Иван Димитров

РЪКОВОДСТВО

за решаване на задачи по

Математически анализ

I част

СОФИЯ, 2014

Съдържание

Глава 1

Определен интеграл и приложения

1.1 Основни свойства и пресмятане на определените интеграли

1.Теоретични бележки Нека функцията $f(x)$ е определена в затворения интервал $[a;b]$. Да изберем $n+1$ произволни точки $x_0,\ x_1,\ \dots, x_n \in [a;b]$, така че $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ и да означим с $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение 1. Съвкупноста $\tau = \{x_0,\ x_1,\ \dots x_n\}$ се нарича *разбиване* на интервала $[a;b]$, а числото $d = max\{\Delta x_k, 1 \leq k \leq n\}$ *диаметър на разбиването* τ. Очевидно d е равно най-голямото разстояние между две съседни делящи точки.

Нека $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ е произволна точка от k-тия интервал.

Определение 2. Сумата

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

се нарича *интегрална сума на Риман* за функцията $f(x)$ в интервала $[a;b]$.

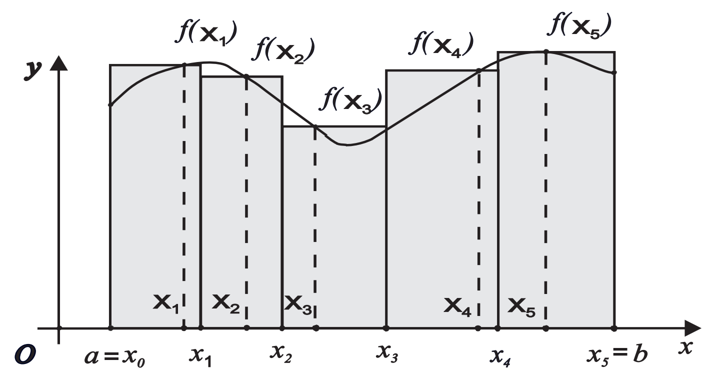
Определение 3. Функцията $f(x)$ се нарича *интегруема* в $[a;b]$, ако при всеки избор на делящите точки ξ_k и при условие, че $d \to 0$ когато $n \to \infty$, съществува границата

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I.$$

Числото I се нарича *определен интеграл* от $f(x)$ в граници от a до b и се означава по следния начин:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В случай, когато $f(x) \geq 0$ в $[a;b]$ и е непрекъсната лесно се вижда геометричния смисъл на определения интеграл и на интегралните суми на Риман (вж. черт.1).



черт. 1

В този случай имаме шест делящи точки x_k, $k = 0,1,2,3,4,5$, $x_0 = a, x_5 = b$, а $\xi_k \in [x_{k-1}\ ;\ x_k]$ са произволни и $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, i = 1,2,3,4,5$. Очевидно интегралната сума на Риман, която отговаря на това разбиване

$$\sigma_5 = \sum_{k=1}^{5} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + f(\xi_4)\Delta x_4 + f(\xi_5)\Delta x_5,$$

е равна на сумата от лицата на правоъгълниците с основи Δx_k и височини $f(\xi_k)$, а тази сума е равна на лицето на стъпаловидната фигура получена от обединението на тези правоъгълници. Може да се докаже, че ако $f(x)$ е непрекъсната за $x \in [a;b]$, то съществува границата на интегралните суми на Риман. Тази граница съгласно опр.1 е равна на $\int_a^b f(x)\,dx$. От друга страна е ясно (предполагаме $f(x) > 0$), че ако увеличим броя на делящите точки новополучената стъпаловидна фигура "покрива“ по-добре фигурата заградена от графиката на функцията $y = f(x)$, вертикалните прави с уравнения $x = a$, $x = b$ и оста Ox, (такава фигура наричаме за краткост "криволинеен трапец"). Следователно е разумно да приемем, че границата на интегралните суми, т. е. $\int_a^b f(x)\,dx$ дава лицето на този криволинеен трапец.

Пример 1. Да се пресметне $\int_0^1 x\,dx$ като граница на интегрални суми.

Решение. Тъй като функцията $f(x) = x$ е непрекъсната за $x \in [0;1]$, то тя е интегруема в този интервал. Нека изберем $x_0 = 0,\ x_k = \xi_k = \frac{k}{n},\ k = 1, 2, 3...$. Тогава очевидно $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ и

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{n}.\frac{1}{n} + \frac{2}{n}.\frac{1}{n} + ... + \frac{n}{n}.\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}(1+2+...+n) = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Тук използвахме формулата за сума на аритметична прогресия с разлика 1. Тогава

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

Направете чертеж! ■

Забележка 1. В средния курс по подобен начин се извежда и на формулата за лице на кръг. Намирате ли нещо общо с дефиницията на определен интеграл?

Забележка 2. Нека да отбележим, че определен интеграл съществува не само от непрекъснати функции, а и при доста по-слаби предположения за $f(x)$. Най-общо казано, необходимото и достатъчно условие за съществуване на определен риманов интеграл от дадена функция е множеството от точките на прекъсване на тази функция да има лебегова мярка нула [1]. В частност всички монотонни функции и всички функции, които имат крайно или изброимо много точки на прекъсване са интегруеми в смисъл на Риман.

[1]Казваме, че множеството $G \subset \mathbb{R}$ има лебегова мярка нула, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват изброимо много отворени или затворени интервали $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ такива, че $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ и освен това за всяко $n \in \mathbb{N}$ е изпълнено неравенството $\sum_{k=1}^{n} \mu(I_k) < \varepsilon$, където $\mu(I_k)$ означава дължината на интервала $I_k,\ k \in \mathbb{N}$.

Определеният риманов интеграл притежава следните свойства:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx;$

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0;$

3. $\displaystyle\int_a^b (f(x)\ \pm\ g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ \pm \int_a^b g(x)\,dx;$

4. $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx, \quad \lambda = const.;$

5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$ *за всяко* $c \in [a;b]$;

6. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ *ако* $f(x) \geq 0$ *за всяко* $x \in [a;b]$;

7. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ *ако* $f(x) \leq g(x)$ *за всяко* $x \in [a;b]$;

8. $\displaystyle|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ *за всяка интегруема в* $[a;b]$ *функция* $f(x)$.

Освен това за всяка интегруема функция са в сила следните теореми:

Теорема 1. Ако $f(x)$ е интегруема в $[a;b]$ и

$$\min_{x\in[a;b]}\{f(x)\} = m \ \text{ и } \ \max_{x\in[a;b]}\{f(x)\} = M, \quad \text{то}$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Теорема 2. *(Първа теорема за средните стойности)* Ако $f(x)$ е интегруема в $[a;b]$, то съществува точка $\mu \in [m;M]$, такава че

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

Следствие 1. Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a;b]$, то съществува точка $\xi \in [a;b]$, такава че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Забележка 3. Като използвате черт.1., дайте геометрична илюстрация на теореми 1, 2 и следствие 1.

Нека f е интегруема в $[a;b]$ и точката $x \in [a;b]$ е произволна. Тогава f е интегруема в интервала $[a;x]$ и за всяко $x \in [a;b]$ е дефинирана функцията

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \ t \in [a;\ x], \ a \le x \le b.$$

В случай, че f е непрекъсната и положителна функция, функцията $F(x)$ има проста геометрична интерпретация – това е лицето на криволинейния трапец, заграден от графиката на функцията $f(x)$, вертикалната права $x = a$ оста Ox и вертикалната права $t = x$ (направете чертеж!). Свойствата на функцията $F(x)$ се дават от следващите теореми.

Теорема 3. Ако $f(x)$ е интегруема в $[a;b]$, то $F(x)$ е непрекъсната в $[a;b]$.

Теорема 4. Функцията $F(x)$ е диференцируема във всяка точка $x_0 \in [a;b]$, в която $f(x)$ е непрекъсната и освен това е изпълнено равенството

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Следствие 2. Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a;b]$, то $F(x)$ е точна примивна на $f(x)$ в интервала $x \in [a;b]$

Забележка 4. Следствие 2 показва, че всяка непрекъсната функция в даден интервал притежава точна примитивна в този интервал, а следователно и безброй много точни примитивни, които се различават с константа.

Теорема 5. *(Формула на Нютон-Лайбниц)* Ако $f(x)$ е интегруема и непрекъсната в $[a;b]$ и $F(x)$ е една произволна примитивна на $f(x)$ в $[a;b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$ за всяко $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Това е най-важната теорема на интегралното смятане защото дава ефективна формула за пресмятане на определени интеграли и разкрива връзката между неоределен и определен интеграл. Ясно е, че за да пресметнем един определен интеграл трябва да решим съответния неопределен интеграл, т.е. да намерим една (коя и да е) примитивна на подинтегралната функция и да извадим от стойноста и в горната граница стойноста на същата примитивна в долната граница. Например

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2},$$

защото

$$F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

е една примитивна в $[0;1]$ за подинтегралната функция $f(x) = x$. Сравнете пресмятанията с тези, които направихме в пример 1!

Следващите две теореми са аналози на теоремите за интегриране по части и смяна на променливите при неопределения интеграл и са полезни при решаването на много задачи.

Теорема 6. *(Формула за интегриране по части при определените интеграли)* Нека $u(x)$ и $v(x)$ са непрекъснато диференцируеми функции в интервала $[a;b]$. Тогава

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Теорема 7. *(Теорема за смяна на променливите при определените интеграли)* Нека $f(x)$ е непрекъсната функция в $[a;b]$ и $x = \varphi(t)$ е непрекъснато диференцируема функция в интервала $[\alpha;\beta]$ и освен това са изпълнени условията :

$$1)\ \varphi([\alpha;\beta]) \subset [a;b];\ \ 2)\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b.$$

Тогава

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Забележка 5. Теорема 5 остава в сила и за функции, които имат най-много изброимо много точки на прекъсване. а теорема 6 – за функции, които имат производна в интервала, върху, който се интегрира, с изключение само на изброимо много точки от този интервал. Теорема 7 остава в сила и когато функцията $x = \varphi(t)$ е диференцируема в интервала $[\alpha;\beta]$ с иключение на най-много изброимо много точки от този интервал.

Забележка 6. Обърнете внимание, че при определения интеграл по принцип не необходимо функцията $x = \varphi(t)$ да е строго монотонна в $[\alpha;\beta]$, както и необходимо да се връщаме към старата променлива. Но задължително трябва да сменят границите a и b с новите граници α и β, иначе се получава грешен резултат! В частност обаче, ако $x = \varphi(t)$ е строго монотонна (т.е. удовлетворява и условията на теоремата за смяна на променливите при неопределения интеграл), то можем да постъпим и така: правим смяна на променливите в съответния неопределен интеграл, решаваме го, връщаме се към старата променлива, т.е. намираме една примитивна $F(x)$ на дадената функция $f(x)$ и пресмятаме разликата $F(b) - F(a)$, което е и търсената стойност на определения интеграл. В този случай не е необходимо, разбира се, да сменяваме границите на интегриране (вж. решените задачи по-долу).

2. Решени задачи. Препоръчваме на читателя да проследи внимателно решенията на всички задачи от тази точка, както и да ги пререшИ самостоятелно.

