)y_3(x) = 0,\ x \in \Delta, \tag{1.172}$$

Тогава

$$\begin{aligned} \eta^{''}(x) &= C_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{'}(x) + C_3^{'}(x)y_3^{'}(x)+ \\ &+C_1(x)y_1^{''}(x) + C_2(x)y_2^{''}(x) + C_3(x)y_3^{''}(x),\ x \in \Delta, \end{aligned} \tag{1.173}$$

Второто условие, което се налага на $C_i^{'}(x),\ i = 1, 2, 3$ е

$$C_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{'}(x) + C_3^{'}(x)y_3^{'}(x) = 0,\ x \in \Delta, \tag{1.174}$$

При това предположение да пресметнем $\eta^{'''}(x)$. Имаме

$$\begin{aligned} \eta^{'''}(x) &= C_1^{'}(x)y_1^{''}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{''}(x) + C_3^{'}(x)y_3^{''}(x)+ \\ &+C_1(x)y_1^{'''}(x) + C_2(x)y_2^{'''}(x) + C_3(x)y_3^{'''}(x),\ x \in \Delta, \end{aligned} \tag{1.175}$$

Сега да заместим $\eta(x)$, $\eta^{'}(x)$ $\eta^{''}(x)$ $\eta^{'''}(x)$ в даденото уравнение. Получаваме

$$a_0(x)\eta^{'''}(x) + a_1(x)\eta^{''}(x) + a_2(x)\eta^{'}(x) + a_3(x)\eta(x) = f(x),\ x \in \Delta, \tag{1.176}$$

Равенство (1.176) е всъщност изискването $\eta(x)$ да е частно решение на (1.169). След като отчетем наложените условия в (1.172) и (1.174), а също и факта, че $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ са ФСР на хомогенното уравнение, получаваме

$$C_1^{'}(x)y_1^{''}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{''}(x) + C_3^{'}(x)y_3^{''}(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)}\ x \in \Delta, \tag{1.177}$$

Като комбинираме равенства (1.172), (1.174) и (1.177), получаваме системата уравнения, която е линейна относно $C_i^{'}(x),\ i = 1, 2, 3$

$$\left| \begin{array}{l} C_1^{'}(x)y_1(x) + C_2^{'}(x)y_2(x) + C_3^{'}(x)y_3(x) = 0 \\ \\ C_1^{'}(x)y_1^{'}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{'}(x) + C_3^{'}(x)y_3^{'}(x) = 0 \\ \\ C_1^{'}(x)y_1^{''}(x) + C_2^{'}(x)y_2^{''}(x) + C_3^{'}(x)y_3^{''}(x) = \dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{array} \right. \tag{1.178}$$

Получената система има единствено решение за всяко $x \in \Delta$, защото детерминантата и е $W(x, y_1, y_2, y_3) \neq 0$ при $x \in \Delta$. След като намерим $C_i^{'}(x) = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, 3$ чрез интегриране намираме и

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx,\ i = 1, 2, 3. \tag{1.179}$$

Така получените функции (интеграционните константи са нули) заместваме в равенство (1.163). Окончателно общото решение на (1.169) изглежда така:

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) + \eta(x), \tag{1.180}$$

където

$$\eta(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + C_3(x)y_3(x) \tag{1.181}$$

Пример за приложението на метода на Лагранж е показан в сведващия параграф.

1.2.4 Линейни диференциални уравнения от $n-$ти ред с постоянни коефициенти и приводими към уравнения с постоянни коефициенти – уравнение на Ойлер.

1. ЛХДУ от $n-$ти ред с постоянни коефициенти. Общо решение. В общия случай намирането на ФСР за едно ЛХДУ с променливи коефициенти е невъзможно. В тази точка разглеждаме уравнения с постоянни коефициенти, за които се оказва, че намирането на ФСР може да стане без интегриране.

а) Комплекснозначни функции на реален аргумент. Формула на Ойлер

Определение 1.29 *Нека $\Delta \subset \mathbb{R}$ е произволен интервал. Ако на всяко $t \in \Delta$ е съпоставено единствено число*

$$z(t) = x(t) + iy(t),\ z(t) \in \mathbb{C} \tag{1.182}$$

казваме, че в Δ е зададена комплекснозначна функция на реален аргумент. Функцията $x(t)$ наричаме ***реална част*** *на $z(t)$, а функцията $y(t)$ –* ***имагинерна част*** *на $z(t)$. Функцията $z(t)$ наричаме непрекъсната и съответно диференцируема в Δ, ако функциите $z(t)$ и $y(t)$ са непрекъснати, съответно диференцируеми в Δ, като производната $z^{'}(t)$ намираме по формулата*

$$z^{'}(t) = x^{'}(t) + iy^{'}(t),\ t \in \Delta. \tag{1.183}$$

Правилата за диференциране и интегриране са същите, какти при реални функции на реален аргумент. Например, ако $z(t) = t^2 + it^3$, то

$$z^{'}(t) = 2t + i3t^2 \text{ и}$$

$$\int z(t) = \int t^2 dt + i \int t^3 dt = \frac{1}{3}t^3 + i\frac{1}{4}t^4 + C,\ C = const.\ C \in \mathbb{C}.$$

Нека да разгледаме функцията $z(t) = e^{\lambda t},\ \lambda \in \mathbb{C}$. Както ще бъде показано по-нататък, в курса по Приложна математика, ако $\lambda = \alpha + i\beta$, то

$$z(t) = e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \sin \beta t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Формулата

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,\ t \in \mathbb{R}. \tag{1.184}$$

е известна още като **формула на Ойлер** и играе важна роля в математиката, защото дава връзка между експоненциалната функция и тригометричните функции. От горните формули, след известни пресмятания се вижда, че

$$\left(e^{\lambda t}\right)_t^{'} = \lambda e^{\lambda t} \quad t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{C},\ \lambda = const. \tag{1.185}$$

б) Общо решение на ЛХДУ от $n-$ти ред с постоянни коефициенти. Нека разгледаме уравнението

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.186}$$

където $a_k = const,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ a_0 \neq 0$. Да потърсим решение от вида $y = e^{\lambda x}$, където λ е произволно реално или комплексно число. След пресмятане на производните и заместване в (2.5) получаваме

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.187}$$

и тъй като $e^{\lambda x} \neq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, то функцията $y = e^{\lambda_0 x}$ е решение на уравнението за някое фиксирано λ_0, ако то е корен на полинома

$$P_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0, \tag{1.188}$$

който се нарича **характеристичен полином** на (2.5).

И така функцията $y = e^{\lambda_0 x}$ е решение на уравнението $L[y] = 0$ тогава и само тогава, ако

$$P_n(\lambda_0) = 0. \tag{1.189}$$

Възможни са три случая.

I) Всички корени на $P_n(\lambda)$ са реални и различни, т.е. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Тогава функциите $y_k(x) = e^{\lambda_k x}, k = 1, 2, \ldots, n$ са линейно независими и образуват ФСР за (2.5). Следователно, общото му решение, съгласно теоремата от предишната лекция, е

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_ne^{\lambda_n x}, \tag{1.190}$$

където $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са произволни константи.

II) Нека сега някой от корените на $P_n(\lambda)$ например $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ е прост комплексен корен на уравнението $P_n(\lambda) = 0$. Тъй като хактеристичият полином е реални коефициенти то и $\overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ е също негов корен. Тогава функциите $e^{(\alpha+i\beta)x}$ и $e^{(\alpha+i\beta)x}$ са две комплексни линейно незевисими решения на (2.5). Оказва, се обаче, че реалните решния, които им съответстват са едни и същи. Наистина, от формулата на Ойлер и свойствата на оператора L следва, че

(1.191)
$$L[e^{\alpha x}\cos\beta x] + iL[e^{\alpha x}\sin\beta x] = L[e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x] = L[e^{\lambda_1 x}] = 0$$

и

$$L[e^{\alpha x}\cos\beta x] - iL[e^{\alpha x}\sin\beta x = L[e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x] = L[e^{\overline{\lambda_1} x}] = 0.$$

След почленно събиране и изваждане на горните две равенства се вижда, че

$$L[e^{\alpha x}\cos\beta x] = 0 \text{ и } L[e^{\alpha x}\sin\beta x] = 0, \tag{1.192}$$

т.е. че функциите $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ са две реални, при това линейно независими (проверява се, че детерминантата на Вронски за $y_1(x)$ и $y_2(x)$ е различна от нула) решения на (2.5), съответстващи на $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ и $\overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$. От последното равенство, обаче следва, и че са единствени. Отказното дотук следва, че при решаване на задачи можем да използваме само единия от два комплескно спрегнати корени на $P_n(\lambda)$.

III) Остава да разгледаме случая на кратни корени на характеристичния полином – реални или комплескни. Без ограничение можем да считаме, че λ_1 е $k-$кратен корен на $P_n(\lambda)$. Но това означава, че

$$P_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k Q_{n-k}(\lambda),\ k \geq 2,\ Q_{n-k}(\lambda_1) \neq 0 \tag{1.193}$$

В този случай може да се докаже, че на λ_1 съответстват точно k линейно независими решения на (2.5), които се дават с функциите

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \tag{1.194}$$

в случай, че $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и съответно $2k$ реални линейно независими решения които се дават с функциите

$$\begin{gathered} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x, \\ x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{gathered} \tag{1.195}$$

в случай, че $\lambda_1 \in \mathbb{C}$.

Пример 1.2.13 *Да се намери общото решение на уравнението*

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} - 3y = 0.$$

Характеристичното уравнениее

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 - 3 = 0$$

Полагаме $\lambda^2 = t$ и получаваме квадратното уравнение $t^2 + 2t - 3 = 0$, чийто корени са $t_1 = -3,\ t_2 = 1$. Корените на характеристичното уравнение са $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$ и $\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$. Тогава общото решение на диференциалното уравнение е

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos\sqrt{3}x + C_4 \sin\sqrt{3}x$$

Пример 1.2.14 *Да се намерят общите решения на уравненията*

$$y^{'''} + y^{'} = 0,\ y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

2. ЛНХДУ от $n-$ти ред с постоянни коефициенти и специална дясна част. Намиране на частно решение. Общо решение. Тук се разглежда уравнението

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y^{'} + a_n y = f(x), \tag{1.196}$$

където функцията $f(x)$ има следният специален вид

$$f(x) = e^{\gamma x} \left[P_s(x) \cos \mu x + Q_l(x) \sin \mu x \right], \tag{1.197}$$

където $P_s(x)$ $Q_l(x)$ са полиноми от степени s и l, а γ и μ са дадени реални числа. Оказва се, че в този случай частно решение на нехомогенното уравнение може да бъде намерено без интегриране. Най напред, да разгледаме някои частни случаи на специална дясна част.

1. $\mu = 0,\ \gamma \neq 0$. Тогава

   $$f(x) = e^{\gamma x} P_s(x). \tag{1.198}$$

   може да се докаже, че в този случай частното решение $\eta(x)$ има вида

   $$\eta(x) = e^{\gamma x} \tilde{P}_s(x) x^k, \tag{1.199}$$

   където $\tilde{P}_s(x)$ е полином с неизвестни коефициенти, но от същата степен s, като дадения $P_s(x)$, а по x^k се умножава само, ако някой от реалните корени на харктеристичното уравнение $P_n(\lambda)$ има кратност $k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ и е равен на γ – в този сручаяй се казва , че е налице **резонанс**. Неизвесните коефициенти на $\tilde{P}_s(x)$ се намират, като намерим $\eta^{'}(x),\ \eta^{''}(x),\ \ldots, \eta^{(n)}(x)$, заместим в уравнението (2.15), съкратим двете страни на $e^{\gamma x}$ и приравним коефициентите на полиномите от двете страни на полученото равенство.

   Забележка 1.2.4 *Ако сме работили вярно трябва* ***задължително да получим система линейни уравнения за неизвестните коефициенти на полинома $\tilde{P}_s(x)$, която има единствено решение !***

   Забележка 1.2.5 *Много "опасен"е случаят $\gamma = 0$, защото тогава $f(x) = e^{0x} P_s(x) = P_s(x)$ и трябва да забележим, че ако $\lambda = 0$ е $k-$ кратен корен на характеристичното уравнение има съвпадение и да да умножим по x^k в $\eta(x)$. Често това се пропуска и тогава дори при верни изчисления се получава грешка!*

2. $P_s(x) \equiv M = const$ $P_l(x) \equiv N = const, \mu \neq 0$,т.е.

$$f(x) = e^{\gamma x}\left[M\cos\mu x + M\sin\mu x\right]. \tag{1.200}$$

   В този случай частното решение $\eta(x)$ се търси във вида :

$$\eta(x) = e^{\gamma x}\left[A\cos\mu x + B\sin\mu x\right]x^k, \tag{1.201}$$

   където A и B са неизвестни константи, а по x^k се умножава само, ако $\gamma + i\mu$ съвпада с някой к-кратен **комплексен корен** на характеристичното уравнение $\lambda = \alpha + i\beta$ (припомнете си кога две комплесни числа са равни!). В ттози случай , за да намерим константите A и B отново намираме $\eta^{'}(x),\ \eta^{''}(x),\ \ldots, \eta^{(n)}(x)$, заместваме в уравнението (2.15), съкратим двете страни на $e^{\gamma x}$ и приравним коефициентите от двете страни на полученото равенство пред $\cos\mu x$ и $\sin\mu x$ (защо?). Отново, ако сме работили вярно трябва задължително да получим система линейни уравнения с две неизвестни за константите A и B, която има единствено решение! При това, общият вид на $\eta(x)$ е винати като в (2.20) везависимо, че във $f(x)$ може да отсъства $\cos\mu x$ или $\sin\mu x$!

3. Сега да разгледаме случая, когато $f(x)$ има вида даден с равенство (2.16) – най-общият случай на специална дясна част. Може да се докаже, че уравнението (2.15) притежава частно решение от вида

$$\eta(x) = e^{\gamma x}\left[\tilde{P_m}(x)\cos\mu x + \tilde{Q_m}(x)\sin\mu x\right], \tag{1.202}$$

   където полиномите $\tilde{P_m}(x)$ и $\tilde{Q_m}(x)$ са с неизвестни коефициенти от степен m, равна на **по-голямото от числата** s **и** l **!** Намирането на тези коефициенти отново става, като намерят всички производни на $\eta(x)$, заместим в (2.15), след това вляво изнесем зад скоби $\cos\mu x$ и $\sin\mu x$ и приравним коефициентите на полинома пред $\cos\mu x$, стоящ вляво и на $P_s(x)$, даден в условието на задачата, както и коефициентите на полинома вляво пред $\sin\mu x$ и дадения полином $Q_l(x)$. Нека отново да напомним, че при правилно определяне на вида на $\eta(x)$, както и при верни последващи изчисления, получената система линейни урвнения за неизвестните коефициенти на полиномите има единствено решение !

Разбира в горните случаи също е приложим и метода на Лагранж, но решаването на системата относно $C_i^{'}(x),\ i = 1, 2, \ldots, n$, както и последващото интегриране за намирането на $C_i(x)$ води до неоправдани технически трудности, грешки и загуба на ценно време!

Нека да разгледаме някои примери.

Пример 1.2.15 *Да се намерят общите решения на уравненията:*

а) $y^{''} + y^{'} = x^2 + 3x + 5$*; б)* $y^{''} - 4y = e^{-2x} + 2x + 3$*;*

в) $y^{''} + 2y^{'} + 5y = 4e^{-x}\cos 2x$.

Решение. а) Най-напред решаваме хомогенното уравнение $y^{''} + y^{'} = 0$. Характеристичното уравнение е $\lambda^2+\lambda = 0$, откъдето намираме $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 0$. Решението на хомогенното е $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{0x} = C_1e^{-x} + C_2$. Съгласно разгледаните по-горе случаи, имаме $f(x) = x^2 + 3x + 5 = e^{0x}(x^2 + 3x + 5)$ т.е. $\gamma = 0,\ \mu = 0$. От друга страна $\lambda_2 = 0 = \gamma$ – има съвпадение с еднократен корен на характеристичното уравнение ($k = 1$). Тогава частното решение има вида:

$$\eta(x) = (ax^2 + bx + c)x = ax^3 + bx^2 + cx.$$

Тогава $\eta^{'} = 3ax^2+2bx+c$, $\eta^{''} = 6ax+b$. Сега да заместим в даденото уравнеие. Имаме

$$\eta^{''} + \eta^{'} = x^2 + 3x + 5, \text{ или } 6ax + b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2 + 3x + 5.$$

Като приравним коефициентите пред x^2, x и свободните членове в двете страни на горното равенство получаваме системата

$$3a = 1,\ 6a + 2b = 3,\ b + c = 5 \text{ откъдето следва, че } a = \frac{1}{3},\ b = \frac{1}{2}, c = \frac{9}{2}.$$

Тогава

$$\eta(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

и общото решение на уравнението е

$$Y(x) = y(x) + \eta(x) = C_1e^{-x} + C_2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}x.$$

Експериментирайте, какво би се получило, ако забравим да умножим но x във формулата, с която определихме $\eta(x)$?

б) В този случай съответното хомогенно уравнение е $y^{''} - 4y = 0$, характеристичното уравнение е $\lambda^2 - 4 = 0$ и $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2$ т.е. решнието на хомогенното уравнение е $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$. Нека да запишем дясната част $f(x)$ по следния начин

$$f(x) = e^{-2x} + 2x + 3 = e^{-2x} + e^{0x}(2x + 3), \quad \text{т.е. } \gamma_1 = -2, \gamma_2 = 0,\ \mu_1 = \mu_2 = 0,$$

от където става ясно, че дясната част е сума от две специални десни части от различен вид. Това означава, че частното решение $\eta(x)$ трябва да го потърсим във вида $\eta(x)=\eta_1(x)+\eta_2(x)$, където $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ са частни решения на уравненията

$$\eta_1^{''}(x)-4\eta_1(x)=e^{-2x} \text{ и съответно } \eta_2^{''}(x)-4\eta_2(x)=e^{0x}(2x+3).$$

Тъй като еднократният корен

$\lambda_1=-2=\gamma_1,$ то $\eta_1(x)=Axe^{-2x},$ а $\gamma_2=0\neq\lambda_{1,2}$ то $\eta_2(x)=e^{0x}(ax+b)=ax+b.$

Зада намерим неизвестните константи A, a и b намираме производните на $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ и заместваме в съответните уравнения. Имаме

$$\eta_1^{'}(x)=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x},\ \eta_1^{''}(x)=(Ae^{-2x}-2Axe^{-2x})'=-4Ae^{-2x}+4Axe^{-2x},$$

от където получаваме $-4Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}-4Axe^{-2x}=e^{-2x}$ или $-4A=1,$

т.е. $A=-\frac{1}{4}$. Следователно $\eta_1(x)=-\frac{1}{4}xe^{-2x}$. Аналогично $\eta_2^{'}(x)=a,\ \eta_2^{''}(x)=0.$

Тогава $-4(ax+b)=2x+3,$ откъдето намираме $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{4}$. Окончателно

$\eta_2(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ и следователно

$$Y(x)=y(x)+\eta_1(x)+\eta_2(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}-\tfrac{1}{4}xe^{-2x}-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{3}{4}.$$

в) Тук съответното хомогенно уравнение е $y^{''}+2y^{'}+5y=0$, $f(x)=4e^{-x}\cos 2x=e^{-x}(4\cos 2x+0\sin 2x)$, а характеристичното уравнеие е $\lambda^2+2\lambda+5=0$ с корени $\lambda_1=-1-2i$ и $\lambda_2=-1+2i$ т.е. $\alpha=-1,\ \beta=2$. Съгласно теорията за ЛХДУ с постоянни коефициенти за общото решение на хомогенното уравнение получаваме

$$y(x)=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right).$$

Тъй като за дясната част $f(x)$ имаме, че $\gamma=-1=\alpha$ и $\mu=2=\beta$ и $\lambda_2=-1+2i$ е еднократен комплексен корен на характерисичното уравнение, то е налице резонанс. Тогава частното решение има вида

$$\eta(x)=e^{-x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)x,$$

където трябва да се определят константите A и B. За тази цел постъпваме както досега: намираме проиводните от първи и втори ред на $\eta(x)$, заместваме в уравнението от подточка в), правим приведение и приравняваме коефициентите пред $\cos 2x$ и $\sin 2x$. Окончателно за общото решение получаваме

$$Y(x)=e^{-x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+e^{-x}x\sin 2x.$$

Направете самостоятелно всички необходими пресмятания! ■

Пример 1.2.16 *а) Решете задачата на Коши за уравнението $y'' + 9y = x$ с начални данни $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$;*

б) Без да намирате неизвестните константи, определете вида на частното решение на уравнението

$$y'' - 4y' + 20y = e^{2x}\left[(x+5)\cos 4x + (x^2+1)\sin 4x\right].$$

Решение. а) Имаме $\lambda^2 + 9 = 0$, т. е. $\lambda_{1,2} = 0 \pm 3i$ и следователно

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Тъй като няма резонанс (защо?), то $\eta(x) = ax + b$, откъдето намираме $\eta'(x) = a,\ \eta''(x) = 0$ и след заместване в уравнението получаваме

$$0 + 9ax + 9b = 1.x + 0, \quad \text{т.е. } a = 1/9,\ b = 0 \text{ и } \eta(x) = \frac{1}{9}x,$$

а общото решение на уравнението е

$$Y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}x.$$

За да намерим неизвестните константи C_1 и C_2 намираме

$$Y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x + \frac{1}{9}$$

и заместваме $x = 0$ във $Y(x)$ и $Y'(x)$. Получаваме

$$1 = Y(0) = C_1,\ 0 = Y'(0) = 3C_2 + \frac{1}{9}, \text{т. е. } C_1 = 1,\ \text{а } C_2 = -\frac{1}{27}.$$

Окончателно, търсеното часно решение е

$$Y(x) = \cos 3x - \frac{1}{27}\sin 3x + \frac{1}{9}x.$$

б) Частното решение изглежда така:

$$\eta(x) = e^{2x}x\left[(ax^2 + bx + c)\cos 4x + (dx^2 + ex + f)\sin 4x\right].$$

Обяснете защо! ■

Пример 1.2.17 *С помощта на метода на Лагранж да се се намери общото решение на уравнението*

$$y'' + y = \text{tg } x$$

Решение. Най-напред решаваме съответното хомогенно уравнение. Имаме $y'' + y = 0,\ \lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm i,$ откъдето следва, че $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Частното решение $\eta(x)$ търсим във вида (вж. за метод на Лагранж):

$$\eta(x) = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

където производните на неизвестните функции са решения на системата

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \text{tg } x \end{array} \right. .$$

Сега, като умножим първото уравнение по $\sin x$, а второто по $\cos x$ и ги съберем, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} C_1'(x) \cos x \sin x + C_2'(x) \sin^2 x = 0 \\ \\ -C_1'(x) \cos x \sin x + C_2'(x) \cos^2 x = \sin x, \end{array} \right.$$

$$C_2'(x) = \sin x,\ C_2(x) = \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

Аналогично, ако умножим първото от тях по $-\cos x$, а второто по $\sin x$ и ги съберем, получаваме

$$\left| \begin{array}{l} -C_1'(x) \cos^2 x - C_2'(x) \sin x \cos x = 0 \\ \\ -C_1'(x) \sin^2 x + C_2'(x) \sin x \cos x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} \end{array} \right. ,$$

от където последователно намираме

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} \, dx =$$

$$= \int \cos x - \frac{1}{\cos x} \, dx = \sin x + \int \frac{1}{\sin(\pi/2 - x)} \, d(\pi/2 - x) =$$

$$= \sin x + \ln \left| \text{tg } \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right|.$$

За намирането на последния интеграл се възползвахме от факта, известен от курса по А1, че

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln\left|\operatorname{tg}\, \frac{x}{2}\right|.$$

Окончателно имаме

$$\eta(x) = \left(\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\, \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|\right)\cos x \,-\, \sin x\cos x = \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\, \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|,$$

$$\text{и } Y(x) = y(x) + \eta(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\operatorname{tg}\, \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|.$$

■

Забележка 1.2.6 *В този случай прилагането на метода на Лагранж беше задължително за намиране на частно решение на нехомогенното уравнение, защото дясната страна на даденото уравнение $f(x) = \operatorname{tg}\, x$ не е от вида, който наричаме „специална дясна част“. Нека да добавим, че метода на Лагранж е винаги приложим и при уравнения със специална дясна част, но това не е оправдано заради техническите трудности, които възникват при решаване на системата и пресмятането на интегралите!*

3. ЛДУ от $n-$ти ред приводими към уравнения с постоянни коефициенти – уравнение на Ойлер. Нека да разгледаме един специален вид ЛДУ с променливи коефициенти – така нареченото **Ойлерово диференциално уравнение**. То има вида

$$a_0(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y\,' + a_n y = f(x), \tag{1.203}$$

където a, b и $a_k, k = 0, 1, \ldots, n,$ $(a_0 \neq 0)$ са реални константи, а $f(x)$ непрекъсната в някакъв отворен интервал $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. Ако дясната част $f(x) = 0$, уравнеието се нарича хомогенно, а противен случай – нехомогенно уравнение на Ойлер. Това уравнение се свежда до уравнение с постоянни коефициенти чрез полагането

$$t = \ln|ax+b|,\ ax+b \neq 0 \text{ и } u(t) = y(x), \tag{1.204}$$

където t е новата независима променлива, а $u(t)-$ новата неизвестна функция (това полагане е все същото, ако положим $ax+b = \pm e^t$ в зависимост от знака на израза $ax+b$. За да правим по-малко пресмятания, да покажем при $n = 3$ как уравнението

$$a_0(ax+b)^3 y''' + a_1(ax+b)^2 y'' + a_2(ax+b)y\,' + a_3 y = f(x), \tag{1.205}$$

с помощта на полагане (2.23) се преобразува в уравнение с постоянни коефиценти. Да диференцираме тъждеството

$$y(x) = u(t) = u(t(x)) \tag{1.206}$$

относно x. Тогава

$$y'(x) = u'(t(x))t'(x) = u'(t)\,(\ln|ax+b|)' = u'(t)\,\frac{a}{ax+b}\,,$$

$$y''(x) = u''(t)\,t'(x)\frac{a}{ax+b} + u'(t)\left(\frac{a}{ax+b}\right)' =$$

$$= u''(t)\left(\frac{a}{ax+b}\right)^2 - u'(t)\left(\frac{a}{ax+b}\right)^2 = \left(u''(t) - u'(t)\right)\left(\frac{a}{ax+b}\right)^2, \tag{1.207}$$

$$y'''(x) = \left(u'''(t) - u''(t)\right)\left(\frac{a}{ax+b}\right)^3 - 2\left(u''(t) - u'(t)\right)\left(\frac{a}{ax+b}\right)^3 =$$

$$= \left(u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)\right)\,\left(\frac{a}{ax+b}\right)^3.$$

Сега да заместим в (2.24). Получаваме

$$\begin{gathered} a_0(ax+b)^3\left(u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)\right)\,\left(\frac{a}{ax+b}\right)^3 + \\ +a_1(ax+b)^2(u''(t) - u'(t))\left(\frac{a}{ax+b}\right)^2 + \\ a_2(ax+b)u'(t)\,\frac{a}{ax+b} + a_3u(t) = f(\pm e^t) \end{gathered} \tag{1.208}$$

След известни преобразувания, получаваме уравнението

$$b_0u'''(t) + b_1u''(t) + b_2u'(t) + b_3u(t) = g(t), \tag{1.209}$$

което е с постоянни коефициенти – (b_i $i = 0, 1, 2, 3$ са числа, които зависят от a_i, a и b).

Пример 1.2.18 *Да се намерят общите решениия на уравненията:*

а) $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x-4$; *б)* $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$;

в) $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$; *г)* $x^2y'' - xy' + y = 4x^2\ln x$.

Решение. а) Полагаме $t = \ln|2x+1|,\ x \neq -1/2$ и $u(t) = y(x)$. Пресмятаме, както по-горе $y\,'(x)$ и $y''(x)$. Получаваме

$$y\,'(x) = u\,'(t)\frac{2}{2x+1} \text{ и } y''(x) = \Big(u''(t) - u\,'(t)\Big)\left(\frac{2}{2x+1}\right)^2.$$

Сега заместваме в изходното уравнение. Имаме:

$$4(u''(t) - u\,'(t)) - 8u\,'(t) + 8u(t) = \pm\, 4e^t \text{ или } u''(t) - 3\,u\,'(t) + 2u(t) = \pm\, e^t.$$

Съответното хомогенно уравнение е $u''(t) - 3u\,'(t) + 2u(t) = 0$, а характеристичното му уравнение е $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ т.е. $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$. Решението на хомогенното уравнение е $u(t) = C_1e^t + C_2e^{2t}$. Като отчетем факта, че $\lambda_1 = 1 = \gamma$ (налице е резонанс), частното решение има вида $\eta(t) = Ate^t$. В случай, когато дясната част е e^t, получаваме

$$\eta''(t) - 3\eta\,'(t) + 2\eta(t) = 2Ae^t + Ate^t - 3Ate^t - 3Ae^t + 2Ate^t = -Ae^t = e^t, \text{т.е. } A = -1,$$

откъдето намираме, че

$$U(t) = u(t) + \eta(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} - te^t \quad ,$$

и съответно

$$Y(x) = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^2 - (2x+1)\ln(2x+1) \text{ при } 2x+1 > 0.$$

Случаят $2x + 1 < 0$ е аналогичен. Решете самостоятелно останалите три задачи. ■

1.3 Системи диференциални уравнения.

1.3.1 Линейни системи уравнения диференциални от първи ред. Теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши.

1. Оновни понятия

Определение 1.3.1 *Нека $A = \|a_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$ е матрица, чиито елементи са непрекъснати функции в някакъв интервал Δ. Нека*

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad t \in \Delta \tag{1.210}$$

е векторнозначна функция, чиито компоненти са непрекъснати функции. Израз от вида

(1.211) $$\dot{X} = A(t)X + F(t),$$

където $X(t)$ е неизвестна векторна функция, а $\dot{X}$ е нейната производна се нарича ***линейна нехомогенна система диференциални уравнениия (ЛНХСДУ) от първи ред*** *. Ако $F(t) \equiv \vec{0},\ t \in \Delta$ системата се нарича* ***линейна хомогенна система диференциални уравнениия от първи ред (ЛХСДУ).***

Определение 1.3.2 *Векторната функция*

(1.212) $$X^0(t) = \begin{bmatrix} x_1^0(t) \\ x_2^0(t) \\ \vdots \\ x_n^0(t) \end{bmatrix}$$

се нарича ***решение*** *на (2.44), ако равенството*

(1.213) $$\dot{X}^0(t) = A(t)X^0(t) + F(t) \text{ е тъждество при } t \in \Delta.$$

Нека да добавим, че всички основни факти, отнасящи се за ЛХДУ и ЛНХДУ от $n-$ти остават в сила и за линейни системи.

Определение 1.3.3 *Всяка система от n линейно независими решения $X_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$ на ЛХСДУ*

(1.214) $$\dot{X} = A(t)X$$

се нарича ***фундаментална система решения (ФСР)*** *на (2.47).*

Също както при уравнения $X_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$ е ФСР за (2.47) тогава и само тогава, когато детерминантата $W(t, X_1, X_2, \ldots, X_n) \neq 0$ за всяко $t \in \Delta$, където

(1.215)
$$W(t, X_1, X_2, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \text{ и } X_k(t) = \begin{bmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{bmatrix},$$

$k = 1, 2, \ldots, n$. Вярно е също така, че за всяка ЛХСДУ съществуват безброй много ФСР.

2. Теореми за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши.

Теорема 1.15 *Нека е дадена ЛНХСДУ*

$$\dot{X} = A(t)X + F(t), \tag{1.216}$$

където $X = X(t)$ е търсената вектор-функция, а матрицата

$$A(t) = \|a_{i,j}(t)\|, \ i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ и вектор-функцията } F(t) \neq \vec{0} \tag{1.217}$$

са непрекъснати за всяко $t \in (a, \ b)$. Тогава за всяко фиксирано $t_0 \in (a, \ b)$ началната задача (задачата на Коши)

$$\left| \begin{array}{l} \dot{X} = A(t)X + F(t) \\ \\ X(t_0) = X^0, \end{array} \right. \qquad \text{където } X^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} \tag{1.218}$$

е произволен вектор от $n-$мерното пространство, има единствено решение

$$X = X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{такова, че } X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = X^0 \tag{1.219}$$

и което е дефинирано в целия интервал $(a, \ b)$.

Следствие 1.3 *Съответната СХЛДУ също има единствено решение при произволни начални данни при това, ако $X^0 = \vec{0}$, то решението $X(t) \equiv \vec{0}$ за всяко $t \in (a, \ b)$.*

Линейни системи уравнения диференциални от първи ред с постоянни коефициенти – методи за решаване .

1. ЛХСДУ от първи ред с постоянни коефициенти.

а) Метод на изключването и метод на последователното интегриране. Оказва, че е възможно една линейна система система да бъде сведена към едно линейно диференциално уравнение, чийто ред е равен на броя на уравненията в системата, при това със същите корени на характерисшичното уравнение, или да бъде решена чрез последователно решаване на отделните уравнения. Този методи са приложими и за нехомогенни системи.

Пример 1.3.1 *Да се реши системата ДУ,*

$$\left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = ax(t) + by(t) + f(t) \\ \\ \dot{y}(t) = cx(t) + dy(t) + g(t) \end{array} \right. \tag{1.220}$$

като предварително се сведе към едно уравнение. Тук $a, b, c, d = const$, а $f(t)$ и $g(t)$ са непрекъснати функции в някакъв интервал Δ.

Решение. Нека да се опитаме да я сведем към едно уравнение от втори ред, като изключим например $x(t)$. За тази цел да диференцираме второто уравнение на системата относно t:

$$\ddot{y}(t) = c\dot{x}(t) + d\dot{y}(t) + g^{'}(t), \text{ или } \ddot{y}(t) - d\dot{y}(t) = c\dot{x}(t) + g^{'}(t). \tag{1.221}$$

Сега да заместим $\dot{x}(t)$ с неговото равно от първото уравнение. Имаме

$$\ddot{y}(t) - d\dot{y}(t) = c(ax(t) + by(t) + f(t)) + g^{'}(t). \tag{1.222}$$

От друга страна, ако $c \neq 0$, то от второто уравнение можем да изразим $x(t)$ по следния начин

$$x(t) = \frac{1}{c}(\dot{y}(t) - dy(t) - g(t)). \tag{1.223}$$

Сега вече е ясно, че ако заместим (1.223) в (1.222) се получава ЛНХДУ с постоянни коефициенти от втори ред и неизвестна функция $y(t)$, които може да бъде решено по познатите методи изучени в предишнте лекции. След което можем да заместим в равенство (1.223) с вече намерения израз за $y(t)$ и да получим и $x(t)$. Да обърнем внимание, че за да може да се изключи $x(t)$ се оказа необходимо $c \neq 0$. От друга страна, ако $c = 0$, то във второто уравнение на системата не участва неизвестната функция $x(t)$. Всъщност, тогава то е ЛДУ от първи ред с незвестна функция $y(t)$ и може да бъде решено независимо от първото уравнение по съответната формула (вж. темата за ЛДУ от първи ред!), след което да заместим с полученото вече решение за $y(t)$ в първото уравнение и да получим отново ЛДУ от първи ред, но този път с неизвестна функция $x(t)$. Това означава, че системата при $c = 0$ (или при $b = 0$) може да се сведе до последователно решаване на две отделни линейни уравнения от първи ред. Какво се случва, ако $c = 0$ и $b = 0$ едновременно? При какво условие може да се изкключи $y(t)$ от (1.220)? Проверете, че характеристичните корени на получените урвнения съвпадат с тези ситемата (вж. по-долу) ■

Пример 1.3.2 *Да се решат системите ДУ по метода на изключването или чрез последователно интегриране:*

$$(1.224) \qquad a) \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) - y(t) + e^t \\ \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t) - 3te^t \end{array} \right. ; \quad б) \left| \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) + t \\ \\ \dot{y}(t) = x(t) + 2y(t) - 2t \end{array} \right. .$$

Упътване. За подточка а) постъпваме като в предишния пример, за подточка б) може пак по същия начин, но може и да се реши първото уравнение самостоятелно и след това с получената формула за $x(t)$ да се замести във второто уравнение и от там да се получи и $y(t)$. Направете това самостоятелно!

б) Метод на характеристичните корени (метод на Ойлер). Горните два метода са приложими винаги (поне единият от тях), но изчисленията стават твърде обемисти даже при системи от трети ред. За това е целесъобразно да разгледаме един по-общ метод за решаване им. Нека е дадена една ЛХСДУ с постояни коефициенти

$$(1.225) \qquad \dot{X} = AX,$$

където $A = \|a_{i,j}\|_{i,j=1}^n$ е матрица с реални елементи. По аналогия с ЛХДУ от $n-$ти ред, да потърсим решение от вида

$$(1.226) \qquad X(t) = \vec{p}\, e^{\lambda t}, \text{ където } \vec{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

е ненулев постоянен вектор, а $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) е константа. Координатите на $\vec{p}$ и стойността на λ се определят от условието $X(t) = \vec{p}\, e^{\lambda t}$ да е решение на (1.225). Очевидно $\dot{X}(t) = \lambda \vec{p} e^{\lambda t}$. Сега да заместим в (1.225). Получаваме

$$(1.227) \qquad \lambda \vec{p}\, e^{\lambda t} = A\vec{p}\, e^{\lambda t}, \text{ или } A\vec{p} = \lambda\, \vec{p}.$$

Но последното равенство, както е известно от курса по линейна алгебра означава, че ако вектор-функцията, определена с равенство (1.226) е решение на (1.225), то числото λ трябва да е собствена стойност на матрицата A, а $\vec{p}$ – собствен вектор на тази матрица, съответстващ на собствената стойност λ. Нека да напомним, че характеристичният полином на една квадратна матрица се определя с формулата

$$(1.228) \quad P(\lambda) = det(A - \lambda E) = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - \lambda & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

където E е единичната матрица от ред n, а координатите на собствен вектор $\vec{p}$, съответстващ на собствената стойност λ са ненулево решение на хомогенната система линейни уравнения

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}-\lambda & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} = \vec{0}. \tag{1.229}$$

Тук отново (както при уравненията) са възможни три случая в зависимост от корените на характеристичния полином на матрицата A.

1. Всички собствени стойности на матрицата A са реални и различни: $\lambda_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ \lambda_k \neq \lambda_j$ при $u \neq j$. Тогава съществуват точно n линейно независими собствени вектора $\vec{p}^{\,k},\ k = 1, 2, \ldots, n$ и ФСР на (1.225) образуват вектор-функциите

$$X_k(t) = \vec{p}^{\,k} e^{\lambda_k t}, \tag{1.230}$$

а общотото решение се дава с формулата

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k \vec{p}^{\,k} e^{\lambda_k t}, \tag{1.231}$$

2. Между собствените стойности на матрицата A има и комплексни. Нека например $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ е комплексен корен на $P(\lambda)$. Тогава и $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ също е корен на $P(\lambda)$. Може да се докаже, че (както при ЛДУ с постоянни коефициенти) на λ_1 и $\bar{\lambda}_1$ съответстват **едни и същи две линейно независими реални решения**, които могат да бъдат намерени по начина описан по долу. Наистина, да предположим, че вече сме намерили един комплексен собствен вектор $\vec{p}$, съответстващ на $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Но векторът $\vec{p}$ може да се представи във вида

$$\vec{p} = \vec{u} + i\vec{v}, \tag{1.232}$$

където векторите $\vec{u}$ и $\vec{v}$ са с реални координати (с други думи $\vec{u} = \mathrm{Re}\,\vec{p}$, а $\vec{v} = \mathrm{Im}\,\vec{p}$). Нека да разгледаме вектор-функцията

$$\begin{aligned} \vec{X}(t) &= \vec{p}\, e^{\lambda_1 t} = (\vec{u} + i\vec{v})\ e^{\alpha t}\ (\cos\beta t + i \sin\beta t) = \\ &= e^{\alpha t}(\vec{u}\cos\beta t - \vec{v}\sin\beta t) + i e^{\alpha t}(\vec{v}\cos\beta t + \vec{u}\sin\beta t) = \\ &= \mathrm{Re}\ \vec{X}(t) + i\mathrm{Im}\ \vec{X}(t). \end{aligned} \tag{1.233}$$

Тъй като функцията $\vec{X}(t)$ е решение на (1.225), то вектор-функциите

$$\vec{X}_1(t) = \text{Re } \vec{X}(t) \text{ и } \vec{X}_2(t) = \text{Im } \vec{X}(t) \tag{1.234}$$

са две реални линейно независими решения на (1.225).

3. Остава да разгледаме случая на кратни корени на характеристичния полином $P(\lambda) = det(A - \lambda E) = 0$ – реални или комплексни. Без ограничение можем да считаме, че λ_1 е $k-$кратен корен на $P_n(\lambda)$. Тъй като всяка система може да се сведе към уравнение от $n-$ти ред с постоянни коефициенти относно $x_m(t),\ m = 1, 2, \ldots, n$, и което има същото характеристично уравнение като на системата. Тогава на $k-$кратния корен λ_1 съответства решение на

$$x_m(t) = (C_1 + C_2 t + \ldots + C_k t^{k-1})e^{\lambda_1 t}.$$

Това ни подсеща да потърсим k линейно независими решения на системата, съответстващи на този корен по формулата

$$X(t) = \begin{bmatrix} \left(C_{11} + C_{12}t + \ldots + C_{1k}t^{k-1}\right) e^{\lambda_1 t} \\ \left(C_{21} + C_{22}t + \ldots + C_{2k}t^{k-1}\right) e^{\lambda_1 t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(C_{n1} + C_{n2}t + \ldots + C_{nk}t^{k-1}\right) e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix}. \tag{1.235}$$

За да намерим зависимостите между произволните константи, намираме производните на редовете на матрицата, заместваме в дадената система и прилагаме метода на неопределените коефициенти. Тук трябва да обърнем внимание, че от тези $n.k$ на брой константи **само** k на брой са независими, а останалите се изразяват чрез тях!

Ако λ_1 е $k-$кратен корен комплексен корен на $P_n(\lambda)$ най -напред получаваме k линейно независими комплексни решения. После по описания по-горе начин намираме $2k$ линейно независими реални решения, като отделим реалните и имагинерните части на вече получените комплексни решения.

Пример 1.3.3 *Да се намери общото решение на системите:*

$$\text{а)} \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} ; \quad \text{б)} \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} ; \quad \text{в)} \begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 5z \\ \dot{y} = 6x - y - 6z \\ \dot{z} = -8x + 3y + 9z \end{cases} .$$

Упътване:

а) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,$

$$\vec{p}^{\,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \vec{p}^{\,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

б) Тук $\lambda_1 = 2+i,\ \lambda_2 = 2-i$, комплексният собствен вектор е

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{u} + i\vec{v}$$

и съответно

$$\vec{p}\, e^{(2+i)t} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) e^{2t}(\cos t + i \sin t).$$

Тогава, след отделяне на реалната и имагинерната части за решението получаваме

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{bmatrix} e^{2t}.$$

в) Имаме

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & 1-\lambda & -6 \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^3 + 5\lambda - 2 = 0,$$

откъдето намираме $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$. На $\lambda_3 = 2$ съответства решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}$$

На двукратния корен $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ съответстват две линейно независими решения, които търсим във вида:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 t + B_2 \\ A_3 t + B_3 \end{bmatrix} e^t,$$

като от тези константи само две са независими, а другите се определят чрез тях. Общото решение на системата е

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} t \\ 3 \\ t \end{bmatrix} e^t + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t.$$

Направете самостоятелно всички необходими пресмятания! В подточки а) и б) решете задачите на Коши с данни $x(0) = 1,\ y(0) = -2.$ ■

2. ЛНХСДУ от първи ред с постоянни коефициенти. За общото решение на нехомогенни линейни системи е в сила същото твърдение както за линейни нехомогенни уравнения:

Теорема 1.3.1 *Общото решение на една ЛНХСДУ е сума от общото решение на съответната ЛХСДУ и едно частно решение на нехомогенната система.*

Доказателството е аналогично на доказателството на съответното твърдение за уравнения.

С други думи, ако с $X(t)$ означим общото решение на системата

$$\dot{X} = A(t)X + F(t), \tag{1.236}$$

а с $X_0(t)$ – общото решение на съответната хомогенна система

$$\dot{X} = A(t)X, \tag{1.237}$$

то

$$X(t) = X_0(t) + H(t), \tag{1.238}$$

където $H(t)$ е едно (кое и да е) частно решение на (1.235).

За намиране на частно решение на една ЛНХСДУ най-често се прилага метода на Лагранж, който се състои в следното: ако вече е намерена една ФСР на хомогенната система $X_k(t),\ u = 1, 2, \ldots, n$, частното решение се търси във вида

$$H(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t) X_k(t), \tag{1.239}$$

където производните на неизвестните фунции $C_k^{'}(t)$ удовлетворяват системата линейни уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^{'}(t) X_k(t) = F(t). \tag{1.240}$$

Основната идея е същата както при уравненията – замяна на константите със неизвестни фунции, които се определят по подходящ начин. Не бива да се забравя, че $C_k(t)$ са скаларни функции, а $H(t), F(t)$ и $X_k(t)$ – векторнозначни функции на независимата променлива t!

Пример 1.3.4 *С помощта на метода на Лагранж намерете общото решение на системата*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t} \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$$

Решение. Съответната хомогенна система е от подточка а) на предишния пример. Общото и решение е

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^{2t}$$

или в скаларна форма

$$\begin{cases} x &= C_1e^t &+ &2C_2e^{2t} \\ y &= C_1e^t &- &3C_2e^{2t} \end{cases}.$$

Частното решение на нехомогената система записано в скаларна форма търсим във вида

$$\begin{cases} \eta_1(t) &= C_1(t)e^t &+ &2C_2(t)e^{2t} \\ \eta_2(t) &= C_1(t)e^t &- &3C_2(t)e^{2t} \end{cases},$$

като неизвестните функции ${C_1}'(t)$ и ${C_2}'(t)$ намираме от системата

$$\left| \begin{array}{rcrcr} {C_1}'(t)e^t &+ &2{C_2}'(t)e^{2t} &= &2e^{-t} \\ C_1'(t)e^t &- &3{C_2}'(t)e^{2t} &= &e^{-t} \end{array} \right. .$$

След като решим системата относно ${C_1}'(t)$ и ${C_2}'(t)$ и интегрираме, получаваме

$$C_1(t) = -\frac{4}{5}\, e^{-2t} \;\text{ и }\; C_2(t) = -\frac{1}{15} e^{-3t}, \text{т.е.}$$

$$\eta_1(t) = -\frac{4}{5}\, e^{-2t}\, e^t - \frac{2}{15}\, e^{-3t}\, e^{2t} = -\frac{14}{15}\, e^{-t},$$

$$\eta_2(t) = -\frac{4}{5}\, e^{-2t}\, e^t + \frac{3}{15} e^{-3t}\, e^{2t} = -\frac{9}{15}\, e^{-t}.$$

Тогава общото решение на нехомогенната система е

$$\begin{cases} X &= C_1\, e^t &+ &2C_2\, e^{2t} &- &\dfrac{14}{15}\, e^{-t} \\ \\ Y &= C_1\, e^t &- &3C_2\, e^{2t} &- &\dfrac{3}{5}\, e^{-t} \end{cases},$$

където C_1 и C_2 са произволни константи.