Задача 1. С помощта на формулата на Нютон-Лайбниц да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^2 (x^2+2)^{10}x\,dx$; г) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$;

д) $\displaystyle\int_0^4 |x^2-3x|\,dx$; е) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$, където

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1;0] \\ x^2, & x \in (0;1) \\ 3-x, & x \in [1;3] \end{cases} .$$

Решение.

а) Тъй като за $x \in [\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}]$ е изпълнено равенството

$$(\mathrm{tg}\ \ x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

то

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\ x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.4226\ .$$

б) Аналогично на а), но първо внасяме $\frac{1}{x}$ под диференциала. Имаме

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \int_1^e \ln^2 x\,d(\ln x) = \frac{(\ln x)^3}{3}\Big|_1^e = \frac{1}{3}\left[(\ln e)^3 - (\ln 1)^3\right] = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3};$$

в) Внасяме x под диференциала и прибавяме 2. Получаваме

$$\int_0^2 (x^2+2)^{10}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (x^2+2)^{10}\,d(x^2+2) = \frac{1}{2}.\frac{(x^2+2)^{11}}{11}\Big|_0^2 = \frac{1}{22}(6^{11}-2^{11}).$$

г) Отново внасяме x под диференциала, за сведем интеграла до табличен.

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+(x^2)^2}\,dx^2 = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0) = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Обърнете внимание, че заместихме $\operatorname{arctg} 1$ с $\pi/4$, а не с 45^0! Защо?

д) Тъй като $|x^2-3x| = 3x-x^2$, ако $x \in [0;3]$ и съответно x^2-3x, ако $x \in (3;4]$ (направете чертеж!), то

$$\int_0^4 |x^2-3x|\,dx = \int_0^3 3x-x^2\,dx + \int_3^4 x^2-3x\,dx =$$

$$\frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3 + \frac{x^3}{3}\Bigg|_3^4 - \frac{3x^2}{2}\Bigg|_3^4 =$$

$$\frac{3}{2}(9-0) - \frac{1}{3}(27-0) + \frac{1}{3}(64-27) - \frac{3}{2}(16-9) =$$

$$\frac{27}{2} - 9 + \frac{37}{3} - \frac{21}{2} = \frac{37}{3} - 6 = \frac{19}{3}.$$

е) В този случай подинтегралната функция има точки на прекъсване при $x = 0$ и $x = 1$. Съгласно теорема 5 и забележка 5 дадената функция има обобщена примитива в интервала $[-1;3]$ и теоремата на Нютон-Лайбниц може да се приложи за този интервал. Но по-лесно е това да се направи поотделно за всеки от интервалите $[-1;0]$, $(0;1)$ и $[1;3]$. Имаме

$$\int_{-1}^3 f(x)dx = \int_{-1}^0 (-1)dx + \int_0^1 x^2dx + \int_1^3 (3-x)dx =$$

$$-x\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{3}x^3\Bigg|_0^1 + 3x\Bigg|_1^3 - \frac{1}{2}x^2\Bigg|_1^3 = -1 + \frac{1}{3} + 6 - 4 = \frac{4}{3}.$$

Направете чертеж и обосновете геометрично получения резултат.

Задача 2. Като се използва формулата за интегриране по части при определения интеграл (и разбира се също и формулата на Нютон-Лайбниц) да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^e x^2\ln x\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx$; г) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx$;

д) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Решение.

а) Постъпваме както при решаване на съответния неопределен интеграл.

Имаме

$$\int_0^1 xe^{-x}\,dx = -\int_0^1 xe^{-x}\,d(-x) = -\int_0^1 x\,de^{-x} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx =$$

$$= -(1.e^{-1} - 0.e^0) - \int_0^1 e^{-x}\,d(-x) = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\frac{2}{e} + 1 \approx 0.264.$$

б) Внасяме x^2 под диференциала и интегрираме по части.

$$\int_1^e x^2.\ln x\,dx = \frac{1}{3}\int_1^e \ln x\,dx^3 = \frac{1}{3}x^3.\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3\,d(\ln x) =$$

$$= \frac{1}{3}(e^3\ln e - 1\ln 1) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}\int_1^e x^2\,dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}x^3\Big|_1^e = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - e) = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}e \approx 4.161.$$

в) В този случай внасяме под диференциала $\cos 2x$. Имаме

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,d(\sin 2x) = \frac{1}{2}x.\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\sin\pi - 0\sin 0) + \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{1}{4}(\cos\pi - \cos 0) = \frac{1}{4}(-2) = -\frac{1}{2}.$$

г) Тук директно интегрираме по части . Имаме

$$\int_0^{\sqrt{3}} \text{arctg } x\,dx = x.\text{arctg } x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} x\,d(\text{arctg } x) = \sqrt{3}.\,\text{arctg}\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \sqrt{3}.\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,d(1+x^2) = \sqrt{3}.\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\ln 4 =$$

$$= \sqrt{3}.\frac{\pi}{3} - \ln 2 \approx 1.814 - 0.693 = 1.121.$$

Забележете, че тук отново заместихме $\text{arctg}\sqrt{3}$ с $\dfrac{\pi}{3}$ а не с 60^0!

д) В интеграли от този вид се внася под диференциала „по-хубавата“ от двете функции, т. е., тази, която при внасяне под диференциала се променя по-малко. В случая това е функцията e^{2x}. По-нататък следваме същата идея, както при съответния неопределен интеграл – означаваме интеграла с някаква буква, например I, интегрираме два пъти по части и забелязваме, че се получава същия интеграл с коефициент пред него различен от единица. Имаме:

$$I = \int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 3x\,de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x\,\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}\,d\sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{2\pi}\sin 3\pi - e^0\sin 0\right) - \frac{3}{2}\int_0^{\pi} e^{2x}\cos 3x\,dx = 0 - \frac{3}{4}\int_0^{\pi}\cos 3x\,de^{2x} =$$

$$= -\frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x\,\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{4}\int_0^{\pi} e^{2x}\,d\cos 3x = \frac{3}{4}(e^{2\pi}+1) - \frac{9}{4}\int_0^{\pi} e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Но последният интеграл вдясно е равен точно на изходния. Тогава

$$I = \frac{3}{4}(e^{2\pi}+1) - \frac{9}{4}I, \text{ т.е. } I = \frac{3}{13}(e^{2\pi}+1) \approx 123.806. \ \blacksquare$$

Задача 3. С помощта на подходяща смяна на променливите да се пресметнат интегралите:

а) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{2\ln 2}\frac{1}{e^x-1}\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a>0$;

г) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}\,dx$; д) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos x}\,dx$.

Решение.

а) Тук за да се освободим от $\sqrt{x}$ е удобно да положим $\sqrt{x}=t$, откъдето $x=t^2,\ dx=2tdt$. По условие $a=1,\ b=4$. Следователно $\varphi(\alpha)=\alpha^2=1,\ \varphi(\beta)=\beta^2=4$ откъдето лесно намираме, че $\alpha=1,\ \beta=2$ (Защо не -1 и -2 ?). Следователно

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}\,dx = \int_1^2 \frac{2t}{(t+1)t^2}\,dx = 2\int_1^2 \frac{1}{(t+1)t}\,dx.$$

За да решим последния интеграл трябва да разложим подинтегралната функция на елементарни дроби (вж. гл. за неопр. интеграл). Имаме

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1},$$

откъдето следва, че $1 = A(t+1) + Bt$. Последното равенство е изпълнено за всяко t при $A = 1,\ B = -1$. Тогава получаваме

$$2\int_1^2 \frac{1}{(t+1)t}\,dx = 2\int_1^2 \frac{1}{t}\,dx + 2\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dx = 2\ln|t|\Big|_0^2 - 2\ln|t+1|\Big|_0^2 =$$

$$= 2(\ln 2 - \ln 1) - 2(\ln 3 - \ln 2) = 4\ln 2 - 2\ln 3 = 2\ln\frac{4}{3} \approx 0.575.$$

б) Тук полагаме $e^x = t$, откъдето $x = \ln t,\ dx = \frac{1}{t}dt$. Тъй като $a = \ln 2,\ b = 2\ln 2$, то $\ln\alpha = \ln 2,\ \ln\beta = 2\ln 2$ т.е. $\alpha = 2,\ \beta = 4$. Аналогично на а) получаваме

$$\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{e^x - 1}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{(t-1)t}\,dx = \int_2^4 \frac{1}{(t-1)}\,dx - \int_2^4 \frac{1}{t}\,dx = \ln|t-1|\Big|_2^4 - \ln|t|\Big|_2^4 =$$

$$= \ln 3 - \ln 1 - (\ln 4 - \ln 2) = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2} \approx 0,405;$$

в) Точно както при съответния неопределен интеграл (вж. предишната глава) полагаме $x = a\cos t$ (или $x = a\sin t$). Тогава

$$dx = -a\sin t,\ 0 = a\cos\alpha,\ a = a\cos\beta,$$

откъдето лесно намираме $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$. Следователно

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 t}(-a\sin t)\,dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}(-a\sin t)\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt - \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2} - \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi.a^2}{4} - 0 = \frac{\pi.a^2}{4}.$$

Обърнете внимание на резултата, който получихме! Начертайте графиката на подинтегралната функция и дайте геометрично тълкуване на отговора ($\pi.a^2/4$)! Заб. Този интеграл, както и предишните, може да се пресметне и по този начин : като се реши неопределения итнеграл, връщаме се към старата променлива, намираме една примиивна $F(x)$ на подинтегралната

функция $f(x)$ и пресмятаме $F(a) - F(0)$. Трябва да се получи същия резултат. Проверете!
г) В интеграли от този тип обикновено се прави смяната $\operatorname{tg} x/2 = t$, (ср. с предишната глава), откъдето

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

и съответно $\operatorname{tg} 0 = \alpha, \quad \operatorname{tg} \pi/4 = \beta$, т.е. $\alpha = 0$ и $\beta = 1$. Тогава

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+2t+1}\,dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{2}{1+t}\bigg|_0^1 = 1.$$

д) Тук, очевидно, подинтегралната функция $f(x) = 1/(2+\cos x)$ е непрекъсната за всяко реално x. Следователно тя притежава примитивна, дефинирана за всяко $x \in \mathbb{R}$ и в частност върху интервала $[0; 2\pi]$. Но да се намери тази директно примитивна с помощтта на субституцията, от предишната задача е по-трудно, защото функцията $t = \operatorname{tg} x/2$ има прекъсване при $x = \pi$. Затова можем да постъпим така: първо да забележим, че $f(-x) = f(x)$ и $f(x+2\pi) = f(x)$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Тогава, фигурата, заградена от абцисната ос за $x \in [0; 2\pi]$ и графиката на функцията е еднаква на фигурата, заградена от графиката и абцисната ос за $x \in [-2\pi; 0]$, защото втората фигура е получена от първата чрез транслация наляво на разстояние -2π. От друга страна, заради четността на $f(x)$, графиката и в интервала $[-\pi; 0]$ е огледален образ на графиката на същата тази функция в интервала $[0; \pi]$. Но това означава, че и лицата на фигурите, заградени от графиката на дадената функция за $x \in [-\pi; 0]$ и съответно за $x \in [0; \pi]$ са равни (постройте графиката !). И тъй като $f(x) > 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$, то интегралът, който трябва да се пресметне е числено равен на лицето на фигурата. Следователно е достатъчно да пресметнем $\int_0^\pi f(x)dx$ и да го умножим по две. Да положим $\operatorname{tg} x/2 = t$. Като използваме формулата (известна от средния курс)

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

получаваме

$$\frac{1}{2+\cos x} = \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{t^2+1}{t^2+3}.$$

Нека да отбележим, че ако се опитаме да сменим границите, както в предишната задача, получаваме $\alpha = \text{tg}\ 0 = 0$, но $\beta = \text{tg}\ \pi/2$, която стойност не съществува (защо?). Затова нека най-напред да решим съответния неопределен интеграл и след това да се върнем към старата променлива. Това тук е възможно, защото функцията $\varphi(t) = 2\,\text{arctg}\, t$ е строго монотонна. Нека означим с $F(x)$ една (коя и да е) примитивна на $f(x)$ за $x \in [0;\pi]$ и с $\Phi(t)$ – една примитива на подинтегралната фукция, която се получава след смяната на променливите в съответния неопределен интеграл, т.е.

$$\Phi(t) = 2\int \frac{t^2+1}{t^2+3}.\frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{1}{t^2+3}\,dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,d(\frac{t}{\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Тогава

$$F(x) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{arctg}\left(\frac{\text{tg}\ \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + C,$$

освен това $F(x)$ е непрекъсната в интервала $[0;\pi]$, като под $F(\pi)$ разбираме границата $\lim_{x\to\pi-0} F(x)$. Следователно търсената стойност на интеграла е

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 2\int_0^{\pi} f(x)dx = 2(\ F(\pi) - F(0)\ ) = (\ \lim_{\substack{x\to\pi\\ x<\pi}} F(x) - F(0)\ ) =$$

$$= 2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} + C - 0 - C\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}. \ \blacksquare$$

Задача 4. Да се покаже, че ако $f(x)$ е функция дефинирана и интегруема $[-a;a]$, то :

а) ако $f(x)$ е нечетна, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;

б) ако $f(x)$ е четна, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Решение.

а) От определението за нечетна функция следва, че $f(x) = -f(-x)$ за всяко $x \in [-a; a]$. От друга страна съгласно св. 5 имаме

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Сега да положим в първия интеграл $x = -t,\ dx = -dt$ и да отчетем факта, че стойноста на интеграла очевидно не зависи това, как сме означили променливата. Имаме

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,d(-t) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx =$$

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0;$$

б) Аналогично на а), като вземем предвид, че за всяка четна функция е излълнено $f(x) = f(-x),\ x \in [-a; a]$ и направим същата смяна на променливата. Направете това самостоятелно и дайте геометрично обяснение на тези равенства! ■

Задача 5. Нека $f(x)$ е непрекъсната функция, дефинирана в интервала $[0; a],\ a \in \mathbb{R},\ a = const$.

а) Докажете равенството $\displaystyle\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$;

б) Ако освен това $f(a-x) = f(x)$ за всяко $x \in [0; a]$, то е изпълнено равенството $\displaystyle\int_{0}^{a} x f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_{0}^{a} f(a-x)\,dx$;

в) Докажете, че за всяка непрекъсната функция $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ е изпълнено

$$\int_{0}^{\pi} x f(\sin x)\,dx = \pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx;$$

Решение.

а) В интеграла вляво да направим смяната $x = a - t$. Тогава $dx = -dt$ и при $x = a$ очевидно $t = 0$, и съответно при $x = 0$ $t = -a$. Получаваме

$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(a-t)\,d(-t) = -\int_{a}^{0} f(a-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(a-t)\,dt.$$

Дайте геометрично обяснение на този факт (направете чертеж!).

б) В интеграла стоящ вляво на равенството в условието на тази подточка да направим смяната $x = a - t$. Тогава имаме

$$\int_0^a xf(x)\,dx = \int_a^0 (a-t)f(a-t)\,d(-t) = \int_0^a (a-t)f(t)\,dt =$$

$$= a\int_0^a f(t)\,dt - \int_0^a tf(t)\,dt.$$

От тук, след като заменим вдясно t с x и прехвърлим вторият интеграл от лявата страна на равенството, получаваме

$$2\int_0^a xf(x)\,dx = a\int_0^a f(x)\,dx = a\int_0^a f(a-x)\,dx,$$

което е еквивалентно на равенството, което трябва да се докаже.
в) От подточка б) и свойствата на определения интеграл следва, че

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx.$$

Сега във втория итнеграл да направим смяната $x = \pi - t$. Получаваме

$$\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\pi - t))\,d(-t) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt,$$

от където следва желаното равенство (защо?). ■

Задача 6. Нека функцията $f(x)$ е непрекъсната и периодична с период T, т.е. за всяко $x \in \mathbb{R}$ е изпълнено равенството $f(x+T) = f(x)$. Да се докаже, че за всяко $a, b \in \mathbb{R}$ са изпълнени равенствата

$$\text{а)}\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\ ;\ \text{б)}\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Решение.
а) Да положим $x = t + T$.Тогава $dx = dt$ и при $x = a + T$ получаваме $t = a$, а при $x = b + T$ съответно $t = b$. Тогава

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx,$$

което и трябваше да се докаже.
б) От свойствата на определения интеграл и решението на т. а) следва

(защо?), че

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_T^{a+T} f(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx.$$

Нека да отбележим, че тези равенства остават в сила и при по-слабото предположение само за интегруемост върху интервала $[0, T]$ и периодичност на $f(x)$ (защо?). ■

Задача 7. Да се оценят итнтегралите

а) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos^2 x}\,dx$.

Решение.

а) Интегралът съществува, тъй като подинтегралната функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ е ограничена и непрекъсната в затворения интервал $[0, \pi/2]$ (тук сме положили $f(0) = 1$, защо?) . Освен това, с помощта на производни може да се докаже, че$f(x)$ намалява строго в същия този интервал (направете тона самостоятелно !). Но това означава, че е изпълнено неравенството

$$f(\pi/2) = \frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1 = f(0), \;\; x \in (0, \pi/2).$$

Тогава за интеграла получаваме оценката

$$1 = \frac{2}{\pi}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2},$$

т.е. даденият интеграл е строго по-голям от 1 и строго по-малък от $\pi/2$.

б) Тъй като за всяко x (а следователно и за $x \in [10; 18]$) е изпълнено неравенството $|\cos x| \le 1$, а също така и очевидното неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} < \frac{1}{\sqrt{x^4}} = \frac{1}{x^2}$$

то

$$\frac{|\cos x|}{\sqrt{1+x^4}} \le \frac{1}{x^2},$$

откъдето получаваме

$$\left|\int_{10}^{18} \frac{\cos x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx\right| \le \int_{10}^{18} \frac{|\cos x|}{\sqrt{1+x^4}}\,dx \le \int_{10}^{18} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big|_{10}^{18} = -(\frac{1}{18}-\frac{1}{10}) = \frac{8}{180} = \frac{2}{45};$$

в) От неравенството $0 \le \cos^2 x \le 1$ лесно се вижда, че

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{5+3} \le \frac{1}{5+3\cos^2 x} \le \frac{1}{5}$$

и следователно

$$\frac{\pi}{16} = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos^2 x}\,dx \le \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{10}$$

или

$$0,19634 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\cos^2 x}\,dx \le 0,31415.$$

Нека да отбележим, че това не са единствените възможни оценки за дадените интеграли.

■

Задачи за самостоятелно решаване.

Задача 1. Пресметнете като граница на интегрални суми

а) $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$; б) $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx$, където a и b са произволни реални числа.

Задача 2. Като използвате формулата на Нютон-Лайбниц пресметнете следните определени интеграли:

а) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin(x^2+\pi)\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$; д) $\displaystyle\int_0^2 |1-x|\,dx$; е) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^2\sqrt[5]{(5x^3+6)^4}\,dx$..

Задача 3. С помощта на формулата за интегриране по части, пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^{-2x}\,dx$; в) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\sin(\frac{x}{3})\,dx$; г) $\displaystyle\int_0^2 x^5 e^{x^2}\,dx$;

д) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x\,dx$; е) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\,dx$; ж) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/4} e^{-x}\cos 3x\,dx$.

Задача 4. Като използвате подходяща смяна на променливите, пресметнете интегралите:

а) $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)}\,dx$; б) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$; в) $\displaystyle\int_{2\ln 2}^{3\ln 2} \frac{e^x}{e^{2x}-4}\,dx$;

г) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{\sqrt{2x+3}}{1+\sqrt{2x+3}}\,dx$; д) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$;

ж) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2\sin^3 2x}{x^2+1}\,dx$.

Задачи 5. Оценете интегралите:
а) $\displaystyle I=\int_0^1 x^2(1-x^4)\,dx$; б) $\displaystyle I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Задача 6. Разни задачи.
а) Намерете производните на функциите

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ и } G(x)=\int_x^0 \frac{e^t-1}{t}\,dt;$$

б) Нека функцията $f:\Delta\to\mathbb{R}$ е непрекъсната в интервала Δ , а функциите φ и ϕ са диференцируеми в интервала Δ_1 и освен това за всяко $u\in\Delta_1$ е вярно, че $\varphi(u),\phi(u)\in\Delta$. Покажете, че функцията Φ, дефинирана чрез равенството

$$\Phi(u)=\int_{\varphi(u)}^{\phi(u)} f(t)\,dt$$

е диференцируема в Δ_1 и пресметнете производната и.
в) Намерете производните (там където съществуват) на функциите

$$F(u)=\int_1^{u^3} \frac{1}{\ln^2 t}\,dt,\ G(u)=\int_{\sin u}^{\cos u} \frac{\cos t}{t}\,dx \text{ и } H(u)=\int_{\sqrt{u}}^{e^{u^2}} \frac{e^t}{t}\,dx.$$

г) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{\sqrt{2x+3}}{1+\sqrt{2x+3}}\,dx$; д) $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{(1+\cos x)^2}\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}}\,dx$;
ж) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x^2\sin^3 2x}{x^2+1}\,dx$.

Отговори и упътвания

Зад.1а) *Упътв.* Изберете отново $\Delta x_k=\frac{1}{n},\ x_k=\frac{k}{n},\ k=0,1,2,...,n$ и $\xi_k=\frac{k}{n}$. Тогава $\sigma_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}$. Приложете формулата за сума на геометрична прогресия и направете граничен преход при $n\to\infty$. *Отг.* $e-1$.

б) *Упътв.* Най напред пресметнете $\displaystyle\int_0^a x^3\,dx$.За тази цел като разделете интервала на n равни части, т.е. $x_k = \frac{ka}{n}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$ и освен това за $\xi_k, k = 1,2,\ldots,n$ избирате десния край на всеки интервал, ако $a > 0$ и левия , ако $a < 0$. За интегралната сума се получава

$$\sigma_n = \frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{ak}{n}\right)^3 = a^4\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4} = a^4\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{a^4}{4},$$

като за пресмятане на сумата в числителя се използва известната формула за сумата от кубовете на първите n естествени числа и която може да бъде намерена в справочници за кандидатстуденти и на др. места. За да пресметнете $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx$ използвайте, че $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx = \int_0^b x^3\,dx - \int_0^a x^3\,dx$. *Отг.* $\frac{b^4-a^4}{4}$.