Извършете подробно всички пресмятания! Решете задачата и по метода на изключването. Намерете константите C_1 и C_2, ако $X(0) = 0,\ Y(0) = 0$. ■

Глава 2

Криви и повърхнини

2.1 Криви

2.1.1 Векторнозначна функция на скаларен аргумент. Непрекъснати и гладки криви. Естествен параметър.

1.Векторнозначна функция на скаларен аргумент.

а) Понятие за векторнозначна функция на числов аргумент. Граница и непрекъснатост.

Определение 2.1.1 *Правило, по което на всяко число $t \in [\alpha,\ \beta]$ се съпоставя единствен вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$ от равнината или пространството се нарича **векторнозначна (или само векторна)** функция на един скаларен аргумент, дефинирана в интервала $[\alpha,\ \beta]$*

Ако в пространството е зададена една декартова координатна система $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, то функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$ се определя еднозначно от от тройката скаларни функции $x = x(t),\ y = y(t)\ z = z(t)$, дефинирани в същия интервал. Тогава векторната функция може да се запише по следния начин

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \text{ или } \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{2.1}$$

Определение 2.1.2 *Казваме, че векторната функция има за **граница** векторът $\vec{r}_0 = const$ при $t \to t_0 \in [\alpha,\ \beta]$, ако*

$$\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0 \text{ и записваме } \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0, \tag{2.2}$$

където $|\vec{a}|$ означава обичайната дължина на вектор в пространството. Ако

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) \tag{2.3}$$

функцията $\vec{r}(t)$ се нарича ***непрекъсната*** *в $t_0 \in [\alpha,\ \beta]$. Ако $\vec{r}(t)$ е непрекъсната за всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$, тя се нарича непрекъсната в този интервал.*

Може да се докаже, че функцията $\vec{r}(t)$ е непрекъсната в t_0 тогава и само тогава, когато трите координатни функции $x(t), y(t)$ и $z(t)$ са непрекъснати в същата точка. Обичайните теореми за действия с функции имащи граница и с непрекъснати функции остават в сила и за векторни функции.

б) Производна на векторнозначна функция. Правила за диференциране. Нека е дадена вектор-функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$, дефинирана в интервала $[\alpha,\ \beta]$ и $t_0 \in [\alpha,\ \beta]$ е произволна фиксирана точка от този интервал.

Определение 2.1.3 ***Първа производна*** *на функцията $\vec{r}(t)$ в точката $t_0 \in [\alpha,\ \beta]$ наричаме границата, (ако съществува) и означаваме с*

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t_0) &= \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \left(\frac{\Delta x(t)}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y(t)}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z(t)}{\Delta t}\vec{k} \right) = \\
&= x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Функцията $\vec{r}(t)$ наричаме ***диференцируема*** *в точката $t_0 \in [\alpha,\ \beta]$. Ако $\vec{r}\,'(t)$ съществува за всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$, функцията $\vec{r}(t)$ наричаме* ***диференцируема*** *в интервала $[\alpha,\ \beta]$.*

Забележка 2.1.1 *В случай, че $t_0 = \alpha$ или $t_0 = \beta$ под $\vec{r}\,'(t_0)$ разбираме дясната и съответно лявата граница на частното $\frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t}$*

Правилата за диференциране на векторни функции са аналогични на правилата за диференциране на числови (скаларни) функции и се дават от следната теорема.

Теорема 2.1.1 *1. Нека $\vec{r}(t) = \vec{a} = const.$ за всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$. Тогава $\vec{r}\,'(t) = \vec{0}$ за всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$.*

2. *Нека за всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$ са дефинирани функциите $\vec{r_1}(t)$ и $\vec{r_2}(t)$ и съществуват $\vec{r}_1{}'(t)$ и $\vec{r}_2{}'(t)$ и C_1 и C_2 са произволни константи. Тогава*

$$(C_1\vec{r_1}(t) + C_2\vec{r_2}(t))' = C_1\vec{r_1}\,'(t) + C_2\vec{r_2}\,'(t).$$

3. *Нека $\vec{r}(t)$ и $\mu(t)$ са векторна и скаларна функция, диференцируеми в интервала $t \in [\alpha,\ \beta]$. Тогава*

$$(\mu(t)\vec{r}(t))' = \mu(t)'\vec{r}(t) + \mu(t)\vec{r}\,'(t).$$

4. *Нека* $\vec{r_1}(t)$ *и* $\vec{r_2}(t)$ *са диференцируеми векторни функции в* $[\alpha,\ \beta]$. *Тогава за производната на скаларното и векторното им произведения са в сила формулите*

$$(\vec{r_1}(t)\ \vec{r_2}(t))' = \vec{r_1}\ '(t)\ \vec{r_2}(t) + \vec{r_1}(t)\ \vec{r_2}\ '(t);$$

$$(\vec{r_1}(t) \times \vec{r_2}(t))' = \vec{r_1}\ '(t) \times \vec{r_2}(t) + \vec{r_1}(t) \times \vec{r_2}\ '(t).$$

5. *Нека* $\vec{r_1}(t)$,$\vec{r_2}(t)$ *и* $\vec{r_3}(t)$ *са диференцируеми векторни функции в* $[\alpha,\ \beta]$. *Тогава за производната на смесеното им произведения е в сила формулата*

$$(\vec{r_1}(t)\ \vec{r_2}(t)\ \vec{r_3}(t))' = \vec{r_1}\ '(t)\ \vec{r_2}(t)\ \vec{r_3}(t) + \vec{r_1}(t)\ \vec{r_2}\ '(t)\ \vec{r_3}(t) + \vec{r_1}\ (t)\vec{r_2}(t)\ \vec{r_3}(t)\ '.$$

6. *(Производна на сложна функция) Нека* $\vec{r}(t)$ *е диференцируема векторна функция в* $[\alpha,\ \beta]$, *а* $t = \varphi(u)$ *е диференцируема скаларна функция за всяко* $u \in [\alpha_1,\ \beta_1]$. *Тогава сложната функция* $\vec{\rho}(u) = \vec{r}(\varphi(u))$ *е диференцируема в интервала* $[\alpha_1,\ \beta_1]$ *и*

$$\vec{\rho}\ '(u) = \vec{r}\ '(t)\varphi'(u).$$

Доказателстото на тази теорема следва непосредствено от определенията за производна на скаларни и векторни функциии свойствата на скаларното, векторно и смесено произведение на вектори. По аналогичен начин се въвеждат и производните на векторна функция от по-висок ред. Например **втора производна** на $\vec{r}(t)$ се дава с формулата

$$\vec{r}\ ''(t) = \left(\vec{r}\ '(t)\right)' = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} + z''(t)\vec{k}. \tag{2.5}$$

Забележка 2.1.2 *По аналогичен начин може да се дефинира и интеграл от векторна функция на скаларен аргумент. Ако* $\vec{r}(t)$ *е непрекъсната за всяко* $t \in [\alpha,\ \beta]$, *то по определение полагаме*

$$\int_\alpha^\beta \vec{r}(t)\ dt = \int_\alpha^\beta x(t)\ dt.\vec{i} + \int_\alpha^\beta y(t)\ dt.\vec{j} + \int_\alpha^\beta z(t)\ dt.\vec{k}\ . \tag{2.6}$$

Пример 2.1.1 *Нека функцията* $\vec{r}(t)$ *има постоянна дължина, т.е.* $|\vec{r}(t)| = C = const.$ *в някакъв интервал* $[\alpha_1,\ \beta_1] \subseteq [\alpha,\ \beta]$. *Тогава за всяко* $t \in [\alpha_1,\ \beta_1]$ *е вярно, че векторите* $\vec{r}(t)$ *и* $\vec{r}\ '(t)$ *са перпендикулярни.*

Решение. Наистина от условието следва, че

$$|\vec{r}(t)|^2 = C^2 = \vec{r}^{\,2}(t),$$

където в дясно стои скаларният квадрат на $\vec{r}(t)$. Като диференцираме относно t двете страни на равенството $\vec{r}^{\,2}(t) = C^2$ получаваме

$$2\vec{r}(t)\,\vec{r}^{\,\prime}(t) = (C^2)' = 0,$$

което означава, че $\vec{r}(t) \perp \vec{r}^{\,\prime}(t)$ за всяко $t \in [\alpha_1,\ \beta_1]$. ■

Пример 2.1.2 *Този пример показва, че за векторни функции не е вярна теоремата на Рол. Нека*

$$\vec{r}(t) = cos\ t\ \vec{i} + sin\ t\ \vec{j},\ t \in [0,\ 2\pi].$$

Очевидно

$\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = \vec{i}$, *а* $\vec{r}^{\ \prime}(t) = -sin\ t\ \vec{i} + cos\ t\ \vec{j} \neq \vec{0}$ *при* $t \in [0,\ 2\pi]$ ($|\vec{r}^{\ \prime}(t)| = 1$).

■

2. Непрекъснати и гладки криви .

a) Понятие за непрекъсната крива в равнината и пространството.

Определение 2.1.4 *Нека функцията* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *е непрекъсната в интервала* $[\alpha,\ \beta]$ *и в пространството е фиксирана една координатна система* $O\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$. *Множеството от точки от равнината или пространството*

$$\gamma = \left\{ M\ :\ \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM},\ t \in [\alpha,\ \beta] \right\} \tag{2.7}$$

се нарича ***непрекъсната крива*** *или* ***непрекъсната линия****. Точката* A *за която* $\overrightarrow{OA} = \vec{r}(\alpha)$ *се нарича* ***начало*** *на* γ*, а точката* B*, за която* $\overrightarrow{OB} = \vec{r}(\beta)$ *–* ***край*** *на* γ*. Ако* $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$ *кривата* γ *се нарича* ***затворена****.*

По нататък се използва означението

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \ \text{ или } \ \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [\alpha,\ \beta], \tag{2.8}$$

което се нарича **векторно-параметрично уравнение** на кривата. Представянето чрез координатните функции

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [\alpha,\ \beta], \\ z = z(t) \end{array} \right. \tag{2.9}$$

се нарича **скаларно-параметрично уравнение** на γ. Ако съществува някаква равнина λ такава, че $\gamma \subset \lambda$, γ се нарича **равнинна крива**. При изучаване на геометричните свойства на равнините криви можем да считаме, че $\lambda \equiv Oxy$ т.е. $z = z(t) \equiv 0$ $t \in [\alpha,\ \beta]$. Тогава съответното уравнение има вида

$$\gamma : \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \ \text{ или } \vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [\alpha,\ \beta]. \tag{2.10}$$

Ако е дадена непрекъсната фунция $y = f(x)$, дефинирана в интервала $[a,\ b]$, то графиката на тази функция е непрекъсната крива със скаларно-параметрично или съответно векторно-параметрично уравнение

$$\gamma : x = x,\ y = f(x) \text{ или } \vec{r}(t) = (x, f(x)),\ x \in [a,\ b]. \tag{2.11}$$

Представянето $\gamma : y = f(x),\ x \in [a,\ b]$ се нарича още **явно задаване** на кривата.

Ако γ е зададена с уравнението (2.8) или (2.9) и $[\alpha_1,\ \beta_1]$ е произволен подинтервал на $[\alpha,\ \beta]$, кривата $\gamma_1 \subseteq \gamma$, зададена със същото уравнение, но за $t \in [\alpha_1,\ \beta_1]$ се нарича **дъга** от γ.

Пример 2.1.3 *Тук са дадени примери на някои криви:*

а) $\gamma_1 : \vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b},\ t \in \mathbb{R}$ *– права в равнината или пространството, колинеарна на ненулевия вектор* $\vec{a}$ *и минаща през т.*B*, където* $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

б) $\gamma_2 : \vec{r}(t) = \cos\ t\ \vec{i} + \sin\ t\ \vec{j},\ t \in [0,\ 2\pi]$ *– окръжност с радиус единица и център началото на координатната система. Тук смисълът на параметъра* t *е ъгълът между положителната посока на* Ox *и радиус-вектора на точка от окръжността. Направета чертеж!*

в) $\gamma_3 : x = x,\ y = x^2,\ x \in [-1,\ 3]$ *– дъга от параболата* $y = x^2$ *с начало т.*$A(-1,\ 1)$ *и край т.*$B(3,\ 9)$ *(черт.!)* ■

Както лесно се вижда една и съща крива може да има различни параметрични представяния – например, ако в подточка в) положим $x = at + b,\ a \neq 0$ получаваме $x = at + b,\ y = a^2t^2 + 2ab + b^2$, което отново е уравнение на парабола. По-общо, нека в параметричното представяне на кривата $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta]$ направим полагането $t = \varphi(u),\ u \in [m,\ n]$, където функцията $\varphi(u)$ е непрекъсната в интервала $[m,\ n]$ и образа на този интервал е интервалът $[\alpha,\ \beta]$, с други думи да разгледаме векторната функция

$$\vec{\rho}(u) = \vec{r}(\varphi(u)),\ u \in [m,\ n]. \tag{2.12}$$

Тогава кривите

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \text{ и } \gamma_1 : \vec{\rho} = \vec{\rho}(u),\ u \in [m,\ n] \tag{2.13}$$

съвпадат като множества от точки в пространството (в равнината). Това означава, че е получено ново параметрично представяне на непрекъснатата крива γ.

По-нататък, с оглед изучаването на геометричните снойства на кривите, от всички възможни параметрични представяния на една непрекъсната крива се разглеждат само случаите, в които функцията $t = \varphi(u)$ е строго монотонно растяща (намаляваща) и $\varphi(m) = \alpha$, $\varphi(n) = \beta$ (съответно $\varphi(m) = \beta$ и $\varphi(n) = \alpha$).

б) Гладка крива. Геометричен и механичен смисъл на производната на векторна функция.

Определение 2.1.5 *Нека функцията $\vec{r} = \vec{r}(t)$ притежва непрекъсната първа производна $\vec{r}\,'(t)$ в интервала $[\alpha,\ \beta]$ и освен това $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ за всяко $t \in [\alpha_1,\ \beta_1]$. Тогава кривата с праметрично представяне*

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{2.14}$$

*се нарича **гладка крива** или **гладка линия**.*

Нека да обърнем внимание на термина **гладка крива**. Интуицията ни подсказва, че това би трябвало да е крива без "остриета" по нея, или казано по-строго без **особени точки**. От курса по анализ първа част знаем,че съществуването на първа производна на една скаларна функция $y = f(x)$ в даден интервал $[a,\ b]$ гарантира съществуването на допирателна права във всяка точка $M(x, f(x))$ от графиката на тази функция при $x \in [a,\ b]$. Да обърнем внимание, че ако разгледаме графиката като параметрично зададена крива с уравнение $\vec{r}(x) = (x, f(x)),\ x \in [a,\ b]$, то $\vec{r}\,'(x) = (1, f\,'(x)) \neq \vec{0}$, дори в случай, че $f\,'(x) = 0$. Освен това, векторът $\vec{r}\,'(x) = (1, f\,'(x))$ е колинеарен с допирателната права към графиката на функцията, построена в т. $M(x, f(x))$. Тези наблюдения ни подсещат, че в случай на произволна параметрично зададена крива, векторът $\vec{r}\,'(t)$ е колинеарен с допирателната към кривата, построена в точката, чийто радиус-вектор съвпада с $\vec{r}(t)$. нещо повече, наличието на вектор $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ при всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$ гарантира съществуването на допирателна към кривата във всяка нейна точка. Уравнението на тази допирателна в произволна фиксирана точка M_0 ($\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}(t_0)$) от кривата γ е

$$g_{t_0} : \vec{\rho}(\lambda) = \vec{r}(t_0) + \lambda\vec{r}\,'(t_0),\ \lambda \in (-\infty\ , \infty) \tag{2.15}$$

От курса по ЛААГ е известно, че уравнението (2.15) е уравнение на права линия, колинеарна на вектора $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$ и минаваща през т.M_0.

От определението за гладка крива става ясно и защо е целесъобразно да се разглеждат само параметрични представяния, при които функцията $t = \varphi(u)$ е строго монотонна и диференцируема. Наистина, нека $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta]$ е гладка крива в смисъла на определението, дадено по-горе и $\varphi(u)$ е строго монотонна и диференцируема функция, дефинирана в интервала $[m\ n]$ и нека $\vec{\rho}(u) = \vec{r}(\varphi(u)),\ u \in [m, n]$ е параметричното представяне на γ спрямо параметъра u. Тогава

$$\vec{\rho}\,'(u) = \vec{r}\,'(\varphi(u))\varphi\,'(u) \neq \vec{0},\ u \in [m, n], \tag{2.16}$$

защото по предоложение $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ за всяко $t \in [\alpha,\ \beta]$ и $\varphi\,'(u) \neq 0$ при $u \in [m, n]$ заради строгата монотонност на функцията $t = \varphi(u)$.

Нека сега да разгледаме равнинно или пространствено движение на материална точка M, движеща се под въздействието на някакви сили. Положението на точката във всеки момент от времето $t \in [t_1\ , t_2]$ се характеризира с нейните координати, които зависят от t. Това означава, че на всяка движеща се материална точка можем да съпоставим една векторна функция, описваща движението на точката спрямо една фиксирана координатна система. Но това оззначава, че е зададен закона за движение на точката M който може да бъде записан така:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ t \in [t_1\ , t_2] \tag{2.17}$$

Както е известно от механиката, скороста и ускорението на една материална точка се дефинират, като произдводната на закона на движение на точката и съответно като производната на скоростта относно времето, т.е.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,'(t) \text{ и } \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}\,''(t),\ t \in [t_1\ , t_2]. \tag{2.18}$$

С други думи, движението по гладка крива, означава, че във всеки момент от движението е определен векторът на скоростта $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$, който е насочен по допирателната към траекторията на материалната точка (кривата $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [t_1\ , t_2]$). Точките, в които $\vec{v}(t) = \vec{0}$ се наричат **точки на покой** или **стационарни точки** от траекторията на движещатата се материална точка. Интуитивно е ясно, че точките на покой може да се наруши гладкостта на траекторията, защото движението след момента на покой може да продължи в произволна посока (направете чертеж!)

Пример 2.1.4 *Да се напишат уравненията на допирателните прави в посочените точки от кривите.*

а) $\gamma_1 : \vec{r}(t) = \cos^3 t\, \vec{i} + \sin^3 t\, \vec{j}$ *при* $t = \pi/3$;

б) $\gamma_2 : \vec{r}(t) = (2\cos \pi t,\ 2\sin \pi t,\ 3t),\ \ t = 1/4$.

Решение. а) Последователно намираме

$$\vec{r}(\pi/3) = \cos^3(\pi/3)\vec{i} + \sin^3(\pi/3)\vec{j} = \tfrac{1}{8}\vec{i} + \tfrac{3\sqrt{3}}{8}\vec{j},$$

$$\vec{r}\,'(t) = -3\cos^2 t\ \sin t\, \vec{i} + 3\sin^3 t\ \cos t\, \vec{j},$$

$$\vec{r}\,'(\pi/3) = -3\cos^2(\pi/3)\sin(\pi/3)\vec{i} + 3\sin^2(\pi/3)\cos(\pi/3)\vec{j} = -\tfrac{3\sqrt{3}}{8}\vec{i} + \tfrac{9}{8}\vec{j}.$$

Скаларно-параметричното уравнение на допирателната е

$$g : \begin{cases} x = \frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}u \\ \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{9}{8}u \end{cases} \quad u \in (-\infty,\ \infty)$$

Напишете самостоятелно уравнението на нормалата в същатата точка. Кривата това уравнение се нарича **астроида**.

б) Направете това самостоятелно. ■

Пример 2.1.5 *Покажете, че гладкостта на кривата с уравнение*

$$\gamma : \vec{r}(t) = \begin{cases} -t^2\, \vec{i} + t^{4/3}\, \vec{j}, \ \text{ако } t < 0 \\ \\ t^{4/3}\, \vec{i} + t^2\, \vec{j}, \ \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

се нарушава при $t = 0$.

Решение. Направете чертеж! ■

2. Естествен параметър . Нека е дадена гладката крива с уравнение $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta]$. Както е известно от курса по анализ първа част, дължината на кривата γ се дава с формулата

$$l(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x\,'^2(t) + y\,'^2(t) + z\,'^2(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta |\vec{r}\,'(t)|\, dt. \tag{2.19}$$

Нека $t \in [\alpha,\ \beta]$ е произволно фиксирано число. Да разгледаме интеграла с променлива горна граница

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{x\,'^2(u) + y\,'^2(u) + z\,'^2(u)}\, du = \int_\alpha^t |\vec{r}\,'(u)|\, du. \tag{2.20}$$

Чрез горната формула се дефинира функция $s = s(t),\ t \in [\alpha,\ \beta]$ и приемаща значения в интервала $[0,\ l]$. Геометричният смисъл на тази функция е дължината на дъгата от γ, отговаряща на подинтервала $[\alpha,\ t] \subseteq [\alpha,\ \beta]$. Лесно се вижда, че $s(\alpha) = 0,\ s(\beta) = l$. Освен това функцията $s(t)$ е диференцируема и строго растяща в $[\alpha,\ \beta]$. Наистина от правилото за производна на интеграл с променлива горна граница следва, че

$$s\,'(t) = |\vec{r}\,'(t)| > 0 \tag{2.21}$$

за всяко $t \in (\alpha,\ \beta]$, тъй като по предположение γ е гладка крива. Но това означава, че в интервала $[0,\ l]$ е дефинирана обратната функция

$$t = t(s),\ \text{и}\ t\,'(s) = \frac{1}{s\,'(t)}\ \text{за}\ t \in [\alpha,\ \beta],\ s \in [0,\ l]. \tag{2.22}$$

Тогава векторната функция

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s)),\ s \in [0,\ l] \tag{2.23}$$

задава ново параметрично представяне на кривата γ.

Определение 2.1.6 *Параметърът s, дефиниран чрез равенство (2.20) се нарича* ***естествен параметър****. Векторно-параметричното уравнение на кривата*

$$\gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(s),\ s \in [0,\ l] \tag{2.24}$$

естествено параметрично уравнение *на кривата . Числото s наричаме* ***криволинейна координата*** *на т. $M \in \gamma$ и означаваме $M(s),\ s \in [0,\ l]$ (вместо $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho}(s)$)*

Ако γ е параметризирана с помощтта на естествения си параметър, то

$$\vec{\rho}\,'(s) = \vec{r}\,'(t)t'(s) = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\vec{r}\,'(t),\ \text{т.е.}\ |\vec{\rho}\,'(s)| = 1\ \text{за всяко}\ \ s \in [0,\ l]. \tag{2.25}$$

Естествените уравнение на кривите са удобни за изучаване геометричните им свойства. Оказва се обаче, че параметричното представяне на дадена крива чрез естествения параметър не винаги може да бъде намерено лесно (за разлика от примерите дадени, по-долу).

Пример 2.1.6 *Намерете естествените уравнения на кривите*

а) $\gamma_1 : \vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b},\ t \in \mathbb{R}$;

б) $\gamma_2 : \vec{r}(t) = R\cos\ t\,\vec{i} + R\sin\ t\,\vec{j},\ t \in [0,\ 2\pi]$;

в) $\gamma_3 : \vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin\pi t,\ bt),\ a, b > 0$ *и* $a, b = const\ \ t \in \mathbb{R}$.