Зад. 2 а) $e - \sqrt{e} \approx 1,07$; б) $2(\sqrt{2}-1) \approx 0,83$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{\pi^2}{18} \approx 0,55$; д) *Упътв.* Направете чертеж и разгледайте два случая $0 \le x \le 1$ и $1 < x \le 2$! *Отг.*1; е) $\frac{1}{27}(46^{\frac{9}{5}} - 1) \approx 36,4$.

Зад. 3 а) $\frac{1}{4}(e^2-1) \approx 2,1$; б) $\frac{3}{4} - \frac{5}{4}e^{-2}) \approx 0,615$; в) *Упътв.* Интегрираме два пъти последователно по части. *Отг.* $-\frac{3\pi^2}{16}\cos\frac{\pi}{12} + \frac{9\pi}{2}\sin\frac{\pi}{12} + 54\cos\frac{\pi}{12} - 54 \approx -1,787 + 3,659 + 52,160 - 54 \approx 0,032$; г) *Упътв.* Внесете x под диференциала и положете $x^2 = u$, като не забравите да смените и границите. *Отг.* $5e^4 - 1 \approx 272$; д) $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \approx 0,127$; е) *Упътв.* Внесете $\frac{1}{x^2}$ под диференциала. *Отг.* $\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 5 + 2(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}) \approx 0,53$; ж) *Упътв.* Постъпваме както в задача 2 д) от решените задачи – внасяме под диференциала e^{-x} и интегрираме два пъти последователво по части. *Отг.* $\frac{1}{5}\sqrt{2}\,e^{-\pi/4} - e^{\pi/10} \approx -1.240149$.

Зад. 4 а) *Упътв.* Положете $\sqrt{x} = t$. *Отг.* $7 - 2\ln 2 \approx 5,61$; б) *Упътв.* Положете $x = \cos t$ или $x = \sin t$. След това решете интеграла $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin t}\,dt$ *Отг.* $\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{12} \approx 0,768$; в) *Упътв.* Положете $e^x = t$. *Отг.* $\frac{1}{4}\ln\frac{9}{5} \approx 0,147$; г) *Упътв.* Положете $2x + 3 = t^2$. *Отг.* $2 + \ln 2 \approx 2,69$; д) *Упътв.* Положете $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. *Отг.* $\sqrt{3}$; е) *Упътв.* Положете $\sqrt{x^2+x+2} = x + t$, (вж. гл.8) *Отг.* $\frac{15}{8} = 1,875$; ж) Подинтегралната функция е нечетна. *Отг.* 0.

Зад. 5 а) *Упътв.* Оценете подинтегралната функция в $[0;1]$. *Отг.* $0 < I \le \frac{16}{729} \approx 0,022$; б) *Упътв.* Очевидно при $x \in [\frac{\pi}{2};\pi]$, $0 < \sin x < \frac{2}{\pi}$, откъдето $0 < I < 1$. Може ли да се направи в двата интеграла по-точна оценка отдолу?

1.2 Геометрични приложения на определения интеграл

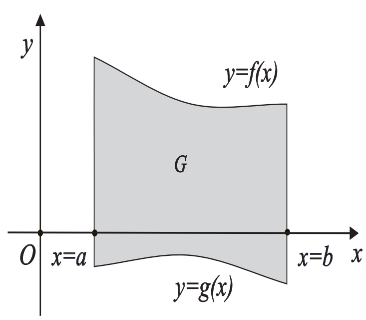
Тук се разглеждат най-важните геометрични приложения на определения интеграл като пресмятане на лица на фигури, дължини на дъги от криви линии и обеми на тела.

Лице на криволинеен трапец Фигурата G, заградена от графиките на функциите $y = f(x),\ y = g(x)$ и правите $x = a,\ x = b$ и $f(x) \geq g(x)$ за $x \in [a; b]$ се нарича *криволинеен трапец относно оста Ox*. По друг начин това може да се запише и така:

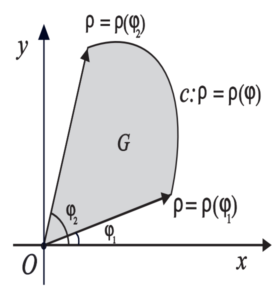
$$G = \{M(x, y)|\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq f(x)\}\,.$$

Това означава, че множеството G се състои от онези точки в равнината, чиито координати удовлетворяват дадените неравенства (спрямо някаква фиксирана декартова координатна система в същата равнина). Такива множества в равнината се наричат още *елементарни области относно оста Ox* Лицето на криволинейния трапец (елементарната област) G, (вж. черт.1.а), се дава с формулата

$$S(G) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx. \tag{1}$$



черт. 1.а



черт. 1.б

Ако функцията $y = f(x)$ е зададена параметрично с уравнения $c : x = x(t),\ y = y(t), x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$ и $y(t) \geq 0$ за $t \in [\alpha; \beta]$, то лицето на фигурата F, заградена от графиката и, правите с уравнения $x = a,\ x = b$ и оста Ox се дава с формулата

$$S(F) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\, dt. \tag{1'}$$

Забележка 1. Аналогично ако G е заградена от кривите с уравнение $x = \phi(y),\ x = \psi(y)$, правите $y = c,\ y = d$ и освен това $\phi(y) \geq \psi(y)$ при $x \in [c; d]$, то лицето на G може да бъде изчислено по формулата

$$S(G) = \int_c^d [\phi(y) - \psi(y)]\, dy. \tag{2}$$

Такава фигура се нарича криволинеен трапец относно оста Oy. Направете чертеж!

Лице на криволинеен сектор. Нека кривата c е зададена с уравнение в полярни координати $c : \rho = \rho(\varphi)$, където ρ е радиус-векторът на точка от кривата а φ е ъгълът, който сключва радиус-векторът с положителната посока на Ox (полярен ъгъл). Тогава лицето на *криволинейния сектор* G заключен между лъчите $\rho = \rho(\varphi_1),\ \rho = \rho(\varphi_2),\ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ и кривата c, (вж. черт.1.б), се дава с формулата

$$S(G) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi. \tag{3}$$

Нека да отбележим, че горната формула допуска обобщение за фигури, заградени от две криви зададени с техните полярни уравнения, а именно, ако G се състои от онези точки от равнината, чиито полярни координати удовлетворяват неравенствата $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, то лицето и се дава с формулата

$$S(G) = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))\, d\varphi. \tag{4}$$

Направете чертеж!

Дължина на дъга от крива. Нека кривата c е зададена с уравнението $y = f(x),\ a \leq x \leq b$, където $f(x)$ е непрекъснато-диференцируема функция, евентуално с изключение на краен брой точки, дефинирана в интервала $[a; b]$. Тогава дължината на дъгата от кривата се дава с формулата

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx. \tag{5}$$

Тъй като не всяка крива може да бъде зададена удобно чрез уравнение от вида $y = f(x)$, то по-често се използва параметрично задаване на крива, което е по- общо и технически по-удобно. Всяка гладка крива в пространството може да бъде зададена параметрично чрез три непрекъснато-диференцируеми функции

$$c : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta.$$

За дължината на дъгата е в сила формулата

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt. \tag{6}$$

Ако кривата лежи в някоя от координатните равнини, например в Oxy, получаваме формулата

$$L(c) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt. \tag{6'}$$

Нека да отбележим, че формула (5) е частен случай от (6′) при $x(t) = t,\ y(t) = f(t)$. А ако за параметър е избран полярният ъгъл т.е. равнинната крива c е зададена с полярното си уравнение $c : \rho = \rho(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$, получаваме формулата

$$L(c) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi. \tag{6''}$$

Обем на тяло. Нека тялото T е такова, че за всяко $x \in [a; b]$ можем да пресметнем лицето на напречното сечение на $T,\ S = S(x),\ x \in [a; b]$. Тогава обемът на тялото T се дава с формулата (черт. 2.а)

$$V(T) = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{7}$$

Като частен случай от формула (7) се получава формулата за обем на ротационно тяло, получено от завъртането на кривата $y = f(x),\ a \le x \le b$ около оста Ox (черт 2.б) тъй като в този случай $S(x) = \pi.f^2(x)$ (Защо?), то

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \tag{8}$$

Лице на ротационна повърхнина. Лицето на ротационната повърхнина получена при завъртането на кривата $y = f(x),\ a \leq x \leq b$ около оста Ox може да бъде пресметната по формулата

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{9}$$

(например лицето на повърхнината от черт. 2.б), а в случай на параметрично зададена крива съответно по формулата

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt, \tag{9'}$$

където $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b.$
Опитайте да получите формули за пресмятане на лица и обеми в случай, че кривите са завъртяни около Oy.

Решени задачи.

Задача 1. Намерете лицето на фигурата заградена от кривите с уравнения :
а) $y = 2x,\ y = x^2$; б) $y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{x},\ x = 4$; в) $y = x^3,\ y = 1,\ y = 4,\ x = 0$; г) $y = x(x+1)(x-2)$, $y = 2x - 4$; д) $x = |y^2 - 4|$, $x = 5$.

Решение. Преди да пристъпим към решението на задачата нека да споменем някои общи принципи, които трябва да се спазват при решаването на подобни задачи. Тъй като обикновено границите не са дадени наготово, най-напред трябва да ги намерим. Това става като решим системите получени от уравненията на всеки две от дадените криви. За да се избегнат излишни пресмятания обаче е по-удобно да се направи чертеж, който освен това помага да се съобрази графиката на коя функция е "по-високо"когато x се изменя в получените граници и при заместването във формула (1) нея да поставим на мястото на $f(x)$. Когато е трудно да направим чертеж това трябва да се съобрази по друг начин, който е пояснен по-долу чрез пример.
а) Нека означим фигурата с F. В този случай трябва да намерим пресечните точки на кривите $y = 2x$ и $y = x^2$. След приравняване получаваме $x^2 = 2x$ или $x^2 - 2x = 0$, откъдето лесно намираме $x = 0$ или $x = 2$. Следователно кривите се пресичат в точки $O(0;0)$ и $B(2;4)$. От чертежа (черт. 3.а) е ясно, че $2x > x^2$ при $x \in (0;2)$. Същата информация за разположението на кривите в интервала $[0;2]$ можем да получим, като съобразим, че те нямат друга пресечна точка в този интервал и тъй като са непрекъснати, то едната от двете криви е разположена изцяло над другата. Следователно е достатъчно да проверим само за една произволна вътрешна точка от

интервала коя функция приема по-голяма стойност в тази точка. Тук е удобно да се замести с $x = 1 \in [0; 2]$. Тъй като $2.1 = 2 > 1^2 = 1$, то графиката на функцията $y = 2x$ е над графиката на функцията $y = x^2$ за всяко $x \in [0; 2]$ (т.е. същото) и следователно

$$S(F) = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Лесно се вижда, че с подобни разсъждения винаги може да се установи коя от двете графики е "по-високо"дори и без чертеж. Намирането на пресечните точки на кривите дадени в условието обаче е винаги задължително!;
б) В случая едната граница $x = 4$ е дадена. За да намерим другата трябва да намерим пресечните точки на кривите $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{1}{x}$. За тази цел решаваме системата

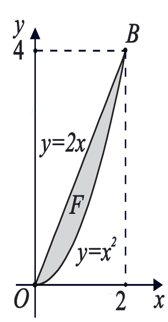
$$\left|\begin{array}{lcl} y &=& \sqrt{x} \\ y &=& \dfrac{1}{x} \end{array}\right. ,$$

откъдето последователно намираме $1/x = \sqrt{x},\ 1 = x^3$ или $x = 1$. Тъй като при $1 \le x \le 4$ очевидно (черт. 3.б) $1/x \le \sqrt{x}$. Ако означим в този случай фигурата с D, то

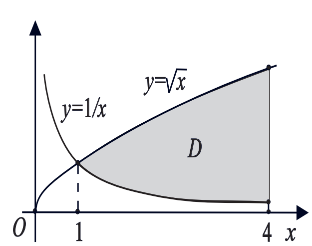
$$S(D) = \int_1^4 (\sqrt{x} - \frac{1}{x})\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 - \ln|x|\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) - \ln 4 = \frac{14}{3} - \ln 4 \approx 3,28.$$

в) Тук е по-лесно да решим задачата като интегрираме относно y, защото областта очевидно е елементарна относно ординатната ос (черт. 3.в). Тъй като $0 \le y \le 4$, а от условието намираме $x = \sqrt[3]{y}$ то като приложим формула (2), (тук отново фигурата е означена с F), получаваме

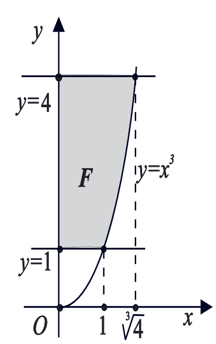
$$S(F) = \int_1^4 \sqrt[3]{y}\,dy = \int_1^4 y^{\frac{1}{3}}\,dy = \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\Big|_1^4 = \frac{3}{4}\sqrt[3]{y^4}\Big|_1^4 = \frac{3}{4}(\sqrt[3]{4^4} - \sqrt[3]{1^4}) \approx 4,01.$$



черт. 3.а



черт. 3.б



черт. 3.в

г) Най-напред да намерим пресечните точки на двете криви. Имаме

$$x(x+1)(x-2) = 2(x-2), \text{ откъдето намираме } x_1 = -2,\ x_2 = 1 \text{ и } x_3 = 2.$$

Това означава, че двете криви определят две елементарни области G_1 и G_2, определени с неравенствата

$$G_1 = \{(x,y) : -2 \le x \le -1,\ 2x-4 \le x(x+1)(x-2)\} \text{ и}$$

$$G_2 = \{(x,y) : -1 \le x \le 2,\ x(x+1)(x-2) \le 2x-4\}.$$

Това следва от факта, че в G_1 графиката на функцията $g(x) = 2x-4$ е „под“ графиката на $f(x) = x(x+1)(x-2)$. Наистина, като заместим с $x = 0 \in (-2;1)$ получаваме, че $g(0) = -4 < f(0) = 0$. Аналогично се установява и, че $f(x) < g(x)$ при $x \in (1;2)$, защото $f(3/2) = -15/8 < g(3/2) = -1$. Опитайте да направите чертеж (т.е. да построите графиката на линейната функция $g(x) = 2x-4$ и кубичната функция $f(x) = x(x+1)(x-2)$)! Ако означим с $G = G_1 \cup G_2$, то $S(G) = S(G_1) + S(G_{2)}$ (защо?) и

$$S(G) = \int_{-2}^{1} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{1}^{2} (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$\int_{-2}^{1} (x^3 - x^2 - 4x + 4)\,dx + \int_{1}^{2} -x^3 + x^2 + 4x - 4\,dx =$$

$$\frac{1}{4}x^4 \Big|_{-2}^{1} - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-2}^{1} - \frac{4}{2}x^2 \Big|_{-2}^{1} + 4x \Big|_{-2}^{1} - \frac{1}{4}x^4 \Big|_{1}^{2} + \frac{1}{3}x^3 \Big|_{1}^{2} + \frac{4}{2}x^2 \Big|_{1}^{2} - 4x \Big|_{1}^{2} =$$

$$\frac{-15}{4} - 3 + 6 + 12 - \frac{15}{4} + \frac{7}{3} + 6 - 4 = \frac{-15}{2} + \frac{7}{3} + 17 = 11\frac{5}{6}.$$

д) Факта, че променливата x се среща в уравненията на контурите на областта само на първа степен, ни подсеща, че обастта е криволинеен трапец относно оординатната ос (защо?). Най- напред трябва да начертаем параболата с уравнение $x = y^2 - 4$, след което графиката на функцията $y = |x^2 - 4|$ и да я пресечем с вертикалната права с уравнение $g : x = 5$. ■

Задача 2. Намерете лицето на фигурата Φ заградена от параметрично зададената крива $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0,\ 0 \le t \le 2\pi$ и оста Ox. Тази крива се нарича циклоида и представлява траекторията на една фиксирана точка от окръжност, която се търкаля без хлъзгане по оста Ox, (черт. 4.а).

Решение. Съгласно формула $(1')$ имаме

$$S(\Phi)=\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,dt=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(t-\sin t)'\,dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=$$

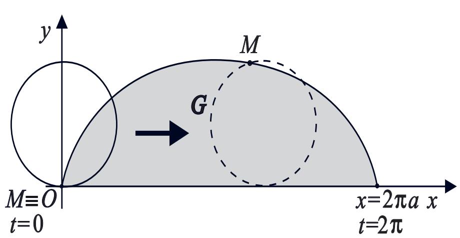
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=3\pi a^2.$$

Направете подробно всички необходими пресмятания! ■

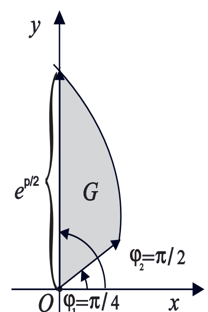
Задача 3. Намерете лицето на криволинейния сектор G заграден от спиралата с уравнение $\rho=e^{\varphi}$ и радиус-векторите, които се получават при $\varphi=\frac{\pi}{4}$ и $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (черт. 4. б.)

Решение. Съгласно (3) имаме

$$S(G)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}e^{2\varphi}\,d\varphi=\frac{1}{4}e^{2\varphi}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}(e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}})\approx 18,33 \;■$$



черт. 4.а



черт. 4.б

Задача 4. Намерете дължината на дъгата от кривата с уравнение а) $y^2=x^3,\ y>0,\ 0\le x\le 2$; б) $y=\ln(\sin x),\ \frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}$.
Направете самостоятелно чертеж!

Решение. а) Дължината намираме по формула (5). За тази цел най-напред трябва да намерим y'. Като диференцираме двете страни на равенството $y^2=x^3$, получаваме $2yy'=3x^2$, откъдето $y'=\frac{3x^2}{2y}$, и следователно $y'^2=\frac{9x^4}{4x^3}=\frac{9}{4}x$. Тогава

$$L=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{9x+4}\,dx=\frac{1}{18}\int_0^2\sqrt{9x+4}\,d(9x+4)=$$

$$=\tfrac{1}{27}(9x+4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\tfrac{1}{27}(22^{\frac{3}{2}}-4^{\frac{3}{2}})\approx\tfrac{1}{27}(103,2-8)\approx 3,53.$$

б) Аналогично на а) получаваме

$$y' = \frac{\cos x}{\sin x} \quad ; L = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}\, dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\, dx =$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\ln 3 \approx 0,55. \ \blacksquare$$

Задача 5. Намерете дължината на дъгата от параметрично зададените криви:
а) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ a > 0;$
б) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ 0 \le t \le 2\pi,\ a, b > 0.$

Решение. а) Кривата с това уравнение се нарича астроида (черт.5.а.). Трябва да намерим дължината на дъгата от тази част от кривата, която лежи в първи квадрант. В този случай трябва да използваме формула (6). Най-напред намираме

$$x'(t) = 3a\cos^2 t(-\sin t),\ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

и изчисляваме

$$\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t} =$$
$$= 3a|\sin t\cos t| = 3a\sin t\cos t,\ t \in [0; \tfrac{\pi}{2}].$$

За дължината на дъгата получаваме

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t\, dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, d(\sin t) = \frac{3}{2}a\sin^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}a.$$

Обърнете внимание, че можем да намерим дължината на цялата крива, тъй като тя е симетрично разположена относно началото на координатната система;
б) Пространствената линия, зададена с това уравнение се нарича проста винтова линия и представлява траекторията на точка, която се издига с постоянна скорост b по оста Oz, оставайки върху повърхноста на цилиндър с радиус a (черт. 5.б.). Тъй като

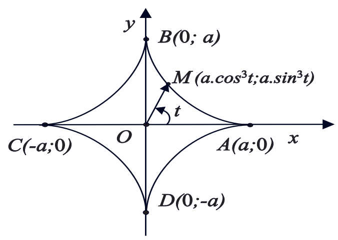
$$x'(t) = -a\sin t,\ y'(t) = a\cos t,\ z'(t) = b,$$

то

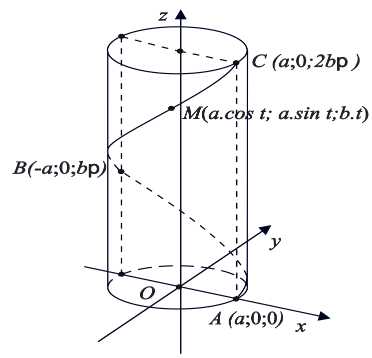
$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Тогава съгласно (6) имаме

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}.t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}. \ \blacksquare$$



черт. 5.а



черт. 5.б

Задача 6. Намерете обема на тялото заградено от повърхнините с уравнения $x + y + z = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x = 5.$

Решение. Тъй като всички повърхнини, които заграждат тялото са равнини и три от тях са в частно положение (черт. 6.а.), то лесно можем да съобразим, че тялото представлява триъгълна пирамида с връх в началото на координатната система и да намерим лицето на едно напречно сечение а оттам по формула (7) и обема. При всяко фиксирано $x,\ 0 \le x \le 5$ имаме

$$S(x) = \frac{x.x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

и значи

$$V = \int_0^5 S(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^5 x^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^5 = 20\frac{5}{6}\ \textit{куб. ед.}\ \blacksquare$$

Задача 7. Намерете обема на ротационното тяло получено при завъртане на кривата $y = \sin x$ около $Ox, 0 \le x \le \pi$, (черт. 6.б).

Решение. Съглано формула (8) получаваме

$$V = \pi\int_0^\pi y^2(x)\,dx = \pi\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos(2x))\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi dx - \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\,dx = \frac{\pi^2}{2} \approx 4.93\ \textit{куб. ед.}\ \blacksquare$$

Задача 8. Намерете обема на ротационните тела получено при завъртане на кривата $y = x^2$
а) около $Ox,\ 0 \le x \le 2$ (черт. 6.в.); б) около $Oy,\ 0 \le x \le 2$.