Решение. а) Както знаем $\gamma_1 : \vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b},\ t \in \mathbb{R}$ е права линия. Очевидно

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{a},\ t \in \mathbb{R} \text{ и}$$

$$s(t) = \int_\alpha^t |\vec{r}\,'(u)|\,du = \int_0^t |\vec{a}|\,du = |\vec{a}|t, \text{ т.е. } t = \frac{s}{|\vec{a}|},$$

$$\text{откъдето намираме } \gamma_1 : \vec{\rho}(s) = \vec{a}\frac{s}{|\vec{a}|} + \vec{b},\ s \in \mathbb{R}$$

Решете самостоятелно подточки б) и в)! ■

2.1.2 Кривина и торзия на крива . Триедър на Френе. Формули на Френе.

1. Кривина и торзия на крива.

а) Кривина. Нека кривата γ е зададена със своето естествено уравнение:$\gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(s),\ s \in [0.\ l]$. Тогава векторът $\vec{\rho}\,'(s)$ е единичен и насочен по допирателната права към кривата по посока на нарастване на параметъра s. Да въведем означението

$$\vec{\tau}(s) = \vec{\rho}\,'(s),\ |\vec{\tau}(s)| = 1 \tag{2.26}$$

Нека $\Delta\varphi$ е ъгълът на завъртане на допирателната към кривата при изменение на параметъра от s до $s + \Delta s$. Да означим с

$$\Delta\vec{\tau}(s) = \vec{\tau}(s + \Delta s) - \vec{\tau}(s) \tag{2.27}$$

изменението на допирателният вектор $\vec{\tau}(s)$, отговарящо на завъртането $\Delta\varphi$. Тогава $\Delta\varphi$ е ъгълът между векторите $\vec{\tau}(s)$ и $\vec{\tau}(s + \Delta s)$ (черт.!)

Определение 2.1.7 *Величината*

$$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}(s)}{\Delta s}\right| = |\vec{\tau}\,'(s)| = |\vec{\rho}\,''(s)| \tag{2.28}$$

се нарича ***кривина*** *на кривата γ в точката от кривата, отговаряща на дъга $s \in [0.\ l]$.*

Като отчетем факта, че

$$\frac{1}{2}|\Delta\vec{\tau}(s)| = \sin\frac{\Delta\varphi}{2} \sim \frac{1}{2}|\Delta\varphi| \text{ при } \Delta\varphi \to 0, \tag{2.29}$$

получаваме

$$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \tag{2.30}$$

Величината

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| \tag{2.31}$$

се нарича **скорост на въртене** на вектора $\vec{\tau}$.

От направените разсъждения следва, че кривината на гладка крива γ е равна на скоростта на въртене на допирателния единичен вектор $\vec{\tau}$ в точката $M \in \gamma$, която отговаря на дължина на дъгата s.

Определение 2.1.8 *Числото*

$$R(s) = \frac{1}{k(s)} \tag{2.32}$$

се нарича ***радиус на кривината*** *на кривата γ в точката $M(s)$ от кривата .*

Да отбележим, че, ако γ е права линия, то $k(s) \equiv 0$, а ако γ е окръжност с радиус R, то $k(s) = 1/R = const$.

б) Триедър на Френе. Торзия на пространствена крива. Нека кривата $\gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(s),\ s \in [0.\ l]$ е зададена със естественото си уравнение и освен това предполагаме, че съществува векторът $\vec{\rho}\,''(s)$. Тъй като $|\vec{\rho}\,'(s)| = 1$, то векторите $\vec{\rho}\,'(s)$ и $\vec{\rho}\,''(s)$ са ортогонални. Да въведем вектора

$$\vec{\nu}(s) = \frac{1}{k(s)}\ \vec{\rho}\,''(s) = \frac{1}{k(s)}\ \vec{\tau}\,'(s), \tag{2.33}$$

който съгласно формула (2.33) е единичен и е перпендикулярен на $\vec{\rho}\,'(s) = \vec{\tau}(s)$. Векторът $\vec{\nu}(s)$ се нарича **главен нормален** вектор на кривата в т.M. Векторът

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{\nu}(s) \tag{2.34}$$

се нарича **бинормален вектор** на кривата в т.$M(s)$.

Определение 2.1.9 *Дясната тройка единични вектори $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ нанесени в т.M от кривата образуват ортонормирана координатна система във всяка точка от нея, която се нарича* ***съпровождащ триедър на Френе*** *на кривата γ. Координатните прави, колинеарни съответно на $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$ се наричат* ***тангента, главна нормала и бинормала*** *на кривата γ в т.M.*

Равнините, определени от $\{M,\ \vec{\tau}(s),\ \vec{\nu}(s)\}$, $\left\{M,\ \vec{\nu}(s),\ \vec{\beta}(s)\right\}$ и $\left\{M,\ \vec{\tau}(s),\ \vec{\beta}(s)\right\}$ се наричат съответно **оскулачна, нормална и ректифицираща** .

Друга важна числова характеристика на кривите е торзията. Тук предполагаме, че гладката крива γ е зададена отново с естественото си уравнение и съществува $\vec{\rho}\,''(s) \neq \vec{0}$. Ако предположим допълнително, че съществува и $\vec{\rho}\,'''(s)$, величината

$$|\chi(s)| = |\vec{\beta}\,'(s)| \tag{2.35}$$

се нарича **абсолютна торзия** на кривата γ в т.M. Това всъщност е скоростта на въртене на бинормалния вектор $\vec{\beta}(s)$. Тъй като $\vec{\beta}(s) \perp \vec{\tau}(s)$, то

$$\vec{\beta}(s)\vec{\tau}(s) = 0 \text{ за всяко } s \in [0,\ l]. \tag{2.36}$$

След диференциране на това тъждество получаваме

$$\vec{\tau}\,'(s)\vec{\beta}(s) + \vec{\tau}(s)\vec{\beta}\,'(s) = 0 \tag{2.37}$$

Но от (2.33) следва, че $\vec{\tau}\,'(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$ и следователно $\vec{\tau}\,'(s)\vec{\beta}(s) = 0$. Но тогава

$$\vec{\tau}(s)\vec{\beta}\,'(s) = 0 \text{ т.е. } \vec{\tau}(s) \perp \vec{\beta}\,'(s). \tag{2.38}$$

От друга страна, $\vec{\beta}(s) \perp \vec{\beta}\,'(s)$, тъй като $|\vec{\beta}(s)| = 1$. Но тогава $\vec{\beta}\,'(s)$ е колинеарен с вектора $\vec{\nu}(s)$, а дължината му, съгласно (2.33) е равна на $|\chi(s)|$.

Определение 2.1.10 *Числото $\chi(s)$, определено от равенството*

$$\vec{\beta}\,'(s) = -\chi(s)\vec{\nu}(s) \tag{2.39}$$

се нарича ***торзия*** *на кривата γ в точката M от кривата с радиус-вектор $\overrightarrow{OM} = \vec{\rho}(s)$.*

От определението за торзия се вижда лесно, че всяка равнинна крива, с параметрично представяне $\vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ и такава, че $\vec{\rho}\,''(s) \neq \vec{0}$ и е непрекъсната, има торзия равна на нула. Наистина, ако кривата е равнинна, то векторът $\vec{\beta}(s) = \vec{\tau}(s) \times \vec{\nu}(s)$ е единичен и перпендикулярен на равнината, в която лежи кривата. От непрекъснатостта му следва, че $\vec{\beta}(s) = const$ и следователно $\vec{\beta}\,'(s) = --\chi(s)\vec{\nu}(s) \equiv 0$. Тъй като $\vec{\nu}(s) \neq \vec{0}$, то $\chi(s) \equiv 0$.

в) Формули на Френе. Изразяване на кривината и торзията, чрез естествения парметър. Нека отново да разгледаме гладка крива γ

зададена с естествения си параметър. Освен това предполагаме, че за всяко $s \in [0,\ l]$ съществува векторът а $\vec{\rho}\,'''(s)$, векторът $\vec{\rho}\,''(s)$ е ненулев. Тогава във всяках точка от кривата е определен триедърът на Френе и за които са в сила формулите

$$\vec{\tau}\,'(s) = k(s)\,\vec{\nu}(s) \text{ и } \vec{\beta}\,'(s) = -\chi(s)\,\vec{\nu}(s). \tag{2.40}$$

Целта ни е да изразим векторите $\vec{\tau}\,'(s)$, $\vec{\nu}\,'(s)$, $\vec{\beta}\,'(s)$ чрез басиса $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$. Очевидно остава това да бъде направено само за вектора $\vec{\nu}\,'(s)$. За тази цел да се възползваме от равенството

$$\vec{\nu}(s) = \vec{\beta}(s) \times \vec{\tau}(s). \tag{2.41}$$

След диференциране относно s получаваме

$$\vec{\nu}\,'(s) = \vec{\beta}\,'(s) \times \vec{\tau}(s) + \vec{\beta}(s) \times \vec{\tau}\,'(s). \tag{2.42}$$

Сега да използваме формули (2.40). Имаме

$$\vec{\nu}\,'(s) = -\chi(s)\,\vec{\nu}(s) \times \vec{\tau}(s) + \vec{\beta}(s) \times k(s)\,\vec{\nu}(s) = \chi(s)\vec{\beta}(s) - k(s)\vec{\tau}(s). \tag{2.43}$$

Тук използвахме и равенствата $\vec{\tau} = -\vec{\nu} \times \vec{\tau}$ и $\vec{\tau} = -\vec{\beta} \times\ \vec{\nu}$, които следват от определението за триедър на Френе. Формули (2.41) и (2.43) дават търсеното разлагане на $\vec{\tau}\,'(s)$, $\vec{\nu}\,'(s)$, $\vec{\beta}\,'(s)$ по басиса $\vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta}(s)$:

$$\begin{cases} \vec{\tau}\,'(s) = k(s)\,\vec{\nu}(s) \\ \\ \vec{\nu}\,'(s) = \chi(s)\,\vec{\beta}(s) - k(s)\,\vec{\tau}(s) \\ \\ \vec{\beta}\,'(s) = -\chi(s)\,\vec{\nu}(s) \end{cases} \tag{2.44}$$

Формулите (2.44) се наричат **формули на Френе**. С тяхна помощ се получава явна формула за торзията на пространстена крива, параметризирана чрез естествения си параметър. Наистина, чрез последователно диференциране, намираме

$$\begin{aligned} &\vec{\rho}\,'(s) = \vec{\tau}(s), \quad \vec{\rho}\,''(s) = k(s)\,\vec{\nu}(s), \\ &\vec{\rho}\,'''(s) = k'(s)\,\vec{\nu}(s) + k(s)\,\vec{\nu}\,'(s) = \\ &= k'(s)\,\vec{\nu}(s) + k(s)(-k(s)\,\vec{\tau}(s) + \chi(s)\,\vec{\beta}(s)). \end{aligned} \tag{2.45}$$

Тогава смесеното произведение на тези вектори е

$$\vec{\rho}\,'(s)\ \vec{\rho}\,''(s)\ \vec{\rho}\,'''(s) = k^2(s)\ \chi(s)\vec{\tau}(s)\ \vec{\nu}(s)\ \vec{\beta}(s) = k^2(s)\chi(s), \tag{2.46}$$

откъдето за кривината и торзията получаваме формулите

$$k(s) = |\vec{\rho}\,''(s)|, \quad \chi(s) = \frac{\vec{\rho}\,'(s)\vec{\rho}\,''(s)\vec{\rho}\,'''(s)}{k^2(s)}. \tag{2.47}$$

д) Изразяване на кривината и торзията на крива при произволен парметър. Тъй като в повечето случай параметризирането на дадена крива спрямо естествения параметър е трудно и даже невъзможнао се налага да изведем явни формули, с които да могат да се решавт задачи. Нека

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{2.48}$$

е гладка крива, зададена чрез произволно параметрично представяне. Както вече знаем, естественият параметър s се въвежда посредством формулата

$$s(t) = \int_\alpha^t |\vec{r}\,'(u)|du \tag{2.49}$$

и $t = t(s),\ s \in [0,\ l]$ е обратната функция на $s = s(t)$. Тогава за производните и $t'(s)\ t''(s)$ получаваме

$$\begin{aligned} t'(s) &= \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|} \text{ и} \\ t''(s) &= \left(\frac{1}{|\vec{r}\,'(t(s))|}\right)'_s = \left(\frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\right)'_t t'(s) = -\frac{\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t(s))|^4}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Тогава

$$\vec{\rho}(s) = \vec{r}(t(s)),\ s \in [0,\ l] \tag{2.51}$$

е параметричното уравнение на γ чрез естествения параметър. Ако предположим, че съществува $\vec{r}\,'''(t)$, то за производнтие на $\vec{\rho}(s)$ се получава

$$\begin{aligned} \vec{\rho}\,'(s) &= \vec{r}\,'(t)\ t'(s) = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\vec{r}\,'(t) \\ \vec{\rho}\,''(s) &= \vec{r}\,''(t)\ (t'(s))^2 + \vec{r}\,'(t)\ t''(s) \\ \vec{\rho}\,'''(s) &= \vec{r}\,'''(t)\ (t'(s))^3 + 3\vec{r}\,''(t)\ t''(s)\ t'(s) + \vec{r}\,'(t)\ t'''(s) \end{aligned} \tag{2.52}$$

От формула (2.46) за кривината имаме, че $k(s) = |\vec{\rho}\,''(s)|$. От друга страна

$$k(\vec{\tau}(s) \times \vec{\nu}) = (\vec{\tau}(s) \times k\vec{\nu}) = \vec{\rho}\,'(s) \times \vec{\rho}\,''(s) = \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)(t'(s))^3 \tag{2.53}$$

Сега, като вземем под внимание, че $|\vec{\tau} \times \vec{\nu}| = 1$ и първата формула в (2.56), получаваме

$$k(t) = \frac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}. \tag{2.54}$$

Тази формула остава в сила и когато $k(s) = |\vec{\rho}\,''(s)| = 0$, защото тогава $\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) = \vec{0}$. С аналогични пресмятания се получава и форммула за пресмятане на торзията при произволен параметър.

$$\chi(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)\ \vec{r}\,''(t)\ \vec{r}\,'''(t)}{k^2(t)} = \frac{\vec{r}\,'(t)\ \vec{r}\,''(t)\ \vec{r}\,'''(t)}{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|^3}. \tag{2.55}$$

д) Еволюта на крива. Еволюта на равнинна крива. Оскулачна окръжност. Както вече знаем, радиус на кривината на крива $\gamma : \vec{\rho} = \vec{\rho}(s)$ във фиксирана точка от кривата $M(s)$, наричаме числото $R(s) = 1/k(s)$ (2.32)

Определение 2.1.11 *Точката от пространството, която лежи на главната нормала на кривата γ , в посока на вектора $\vec{\nu(s)}$ и на разстояние $R(s)$ (при $k(s) \neq 0$) се нарича* ***център на кривината*** *на кривата в т. $M(s)$. Множеството от всички центрове на кривината се нарича* ***еволюта*** *на кривата γ и се означава с γ^*.*

Векторно-параметричното уравнение на еволютата е

$$\gamma^* : \vec{\rho^*}(s) = \vec{\rho}(s) + \frac{1}{k(s)}\vec{\nu(s)},\ s \in [0,\ l]. \tag{2.56}$$

Разбира, се параметъра s не е задължително да е естествен параметър и за еволютата. Нека да напишем уравнението на γ^* спрямо произволен параметър. От равенството $\vec{\rho}\,''(s) = k(t(s))\vec{\nu}(t(s))$ и формули (2.56), (2.58) и (2.60) за главния нормален вектор получаваме

$$\begin{aligned}
\vec{\nu}(t) &= \frac{1}{k(t)}\left(\frac{\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t)|^2} - \frac{(\vec{r}\,'(t)\ \vec{r}\,''(t))\ \vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|^4}\right) = \\
&= \frac{|\vec{r}\,'(t)|^2\vec{r}\,''(t) - (\vec{r}\,'(t)\ \vec{r}\,''(t))\ \vec{r}\,'(t)}{k(t)|\vec{r}\,'(t)|^4} = \\
&= \frac{|\vec{r}\,'(t)|^2\vec{r}\,''(t) - (\vec{r}\,'(t)\ \vec{r}\,''(t))\ \vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)||\vec{r}\,'(t)|}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Сега да заместим в (2.62). При $s = s(t)$ получаваме

$$\gamma^* : \vec{r^*}(t) = \vec{r}(t) + \frac{|\vec{r}\,'(t)|^2\vec{r}\,''(t) - (\vec{r}\,'(t)\,\vec{r}\,''(t))\,\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}\,|\vec{r}\,'(t)|^2, \tag{2.58}$$

което е уравнението на еволютата при произволен параметър $t \in [\alpha,\ \beta]$.

Забележка 2.1.3 *С оглед избягванито на недоразумения, да напомним, че в горните формули изразът* $(\vec{r}\,'(t)\,\vec{r}\,''(t))$ *означава скаларното произедение на двата вектора.*

Кривата γ на която γ^* е еволюта се нарича **еволвента** на γ^*.

Нека сега да разгледаме гладката равнинна крива $\gamma : \vec{r}(t) = (x(t),\ y(t))$, $t \in [\alpha,\ \beta]$.

Формулата за кривината в този случай има вида:

$$k(t) = \frac{|x^{'}(t)\,y^{''}(t) - x^{''}(t)\,y^{'}(t)|}{\left(\sqrt{(x^{'}(t))^2 + (y^{'}(t))^2}\,\right)^3}, \tag{2.59}$$

ако кривата е явно зададена като графика на функция $y = y(x),\ x \in [a,\ l]$ то $\vec{r(x)} = (x,\ y(x))$, $\vec{r(x)}^{\,'} = (1,\ y^{'}(x))$ и $\vec{r(x)}^{\,''} = (0,\ y^{''}(x))$. За допирателният вектор $\vec{\tau}(x)$ и главният нормален вектор $\vec{\nu}(x)$ (вж. форм.(2.63) получаваме

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y^{'}(x))^2}}(1, y^{'}(x)),\\
\vec{\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y^{'}(x))^2}}\frac{y^{''}(x)}{|y^{''}(x)|}(-y^{'}(x),\ 1).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

За кривината в случай на явно зададена крива се получава формулата

$$k(x) = \frac{|y^{''}(x)|}{\left(\sqrt{1 + (y^{'}(x))^2}\,\right)^3}\ . \tag{2.61}$$

Уравнението на еволютата е

$$\gamma^* : \vec{r^*}(x) = \vec{r}(x) + \frac{1}{k(x)}\vec{\nu}(x)\ . \tag{2.62}$$

Нека $\vec{r^*}(x) = (\xi(x),\ \eta(x))$. Тогава скаларно-параметричното уравнение на евлюттата е

$$\gamma^* : \begin{cases} \xi(x) = x - \dfrac{y^{'}(x)}{y^{''}(x)}(1 + (y^{'}(x))^2) \\ \\ \eta(x) = y + \dfrac{1 + (y^{'}(x))^2}{y^{''}(x)}, \end{cases} \quad x \in [a,\ b]. \tag{2.63}$$

Чрез непосредствени пресмятания се проверява, че равенството

$$\vec{r^*}^{\,'}(x)\, \vec{r}^{\,'}(x) = 0 \text{ изпълнено за всяко } \ x \in [a,\ b], \tag{2.64}$$

което означава, допирателните прави към еволютата и еволвентата са перпендикулярни.

Пример 2.1.7 *Да се намерят еволютите на кривите:*
а) $x = a\cos t, y = b\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi]$*; б)* $y = x^2,\ x \in \mathbb{R}$*; в)* $y = 1/x,\ x \neq 0.$

2.2 Повърхнини

2.2.1 Непрекъснати и гладки повърхнини. Криви върху повърхнина. Първа квадратична форма на повърхнина

1.Векторнозначна функция на два скаларни аргумента аргумент. Непрекъснатост, частни производни и диференцируемост. Сега аналогично на векторна функция на скаларен аргумент ще дадем следното

Определение 2.2.1 *Правило (съответствие) чрез което на всяка точка* $(u, v) \in D$ *където* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *е област, се съпоставя единствен вектор* $\vec{r}\,(u, v) \in \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^2)$ *се нарича векторна функция на на два скаларни аргумента. Областа* D*се нарича дефиниционна област на векторната функция.*

Ако предположим, че в пространството е въведена декартовата координатна система $O\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$, то векторът $\vec{r}\,(u, v)$ може да се представи във вида

$$\vec{r}\,(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},\ (u, v) \in D. \tag{2.65}$$

В горното равенство x, y и z са скаларни функции на променливите u и v. Ясно е, че задаването на една векторнозначна функция на два аргумента е еквивалентно на задаването на три скаларни функции на два аргумента. По същия начин, както при векторна функция на една променлива можем да дадем дефиниция за граница и непрекъснатост.

Определение 2.2.2 *Казваме, че функцията $\vec{r}\,(u,v)$ има за граница вектора $\vec{a}$ при $u \to u_0$ и $v \to v_0$ ако $\|\vec{r}\,(u,v) - \vec{a}\| \to 0$ при $(u.v) \to (u_0,v_0)$.*

Тук, както обикновено $\|\vec{b}\|$ означава евклидовата дължина на вектора $\vec{b}$.

Определение 2.2.3 *Функцията $\vec{r}\ (u,v)$ се нарича нарича непрекъсната в точка $(u_0,v_0) \in D$ ако границата и при $(u.v) \to (u_0,v_0)$ е равна на $\vec{r}\,(u_0,v_0)$.*

Не е трудно да се докаже, че всички теореми за граница и непрекъснатост на сума и разлика остават в сила и за векторни функции на два (и повече аргумента). Освен това, от формулата за дължина на вектор следва също, че съществуването на граница в точка (непрекъснатост в точка и в област) е еквивалентно на съществуването на съответните граници и непрекъснатостта на координатните функции, а от формулите за пресмятане на скаларно, векторно и смесено произведение на вектори следва, че са в сила теореми аналогични на теоремите за граница и непрекъснатост за произведение на скаларни функции. Сега да дефинираме частна производна на векторна функция на два аргумента. Аналогично на съответната дефиниция за скаларни функции да дадем следното определение.

Определение 2.2.4 *Казваме, че функцията $\vec{r}(u,v)$ притежава частни производни в точка $(u_0,v_0) \in D$ ако съществуват границите*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}\,(u_0,v_0)}{\partial u} &= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{r}\,(u_0+\Delta u, v_0) - \vec{r}\,(u_0,v_0)}{\Delta u}, \\ \frac{\partial \vec{r}\,(u_0,v_0)}{\partial v} &= \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\vec{r}\,(u_0, v_0+\Delta v) - \vec{r}\,(u_0,v_0)}{\Delta v}. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Освен означението, използвано по-горе, за краткост частните производни ще означаваме още и чрез $\vec{r}_u^{\,\prime}(u_0,v_0)$ $\vec{r}_v^{\,\prime}(u_0,v_0)$. Като се използват (2.65) и (2.66), лесно може да се докаже, че съществуването на частните производни на $\vec{r}(u,v)$ в $(u_0,v_0) \in D$ е еквивалентно на съществуването на частните производни на координатните функции и са в сила равенствата

$$\begin{aligned} \vec{r}_u^{\,\prime}(u_0,v_0) &= x_u^{\prime}(u_0,v_0)\,\vec{i} + y_u^{\prime}(u_0,v_0)\,\vec{j} + z_u^{\prime}(u_0,v_0)\,\vec{k}, \\ \vec{r}_v^{\,\prime}(u_0,v_0) &= x_v^{\prime}(u_0,v_0)\,\vec{i} + y_v^{\prime}(u_0,v_0)\,\vec{j} + z_v^{\prime}(u_0,v_0)\,\vec{k}. \end{aligned} \tag{2.67}$$

За сума, разлика, скаларно, векторно и смесено произведение на векторни функции на два аргумента са в сила формули, аналогични на формулите за векторна функция на един аргумент. Формулата за производна на сложна функция също остава в сила. По същия начин, както за скаларни функции на повече променливи се въвеждат и частни производни от по-висок ред. Теоремата за равенство на смесените производни остава в сила при същите предположенияр при които е изпълнена за скаларни функции.

Пример 2.2.1 *Да се намерят частните производни $\vec{r}_u^{\,\prime}(u,v)$, $\vec{r}_u^{\,\prime}(u,v)$ и $\vec{r}_{uv}^{\,\prime\prime}(u,v)$ на функцията*

$$\vec{r}\,(u,v) = u^2v^3\,\vec{i} - 2u\,\vec{j} + v\sin u\,\vec{k},\ \ (u,v)\in\mathbb{R}^2.$$

Решение. Имаме

$$\vec{r}_u^{\,\prime}(u,v) = 2uv^3\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + v\cos u\,\vec{k},$$

$$\vec{r}_v^{\,\prime}(u,v) = 3u^2v^2\,\vec{i} + \sin u\,\vec{k}\ \ \text{и}$$

$$\vec{r}_{uv}^{\,\prime\prime}(u,v) = \vec{r}_{vu}^{\,\prime\prime}(u,v) = 6uv^2\,\vec{i} + \cos u\,\vec{k}.$$

Пример 2.2.2 *За функцията $\vec{r}(u,v)$ е известно, че има постоянна дължина, т.е. $\|\vec{r}(u,v)\| = c = const. > 0$ за всяко $(u,v)\in D$. Да се докаже, че $\vec{r}_u^{\,\prime}(u,v)$, $\vec{r}_v^{\,\prime}(u,v) \perp \vec{r}\,(u,v)$ при всяко $(u,v)\in D$.*

Решение.. Да се възползваме от факта, че $\|\vec{r}(u,v)\|^2 = c^2 = \vec{r}^{\;2}(u,v)$ където с $\vec{r}^{\;2}(u,v)$ сме означили скаларния квадрат на $\vec{r}(u,v)$. След като диференцираме относно u и v тъждеството $\vec{r}^{\;2} = c^2$, получаваме $2\vec{r}\,\vec{r}_{\ u}^{\ \prime} = 0$, $2\vec{r}\,\vec{r}_{\ v}^{\ \prime} = 0$ Но тъй като по условие $\vec{r}\,(u,v)\neq\vec{0}$, то от последните две равенства следва, че $\vec{r}_{\ u}^{\ \prime}$, $\vec{r}_{\ v}^{\ \prime} \perp \vec{r}\,(u,v)$ при всяко $(u,v)\in D$. което и трябваше да се докаже. Както ще видим по-късно този факт има естествена геометрична интерпретация.

Както за скаларна функция на две променливи да въведем понятието пълно нарастване и диференциал на векторнозначна функция.

Определение 2.2.5 *Пълно нарастване на функцията $\vec{r}(u,v)$ в точка $(u_0,v_0)\in D$, отговарящо на нарастванията Δu и Δv отговарящо на нарастванията на аргументите u и v и такива, че т.$(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v)\in D$ наричаме вектора*

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\,(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v) - \vec{r}\,(u_0,v_0) \tag{2.68}$$

а диференциал – вектора

$$d\vec{r} = \vec{r}_u^{\,\prime}(u_0,v_0)\Delta u + \vec{r}_v^{\,\prime}(u_0,v_0)\Delta v. \tag{2.69}$$

Определение 2.2.6 *Функцията се нарича диференцируема в точка $(u_0, v_0) \in D$ ако пълното нарастване може да се представи във вида*

$$\Delta\vec{r} = \vec{a}\,\Delta u + \vec{b}\,\Delta v + \vec{\alpha}\,(\Delta u, \Delta v), \tag{2.70}$$

, където векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не зависят от нарастванията Δu и Δv, а само от точката $(u_0, v_0) \in D$ и за векторната функция $\vec{\alpha}\,(\Delta u, \Delta v)$ е изпълнено равенството

$$\lim_{\substack{\Delta u \to 0 \\ \Delta v \to 0}} \frac{\|\vec{\alpha}\,(\Delta u, \Delta v)\|}{\sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}} = 0. \tag{2.71}$$

.

Може да се докаже, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са точно частните производни на функцията $\vec{r}(u, v)$ в точката $(u_0, v_0) \in D$, а диференциалът е линейната част (относно Δu и Δv) на нарастването $\Delta\vec{r}$ т.е. изпълнено е равенството.

$$\Delta\vec{r} = d\vec{r} + \vec{\alpha}\,(\Delta u, \Delta v). \tag{2.72}$$

Съществуването на частните производни не гарантира диференцируемост на подобно на случая на скаларни функции. В сила е обаче следното достатъчно условие за диференцируемост.

Теорема 2.2.1 *Нека функцията $\vec{r}(u, v)$ притежава частни производни от първи ред и те са непрекъснати в областта D. Тогава $\vec{r}(u, v)$ е диференцируема в D.*

2. Понятие за непрекъсната и гладка повърхнина. Като се възползваме от понятието за непрекъсната и диференцируема векторна функция можем да въведем две понятия, които имат голямо значение за математиката и нейните приложения.

Определение 2.2.7 *Нека $\vec{r}(u, v)$ е непрекъсната векторна функция, дефинирана в областта $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Множеството от точки $S \subset \mathbb{R}^3$, което спрямо фиксирана декартова координатна система $O\,\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}$ има представянето*

(2.73)

$$S = \left\{ M(x, y, z) : \overrightarrow{OM} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},\ (u, v) \in D \right\}$$

*наричаме **непрекъсната повърхнина** в $\mathbb{R}^3$ (черт!). Векторнозначната функция $\vec{r}(u, v)$, дефинирана в областта D наричаме **параметрично представяне** на повърхността, а променливите u и v – параметри.*

По нататък за краткост параметрично заданената повърхнина S е означена така:

$$S : \vec{r} = \vec{r}\,(u, v),\ (u, v) \in D \tag{2.74}$$

Определение 2.2.8 *Повърхнината S се нарича **гладка** ако:*

1. *За всяко $(u, v) \in D$ съществуват $\vec{r}\,_u^{\,\prime}$, $\vec{r}\,_v^{\,\prime}$ и са непрекъснати;*
2. *За всяко $(u, v) \in D$ е изпълнено условието $\vec{r}\,_u^{\,\prime} \times \vec{r}\,_v^{\,\prime} \neq \vec{0}$.*

Първото условие гарантира диференцируемост на функцията $\vec{r}(u, v)$ в областта D , а второто означава, че във всяка точка от S векторите $\vec{r}\,_u^{\,\prime}$ и $\vec{r}\,_v^{\,\prime}$ са неколинеарни.

Аналогично, повърхнината S наричаме $n-$ **кратно гладка** ако функцията $\vec{r}(u, v)$ притежава непрекъснати частни производни ред до n включително и е изпълнено и второто условие.

Пример 2.2.3 *Да се определи при какво условие за константите $a_i, b_i, c_i,\ i = 1, 2, 3$ повърхнината*

$$S : \vec{r} = (a_1u + b_1v + c_1)\vec{i} + (a_2u + b_2v + c_2)\vec{j} + (a_3u + b_3v + c_3)\vec{k},\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

е гладка и да се определи видът на повърхнината.

Решение. Както лесно се вижда,

$$\vec{r}\,_u^{\,\prime} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \vec{a},\ \vec{r}\,_v^{\,\prime} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} = \vec{b},$$

които са непрекъснати функции (константи). За да е гладка обаче, съгласно определението, дадено по-горе, трябва векторите $\vec{r}\,_u^{\,\prime} = \vec{a}$ и $\vec{r}\,_v^{\,\prime} = \vec{b}$ са неколинеарни. Да напишем уравнението на S по следния начин:

$$S : \vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + \vec{c},\ (u, v) \in \mathbb{R}^2,$$

което се получава от даденото уравнение на S чрез прегрупиране на събираемите. Както е известно от курса по аналитична геометрия, последното уравнение е на равнина, минаваща през точка $C(c_1, c_2, c_3)$ и успоредна на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са ненулеви, но са колинеарни, то уравнението е на права, която е гладка крива, но не и гладка повърхнина.

Пример 2.2.4 *Да се покаже, че за повърхнината с уравнение*

$$S : \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + \sqrt{x^2 + y^2}\,\vec{k},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

е нарушено условието за гладкост в т. $O(0, 0, 0)$.

Решение. Тук за параметри са избрани декартовите координати в равнината. Векторната функция е дефинирана за всяко x и y и освен това

$$\vec{r}_x{}' = \vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{k},\ \vec{r}_y{}' = \vec{j} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\vec{k}$$

при $x \neq 0$ и $y \neq 0$, но частните производни не съществуват при $x = 0$ и $y = 0$ (проверете това самостоятелно, като приложите определението за частна производна). Лесно се вижда, че повърхнината е прав кръгов конус с връх в нулата и разположен в полупространтсвото $z \geq 0$. Условието за гладкост се нарушава само във върха на конуса.

Много често едно и също точково множество в $\mathbb{R}^3$ се налага да бъде зададено по повече от един начин като множество от стойности на векторнозначна функция. По-точно, интересно е при какви условия точковите множествата

$$S : \vec{r} = \vec{r}\,(u,v),\ (u,v) \in D \text{ и } \tilde{S} : \vec{\rho} = \vec{\rho}\,(s,t),\ (s,t) \in \tilde{D} \tag{2.75}$$

съвпадат в пространството. Може да се докаже , че затова е достатъчно векторнозначната функция

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}\,(s,t) = u(s,t)\vec{e_1} + v(s,t)\vec{e_2},\quad (s,t) \in \tilde{D} \tag{2.76}$$

да изобразява взаимно еднозачно областта $\tilde{D}$ върху D и да е изпълнено тъждеството

$$\vec{r}\,(u(s,t), v(s,t)) = \vec{\rho}\,(s,t)\ (s,t) \in \tilde{D} \tag{2.77}$$

и освен това векторите $\vec{\omega}_s{}'$ $\vec{\omega}_t{}'$ да са неколинеарни (черт. 2). Последното условие в скаларна форма има вида

$$\begin{vmatrix} u_s' & v_s' \\ u_t' & v_t' \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.78}$$

В такъв случай казваме, че е извършена допустима смяна на параметрите на повърхнината.

Пример 2.2.5 *Нека*

$$S : \vec{r} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + (u^2+v^2)\,\vec{k},\ (u,v) \in D = \left\{\ (u,v) \mid u^2+v^2 \leq 1\right\}.$$

Да се определи при кои стойности на параметрите ρ *и* φ *смяната*

$$u = \rho\cos\varphi,\ v = \rho\sin\varphi,\ (\rho,\varphi) \in \tilde{D} = \{\ (\rho,\varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

е допустима и да си намери представането на чрез новите параметри.

Решение. Чрез елементарни пресмятания се вижда, че

$$\begin{vmatrix} u'_\rho & v'_\rho \\ u'_\varphi & v'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi \;\; \sin\varphi \\ -\rho\cos\varphi \;\; \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho \neq 0..$$

за всяко $(\rho, \varphi) \in \tilde{D}$ с изключение на контурната отсечка $\rho = 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$ и, че изображението е взаимно еднозначно. Чрез новите параметри уравнението на S е

$$S : \vec{r}_1(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi; \vec{i} + \rho\sin\varphi\ \vec{j} + \rho^2\ \vec{k}$$

Както лесно се вижда, S е часта от ротоционния параболоид с уравнение $z = x^2 + y^2$, която се намира над единичния кръг $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ (черт.!). В първия случай S е образ на този кръг, а във втория - образ на правоъгълника $\tilde{D}$.

3. Линии върху повърхнина. Уравнение на допирателна равнина и нормална права към повърхнина. Да си припомним, че гладка линия в $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) се задава чрез уравнение от вида $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta]$, при което $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ в този интервал. Нека сега

$$\gamma_0 : \vec{r}_0 = \vec{r}(t) = u(t)\vec{i} + v(t)\vec{j}$$

е гладка линия, лежаща в D , а $S : \vec{r} = \vec{r}\,(u, v),\ (u, v) \in D$ е гладка повърхнина. Да разгледаме векторната функция

$$\vec{r}_1 = \vec{r}\,(u(t), v(t)),\ t \in [\alpha,\ \beta] = \tag{2.79}$$

От правилото за диференциране на сложна функция, получаваме

$$\vec{r}\,'_1 = \vec{r}\,'_u u'(t) + \vec{r}\,'_v v'(t). \tag{2.80}$$

.

Глава 3

Многократни интеграли. Приложения. Несобствени интеграли

3.1 Двойни интеграли.

1. Определение и свойства на двоен интеграл. Геометричен смисъл

а)Елементарно множество в раннината. Определение на двоен интеграл върху елементарно множество. Нека в равнината е въведена декартова координатна система Oxy и нека са дадени две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, дефинирани и непрекъснати в ограничения и затворен интервал $[a,\ b]$. Нека освен това за всяко $x \in [a,\ b]$ е изпълнено неравенството $\varphi(x) \leq \psi(x)$.

Определение 3.1.1 *Множеството от точки в равнината*

$$G_x = \{\ M(x,y) \mid \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),\ x \in [a,\ b]\} \tag{3.1}$$

елементарна област в равнината относно Ox.

По подобен начин се дефинира и елементарна област в равнината относно Oy. Направете чертеж и формулирайте това понятия самостоятелно.

Нека да въведем понятието двоен интеграл от непрекъснатата функция, дефинирана върху елементарна област в равнината G_x.

Определение 3.1.2 *Нека функцията* $f = f(x,y)$ *е дефинирана и неп-*

рекъсната върху върху G_x. Числото I, дефинирано по следния начин

$$I = \iint\limits_{G_x} f(x,y)\ dxdy = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \tag{3.2}$$
$$= \int\limits_a^b \left\{ F(x,\psi(x)) - F(x,\varphi(x)) \right\} dx,$$

където $F_y'(x,y) = f(x,y)$ при $(x,y) \in G_x$, се нарича ***двоен интеграл*** *от функцията $f(x,y)$ върху елементарната област G_x.*

При направените предположения за функцията f и областта G_x числото I съществува. Може да се покаже, че двойните интеграли съществуват при доста по-общи предположения за областта G и функцията f, но формула (4.8) дава ефективен метод за пресмятане на двойни интеграли. Интегралът съществува например и ако функцията f има краен брой точки на прекъсване и даже, ако е ако е прекъсната понякаква гладка или частично гладка линия, лежаща в областта G_x. Също така, достатъчно е да се предположи, че G е произволно ограничено подмножество на равнината, чийто контур е гладка крива или частично гладка крива.

б) Свойства на двойния интеграл. Геометричен смисъл. Свойствата са същите, като на единичния риманов интеграл и са в сила при споменатите по-общи предположения при което съществува двойният интеграл . Геометричният смисъл на двойния интеграл се вижда от формулата

$$\iint\limits_{G_x} 1\ dxdy = \int \left\{ \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} 1\ dy \right\}\ dx = \tag{3.3}$$
$$\int\limits_a^b\ y|_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\ dx = \int\limits_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\ dx = S(G_x),$$

където $S(G_x)$ е G_z. Тази формула е обобщение на формулата за пресмятане на лице на равнинна фигура с помощта на обикновен риманов интеграл, извекстна от анализ първа част..

2. Пресмятане на двоен интеграл. С помощта на формула (4.8) всеки двоен интеграл върху област, елементарна относно някоя от кординатните оси може да се сведе към единичен. Ако областта не е елементарна, но може да се представи като обединение на такива, чиито общи части имат лице равно на нула, то интегралът може да се представи като сума от интеграли върху тези отделни множества. Нека да разгледаме някои примери.

Пример 3.1.1 *Да се пресметнат интегралите:*
а) $\iint\limits_G (2x+y)dxdy$, *където* G *е заградена от кривите с уравнения:* $2x+y=4,\ x=0,\ y=0$*;*

б) $\iint\limits_G (xy)dxdy$, *където* G *е заградена от кривите с уравнения:* $x+y=2,\ x=y^2$*;*

Решение. а) В този случай областта е триъгълник с върхове в точките $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 0)$ и $B(0,\ 4)$. От първото ограничение следва, че $y=4-2x$, а от третото, че $y=0$. Тъй като при $x\in[0,\ 2]$ е изпълнено неравенството $4-2x\geq 0$, то областта може да се опише с неравенства по следния начин: $G: 0\leq y\leq 4-2x,\ 0\leq x\leq 2$. Нека да отбележим, че дадената област е елементарна и относно оста Oy. Направете чертеж! Тогава за итнеграла I получаваме

$$I=\int\limits_0^2\left\{\int\limits_0^{4-2x}(2x+y)dy\right\}dx=\int\limits_0^2 (2xy+\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{4-2x}dx$$

$$=\int\limits_0^2\left(2x(4-2x)+\frac{1}{2}(4-2x)^2\right)dx=\int\limits_0^2(8-2x^2)\,dx=$$

$$=(8x-\frac{2}{3}x^3)\Big|_0^2=16-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}.$$

б) Областта е елементарна относно Oy

3.2 Тройни интеграли.

1. Определение и свойства на троен интеграл. Геометричен смисъл.

а) Цилиндрично множество в пространството. Определение на троен интеграл върху цилиндрично множество. Нека в пространството е въведена декартова координатна система $Oxyz$ и нека са дадени две функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, дефинирани и непрекъснати в ограничената и затворена област G, лежаща в равнината Oxy и която предполагаме елементарна относно Ox или Oy. Нека освен това за всяко $(x,y) \in G$ е изпълнено неравенството $\varphi(x,y) \leq \psi(x,y)$.

Определение 3.2.1 *Множеството от точки в пространството*

$$G_z = \{\ M(x,y,z) \mid \varphi(x,y) \leq z \leq \psi(x,y),\ (x,y) \in G\ \} \tag{3.4}$$

се нарича ***цилиндрично множество относно оста*** Oz *или също така* ***елементарна област в пространството относно*** Oz*.*

По подобен начин се дефинират и цилиндрични множества относно другите координатни оси (направете чертеж и формулирайте тези понятия самостоятелно).

По аналогия с двоен интеграл може да се въведе и понятието **троен интеграл** от непрекъсната функция, дефинирана върху цилндричното множество G_z.

Определение 3.2.2 *Нека функцията* $f = f(x,y,z)$ *е дефинирана и непрекъсната върху цилиндричното множество* G_z*. Числото* I*, дефинирано по следния начин*

$$\begin{aligned} I = \iiint\limits_{G_z} f(x,y,z)\ dxdydz &= \iint\limits_{G} \left\{ \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dxdy = \\ &= \iint\limits_{G} \left\{ F(x,y,\psi(x,y)) - F(x,y,\varphi(x,y)) \right\} dxdy, \end{aligned} \tag{3.5}$$

където $F_z^{'}(x,y,z) = f(x,y,z)$ *при* $(x,y,z) \in G_z$*, се нарича* ***троен интеграл*** *от функцията* $f(x,y,z)$ *върху цилиндричното множество* G_z*.*

При направените предположения за функцията f и областта G числото I съществува. Може да се покаже, че тройните (и разбира се двойните интеграли) съществуват при доста по-общи предположения за областта G_z и функцията f, но формула (4.19) дава ефективен метод за пресмятане на тройни интеграли. Интегралът съществува например и ако функцията f има краен брой точки на прекъсване и даже, ако е ако е прекъсната понякаква гладка или частично гладка линия или повърхнина, лежаща в тялото G_z. Също така, достатъчно е да се предположи, че G_z е произволно ограничено подмножество на пространството, чийто контур е гладка повърхнина (

т.е. повърхнина, във всяка точка на която съществува допирателна равнина) или частично гладка повърхнина (т.е. обединение на краен брой гладки повърхнини) .

б) Свойства на тройния интеграл. Геометричен смисъл. Свойствата са същите, като на двойния и единичния риманов интеграл и са в сила при споменатите по-общи предположения при което съществува тройният интеграл (формулирайте ги самостоятелно!). Геометричният смисъл на тройния интеграл се вижда от формулата

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{G_z} 1\, dxdydz = \iint\limits_{G} \left\{ \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1\, dz \right\} dxdy = \\ \iint\limits_{G} \; z\Big|_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\, dxdy = \iint\limits_{G} (\psi(x,y) - \varphi(x,y))\, dxdy = V(G_z),\end{aligned} \tag{3.6}$$

където $V(G_z)$ е обемът на тялото G_z. Тази формула е аналог на формулата за пресмятане на лице на равнинна фигура с помощта на двоен интеграл.

2. Пресмятане на троен интеграл. С помощта на формула (4.20) всеки троен интеграл върху област, елементарна относно някоя от кординатните оси може да се сведе към двоен, а при направеното предположение и за проекцията на тази област в координатите равнини – полученият двоен интеграл може да се сведе към единичен. Ако областта не е цилиндрично множество, но може да се представи като обединение на такива, чиито общи части имат обем равен на нула, то интегралът може да се представи като сума от интеграли върху тези отделни множества Нека да разгледаме някои примери.

Пример 3.2.1 *Да се пресметне интегралът :*

$$\iiint\limits_{G} (x+y-z)\, dxdydz,$$

където G е множеството от точки в пространството, чийто координати удовлетворяват неравенствата $x+y+z \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Решение. В този случай множеството G е елементарно относно и трите координатни оси, защото ограничителните неравенства са линейни спрямо x, y и z. Да го представим като цилиндрично множество относно Oz. От първото и последното неравенство получаваме, че $0 \le z \le 1 - x - y$. Да означим с $G^{'}$ проекцията на G в равнината Oxy. Тогава $(x,y) \in G^{'}$ тогава и само тогава, ако $0 \le 1-x-y$ и $x,y \ge 0$. Но това означава, че $0 \le y \le 1-x$, а от последното неравенство и ограничението $x \ge 0$ следва, че $0 \le x \le 1$. Окончателно $G^{'}:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x$. Тогава

$$\iiint\limits_{G} (x+y-z)\,dxdydz = \iint\limits_{G^{'}} \left\{ \int\limits_{0}^{1-x-y} (x+y-z)\,dz \right\} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G^{'}} \left((x+y)z - \frac{1}{2}z^2 \right)\Bigg|_{0}^{(1-x-y)} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G^{'}} \left((x+y)(1-x-y) - \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \right) dxdy =,$$

$$= \int\limits_{0}^{1} \left\{ \int\limits_{0}^{1-x} \left((x+y)(1-x-y) - \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \right) dy \right\} dx = \cdots$$

Довършете самостоятелно всички пресмятания! ■

Пример 3.2.2 *Да се пресметне интегралът :*

$$\iiint\limits_{G} xz\,dxdydz,$$

където $G : 0 \le x \le y^2 + z^2,\ z^2 \le y \le 1$ *и да се намери обема на* G*.*

Упътване. В този случай множеството G е цилиндрично относно оста Ox. След известни пресмятания, получаваме:

$$G : 0 \le x \le y^2 + z^2,\ z^2 \le y \le 1,\ -1 \le z \le 1.$$

Извършете самостоятелно всички необходими изчисления! ■

3.3 Смяна на променливите при двоен и троен интеграл.

1. Защо е необходима смяна на променливите при кратни интеграли? Както и при единичните интеграли, при решаване на кратни интеграли се налага да се направи подходяща смяна на променливите с цел улесняване на пресмятанията. Както вече споменахме кратните интеграли съществуват и при доста по -общи предположения за областта върху която се интегрира и за подинтегралнана функция. Но дори в случай на област, елементарна относно координатите оси (или координатните равнини), много често при решавнето на даден интеграл възникват доста технически трудности.