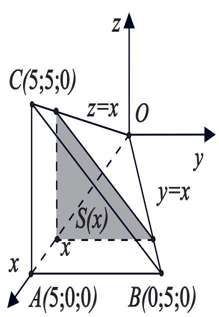
Решение. а) Съгласно формула (8) получаваме

$$V = \pi\int_0^2 y^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 x^4\,dx = \frac{\pi}{5}x^5\bigg|_0^2 = \frac{32\pi}{5} \approx 20.1\ \textit{куб. ед.};$$

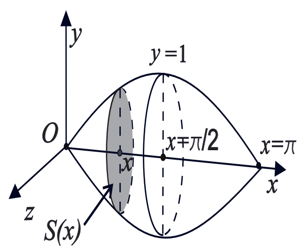
б) Аналогично на а) имаме

$$V = \pi\int_0^2 x^2(y)\,dy = \pi\int_0^4 y\,dy = \frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^4 = \frac{16\pi}{2} \approx 25.13 \text{ куб. ед.}$$

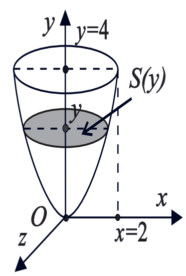
Направете самостоятелно чертеж! ■



черт. 6.а



черт. 6.б



черт. 6.в

Задача 9. Намерете лицето на ротационната повърхнина получена при завъртане на кривата $y = x^3$ около Ox, $0 \le x \le 2$. Направете самостоятелно чертеж!

Решение. Съглано формула (8) получаваме

$$S = 2\pi\int_0^2 y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx = \frac{2\pi}{4}\int_0^2 4x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{18}\int_0^2 (1+9x^4)^{\frac{1}{2}}\,d(9x^4+1) =$$

$$= \frac{\pi}{18}.\frac{2}{3}(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{27}(145^{\frac{3}{2}}-1) \approx 203.04 \text{ кв. ед.} \ ■$$

Задача 10. Намерете лицето на ротационната повърхнина получена при
завъртане на циклоидата $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi, a > 0$, (вж.зад. 2).

Решение. Съглано формула (8') получаваме

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -16a\pi^2\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\,d(\cos\frac{t}{2}) = -16a\pi^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})\,d(\cos\frac{t}{2}) = \frac{64}{3}\pi.a^2.$$

Направете самостоятелно всички необходими пресмятания! ■

Задачи за самостоятелно решаване.

Задача 1. Намерете лицето на фигурите заградени от кривите с уравнения, като предварително ноправите чертежи: а) $y = -x^2,\ x+y+2 = 0$; б) $y = \frac{16}{x^2},\ y = 17-x^2,\ x > 0$; в) $xy = 12,\ x+y = 8$; г) $y = \operatorname{arctg}\, x,\ y = 2,\ x = 0,\ x = 2$; д) $y^2 + 8x = 16,\ y^2 - 24x = 48$; е) $y = \frac{1}{1+x^2}$,
$y = \frac{x^2}{2}$.

Задача 2. Намерете лицето на фигурите заградени от оста Ox и параметрично зададените криви:
а) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le x \le a$ (астроида); б) $x = a\cos t,\ y = a\sin t$, $0 \le x \le a$ (елипса); в) $x = e^t,\ y = t^2,\ e \le x \le 2e$ (изключете параметъра t и ще получите $y = \ln^2 x$).
Направете чертеж !

Задача 3. Намерете лицето на криволинейните сектори заградени от кривите зададени с полярното си уравнение:
а) $\rho = a\cos\varphi,\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3},\ a > 0$; б) $\rho = \sin^2\frac{\varphi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$; в) $\rho = \varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$; г) $\rho = \sin 3\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Задача 4. Намерете дължината на дъгата от кривите с уравнения:
а) $y = \frac{x^2}{2},\ 0 \le x \le 1$; б) $y = 1 - \ln(\cos x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$; в) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2},\ 1 \le x \le 2$;
г) $y = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x - 1),\ 1 \le x \le 2$; д) $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin(\sqrt{x}),\ \frac{1}{4} \le x \le 1$.

Задача 5. Намерете дължината на дъгата от параметрично зададените криви с уравнения:
а) $x = \frac{t^3}{3} - t,\ y = t^2 + 2,\ 0 \le t \le 3$; б) $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ 0 \le t \le \pi$;
в) $x = 9(t - \sin t),\ y = 9(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi$; г) $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = \frac{t^2}{2}$,
$0 \le t \le 2\pi$.
За подусловие б) и в) направете чертеж.

Задача 6. Нека $x = \rho(\varphi)\cos\varphi,\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$ е уравнението на крива, като за параметър е избран полярният ъгъл φ. Изведете формулата за дължина на дъга от крива зададена в полярни координати и като използвате получената формула намерете дължината на дъгата от кривата $\rho = e^\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$.

Задача 7. Като използвате формула (6) от теоретичните бележки намерете обемите на телата заградени от повърхнините с уравнения:
а) $z = y^2,\ y = 1,\ x = 0, x = 1$; б) $x = y^2, z = x,\ z = 0,\ x = 3$.

Задача 8. Намерете обемите на ротационните тела, получени от завъртането на фигурите заградени от кривите:

а) $y^2 = 4x,\ y = 0,\ 2 \le x \le 4$ около Ox; б) $y = \sqrt{x}e^x,\ y = 0,\ 0 \le x \le 1$ около Ox;
в) $y = x^2,\ x = y^2$ около Ox; г) $y = 2x - x^2,\ y = 0$ около Ox; д) $y = \operatorname{tg}\ x,\ y = 0,$
$0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ около Ox; е) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$ около Ox и Oy; ж) $x^2 = 8y$, $y = \frac{64}{x^2+16}$, около Oy.

Задача 9. Намерете лицето на ротационните повърхнини, получени от завъртането около Ox на линиите:
а) $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$; б) $y = e^x,\ 0 \le x \le \ln 2$; в) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2},\ a > 0$; г) $x = e^t \cos t,\ y = e^t \sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Отговори и упътвания

Зад 1. а) $S = 4.5$ кв.ед.; б) *Упътв.*$S = 18$ кв.ед.; в) $S = 16 - 12\ln 3 \approx 2.82$ кв.ед.; г) $S = 2 - \operatorname{arctg}\ 1 + \frac{1}{2}\ln 2 \approx 2.59$ кв.ед.; д) *Упътв.* Напишете уравненията във вида $x = 2 - \frac{y^2}{8},\ x = \frac{y^2}{24} - 2$. Те задават две параболи с ос Oy. Намерете пресечните им точки и интегрирайте относно y. *Отг.* $S = 32\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 26.12$ кв.ед.; е) $S = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \approx 1.24$ кв.ед.

Зад 2. а) *Упътв.* При $x \in [0; a]$ очевидно $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$ и следователно $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx = \frac{3}{8}\pi a^2$. (вж. зад 2.); б) $S = \frac{\pi}{2}ab$; в) $S = e - 2 \approx 0.72$ кв.ед.

Зад 3. а) *Упътв.* Прилагаме директно формула (3). *Отг.* $S = \frac{\pi a^2}{24}$; б) *Упътв.* Прилагаме формула (3) и преработваме подинтегралната функция. *Отг.* $S = \frac{3}{4}\pi$; в) $S = 4\pi^3$; г) $S = \frac{\pi}{12}$.

Зад 4. а) *Упътв.* Имаме $L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$. След интегриране по части и като използваме, че $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ получаваме $L = \sqrt{2} - L + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$. *Отг.* $L \approx 1.15$ лин.ед.; б) $L = \ln 2 + \sqrt{3} \approx 1.32$ лин.ед.; в) *Упътв.* Преработете внимателнно подинтегралната функция и ще получите $L = \frac{1}{2}\int_1^2 (x + \frac{1}{x})\,dx$. *Отг.* $L = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \ln 2) \approx 1.1$ лин.ед.; г) *Упътв.* Аналогично на в), след преработване на израза $\sqrt{1 + y'^2}$ се получава $L = \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$. Сега положете $e^x = t$, като не забравите да смените границите на интегриране. *Отг.* $L = \ln(e^2+1) - 1 \approx 1.13$ лин.ед; д) *Упътв.* Отново чрез внимателно преработване на $\sqrt{1+y'^2}$ получаваме $L = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 1$.

Зад 5. а) $L = 12$; б) $L = \sqrt{2}(e^\pi - 1) \approx 31.31$; в) $L = 72$; г) *Упътв.* Тъй като кривата е пространствена прилагаме формулата $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt =$
$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt$. Сега вж. зад 4. а). *Отг.* $L = \frac{1}{2}[2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2})] \approx 21.26$.

Зад 6. *Упътв.* Преработете израза $\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}$ и приложете формула (5) от теоретичната част. *Отг.*$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi$, респ.

при $\rho = e^{\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi]$ получаваме $L = \sqrt{2}(e^{2\pi} - 1) \approx 755.89$.

Зад 7. а) *Упътв.* Очевидно при всяко фиксирано $y \in [0; 1]$ напречното сечение на тялото е правоъгълник с основа 1 и височина y^2, откъдето $S(y) = y^2$ и $V = \int_0^1 y^2\, dy = \frac{1}{3}$ куб.ед. Решете задачата по друг начин!; б) *Упътв.* Тук $S(x) = 2\sqrt{x}.x = 2x^{\frac{3}{2}},\ 0 \le x \le 3$. *Отг.* $V = \frac{36}{5}\sqrt{3} \approx 12.47$ куб.ед.

Зад 8. а) $V = 32\pi \approx 100.5$; б) $V = \frac{\pi}{4}(e^2 - 1) \approx 5.02$; в) *Упътв.* Представете тялото като разлика на две тела, тези които се получават при завъртането на кривите $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ около Ox при $x \in [0; 1]$. Тогава търсеният обем е равен на разлика от обемите на двете тела. *Отг.* $V = \frac{3}{10}\pi \approx 0.94$; г) $V = \frac{16}{15}\pi$; д) $V = \pi(1 - \frac{\pi}{4}) \approx 0.67$; е) *Упътв.* За да получим обема на тялото получено при завъртане около Ox решаваме уравнението на елипсата относно y^2. Имаме $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Сега прилагаме формулата за обем на ротационно тяло. Аналогично за намиране обема при завъртане около Oy решаваме относно x^2 и отново прилагаме същата формула, само че в този случай интегрираме по y в граници от $-b$ до b. *Отг.* $V_x = \frac{4}{3}\pi b^2 a,\ V_y = \frac{4}{3}\pi a b^2$; ж) *Упътв.* Направете чертеж и намерете координатите на пресечните точки на кривите $(-4; 2),\ (4; 2)$. При завъртане около Oy тялото, което се получава от фигурата заградена от двете криви може да се представи като обединение на две тела. Следователно търсеният обем е равен на сумата от обемите на тези тела. *Отг.* $V = 16\pi(4\ln 2 - 1) \approx 89.1$

Задача 9. а) $S = \frac{\pi}{6}(\sqrt{17^3} - 1) \approx 36.18$; б) *Упътв.* След прилагане на формула (8) получаваме $S = 2\pi \int_0^{\ln 2} e^x \sqrt{1 + e^{2x}}\, dx$. Сега положете за удобство $e^x = t$ и интегрирайте по части, подобно на задача 4 а). *Отг.* $S = \pi\left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln(2 + \sqrt{5}) - \ln(1 + \sqrt{2})\right) \approx 11.37$; в) *Упътв.* Приложете формула (8') и преработете внимателно подинтегралната функция! *Отг.* $S = \frac{6}{5}\pi a^2$;

г) *Упътв.* Аналогично на в). Означете $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} \sin t\, dt$ и постъпете както при задача 4 а). *Отг.* $S = \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(1 + 2e^{\pi}) \approx 84$.