Да отбележим, че при кратните интеграли до смяна на променливите се прибягва по-често заради областта върху която се интегрира, отколкото заради подинтегралната фунция. По-долу са формулирани теоремите за смяна на променливите в случай на двоен и троен интеграл и са разгледни най-често срещнаите конкретни смени на променливите.

2. Смяна на променливите при двоен интеграл. а) Теорема за смяна на променливите при троен интеграл. Нека в равнината са въведени две декартови координатни системи Oxy и O^*uv. Нека освен това D и D^* са две ограничени, затворени и измерими множества (т.е. множества с крайно лице). Да предположим, също така, че изображението $\varphi : D^* \mapsto D$ осъществява взаимно еднозначно съответствие между тези множества (евентуално с изключение на точките от контура им). Това означава, че за всеки две точки $M^* \neq N^*$, M^* и N^* от вътрешността на D^* следва, че образите им $\varphi(M^*)$ и $\varphi(N^*)$ са различни точки от D. Спрямо фиксираните координатни системи изображението φ се задава чрез двойка функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $(u, v) \in D^*$, които предполагаме непрекъснати в D^*, заедно с първите им частни производни.

Определение 3.3.1 *Детерминантата*

$$J(u,v) = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} {x_u}'(u,v) & {y_u}'(u,v) \\ {x_v}'(u,v) & {y_v}'(u,v) \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

се нарича ***детерминанта на Якоби*** *или* ***якобиан*** *на изображението* φ*, а съответната матрица –* ***матрица на Якоби****.*

В сила е следната теорема.

Теорема 3.3.1 *Нека множествата D и D^* са ограничени, затворени и измерими и $f = f(x, y)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху D. Тогава, ако $J(u, v) \neq 0$ за всяко (u, v) от вътрешността на D^*, то е сила формулата*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v), y(u,v))\, |J(u,v)|\, dudv \tag{3.8}$$

Формулата (4.23) се нарича **формула за смяна на променлвите** в двоен интеграл, а теоремата която установява верността на тази формула се нарича теорема за смяна на променливите при двоен интеграл.

Забележка 3.3.1 *Изискването $J(u,v) \neq 0$ за всяко (u,v) от вътрешността на D^* гарантира, че изображението $\varphi : D^* \mapsto D$ осъществява взаимно еднозначно съответствие между тези множества, евентуално с изключение на точките от контура на множествата (при направените предположениа за множествата тези точи имат нулево лице и не променят стойността на интеграла!). Якобиянът се поставя в модул, защото координатните системи Oxy и O^*uv могат да имат различна ориентация (за разлика от съответната теорема при единичен интеграл, където модул не е необходим!).*

б) Най често използвани смени на променливите при двоен интеграл. Тук са разгледани най-важните частни случаи на смяна на променливите при двоен интеграл.

1. **Линейна смяна.** Ако направим смяна на променливите по формулата

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

   то в този случай матрицата на Якоби е константна матрица и разбира се якобиянът е константата $J = \det[a_{i,j}],\ i,j = 1,2$. От линейнта алгебра е известно, че ако $J \neq 0$, това означава, че линейното изображение, което поражда матрицата на Якоби е взаимно еднозачно и в случай, че D и D^* са успоредници в равнинната, то между лицата им е в сила връзката

   $$S(D) = |J| S(D^*), \tag{3.10}$$

   която показва геометричниат смисъл на абсолютната стойност на якобияна. Линейна смяна на координатите се препоръчва, когато множеството D е успоредник или обединение от успоредници в равнината, които са разположени в общо положение спрямо кординатните прави,т. е. страните им не са успоредни на координатните линии.

2. **Полярна смяна.** Да направим смяната

   $$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \tag{3.11}$$

   която на т. $M(x,y)$ се съпоставя т. $M(\rho,\varphi)$. Числата ρ и φ се наричат **полярни координати** на т.M (припомнете си за пол. координати от темата „Комплексни числа“ от курса по „Анализ I“). За да се опишат всички точки от равнината е достатъчно $0 \leq \rho < \infty$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$. Направете чертеж.

Якобиянът в този случай е

$$J(\varphi, \rho) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho > 0 \text{ при } \rho \neq 0. \tag{3.12}$$

Полярна смяна се препоръчва, когато множеството D е заградено от криви, в чиито уравнения участва изразът x^2+y^2 повдигнат на някаква степен.

3. **Обобщена полярна смяна.** Връзката между декартовите и обобщените полярни координати се дава с фомулите

$$x = a\rho\cos^\alpha\varphi,\ y = b\rho^\alpha\sin\varphi, \tag{3.13}$$

където a и b са положителни константи, а α е подходящо избрано число, което се избира в конкретния случай. Якобианът тук изглежда така:
(3.14)

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} a\cos^\alpha\varphi & -\alpha a\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^\alpha\varphi & \alpha b\rho\sin^{\alpha-1}\varphi\ \cos\varphi \end{vmatrix} = \alpha ab\rho\cos^{\alpha-1}\varphi\ \sin^{\alpha-1}\varphi\ .$$

Разбира се, възможни са и други полезни смени на променливите, които могат да се направят в зависимост от конкретната задача.

Пример 3.3.1 *Да се пресметне*

$$\iint\limits_D \sqrt{y^2-x^2}\,dxdy, \quad \textit{където}\ \ D:\ 0 \leq x+y \leq 2,\ 0 \leq y-x \leq 1.$$

Решение. Да положим $u = y - x,\ v = y + x$ от където последователно намираме

$$x = \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}u,\ y = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}u,\ x_u^{'} = -\frac{1}{2},\ x_v^{'} = \frac{1}{2} \text{ и } y_u^{'} = \frac{1}{2},\ y_v^{'} = \frac{1}{2}.$$

За якобиана получаваме:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Сега да заместим в неравенствата, с които е зададена областта D. Имаме:

$$D^* : 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq 2.$$

Тогава за интеграла получаваме:

$$\iint\limits_D \sqrt{y^2 - x^2}\, dxdy = \iint\limits_{D^*} \sqrt{uv}\, \frac{1}{2}\, dudv = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^2 \sqrt{u}\sqrt{v} dv \right] du =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \sqrt{u}\, du \int\limits_0^2 \sqrt{v} dv = \frac{4\sqrt{2}}{9}. \qquad \blacksquare$$

3. Смяна на променливите при троен интеграл. Подобно на двойния интеграл, тук също много често се налага да се направи подходяща смяна на променливите с цел да се облекчат пресмятанията.

а) Теорема за смяна на променливите при троен интеграл. Нека в пространството са въведени две декартови координатни системи $Oxyz$ O^*uvw. Нека освен това D и D^* са две ограничени, затворени и измерими множества (т.е. множества с краен обем). Да предположим, също така, че изображението $\varphi : D^* \mapsto D$ осъществява взаимно еднозначно съответствие между тези множества (евентуално с изключение на точките от контура на множествата). Това означава, че за всеки две точки $M^* \neq N^*$, M^* и N^* от вътрешността на D^* следва, че образите им $\varphi(M^*)$ и $\varphi(N^*)$ са различни точки от D. Спрямо фиксираните координатни системи изображението φ се задава чрез тройка функции

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w) \text{ и } z = z(u,v,w),\ (u,v,w) \in D^*,$$

които предполагаме непрекъснати в D^*, заедно с първите им частни производни.

Определение 3.3.2 *Детерминантата*

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x_u^{'}(u,v,w) & y_u^{'}(u,v,w) & z_u^{'}(u,v,w) \\ x_v^{'}(u,v,w) & y_v^{'}(u,v,w) & z_v^{'}(u,v,w) \\ x_w^{'}(u,v,w) & y_w^{'}(u,v,w) & z_w^{'}(u,v,w) \end{vmatrix} \tag{3.15}$$

*се нарича **детерминанта на Якоби** или **якобиан** на изображението φ, а съответната матрица – **матрица на Якоби**.*

В сила е следната теорема.

Теорема 3.3.2 *Нека множествата D и D^* са ограничени, затворени и измерими и $f = f(x, y, z)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху D. Тогава, ако $J(u, v, w) \neq 0$ за всяко (u, v, w) от вътрешността на D^*, то е сила формулата*

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_D f(x,y,z)\ dxdydz = \\ &= \iiint\limits_{D^*} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\ |J(u,v,w)| dudvdw. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Формулата (4.23) се нарича **формула за смяна на променлвите** в троен интеграл, а теоремата, която установява верността на тази формула се нарича теорема за смяна на променливите при троен интеграл. В сила е и по-обща теорема за смяна на променливите в $n-$кратен интеграл и при $n > 3$, която е една от най-важните теореми на класическия анализ.

Забележка 3.3.2 *Както при смяна на променливите в двойния интеграл, условието $J(u, v, w) \neq 0$ за всяко (u, v, w) от вътрешността на D^* гарантира, че изображението $\varphi : D^* \mapsto D$ осъществява взаимно еднозначно съответствие между тези множества, евентуално с изключение на точките от контура на множествата (при направените предоложениа за множествата тези точки имат нулев обем и не променят стойността на интеграла!). Якобиянът се поставя в модул пак по същата причина, като в случая на двоен интеграл.*

б) Най често използвани смени на променливите при троен интеграл. Тук са разгледани най-важните частни случаи на смяна на променливите при троен интеграл.

1. **Линейна смяна.** Ако направим смяна на променливите по формулата

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

то в този случай матрицата на Якоби е константна матрица и разбира се якобиянът е константата $J = \det[a_{i,j}],\ i, j = 1, 2, 3$. От линейнта алгебра е известно, че ако $J \neq 0$, това означава, че линейното изображение, което поражда матрицата на Якоби е взаимно еднозачно и в случай, че D и D^* са паралелепипеди в тримерното пространство, то между обемите им е в сила връзката

$$V(D) = |J| V(D^*), \tag{3.18}$$

която показва геометричниат смисъл на абсолютната стойност на якобияна. Линейна смяна на координатите се препоръчва, когато множеството D е паралелепипед или обединение от паралелепиеди в пространството, които са разположени в общо положение спрямо кординатните равнини.

2. **Цилиндрична смяна.** Да направим смяната

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z, \tag{3.19}$$

която на т. M с декартови координати (x, y, z) съпоставя т. $M(\rho, \varphi, z)$. Числата ρ,φ и z се наричат цилиндрични координати на т.M. За да се опишат всички точки от тримерното пространство е достатъчно $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $-\infty < z < \infty$. Направете чертеж за да си изясните геометричния смисъл на цилиндричните координати. Якобиянът в този случай е

$$J(\varphi, \rho, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho > 0 \text{ при } \rho \neq 0. \tag{3.20}$$

Цилиндрична смяна се препоръчва, когато множеството D е заградено от ротационни повърхнини (не непременно с ротационна ос Oz, защо?).

3. **Сферична смяна.** Връзката между декартовите и сферичните координати се дава с фомулите

$$x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = \rho\cos\vartheta, \tag{3.21}$$

където $\rho = |\ \overrightarrow{OM}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ е дължината на радиус-вектора на т.M, $\vartheta = \angle(Oz^+, \overrightarrow{OM})$ и $\varphi = \angle(Ox^+, \overrightarrow{OM}\ ')$, където $M\ '$на т. M върху равнината Oxy. тук $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $0 \leq \vartheta \leq \pi$ Направете четреж!

За якобиана се получава

$$(3.22)\quad J(\rho,\varphi,\vartheta)=\begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\theta \\ -\rho\sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & 0 \\ \rho\cos\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \end{vmatrix}=\rho^2\sin\vartheta>0\,.$$

при $\rho\neq 0$ и $\vartheta\in(0,\ \pi)$. Сферична смяна на координатите се препоръчва, когато в ограничителните условия за множеството, върху което се интегрира участва израза $x^2+y^2+z^2$ повдигнат на някаква степен. Разбира се, възможни са и други варианти на сферична смяна, например ако $\vartheta=\angle(\overrightarrow{OM},Oxy)$. Напишете формулите и пресметнете якобиана самостоятелно в този случай.

3.4 Геометрични и физични приложения на кратните интеграли.

1. Геометрични приложения на двоен и троен интеграл.

а) Пресмятане на лица. Както вече знаем, лицета на плоската фигура $G\subset\mathbb{R}^2$ може да бъде намерена по формулата

$$(3.23)\qquad \iint\limits_G 1dxdy$$

Нека сега да разгледаме графиката на една диференцируема функция

$$(3.24)\qquad \Phi: z=f(x,y),\ (x,y)\in G$$

Тази графика представлява една гладка повърхнина в пространството, т.е. повърхнина, във всяка точка на която може да бъди построена допирателна равнина. Лицето на тази повърхнина може да бъде пресметнато по формулата

$$(3.25)\qquad S(\Phi)=\iint\limits_G\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,dxdy.$$

Пример 3.4.1 *Да се намери лицето на фигурата G, заградена от кривите с уравнения $\gamma_1:\left(x^2+y^2\right)^2=8xy$ и $\gamma_2:\left(x^2+y^2\right)^2=3xy,\ x,y\geq 0.$*

Решение. Фигурата G е частта от първи квадрант, която се намира между две лемниски на Бернули (направене чертеж!). Ясно е, че трябва да направим полярна смяна, т.е. полагаме $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$ и заместваме в дадените равенства. Получаваме

$$\rho^2 = 8\cos\varphi\sin\varphi \text{ и съответно } \rho^2 = 3\cos\varphi\sin\varphi.$$

Тъй като по условие $\cos\varphi$ и $sin\varphi$ са неотрицателни (защо?), то за ρ получаваме, че

$$\sqrt{3\cos\varphi\sin\varphi} \le \rho \le 2\sqrt{2\cos\varphi\sin\varphi}.$$

Тъй като от тези неравенства за φ не се получават ограничения, остава само ограничението, което следва от неравенствата $x, y \ge 0$, т.е. $0 \le \varphi \le \pi/2$. Окончателно областта G в полярни координати се задава с неравенствата

$$G : \left| \begin{array}{l} 0 \le \varphi \le \pi/2 \\ \\ \sqrt{\frac{3}{2}\sin 2\varphi} \le \rho \le 2\sqrt{\sin 2\varphi}. \end{array} \right.$$

Тогава, съгласно формула (3.15), получаваме

$$S(G) = \iint\limits_G 1dxdy = \int\limits_0^{\pi/2} \left[\int\limits_{\sqrt{\frac{3}{2}\sin 2\varphi}}^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho\, d\rho \right] d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\rho^2 \Bigg|_{\sqrt{\frac{3}{2}\sin 2\varphi}}^{2\sqrt{\sin 2\varphi}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{5}{2}\sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{5}{8}\cos 2\varphi\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{5}{8}(-1-1) = \frac{5}{4}.$$

■

Пример 3.4.2 *Да се намери лицето на повърхнината Φ, която цилиндърът с уравнение $C : x^2 + y^2 = 4$ отсича от $H : z = 4xy$.*

Решение. Повърхнината Φ е частта от хиперболоида H, която се намира между „над“ кръга $K : x^2 + y^2 \le 4$, даденият цилиндър отсича от равнината Oxy (направете чертеж!). За да приложим формула (3.17), намираме $z_x^{'} =$

$4y$ и $z_y{}' = 4x$. След полярна смяна получаваме

$$S(\Phi) = \iint\limits_K \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \iint\limits_K \sqrt{1 + 16y^2 + 16x^2} dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^2 \sqrt{1 + 16\rho^2}\ \rho\ d\rho \right]\ d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\ .\ \int\limits_0^2 \left(1 + 16\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\ d\rho^2 =$$

$$= \frac{\pi}{16} \int\limits_0^2 \left(1 + 16\rho^2\right)^{1/2}\ d\left(1 + 16\rho^2\right) = \frac{\pi}{16} . \frac{2}{3} \left(1 + 16\rho^2\right)^{3/2} \Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{24} \left(65^{3/2} - 1\right) \approx 68,4667.$$

■

б) Пресмятане на обеми .Обема на множество, цилиндрично относно Oz може да бъде намерено с помощта на двоен или троен интеграл по формулите

$$\iiint\limits_{G_z} 1\ dxdydz = \iint\limits_G \left\{ \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} 1\ dz \right\}\ dxdy =$$

$$(3.26) \qquad \iint\limits_G\ z|_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)}\ dxdy = \iint\limits_G (\psi(x,y) - \varphi(x,y))\ dxdy = V(G_z),$$

2. Физични приложения на двоен и троен интеграл. Кратните интеграли имат разнообразни приложения в механиката и физиката. Тук се спираме главно на мехничните приложения на двоен и троен интеграл.

а) Пресмятане на маси на тела. Нека да разгледаме една плоска пластина D с постоянна дебелина равна на $d > 0$, която считаме, че е „поставена" върху равнината с въведена декартова координатна система Oxy. Тогава обемът и V е равен на $V = dS(D)$, а масата и $M(D) = V\rho = d\mu S(D)$, където $S(D)$ е лицето на пластинатата, а $\mu = const$ е плътността и, която считаме постоянна. Тогава в случай на постоянна плътност за масата получаваме формулата

$$(3.27) \qquad M(D) = \mu d \iint\limits_D 1\ dxdy.$$

В някои задачи от механиката се разглеждат и тела, чиято плътност зависи от точката в тялото. Нека в примера, разгледан по-горе плътността не е константа, а зависи от т. $P(x,y) \in D \subset Oxy$, т.е. $\mu = \mu(x,y)$ и е непрекъсната функция, дефинрана върху пластината D. В този случай формула (3.18) придобива вида

$$M(D) = d \iint\limits_D \mu(x,y)\, dxdy. \tag{3.28}$$

Нека сега да разгледаме по-общия случай, когато D е ограничено тяло в пространството с въведена декартова координатна система $Oxyz$. В случая на постоянна плътност масата на тялото D се получава по фомулата

$$M(D) = \mu \iiint\limits_D 1\, dxdydz, \tag{3.29}$$

а в случай, че плътността μ е непрекъсната функция на променливите x, y и z, дефинирана върху тялото D, съответната формула е

$$M(D) = \iiint\limits_D \mu(x,y,z)\, dxdydz. \tag{3.30}$$

По същия начин може да бъде намерена и масата на част от „черупка“ с постоянна дебелина. Нека черупката е част от гладката явно зададена повърхнина Φ с уравнение $\Phi : z = f(x,y),\ (x,y) \in D \subset Oxy$ и нека плътността на черупката в т.$P(x,y,z) \in \Phi$ е $\mu = \mu(x,y,z) = \mu(x,y,z(x,y))$. Тогава масата на тази черупка може да бъде намерена по формулата

$$M(\Phi) = \iint\limits_D \mu(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy \tag{3.31}$$

и разбира се $M(\Phi) = \mu S(\Phi)$ в случай че $\mu = const$ и $S(\Phi)$ е лицето на Φ (вж. форм. (3.17)).

Забележка 3.4.1 *Ако в горните формули считаме, че функцията μ е плътност на електричния заряд (т.е. количество електричество в единица площ или обем), то интегралите могат да се интерпретират и като сумарно количество електричество, с което е „заредено“ множеството D или повърхнината Φ. Нека да отбележим, че съществуват и други физични интерпретации на стойността на един кратен интеграл.*

б) Пресмятане на статични и инерционни моменти на фигури и тела в равнината и пространството. Център на тежестта. Нека в равнината е зададена една система от материални точки $M_1,\ M_2,\ \dots\ ,\ M_n$ с маси $m_1,\ m_2,\ \dots\ , m_n$.

Определение 3.4.1 *Векторът*

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k,\ \textit{където}\ \vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j} \tag{3.32}$$

е радиус-векторът на $k-$тата материална точка от системата спрямо някоя фиксирана декартова кординатана система Oxy се нарича ***статичен момент на системата спрямо т.*** *$O(0,0)$. Скаларните величини*

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k\ \textit{и}\ M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \tag{3.33}$$

се наричат ***статични моменти на системата спрямо*** *Ox и Oy.*

Лесно се вижда, че

$$\overrightarrow{M_O} = M_y\vec{i} + M_x\vec{j}. \tag{3.34}$$

Определение 3.4.2 *Точката C с координати*

$$x_c = \frac{M_y}{M},\ \textit{и}\ y_c = \frac{M_x}{M}, \textit{където}\ \ M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.35}$$

е масата на системата материални точки се нарича ***център на масите*** *на системата.*

Очевидно центърът на масите е геометрична а не материална точка и може да не съвпада с никоя от точките на системата. Например за система от две материални точки с равни маси центърът на масите е средата на на отсечката. Ако $n = 3,\ m_1 = m_2 = m_3$ центърът на масите съвпада с пресечната точка на медианите на триъгълника. Понякога центърът на масите се нарича **център на тежестта** . Механичният смисъл на центъра на тежестта е онази мислена точка, в която е приложена равнодействащата на на всички сили на тежеста, действащи на всяка отделна точка от системата.

Пример 3.4.3 *Като се използва определението дадено по-горе, лесно се установява, че ако са дадени две материални точки $M_1,\ M_2$ с маси m_1 и m_2, то центърът на тежестта лежи на отсечката M_1M_2 и е изпълнено равенството $M_1M.m_1 = M_2M.m_2$ (правило на лоста).*

■

Определение 3.4.3 *Неотрицателните величини*

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2 \quad и \quad I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2) \tag{3.36}$$

се наричат ***инерционни моменти на системата*** *спрямо осите Ox и Oy и съответно спрямо т. $O(0;0)$.*

Тези величини играят важна роля в динамиката на въртеливите движения на твърдо тяло.
Единиците, в които се измерват статичните и инерционни моменти са съответно $kg.m$ (килограм по метър) и $kg.m^2$ (килограм по метър на квадрат) ако масата е в килограми а разстоянието в метри.

Нека сега да разгледаме плоска фигура D, която се състои от безброй материални точки и с дебелина $d = 1$. Може да се докаже, че в този случай формулите за статични моменти, инерционни моменти и център на тежестта придобиват вида

$$M_x = \iint\limits_D y\mu(x,y)\,dxdy \text{ и } M_y = \iint\limits_D x\mu(x,y)\,dxdy,$$

$$I_x = \iint\limits_D y^2\mu(x,y)\,dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\mu(x,y)\,dxdy \quad и$$

$$I_O = \iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,dxdy = I_y + I_x, \tag{3.37}$$

$$x_c = \frac{M_y}{M(D)}, \text{ и } y_c = \frac{M_x}{M(D)}, \text{ където } M(D) = \iint\limits_D \mu(x,y)\,dxdy$$

е масата на фигурата.

Съществуват аналогични формули за инерционните и статични моменти на пространствени тела.

Нека в пространството е зададена една система от материални точки $M_1,\ M_2,\ \dots,\ M_n$ с маси $m_1,\ m_2,\ \dots, m_n$.

Определение 3.4.4 *Векторът*

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k, \text{ където } \vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j} + z_k\vec{j} \tag{3.38}$$

е радиус-векторът на $k-$тата материална точка от системата спрямо някоя фиксирана декартова кординатана система $Oxyz$ се нарича ***статичен момент на системата*** *спрямо т.* $O(0,0,0)$*. Скаларните величини*

$$M_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k, \ M_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \text{ и } M_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k \tag{3.39}$$

се наричат ***статични моменти на системата*** *спрямо координатните равнини* Oyz*,* Oxz *и* Ox*.*

Лесно се вижда, че

$$\overrightarrow{M_O} = M_{yz}\vec{i} + M_{xz}\vec{j} + M_{xy}\vec{k}. \tag{3.40}$$

Определение 3.4.5 *Точката C с координати*

$$x_c = \frac{M_{zy}}{M}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} \text{ и } z_c = \frac{M_{xy}}{M}, \text{където } \ M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.41}$$

е масата на системата материални точки се нарича ***център на масите (или център на тежестта)*** *на системата.*

Определение 3.4.6 *Неотрицателните величини*

$$\begin{aligned} &I_{xy} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} m_k z_k^2, \quad I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2, \ I_{xz} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2 \quad \text{и} \\ &I_O = \textstyle\sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy} \end{aligned} \tag{3.42}$$

се наричат ***инерционни моменти на системата*** *спрямо, равнините* Oxy*,* Oyz*,* Oxz *и съответно спрямо т.* $O(0,0,0)$*.*

Ако в пространството е дадено тяло T, в което е разпределена маса с плътност $\mu = \mu(x,y,z)$, то статичните и инерционни моменти на тялото спрямо координатните равнини и началото на координатната система се дават с формулите

$$M_{xy} = \iiint\limits_T z\mu(x,y,z)\,dxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_T y\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_T x\mu(x,y,z)\,dxdydz,\ I_{xy} = \iiint\limits_T z^2\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

(3.43)

$$I_{yz} = \iiint\limits_T x^2\mu(x,y,z)\,dxdydz,\ I_{xz} = \iiint\limits_T y^2\mu(x,y,z)\,dxdydz \text{ и}$$

$$I_O = \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)\,dxdydz = I_{yz}+I_{xz}+I_{xy},$$

а съответната формула за центъра на тежестта на тялото е

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M(T)},\ y_c = \frac{M_{xz}}{M(T)} \text{ и } z_c = \frac{M_{xy}}{M(T)},\ \text{където} \tag{3.44}$$

$$M(T) = \iiint\limits_T \mu(x,y,z)\,dxdydz \tag{3.45}$$

е масата на тялото.

Нека да отбележим, че в практическите приложения най-често $\mu = const$. Тогава навсякъде във формулите за статичен и инерционен момент плътността илиза пред интеграла като множител, а във формулите за център на тежестта се съкращава т.е. в случай на хомогенно тяло ($\mu = const$) координатите на центъръ на тежестта на тялото не зависят от тази константа. В този случай формулите за център на тежестта намират приложениеза намиране на обеми на ротационни тела и лица на ротационни повърхнини. В сила са следните **теореми на Гулден.**

Теорема 3.4.1 *Лицето на ротационна повърхнина получена от завъртане на дъга от плоска крива γ около ос лежаща в равнината на кривата и не пресичаща кривата е равно на произведението от дължината на дъгата от кривата и дължината на окръжността с радиус равен на разстоянието от центъра на тежестта на кривата до оста на въртене т.е.*

$$S = 2\pi . r_{_C} L(\gamma). \tag{3.46}$$

Задача 3.1 *Напишете самостятелно формулите за намиране на статичен и инерционен момент относно координатните оси на дъга от плоска криива, както и формулата за намиране на координатите на центъра на тежестта на такава дъга.*

Теорема 3.4.2 *Обемът на ротационно тяло получено от завъртане на плоска фигура D около ос лежаща в равнината на фигурата и не пресичаща фигурата е равен на произведението от площа на фигурата и дължината на окръжността с радиус равен на разстоянието от центъра на тежестта на фигурата до оста на въртене :*

$$V = 2\pi . r_C S(D). \tag{3.47}$$

Пример 3.4.4 *Да разгледаме окръжността с уравнение*

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 1.$$

ЗДа се намери лицето на ротационната повърхнина и обема ротационното тяло, получени от завъртане на окръжността около Ox.

Решение. Имаме $S = 2.\pi.2.2\pi.1 = 8\pi^2$ *кв.ед.*, $V = 2\pi.2.\pi.2^2 = 16\pi^2$ *куб.ед.* Направете самостоятелно чертеж! Получената повърхнина се нарича тор и наподобява автомобилна гума. ■

3.5 Несобствени интеграли.

1. Несобствени интеграли. Определение исвойства. До сега разгледахме определени интеграли от ограничени функции, дефинирани в крайни интервали и интеграли, от ограничени функции на две или три променливи, дефинирани върху ограничени области в равнината и пространството. Оказва се, че в много случай има смисъл дасе разглеждат интеграли от функции, които са дефинирани в безкраен интервал (или върху неограничени области) или функциите са неограничевни в множествата, върху които се интегрира.

а) Определения и важни примери..

Определение 3.5.1 *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $[a; +\infty), a = const.$, и е интегруема във всеки негов краен подинтервал от вида $[a; A]$.* ***Несобствен интеграл от I род*** *наричаме символа $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$, дефиниран чрез формулата*

$$I = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x)\,dx \tag{3.48}$$

ако границата в дясната страна на равенството съществува и е крайна. Числото I наричаме стойност на интеграла. В този случай казваме, че несобственият интеграл е ***сходящ****, а в противнив случай - че е* ***разходящ****.*

Забележка 3.5.1 *В частност се вижда, че ако за функцията $f(x)$ съществува точна примитивна*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

то съществуването на несобствения интеграл оп първи род е еквивалентно на съществуването на границата

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = I.$$

По аналогичен начин може се дефинира и несобствен интеграл от вида $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$. Несобствен интеграл от I род от функцията $f(x)$ върху **цялата реална права** $(-\infty; +\infty)$ се дефинира с формулата

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \tag{3.49}$$

при положение, че и двата интеграла в дясната страна на равенството са сходящи (в такъв случай стойността на сумата отдясно не зависи от избора на числото а).

Определение 3.5.2 *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана в интервала $(a; b]$ и е интегруема във всеки негов затворен подинтервал от вида $[a+\delta; b], \delta > 0$. Несобствен интеграл от II род от функцията $f(x)$ се дефинира чрез формулата*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx \tag{3.50}$$

ако границата в дясната страна на равенството съществува и е крайна. Ако границата съществува и е крайна казваме, че несоб- ственият интеграл е сходящ, а в противен случай - че е разходящ.

Ясно е, че тази дефиниция има смисъл само когато обичайната дефиниция за определен интеграл е неприложима, например ако $f(x)$ е неограничена в интервала $(a;b]$. В този случай точката a се нарича **особена точка** за несобствения интеграл. По аналогичен начин се дефинира несобствен интеграл от II род в случая,когато особената точка е в десния край b на дефиниционния интервал $[a;b)$, т.е. , ако предположим, че $f(x)$ е интегруема във всеки подинтервал $[a;b-\delta]$.

Ако c е вътрешна точка за интервала $[a;b]$ и в нея подинтегралната функция е неограничена, и функцията $f(x)$ е интегруема във всички подинтервали от вида $[a;c-\delta]$ и $[c+\delta;b]$, при всяко $\delta > 0$, то несобствен интеграл от II род от функцията $f(x)$f върху интервала $[a;b]$ се дефинира с формулата

$$\int\limits_a^b f(x)\ dx := \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int\limits_a^{c-\delta} f(x)\ dx + \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int\limits_{c-\delta}^{b} f(x)\ dx. \tag{3.51}$$

Нека да разгледаме някои примери.

Пример 3.5.1 *Да разгледаме интеграла от първи род:*

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\ dx,\ \ a > 0,\ \ a = const.$$

и да се изследва за сходимост в зависимост от стойностите на параметъра α.

Решение. Ако $\alpha = 1$, то

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x}\ dx = \lim_{A\to\infty} \ln x|_a^A = \lim_{A\to\infty} (\ln A - \ln a) = \infty.$$

Нека сега $\alpha \neq 1$. Тогава

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\ dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to\infty} x^{-\alpha+1}|_a^A = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}} \right) =$$

$$= \begin{cases} \infty,\ \ \alpha < 1 \\ \\ \dfrac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}},\ \ \alpha > 1 \end{cases}$$

Това означава, че интегралът е сходящ при $\alpha > 1$ и разходящ при $\alpha \leq 1$ при всяко фиксирано $a > 0$.

Пример 3.5.2 *Да разгледаме интеграла от втори род:*

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^\beta}\, dx,\ \ a, b > 0,\ \ a = const,\ \ b = const.$$

и да се изследва за сходимост в зависимост от стойностите на параметъра β.

Решение. Ако $\beta = 1$, то

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x-a}\, dx = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \ln(x-a)\big|_{a-\delta}^{b} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} (\ln(b-a) - \ln\delta) = \infty.$$

При $\beta \neq 1$ получаваме

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(x-a)^\beta}\, dx = \frac{1}{1-\beta} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} (x-a)^{-\beta+1}\big|_{\,a+\delta}^{\,b} =$$

$$\frac{1}{1-\beta} \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(\frac{1}{(b-a)^{\beta-1}} - \frac{1}{\delta^{\beta-1}} \right) = \begin{cases} \infty,\ \ \beta > 1 \\[2ex] \dfrac{1}{(1-\beta)(b-a)^{1-\beta}},\ \ \beta < 1 \end{cases}$$

Но това означава, че този интеграл е сходящ при $\beta < 1$ и разходящ при $\beta \geq 1$.

По аналогичен начин се получава и че

$$\int\limits_a^b \frac{1}{(b-x)^\beta}\, dx,\ \ a, b > 0,\ \ a = const,\ \ b = const.$$

е сходящ при $\beta < 1$ и разходящ при $\beta \geq 1$ (в този интеграл особената точка е b).

Пример 3.5.3 *Да се изследва за сходимост:*

$$\int\limits_a^\infty \sin x\, dx,\ \ a = const.$$

Решение. Съгласно определението за сходимост, имаме

$$\int_a^\infty \cos x \, dx = \lim_{A\to\infty} \sin x|\,_1^A = \lim_{A\to\infty} (\sin A - \sin a).$$

Тъй като (както е известно от курса по A1) $\lim_{A\to\infty} \sin A$ не съществува, то даденият итнеграл е разходящ.

б) Свойства. Свойствата са същите, като на обикновените риманови интеграли: *линейна комбинация на сходящи интеграли от един и същи тип върху един и същ интервал е отново сходящ интеграл и стойността му е равна на същата линейна комбинация от стойностите на отделните събираеми.*

2. Несобствени интеграли от неотрицателни функции. Критерии за сравнение.

Лема 3.1 *Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна в интервала $[a;+\infty)$. Несобственият интеграл*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко $A > a$ множеството

$$\left\{ \int_a^A f(x)\, dx : \ A > a \right\}. \tag{3.52}$$

е ограничено отгоре .

Доказателство. За всяко $A > a$ да положим

$$F(A) = \int_a^A f(x)\, dx. \tag{3.53}$$

Тогава от факта, че $f(x) \geq 0$ следва, че за всяко $a < A_1 < A_2$ е изпълнено неаравенството

$$F(A_1) = \int_a^{A_1} f(x)\, dx \leq F(A_2) = \int_a^{A_2} f(x)\, dx, \tag{3.54}$$

което означава, че функцията $F(A)$ е монотонно растяща в интервала $(a;+\infty)$. От друга страна, по определение несобственият интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е сходящ когато съществува крайната граница $\lim_{A\to\infty} F(A) = I < \infty$ Това обаче е изпълнено тогава и само тогава, когато функцията $F(A))$ е ограничена отгоре. ■

От тзи лема лесно се получава следната теорема

Теорема 3.5.1 *(Критерий за сравнение). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са де- финирани в интервала $[a;+\infty)$ и нека $0 \le f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in [a;+\infty)$. Тогава:*

1. *ако $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е също сходящ;*
2. *ако $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ е разходящ, то и $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ е разходящ.*

Доказателство. Ако положим за всяко $A > a$

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)\,dx \text{ и } G(A) = \int\limits_a^A g(x)\,dx,$$

то при $A > a$ е изпълнено неравенството $F(A) \le G(A)$. Тогава ако функцията $G(A)$ е ограничена отгоре, то и $F(A)$ е ограничена отгоре. От друга страна, от неограничеността отгоре на $F(A)$ следва неограниченост отгоре и на $G(A)$. Твърдението на теоремата следва от лемата, доказана по-горе. ■

Следствие 3.1 *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a;+\infty)$ и нека съществуват константи $m > 0$ и $n > 0$ такива, че за всяко $x \in [a;+\infty)$ са изпълнени неравенствата*

$$m\,g(x) \le f(x) \le n\,g(x). \tag{3.55}$$

Тогава интегралите $\int\limits_a^\infty g(x)\;dx$ и $\int\limits_a^\infty f(x)\;dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

Доказателство. Следва непосредствено от теоремата.

Нека да формулираме без доказателство една разновидност на горното следствие, което често удобно за решаване на задачи.

Следствие 3.2 *(Гранична форма на признака за сравнение.) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a;+\infty)$ и освен това $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ в този интервал и съществува крайната или безкрайна граница*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{3.56}$$

Тогава :

1. *ако* $0 \leq L < +\infty$ *и* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *е сходящ, то* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *е също сходящ;*

2. *ако* $0 < L \leq +\infty$ *и* $\int\limits_a^\infty g(x)\,dx$ *е разходящ, то и* $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ *е разходящ.*

Аналогични твърдения остават в сила и за несобствени интеграли от втори род. Тъй като се доказват по подобен начин, те са формулирани по-долу без доказателство.

Лема 3.2 *Нека функцията $f(x)$ е неотрицателна в интервала $(a;b]$. Несобственият интеграл*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

(с ообена точка a)е сходящ тогава и само тогава, когато за всяко $0 < \delta < b - a$ множеството

$$\left\{ \int\limits_{a+\delta}^b f(x)\,dx : \delta \in (0; b-a) \right\} \tag{3.57}$$

е ограничено отгоре.

Теорема 3.5.2 *(Критерий за сравнение). Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $(a;+b]$ и нека $0 \leq f(x) \leq g(x)$ за всяко $x \in (a;b])$. Тогава:*

1. *ако* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *е сходящ, то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *е също сходящ;*

2. *ако* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *е разходящ, то и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *е разходящ.*

Следствие 3.3 *Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $[a;+\infty)$ и нека съществуват константи $m>0$ и $n>0$ такива, че за всяко $x \in (a;b])$ са изпълнени неравенствата*

$$m\,g(x) \leq f(x) \leq n\,g(x). \tag{3.58}$$

Тогава интегралите $\int\limits_a^b g(x)\ dx$ и $\int\limits_a^b f(x)\ dx$ са едновременно сходящи или разходящи.

Следствие 3.4 *(Гранична форма на признака за сравнение занесобствени интеграли от тори род..) Нека функциите $f(x)$ и $g(x)$ са дефинирани в интервала $(a;b])$ и освен това $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$ в този интервал и съществува крайната или безкрайна граница*

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)}{g(x)} = L. \tag{3.59}$$

Тогава :

1. *ако $0 \leq L < +\infty$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ е сходящ, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е също сходящ;*
2. *ако $0 < L \leq +\infty$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ е разходящ, то и $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ е разходящ.*

Опитайте се да формулирате самостоятелно тези твърдения в случай, че особената точка е в десния край на интервала.

Пример 3.5.4 *Да се изследват за сходимост интегралите:*

а) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$; *б)* $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}\,dx$; *в)* $\displaystyle\int\limits_0^{1} \frac{\sin(x^2)}{x\sqrt{1-x}}\,dx$; *г)* $\displaystyle\int\limits_2^{+\infty} \frac{1+x}{3+x^2}\,dx$.

Глава 4

Криволинейни интеграли. Приложения.

4.1 Криволинейни интеграли от първи род.

1. Определение и свойства. Нека

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{4.1}$$

гладка крива и нека $f = f(x, y, z)$ е непрекъсната функция, дефинирана върху точките от γ.

Определение 4.1.1 *Изразът $\int\limits_{\gamma} f(x, y, z)ds$, дефиниран чрез равенството*

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} f(x, y, z)\, ds &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))|\vec{r}\,'(t)|\, dt = \\ &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt \end{aligned} \tag{4.2}$$

се нарича ***криволинеен интеграл от първи род*** *от функцията $f(x, y, z)$ по кривата γ.*

От направените предположения за кривата γ и функцията f следва, че интегралът в дясната страна на дефиниционното равенство съществува. Ако

$f(x,y,z) \equiv 1$ върху кривата γ получаваме позната от анализ първа част формула за дължина на дъга от гладка крива:

$$\int\limits_{\gamma} 1\; ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}\,'(t)|\; dt = l(\gamma) \tag{4.3}$$

Криволинейният интеграл от първи род има следните снойства:

1. За произволни непрекъснати функции f и g и произволни константи λ и μ е в сила равенството
$$\int\limits_{\gamma} \lambda f + \mu g\; ds = \lambda \int\limits_{\gamma} f\; ds + \mu \int\limits_{\gamma} g\; ds.$$

2. Ако $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$, където $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ са гладки криви, то
$$\int\limits_{\gamma} f\; ds = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} f\; ds_i.$$

3. Криволинейният интеграл от първи род не зависи от посоката на обход на кривата, т.е. ако означим с $\bar{\gamma}$ същата крива γ, но с начало $\vec{r} = \vec{r}(\beta)$ и край $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$, то
$$\int\limits_{\bar{\gamma}} f\; ds = \int\limits_{\gamma} f\; ds.$$

4. Криволинейният интеграл от първи род не зависи от параметризацията на кривата, т. е., ако $\vec{\rho}(u) = \vec{r}(t(u)),\ u \in [m,\ n]$ е друго допустимо параметрично представяне на γ, то
$$\int\limits_{\gamma} f\; ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t))\; |\vec{r}\,'(t)|\; dt =$$
$$= \int\limits_{m}^{n} f(x(t(u)), y(t(u)), z(t(u)))\; |\vec{r}\,'(t(u))| t'(u)\; du.$$

Свойство (1)и (2) следват от свойствата на определения риманов интеграл, свойство (4) следва от теоремата за смяна на променливите при определения интеграл. Да покажем верността на свойство (3). Нека в уравнението на γ да направим смяната $t = \alpha + \beta - u$. Очевидно, при $t = \alpha$ $u = \beta$ и обратно. Тогава параметричното уравнение $\vec{\rho}(u) = \vec{r}(\alpha + \beta - u),\ u \in [\alpha,\ \beta]$ задава параметрично представяне на кривата $\bar{\gamma}$. Като вземем предвид, че $\vec{\rho}\,'(u) = -\vec{r}\,'(t)$ и $|\vec{\rho}\,'(u)| = |\vec{r}\,'(t)|$, получаваме

$$\int\limits_{\gamma} f ds = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} f(x(\alpha+\beta-u), y(\alpha+\beta-u), z(\alpha+\beta-u))|\vec{r}\,'(\alpha+\beta-u)|du =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(\alpha+\beta-u), y(\alpha+\beta-u), z(\alpha+\beta-u))\ |\vec{\rho}\,'(u)|\ du = \int\limits_{\bar{\gamma}} f\ ds.$$

2. Приложения. Криволинейният интеграл от първи род има различни геометрични и физични приложения .

а) Лице на цилиндрична повърхнина. Да се спрем и на едно геометрично приложение на този вид интеграли. Нека да разгледаме една равнинна гладка или частично гладка линия γ, разположена в координатната равнина Oxy и нека $f(x.y)$ и $g(x,y)$ са две непрекъснати функции на две променливи, дефинирани върху γ, при това $f(x,y) \leq g(x,y)$ за всички точки $M(x,y) \in \gamma$. Да разгледаме цилиндричната повърхнина Φ с образуващи, успоредни на оста Oz и състояща се от всички точки $M_1(x,y,z)$, за които $(x,y,0)$ е точка от γ, а z-координатата на която удовлетвторява неравенствата $f(x,y) \leq z \leq g(x,y)$ за точките от линията γ (направете чертеж!). Тогава, ако кривата има уравнение $\gamma : \vec{r} = (x(t), y(t)),\ t \in [\alpha,\ \beta]$, то лицето на цилиндричната повърхнина Φ се дава с формулата :

$$\begin{aligned} S(\Phi) &= \int\limits_{\gamma} (g(x.y) - f(x,y))\ ds = \\ &\int\limits_{\alpha}^{\beta} (g(x(t), y(t)) - f(x(t), y(t))\sqrt{x'^{\,2}(t) + y'^{\,2}(t)}\ dt. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Интуитивно е ясно, че това е „криволинейният вариант“ на формулата за лице на фигура, заградена от графиките на две непрекъснати функции, позната от курса по анализ първа част. Ясно е също така, че подобни формули са в сила и за цилиндрични повърхнини с образуващи, успоредни на оста Ox или Oy.

б) Физични приложения. Ако подинтегралната функция f се интерпретира като функция на плътността на линия с напречно сечение равно на единица (тънка материална дъга), то масата на дъгата се дава с криволиннеен интеграл върху дъгата от функцията на плътността. В частен случай, ако плътността е постоянна, то масата е произведение от дължината на линията и плътността. По-точно, нека плътността е $\mu = \mu(x,y,z) > 0,\ (x,y,z) \in \gamma$. Тогава масата е

$$m_\gamma = \int\limits_\gamma \mu(x,y,z)\,ds, \tag{4.5}$$

респективно ако $\mu(x,y,z) = \mu = const$, то

$$m_\gamma = \mu \int\limits_\gamma 1\,ds = \mu l(\gamma). \tag{4.6}$$

Съответно, статичните и инерционни моменти на една равнинна материална дъга се дават (виж определението за статичен и инерционен момент за система материални, точки както и формулите за тези величини в случай на плоска фигура и тяло в пространството от главата за кратни интеграли) с формулите:

$$\begin{aligned} &M_x = \int\limits_\gamma y\mu(x,y)\,ds, \quad M_y = \int\limits_\gamma x\mu(x,y)\,ds,\ \overrightarrow{M_O} = M_y\vec{i} + M_x\vec{j} \\ &I_x = \int\limits_\gamma y^2\mu(x,y)\,ds, \quad I_y = \int\limits_\gamma x^2\mu(x,y)\,ds,\ I_O = I_x + I_y, \end{aligned} \tag{4.7}$$

а координатите на центъра на тежестта на дъгата $C(x_C, y_C)$ се намират по формулата

$$x_C = \frac{M_y}{m_\gamma}, \quad y_C = \frac{M_x}{m_\gamma}. \tag{4.8}$$

В случая на пространствена крива формулите са :

$$M_{xy} = \int\limits_{\gamma} z\mu(x,y,z)\, ds, \quad M_{yz} = \int\limits_{\gamma} x\mu(x,y,z)\, ds,$$

$$M_{xz} = \int\limits_{\gamma} y\mu(x,y,z)\, ds, \quad \overrightarrow{M_O} = M_{zy}\vec{i} + M_{xz}\vec{j} + M_{xy}\vec{k},$$

$$I_{xz} = \int\limits_{\gamma} y^2\mu(x,y,z)\, ds, \; I_{yz} = \int\limits_{\gamma} x^2\mu(x,y,z)\, ds, \tag{4.9}$$

$$I_{xy} = \int\limits_{\gamma} z^2\mu(x,y,z)\, ds, \quad I_O = I_{yz} + I_{xz} + I_{xy},$$

$$x_G = \frac{M_{yz}}{m_\gamma}, \quad y_G = \frac{M_{xz}}{m_\gamma}, \quad z_G = \frac{M_{xy}}{m_\gamma},$$

където $G(x_G,\ y_G,\ z_G)$ е центъра на тежестта на пространствената дъга γ.

Аналогично, функцията μ може да се интерпретира и като функция на линейна плътност на електрически заряд, разпределен върху γ. Тогава формули (4.4) и (4.4) дават количеството електричество, с което е „заредена“ кривата γ. Съществуват и други приложения на които няма да се спираме.

Пример 4.1.1 *Да се пресметнат интегралите :*

а) $\int\limits_{\gamma} (x + 2y)\ ds$, *където* γ *е контурът на триъгълника с върхове в точките* $O(0,\ 0)$, $A(2, -2)$ *и* $B(1,\ 3)$*;*

б) $\int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, ds$, *където* $\gamma : \vec{r} = (2\sin t, 2\cos t, 2t),\ t \in [0,\ 3]$.