1.3 Механични и физични приложения на определения интеграл

Определеният интеграл има разнообразни приложения в механиката и физиката. Тук ще разгледаме по-важните от тях.

Център на тежестта на плоска фигура и пресмятане на инерционен момент спрямо координатните оси. Нека е зададена една равнинна система от материални точки $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2),\ \dots,\ M_n(x_n;y_n)$ с маси $m_1,\ m_2,\ \dots,m_n$.

Определение 1. Векторът

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k,$$

където $\vec{r}_k = x_k\vec{i} + y_k\vec{j}$ е радиус-векторът на $k-$тата материална точка от системата се нарича *статичен момент на системата спрямо т.* $O(0;0)$. Скаларните величини $M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k$ *и* $M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k$ се наричат *статични моменти на системата спрямо* Ox и Oy. Очевидно $\overrightarrow{M_O} = M_y\vec{i} + M_x\vec{j}$.

Определение 2. Точката C с координати $x_c = \frac{M_y}{M}$, $y_c = \frac{M_x}{M}$, *където* $M = \sum_{k=1}^{n} m_k$

е масата на системата материални точки се нарича *център на масите на системата.*

Очевидно центърът на масите е геометрична а не материална точка и може да не съвпада с никоя от точките на системата. Например за система от две материални точки с равни маси центърът на масите е средата на на отсечката. Ако $n = 3$, $m_1 = m_2 = m_3$ центърът на масите съвпада с пресечната точка на медианите на триъгълника. Понякога центърът на масите се нарича център на тежестта. Механичният смисъл на центъра на тежестта е онази мислена точка, в която е приложена равнодействащата на на всички сили на тежеста, действащи на всяка отделна точка от системата.

Пример 1. Като се използва опр. 2 лесно се установявя, че ако са дадени две материални точки M_1, M_2 с маси m_1 и m_2, то центърът на тежестта лежи на отсечката M_1M_2 и е изпълнено равенството $M_1M.m_1 = M_2M.m_2$ (правило на лоста).

Определение 3. Неотрицателните величини

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2$$

и

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k^2 + y_k^2)$$

се наричат съответно *инерционни моменти на системата спрямо* Ox, Oy и т. $O(0;0)$. Тези величини играят важна роля в динамиката на въртеливите движения на твърдо тяло.
Единиците, в които се измерват статичните и инерционни моменти са съответно $kg.m$ (килограм по метър) и $kg.m^2$ (килограм по метър на квадрат) ако масата е в килограми а разстоянието в метри.

Забележка 1. Съществуват аналогични формули за инерционните и статични моменти на пространствени тела но поради тяхната сложност няма да бъдат разгледани тук.

Очевидно за да можем да пресмятаме координатите на центъра на тежестта и инерционни моменти на плоски фигури най-напред трябва да можем да намираме масите на тези фигури.
Нека е даден тънък прът с дължина $l > 0$, напречно сечение $S = 1$кв.ед. и функция на плътността $\rho = \rho(x)$, $0 \le x \le l$. Да разледаме участък от пръта с дължина dx. Очевидно при достатъчно малко dx можем да считаме, че масата dm на този участък е $dm \approx \rho(x).\,dx$ (черт 1.а), а масата на целия прът може да бъде намерена по форммулата

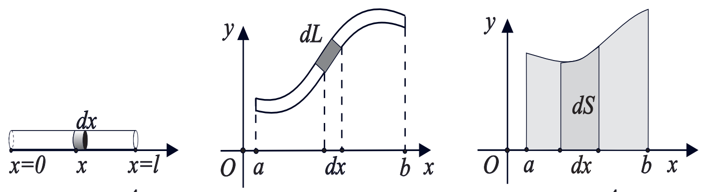
$$M = \int_0^l \rho(x)\,dx \tag{5}$$

Аналогично ако вместо прът имаме тънка материална дъга с уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$ и е известна $\rho(t) = \rho(x(t), y(t))$, то масата на дъгата може да бъде намерена по формулата

$$M = \int_\alpha^\beta \rho(t)\,dL = \int_\alpha^\beta \rho(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \tag{6}$$

Тук и занапред за удобство означаваме с $dL = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$. Геометричният смисъл на dL е дължина на дъгичка от кривата, която отговаря на изменение на параметъра dt или на dx в случай на явно зададена крива (черт 1.б).
Нека разгледаме криволинеен трапец, зададен с неравенствата $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$ и в частност нека $\rho = const$. Нека с dS да означим площта на на часта от него, която има за основа dx (черт 1.в). При достатъчно малко dx аналогично на по-горе имаме $dS \approx f(x).\,dx$, $dm \approx \rho.\,dS = \rho.f(x).\,dx$ и

$$M = \rho.S = \rho \int_a^b f(x)\,dx. \tag{7}$$



черт 1.а черт 1.б черт 1.в

Навсякъде във формулите за статичен и инерционен момент за простота ще считаме, че $\rho = const = 1$. При тези предположения за статичните моменти на криволинеен трапец са в сила формулите

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\,dS = \int_a^b xy\,dx, \tag{8}$$

а за координатите на центъра на тежестта $C(x_C; y_C)$ съответно

$$x_C = \frac{M_y}{S}, \quad y_C = \frac{M_x}{S}, \tag{9}$$

където S е лицето му. За инерционните моменти на криволинеен трапец имаме

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^2(x)\,dS = \frac{1}{3}\int_a^b y^3(x)\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2\,dS = \int_a^b x^2 y(x)\,dx \tag{10}$$

Формули (5) - (10) очевидно са обобщение на формули (1) - (4) за краен брой материални точки. Те се получават чрез разбиване на фигурите на краен брой точки и граничен преход в получените интегрални суми за съответните функции.

Статичните и инерционни моменти и координатите на центъра на тежестта на материална дъга могат да бъдат пресметнати по формулите

$$M_x = \int_a^b y\,dL = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \quad M_y = \int_a^b x\,dL = \int_a^b x\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \tag{8'}$$

$$x_C = \frac{M_y}{L}, \quad y_C = \frac{M_x}{L}, \tag{9'}$$

$$I_x = \int_a^b y^2\,dL = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx, \quad I_y = \int_a^b x^2\,dL = \int_a^b x^2\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{10'}$$

при явно зададена крива $y = f(x),\ a \le x \le b$ и по формулите

$$M_x = \int_\alpha^\beta y\,dL = \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt, \ M_y = \int_\alpha^\beta x\,dL = \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt, \tag{8''}$$

$$I_x=\int_\alpha^\beta y^2\,dL=\int_\alpha^\beta y^2(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt,\ \ I_y=\int_\alpha^\beta x^2\,dL=\int_\alpha^\beta x^2(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \tag{10''}$$

при параметрично зададена крива $x = x(t),\ y = y(t),\ \alpha \le t \le \beta$. Във формули (9') L е дължината на кривата.

Забележка 2. Още веднъж изрично напомняме, че всички тези формули са в сила при $\rho = const$, но това е и най-често срещан в практиката случай.

Формулите за център на тежестта намират приложение за намиране на обеми на ротационни тела и лица на ротационни повърхнини. В сила са следните *теореми на Гулден.*

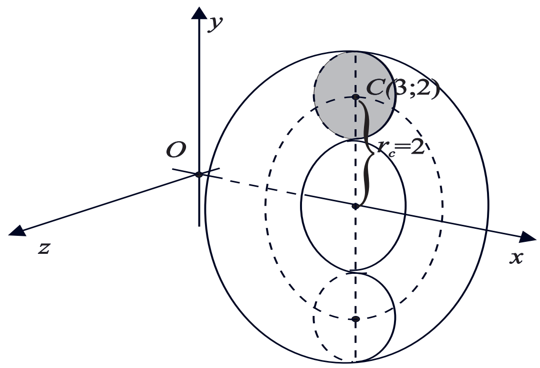
Теорема 1. Лицето на ротационна повърхнина получена от завъртане на дъга от плоска крива около ос лежаща в равнината на кривата и не пресичаща кривата е равно на произведението от дължината на дъгата от кривата и дължината на окръжността с радиус равен на разстоянието от центъра на тежестта на кривата до оста на въртене т.е.

$$S = 2\pi.r_{_C}L.$$

Теорема 2. Обемът на ротационно тяло получено от завъртане на плоска фигура около ос лежаща в равнината на фигурата и не пресичаща фигурата е равен на произведението от площа на фигурата и дължината на окръжността с радиус равен на разстоянието от центъра на тежестта на фигурата до оста на въртене

$$V = 2\pi.r_{_C}S.$$

Пример 2. Да разгледаме окръжността с уравнение $(x-3)^2+(y-2)^2 = 1$ (черт. 2). За лицето на ротационната повърхнина и обема ротационното тяло, получени от завъртане на окръжността около Ox имаме $S = 2.\pi.2.2\pi.1 = 8\pi^2$ *кв.ед.*, $V = 2\pi.2.\pi.2^2 = 16\pi^2$ *куб.ед.* Получената повърхнина се нарича тор и наподобява автомобилна гума.



черт. 2

Други приложения на определения интеграл.

Дължина на траектория на движеща се материална точка. Нека точка се движи по закона $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2$. Изминатият път може да бъде намерен по формулата $s = \int_{t_1}^{t_2} |\overrightarrow{v(t)}|\, dt$, *където* $|\overrightarrow{v(t)}| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ е големината на вектора на скоростта. Обърнете внимание, че при праволинейно движение за изминатия път получаваме

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |x'(t)|\, dt,$$

докато преместването (разликата между началното и крайното положение за време от t_1 до t_2) трябва да бъде пресмятано по формулата

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} x'(t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt.$$

Забележка 3. Горните формули очевидно са точно като тези за намиране на дължина на дъга от параметрично зададена крива от предишния параграф, когато за параметър е избрано времето.

Работа на променлива сила. Нека тяло се премества под влияние на сила, чиято големина зависи само от положението на точката т.е. $F = F(x)$. Тогава работата извършена при преместване на тялото от положение $x = a$ до положение $x = b$ се дава с формулата

$$A = \int_a^b F(x)\, dx \tag{13}$$

При това $F(x)$ считаме положителна ако $\overrightarrow{F(x)}$ е насочен по положителната посоко на Ox и отрицателна в противен случай. Аналогично считаме $A > 0$ ако $F(x)$ и преместването Δx имат еднакви знаци и $A > 0$ ако имат различни знаци. Дайте пример за всеки от тези случаи и ги обяснете, като предварително си припомните механичния смисъл на скаларното произведение на вектори !