Пример 4.1.2 *Да се пресметне лицето на цилиндричната повърхнина , ограничена от повърхнините с уравнения* $z = 0,\ z = 2x + 3y + 5$ *и* $x^2 + y^2 = 4$.

Пример 4.1.3 *Да се намерят координатите на центъра на тежестта и инерционните моменти на дъгите от кривите:*
а) горната полуокръжност с уравнение $x^2 + y^2 = R^2,\ y \geq 0$*;*
б) винтовата линия с уравнение $x = a\cos t,\ y = a\sin t, z = bt,\ a > 0,\ b > 0,$ $t \in [0,\ \pi]$.

4.2 Криволинейни интеграли от втори род.

1. Определение и свойства. Нека

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{4.10}$$

е гладка крива. Нека върху точките от кривата γ е дефинирано векторно поле (правило по което на на всяка точка от γ е съпоставен единствен вектор)

$$\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)),$$

чийто компоненти са непрекъснати функции. Да означим с

$$\vec{F}(t) = (P(x(t),y(t),z(t)), Q(x(t),y(t),z(t)), R(x(t),y(t),z(t)))\ t \in [\alpha,\ \beta].$$

Определение 4.2.1 *Изразът*

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(t)\ d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} P(x,y,z)\ dx + Q(x,y,z)\ dy + R(x,y,z)\ dz, \tag{4.11}$$

дефиниран по следния начин

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}(t)\ d\vec{r} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(t)\vec{r}\,'(t)\ dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\right]\ dt$$

се нарича ***криволинеен интеграл от втори род (тип) от векторното поле $\vec{F}$ върху кривата*** *γ.*

Забележка 4.2.1 *Тук с израза $\vec{F}(t)d\vec{r}$ е означено скаларното произведение на векторите $\vec{F}(t)$ и $d\vec{r}$. По същество криволинейният интеграл от втори тип е интегриране на „променливото“ скаларно произведение на вектора на полето и допирателния вектор на кривата, което е функция на параметъра върху точките от кривата.*

Една физическа интерпретация на този тип интеграли е ***работата, която извършва силово поле при преместването на материална точка от началото до края на дадената крива****. (Припомнете си физическия смисъл на скаларното приведение на два вектора!)*

От направените предположения за кривата и векторното поле следва, че определеният интеграл в дясната страна на равенството съществува.

Преди да формулираме свойствата на този вид интеграли, нека да забележим, че съществува връзка между тях и криволинейни интеграли от първи род. Наистина, нека

$$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{|\vec{r}\,'(t)|}\vec{r}\,'(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{4.12}$$

е единичният допирателен вектор към кривата γ. Тогава координатите на вектора $\vec{\tau}(t)$ се изразяват чрез направляващите (директорните) косинуси

$$\vec{\tau}(t) = (\cos\alpha_0, \cos\beta_0, \cos\gamma_0) \tag{4.13}$$

и интегралът от (4.8) може да се запише така :

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\gamma} \vec{F}(t)\, d\vec{r} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(t)\vec{r}\,'(t)\, dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(t)\vec{\tau}(t)|\vec{r}\,'(t)|\, dt = \\ &= \int\limits_{\gamma} \vec{F}(x,y,z)\vec{\tau}(x,y,z)\, ds = \int_{\gamma} (P\cos\alpha_0 + Q\cos\beta_0 + R\cos\gamma_0)\, ds. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Горното равенство дава връзката между двата типа криволинейни интеграли. Криволинейният интеграл от втори род има следните свойства:

1. За произволни непрекъснати векторни полета $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и произволни константи λ и μ е в сила равенството
$$\int\limits_{\gamma} \lambda\vec{F} + \mu\vec{G}\, d\vec{r} = \lambda\int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} + \mu\int\limits_{\gamma} \vec{G}\, d\vec{r}.$$

2. Ако $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$, където $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ са гладки криви, то
$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\gamma_i} \vec{F}\, d\vec{r}_i.$$

3. Криволинейният интеграл от втори род зависи от посоката на обход на кривата, т.е. ако означим с $\bar{\gamma}$ същата крива γ, но с начало $\vec{r} = \vec{r}(\beta)$ и край $\vec{r} = \vec{r}(\alpha)$, то
$$\int\limits_{\bar{\gamma}} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}.$$

4. Криволинейният интеграл от втори род не зависи от параметризацията на кривата, в случай че при новата параметризация се запазва посоката на обход на кривата т. е., ако $\vec{\rho}(u) = \vec{r}(t(u)),\ u \in [m,\ n]$ е друго допустимо параметрично представяне на γ, за което $\vec{\rho}(m) = \vec{r}(\alpha)$, $\vec{\rho}(n) = \vec{r}(\beta)$ и $t^{'}(u) > 0$, то

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(t)\vec{r}\,'(t)\;dt = \int\limits_{m}^{n} \vec{F}(t(u))\vec{\rho}\,'(u)\;du$$

Да покажем верността на свойство (3). Нека в уравнението на γ да направим смяната $t = \alpha + \beta - u$. Очевидно, при $t = \alpha\ u = \beta$ и обратно. Тогава параметричното уравнение $\vec{\rho}(u) = \vec{r}(\alpha + \beta - u),\ u \in [\alpha,\ \beta]$ задава параметрично представяне на кривата $\bar{\gamma}$. Като вземем предвид, че

$$\vec{\rho}\,'(u) = -\vec{r}\,'(t) \text{ и съответно } \vec{\tau}(t) = -\vec{\tau}(u),\ \text{при } u = \alpha + \beta - t$$

и връзката между двата типа криволинейни интеграли, която се дава с формула (4.14), получаваме

$$\int\limits_{\gamma} \vec{F}\;d\vec{r} = \int\limits_{\gamma} \vec{F}(x,y,z)\vec{\tau}(x,y,z)\;ds,\ \text{а от друга страна}$$

(4.15)
$$\int\limits_{\bar{\gamma}} \vec{F}\;d\vec{\rho} = \int\limits_{\bar{\gamma}} \vec{F}(x,y,z)\;\vec{\tau}(u)\;ds = -\int\limits_{\gamma} \vec{F}(x,y,z)\vec{\tau}(x,y,z)\;ds.$$

Този факт има проста геометрична илюстрация (направете чертеж!). Да разггледаме някои примери.

Пример 4.2.1 *Пресметнете интеграла:*

$$I = \int\limits_{\gamma} (x^2 + 3y)\;dx + (x - z^2)\;dy + (z - y)\;dz,$$

където кривата γ е зададена с урвнението:

$$\gamma : x = t^2,\ y = t^3,\ z = 2t,\ -1 \le t \le 3.$$

Решение: Съгласно формулата (4.9) върху кривата γ имаме

$$dx = 2tdt,\ dy = 3t^2dt,\ dz = 2dt,$$

$$x^2 + 3y = t^4 + 3t^3,\ x - z^2 = t^2 - 4t^2 = -2t^2,\ z - y = 2t - t^3,$$

от където намираме

$$I = \int\limits_{-1}^{3} (t^4 + 3t^3)2t\,dt - 2t^2 3t^2\,dt + (2t - t^3)2\,dt = \int\limits_{-1}^{3} (2t^5 + 4t - 2t^3)\,dt =$$

$$= \frac{2}{6}\ t^6\Big|_{-1}^{3} + \frac{4}{2}\ t^2\Big|_{-1}^{3} - \frac{2}{4}\ t^4\Big|_{-1}^{3} = \frac{1}{3}(3^6 - (-1)^6) + 2(3^2 - (-1)^2) -$$

$$\frac{1}{2}(3^4 - (-1)^4) = \frac{728}{3} + 16 - 4 = 254\frac{2}{3}.$$

2. Ориентация на крива. Формула на Грийн. Независимост от пътя на интегриране.

а) Ориентация на крива. Нека

$$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t),\ t \in [\alpha,\ \beta] \tag{4.16}$$

е гладка крива.

Определение 4.2.2 *Ориентация на кривата γ наричаме избор на обход на кривата, т.е. избор на* ***начало и край на кривата.***

Ясно, е че върху една гладка крива има две възможни ориентации. Едната е свързана с този обход на кривата при който параметъра нараства от α до β. В този случай т. A за която $\overrightarrow{OA} = \vec{r}(\alpha)$ наричаме **начало** на γ, а т.B за която $\overrightarrow{OB} = \vec{r}(\beta)$ -**край** на γ. Другата ориентация се получава, като за начало приемем т.B, за край – т. A. Тази ориентация е свързана с обратната посока на изменение на параметъра – от β към α . В този случай, параметричното представяне на кривата е

$$\gamma : \vec{\rho} = \vec{r}(u) = \vec{r}(\alpha + \beta - u),\ u \in [\alpha,\ \beta]. \tag{4.17}$$

Ние вече използвахме тези две ориентации при доказателство на свойствата на криволинейните интеграли от двата типа и видяхме връзката между единичните допирателни вектори в произволна т. $M \in \gamma$, за която

$$\vec{r}(u) = \overrightarrow{OM} = \vec{r}(t) \text{ а именно, че } \vec{\tau}(u) = -\vec{\tau}(t) \text{ при } t = \alpha + \beta - u \tag{4.18}$$

и означихме с $\bar{\gamma}$ същата крива, но с противоположна ориентация. Направете чертеж! За удобство, ориентацията при която параметъра t нараства приемаме за положителна и кривата с тази ориентация озчаваме с γ_+ или просто с γ, а противоположната ориентация – за отрицателна и същата крива с отрицателна ориентация означаваме с $\bar{\gamma}$ или сγ_-.

Да обърнем внимание, че възможните допустими препараметризации на една крива се разбиват на два класа: такива, които запазват ориентацията на кривата ($t^{'}(u) > 0$) и такива, които я сменят с противоположната ориентация ($t^{'}(u) < 0$).

Както знаем, крива за която $\vec{r}(\alpha) = \vec{r}(\beta)$ се нарича затворена. Крива, за която равенството $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$ е възможно само при $t_1 = \alpha$ и $t_2 = \beta$ се нарича **проста затворена крива** или **кривата без самопресичане**.

Нека γ е проста затворена крива, лежаща в равнината Oxy. Вътрешността на γ (която да означим с $G = Int(\gamma)$) е област в равнината.

Определение 4.2.3 *Положителна ориентация на кривата γ наричаме този избор на обход на кривата, при който областта G остава от лявата страна на кривата, или което е все едно при обход по кривата до връщане в началната точка, допирателният вектор се завърта на ъгъл $2\pi = 360^0$ в посока обратна на часовниковата стрелка. Противоположната ориентация наричаме отрицателна.*

Направете чертеж!

Аналогично, ако γ е проста затворена крива в пространството, то проложителнна ориентация на кривата наричаме тази, при която всяка гладка повърхнина Φ, чийто контур е γ остава отляво по отношение на допирателния вектор към кривата. Направете чертеж! В случаи на затворени криви за криволинеен интеграл от полето $\vec{F}$ върху кривата γ се използва означението

$$\oint_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}, \tag{4.19}$$

а стойността на интеграла се нарича **циркулация на полето $\vec{F}$ по затворената крива** γ.

б) Формула на Грийн. Съществува връзка между криволинеен интеграл от втори род и двоен интеграл. Да напомним следното определение (вж. лекцията за точно ДУ от първи ред):

Определение 4.2.4 *Областта $G \subseteq \mathbb{R}^2$ се нарича* ***едносвързана****, ако за всяка затворена начупена линия, лежаща изцяло в G и многоъгълникът, който е заграден от тази линия, също лежи изцяло в G. (Чертеж!).*

Теорема 4.2.1 *Нека $G \subseteq \mathbb{R}^2$ е затворена и едносвързана област с положително ориентиран затворен контур $\partial G = \gamma_+$ – гладка или частично гладка крива. Нека освен това в областта G е дефинирано векторното поле $\vec{F} = (P(x, y),\ Q(x, y))$, непрекъснато в G заедно с частните производни*

$P'_y(x,y)$ *и* $Q'_x(x,y)$. *Тогава е вярна формулата на Грийн*

$$\iint\limits_G (Q'_x - P'_y)dxdy = \oint\limits_{\gamma_+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{4.20}$$

Идея за доказателство: Най-напред считаме, че областта G е елементарна относно накоя от кординатните оси – например относно Ox, т.е. $G : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Може да бъде намерено в (лит.)

в) Независимост от пътя на интегриране. Тук се изучават условията за независимост от пътя на интегриране за криволинеен интеграл от втори род Всички криви, които се разглеждат в тази подточка, предполагаме гладки или частично гладки. Освен това, предполагаме, че плоското векторното поле $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ е като в подточка б) и областта G е едносвързана. Да напомним, че едно векторно поле се нарича **потенциално** в дадена област от равнината G, ако

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y) \text{ за всяко } (x,y) \in G \tag{4.21}$$

и, че за всяко потенциално поле съществува функция $U = U(x,y)$, такава, че $U'_x = P(x,y)$ и $U'_y = Q(x,y)$, (или, което е все едно $\overrightarrow{grad\,U} = \vec{F}$) и която се нарича **потенциална функция на полето**. В сила е теоремата

Теорема 4.2.2 *Следните условия са еквивалентни :*

1. *За всеки две точки A и B от G интегралът $\int\limits_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}$, където γ е крива с начало в т.A и край в т.B не зависи от кривата, която свързва точките A и B, а само от тези точки;*

2. $\oint\limits_\mu \vec{F}\,d\vec{r} = 0$ *за всеки прост затворен контур $\mu \subset G$;*

3. *Полето $\vec{F}$ е потенциално в G;*

4. *За всеки две точки A и B от G и всяка крива γ свързваща тези точки е изпълнено*

$$\int\limits_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = U(B) - U(A),$$

където $U(x,y)$ е потенциалната функция на полето.

Идея за доказателство . От 1)⇒ 2)⇒ 3)⇒4)⇒1).

Съществуват аналогични условия за независимост от пътя на криволинейни интеграли от втори род в пространството.

Определение 4.2.5 *Областта $G \subseteq \mathbb{R}^3$ се нарича **повърхностно едносвързана**, ако по всяка затворена крива $\gamma \subset G$ може да се построи гладка или частично гладка повърхнина, лежаща изцяло в $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Областта Gсе нарича **едносвързана**, ако за всяка затворена област G_1, чиито контур ∂G_1 лежи в G то цялата област G_1 лежи в G.*

Пример 4.2.2 *Пример на едносвързана област е всяко кълбо с радиус $R > 0$, докато областта, която е заградена от две кълба $K_1(O_1, R_1)$ $K_2(O_2, R_2)$ с радиуси R_1 и R_2, даже и в случая, когато $R_1 = 0$. Обяснете защо и направете чертеж!*

$R_1 < R_2$ и освен това K_1 се съдържа изцяло в K_2 е повърхностно едносвързана, но не е едносвързана Следващата теорема дава условия, еквивалентни на условието за независимост от пътя.

Теорема 4.2.3 *Нека векторното поле*

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

е непрекъснато в повърхностно едносвързаната област G, заедно с частните производни P'_y, P'_z, Q'_x, Q'_z и R'_x, R'_y, Тогава следните условия са еквивалентни :

1. *За всеки две точки A и B от G интегралът $\int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}$, където γ е крива с начало в т.A и край в т.B не зависи от кривата, която свързва точките A и B;*

2. *$\oint\limits_{\mu} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$ за всеки прост затворен контур $\mu \subset G$;*

3. *Във всяка вътрешна точка от G са изпълнени равенствата*

   $P'_y(x,y,z) = Q'_x(x,y,z)$, $Q'_z(x,y,z) = R'_y(x,y,z)$ *и* $P'_z(x,y,z) = R'_x(x,y,z)$,

   т.е. полето $\vec{F}$ е потенциално в G (сравни с равнинния случай);

4. *за всеки две точки A и B от G и всяка крива γ свързваща тези точки е изпълнено*

   $$\int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\, dx + Q(x,y,z)\, dy + R(x,y,z)\, dz = U(B) - U(A),$$

   където $U(x,y,z)$ е потенциалната функция на полето.

Да разгледаме някои примери.

Пример 4.2.3 *Пресметнете интегралите:*

$$\textbf{\textit{а)}} \int\limits_{\widehat{AB}} (2x+y)\,dx + (x-3y)\,dy, \quad \textit{където } A(-1,\ -3),\ B(2,\ 4)$$

и интегрирането са извършва по произволна частично гладка крива, с начало в т. A и край в т.B;

$$\textbf{\textit{б)}} \int\limits_{\gamma} (-\frac{y}{x^2+y^2})\,dx + (\frac{x}{x^2+y^2})\,dy,\ \textit{където } 1)\ \gamma : x^2+y^2 = 1$$

и 2) γ е произволна частично гладка затворена крива, която съдържа началото на координатната система във вътрешността си;

$$\textbf{\textit{в)}} \int\limits_{\widehat{MN}} (y+2z)\,dx + (3z+x)\,dy + (2x+3y)\,dz, \quad \textit{където } M(1,\ 3,\ 3)$$

и $N(2,\ 4,\ 6)$, като предварително са проверят условията за независимост от пътя на интегриране.;

Решение: а) Тук $P = 2x+y$, $Q = x-3y$ $P_y^{'} = 1 = Q_x^{'}$ и равенството е изпълнено за всяко $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ – едносвързана област. Следователно интегралът не зависи от кривата, която свързва т. A и т.B и полето $\vec{F} = (2x+y,\ x-3y)$ е потенциално. Задачата пможе да бъде решена по два начина: директно, като свържем точките с подходяща крива, така че изчисленията да са с минимален обем, или като намерим потенциалната функция $U(x,y)$ и пресметнем $U(B) - U(A)$, което е и търсенатата стойност на интеграла. За да решим интеграла по първия начин е най-удобно да свържем дадените точки с начупена линия, чийто отсечки са успоредни на Ox и Oy. Например, нека да разгледаме кривата $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, където γ_1 е отсечката, успоредна на Ox и свързваща точките $A(-1,\ -3)$ и $C(2,\ -3)$, а γ_2– отсечката, свързваща $C(2,\ -3)$ и $B(2,\ 4)$. Тогва интегралът върху γ е сума от интегралите върху γ_1 и γ_2. Да ги означим с I_1 и I_2 и да параметризираме γ_1 и γ_2. Една възможна параметризация е $\gamma_1 : x = x,\ y = -3,\ -1 \leq x \leq 2$ и съответно $\gamma_2 : x = 2,\ y = y,\ -3 \leq y \leq 4$. Като вземем предвид, че върху γ_1

$y = -3 = const$ и следователно $dy = 0$, аналогично върху γ_2 също $dx = 0$, получаваме

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_1} (2x+y)\,dx + (x-3y)\,dy = \int\limits_{-1}^{2} (2x-3)\,dx + (x+9).0 =$$

$$x^2\Big|_{-1}^{2} - 3x|_{-1}^{2} = 2^2 - (-1)^2 - 3(2-(-1)) = 3 - 9 = -6,$$

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_2} (2x+y)\,dx + (x-3y)\,dy = \int\limits_{-3}^{4} (4+y).0 + (2-3y)\,dy =$$

$$= 2y|_{-3}^{4} - \frac{3}{2}\,y^2\Big|_{-3}^{4} = 2(4-(-3)) - \frac{3}{2}(4^2-(-3)^2) = 14 - \frac{21}{2} = \frac{7}{2}.$$

Тогава $I = I_1 + I_2 = -6 + \dfrac{7}{2} = -\dfrac{5}{2}$.

Решете останалите два примера самостоятелно

3. Приложение на криволинейните от втори род.

а) Лице на плоска фигура. От формулата на Грийн се получават проста формула за пресмятане на лица плоски фигури. Наистина, като предположим че G и γ като в условията на теоремата на Грийн, да положим във формулата на Грийн $P(x,y) = -y$ И $Q(x,y) = x$. Тогава $P'_y(x,y) = -1$, $Q'_x(x,y) = 1$ и следователно

$$\iint\limits_G 2dxdy = \oint\limits_{\gamma_+} -ydx + xdy, \tag{4.22}$$

или

$$S(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma_+} -ydx + xdy. \tag{4.23}$$

Формулата на Грийн , освен за пресмятане на лице на фигура може да се прилага в много различни ситуации – тя дава възможност за избор: дали да се пресмята криволинеен интеграл по затворена крива или съответният двоен интеграл върху областта заградена от кривата, в зависимост от поставената задача или обема на пресмятанията.

Пример 4.2.4 *Пресметнете:*
1) Лицето на фигурата заградена от кривата с уравнене

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t, t \in [0,\ 2\pi], a > 0,\ \ b > 0.$$

2) Интеграла

$$I = \int\limits_{\widehat{\gamma}} (y + 3x^2)\ dx + (x + y^3 + \sin y + 3)\ dy,$$

където γ *е горната половина от астроидата :* $x = 4\cos^3 t,\ \ y = 3\sin^3 t,$ $t \in [0,\ \pi].$

Решение: 1) Кривата е елипса с полуоси a и b, при това обходена в положителна посока (защо?). Съгласно формула (4.23)

$$S(G) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\gamma_+} -ydx + xdy = \int\limits_0^{2\pi} -b\sin t\ d\ a\cos t + a\cos t\ d\ b\sin t = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} ab\ dt = \pi ab.$$

2) Тук, ако се опитаме директно да пресметнем интеграла, прилагайки формулата с която един криволинеен нтеграл от втори тип се свежда към определен, ще се натъкнем на доста технически трудности. Но, ако забележим, че в дадения случай равенството $P_y^{'}(x, y) = Q_x^{'}(x, y) = 1$ е изпълнено за всяко $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Но това означава, че стойността тна този интеграл не звиси от кривата, а само от началната и крайната и точка. Очевидно това са точките $A(4, 0)$ и $B(-4, 0)$ (направете чертеж) и е най-удобно да се интегрира по отсечката от абцисната ос, която ги свързва, обходена в посока от A към B. Една възможна параметризация на тази отсечка е : $x = 4-t,\ y = 0,\ t \in [0, 8]$. Тогава

$$I = \int\limits_0^8 3(4-t)^2)\ d(4-t) = (4-t)^3\Big|_0^8 = 4^3 - (-4)^3 = 128.$$

б) Физични приложения. Едно от възможните физични приложения на криволинеен итнеграл от втори тип е работата, която извършва променлива сила за пренасянето на материална точка от началото до края на една гладка или частично гладка крива, което е обобщение на механичния смисъл на скаларното произведение на два вектора (известно от курса по ЛААГ) и работата на променлива сила при пренасяне на тяло по оста Ox или Oy (приложение на определения Риманов интеграл, известно от курса по Анализ 1).

С други думи, ако $\vec{F}$ се интерпретира като поле от сили, дефинирано върху кривата $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$ или в някаква област G, която съдържа γ , то работата $\mathcal{A}$, която извършват силите на полето за пренасяне на т.M от началото на γ т. A до края и т. B се дава с формулата

$$\text{A} = \int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r}. \tag{4.24}$$

Пример 4.2.5 *Намерете работата, която извършва силовото поле*

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

за преместване на материална точка M *по кривата*

$$\gamma : \vec{r} = t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k} \quad \textit{ако} \quad t \in [1, 4].$$

Решение. Нека да пресметнем скаларното произведение $\vec{F}d\vec{r}$. Върху кривата полето има вида

$$\vec{F}(t) = -t^4\vec{i} - t^5\vec{j} + t^3\vec{k}, \text{ и съответно } d\vec{r} = (2t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k})\, dt$$

Тогава за скаларното произведение получаваме

$$\vec{F}d\vec{r} = (-2t^5 - t^5 - 3t^5)dt = -6t^5dt,$$

а работата, която се извършва при пренасяне на точката по дадената крива е

$$\text{A} = \int\limits_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \int\limits_{1}^{4} -6t^5dt = -t^6|_1^4 = -(4^6 - 1^6) = -(64-1)(64+1) = -4095.$$