Натиск, който упражнява несвиваема течност върху стените на съда, в който се намира. Да разгледаме съд с височина h и ширина l, в който е разположена несвиваема течност ($\rho = const$ независимо от обема на съда). От законите на хидростатиката е известно, че силата, която действа на площ dS (в случая $dS \approx l.\,dx$) е $dF \approx \rho.g.x.\,dS \approx \rho.g.l.x\,dx.$. Тогава големината на натиска F върху стената на съда може да бъде изчислена по следния начин

$$F = l\int_0^h \rho.g.x\,dx = \frac{1}{2}\rho.l.g.h^2, \tag{14}$$

където g е големината на земното ускорение.

Решени задачи.

Задача 1. Намерете координатите на центъра на тежестта и инерционните моменти на дъгата от окръжността $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $-r \le x \le r$, $r > 0$ (черт 3.а).

Решение. Съгласно ($8'$) имаме

$$M_x = \int_{-r}^{r} y\,dL, \quad M_y = \int_{-r}^{r} x\,dL.$$

Тъй като

$$dL = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx,$$

то

$$M_x = \int_{-r}^{r} r\,dx = rx\Big|_{-r}^{r} = 2r^2$$

и $M_y = 0$, (защо?), за координатите на центъра на тежеста получаваме

$$x_C = \frac{M_y}{L} = \frac{0}{\pi r} = 0, \; y_C = \frac{M_x}{L} = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}.$$

За инерционните моменти прилагаме формули ($10'$).

$$I_x = \int_{-r}^{r} y^2(x)\,dL = r\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 2r\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Да положим $x = r\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, $dx = r\cos t\,dt$. След кратки пресмятания получаваме

$$I_x = 2r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 2r^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2}\,dt = r^3\frac{\pi}{2}.$$

За да пресметнем I_y най-напред интегрираме по части, след което правим същото полагане. Получаваме

$$I_y = \int_{-r}^{r} x^2\, dL = 2r\int_0^r \frac{x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = -2r\int_0^r \frac{x}{2\sqrt{r^2-x^2}}\, d(r^2-x^2) =$$

$$= -2r\int_0^r x\, d(\sqrt{r^2-x^2}) = -2rx\sqrt{r^2-x^2}\Big|_0^r + 2r\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\, dx = r^3\frac{\pi}{2}. \quad \blacksquare$$

Задача 2. Намерете координатите на центъра на тежестта на фигурата заградена от кривата с уравнение $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le \pi$ и оста Ox (черт.3.б).

Решение. Тъй като фигурата е симетрична относно Oy и плътността считаме за постоянна, то центърът на тежестта лежи на Oy. Следователно $x_C = 0$. За M_x получаваме

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} y^2\, dx = \int_0^a y^2\, dx$$

Но както лесно се вижда от уравнението на елипсата

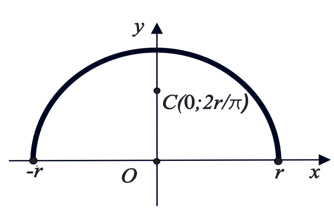
$$y^2\, dx = b^2\sin^2 t\, d(a\cos t) = ab^2\sin^2 t\, d\cos t = ab^2(1-\cos^2 t)\, d\cos t.$$

От тук чрез прости пресмятания получаваме

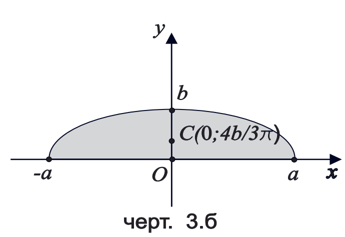
$$M_x = ab^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1-\cos^2 t)\, d\cos t = -ab^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\, d\cos t =$$

$$= -ab^2\cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + ab^2\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}ab^2.$$

Съгласно формули $(9')$ за координатите на центъра на тежестта и като вземем предвид, че $S = \pi\frac{ab}{2}$ *получаваме* $x_C = 0,\ y_C = \frac{\frac{2}{3}ab^2}{S} = \frac{\frac{2}{3}ab^2}{\frac{\pi}{2}ab} = \frac{rb}{3\pi}$. $\blacksquare$



черт. 3.а



черт. 3.б

Задача 3. Намерете инерционните моменти на криволинейния трапец, заграден от кривите с уравнения $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 4$.

Решение. От условието се вижда, че фигурата може да бъде зададена със системата неравенства $1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \frac{1}{x}$. (Направете самостоятелно чертеж !) Съгласно формули (10) имаме

$$I_x = \frac{1}{3}\int_1^4 y^3\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 x^{-3}\,dx = \frac{5}{32} \quad I_y = \int_1^4 x^2 y\,dx = \int_1^4 x\,dx = \frac{15}{2}. \ \blacksquare$$

Задача 4. Като използвате теоремите на Гулден, намерете лицето на ротационната повърхнина и обема на ротационното тяло, получено от завъртането на първата арка на циклоидата около оста Ox. (Вж. черт. 4.а от предишния параграф.)

Решение. За да приложим теоремите на Гулден, най-напред трябва да намерим координатите на центъра на тежестта на дъгата и на фигурата. За статичните моменти на дъгата получаваме

$$M_x = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin(\frac{t}{2})\,dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^3(\frac{t}{2})\,dt =$$

$$= -8a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos^2(\frac{t}{2}))\,d\cos(\frac{t}{2}) = -8a^2\cos(\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} + \frac{8a^2}{3}\cos^3(\frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}a^2,$$

$$M_y = \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)2a\sin(\frac{t}{2})\,dt = 2a^2\int_0^{2\pi} t\sin(\frac{t}{2})\,dt + 2a^2\int_0^{2\pi} 2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2})\,dt =$$

$$= -4a^2\int_0^{2\pi} t\,d\sin(\frac{t}{2}) - 4a^2\int_0^{2\pi}\sin^2(\frac{t}{2})\,d\sin(\frac{t}{2}) = 8\pi a^2.$$

Извършете самостоятелно всички необходими пресмятания. Тъй като дължината на кривата $L = 8a$ (вж. зад от предишния параграф), за координатите на центъра на тежестта получаваме

$$x_C = \frac{M_y}{L} = \frac{8\pi a^2}{8a} = \pi a, \quad y_C = \frac{\frac{32a^2}{3}}{8a} = \frac{4}{3}a.$$

Тъй като радиусът на окръжността, който описва центъра на тежестта на циклоидата е $r_C = |y_C| = \frac{4}{3}a$, то за лицето на ротационната повърхнина получаваме

$$S = 2\pi . r_C . L = 2\pi.\frac{4}{3}.a.8a = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

За да намерим обема на ротационното тяло пресмятаме статичните моменти на фигурата заградена от Ox и циклоидата. Имаме

$$M'_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi a} y^2\,dx = \frac{1}{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt = \frac{5}{2}\pi a^3.$$

За да пресметнете последния интеграл развийте израза $(1-\cos t)^3$ като използвате формулите за съкратено умножение и го представете като сума от три интеграла, които се решават лесно. Тъй като ни интересува само радиуса на окръжността, която описва центъра на тежестта на фигурата около оста Ox, то е достатъчно да намерим само y_C. От друга страна лицето на фигурата заградена от първата арка на циклоидата и оста Ox е $S = 3\pi a^2$
(вж. зад. 2. от предишния параграф). Тогава

$$y_C = \frac{M'_x}{S} = \frac{\frac{5}{2}\pi a^3}{3\pi a^2} = \frac{5}{6}a \quad \textit{и} \quad V = 2\pi . y_C . S = 5\pi^2 a^3.$$

Като използвате намерената стойност за x_C за дъгата и намерите самостоятелно x'_C за фигурата пресметнете лицето на ротационната повърхнина и обема на тялото получени от завъртането на същата дъга (фигура) около Oy. ■

Задача 5. точка започва да се движи по Ox от $x_0 = 1$ m така, че скоростта и във всеки момент е равна на абцисата на точката. Какъв път ще измине точката за време $t = 10$ s ?

Решение. По условие $v(t) = x(t)$. Но от друга страна

$$v(t) = x'(t), \quad \textit{или} \;\; x'(t) = x(t), \;\; \textit{откъдето} \;\; \textit{очевидно} \;\; \frac{dx(t)}{x(t)} = dt.$$

Сега интегрираме двете стране на това равенство отнсно t. Получаваме

$$\int \frac{1}{x(t)}\,dx(t) = \int dt, \;\; \ln|x(t)| = t+c, \quad \textit{откъдето} \;\; x = \pm e^{t+c} = \pm e^c e^t = c_1 e^t.$$

Неизвесната константа c_1 намираме от условието $x_0 = x(0) = 1 = c_1 e^0$. Следователно $c_1 = 1$ и $x(t) = e^t$, $x'(t) = e^t > 0$. В този случай изминатият път е равен на преместването

$$\Delta x = x(10) - x(0) = \int_0^{10} e^t\,dt = e^{10} - e^0 = e^{10} - 1 \approx 22026,5 \; m. \;\; ■$$

Задача 6. Скоростта на материална точка се изменя по закона $v(t) = 2(6-t)$ m/s. Коя е най-отдалечената точка от началото на движението и колко път изминава точката след време $t = 10$ s

Решение. От зависимостта $x'(t) = v(t)$ следва, че

$$x(t) = \int 2(6-t)\,dt + c = 12t - t^2 + c, \quad \textit{където} \;\; c = x(0) = x_0$$

е началното положение на точката. От друга страна, тъй като $a(t) = v'(t) =$
$= -2 < 0$, то точката се движи равнозакъснително по оста Ox. Скоростта и намалява и следователно максималното отклонение от началното положение се получава в момента t_1, в който точката спира т.е. $v(t_1) = 0$. Лесно се вижда, че това става при $t_1 = 6\ s$. Тогава максималното отместване е $\Delta x = x(6) - x(0) = 12.6 - 36 + c - c = 36\ m$. За да определим изминатият път за време $t = 10\ s$ ще използваме формула $(11'')$

$$S = \int_0^{10} |v(t)|\,dt = \int_0^6 2(6-t)\,dt + \int_6^{10} 2(t-6)\,dt = (12t - t^2)\Big|_0^6 + (t^2 - 12t)\Big|_6^{10} = 52\ m.$$

Тук използвахме, че

$$|v(t)| = |2(6-t)| = \begin{cases} 2(6-t), & \text{когато} \quad t \le 6 \\ 2(t-6), & \text{когато} \quad t \ge 6 \end{cases}$$

За преместването Δx получаваме

$$\Delta x = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^{10} 2(6-t)\,dt = (12t - t^2)\Big|_0^{10} = 20\ m.$$

Това означава, че точката се е придвижила за първите $6s$ надясно по оста Ox $36m$ и после се е върнала обратно $16\ m$. ■

Задача 7. Каква работа се извършва при разтягане на пружина на разстояние $\Delta x = 4\ cm$, ако е известно, че при натоварване $1\ N$ тя се разтяга $1\ cm$?

Решение. Съгласно закона на Хук при едностранно опъване пружинната сила зависи само големината на опъването и големината и е $F(x) = kx$. Коефициента k се нарича коравина на пружината и е равен на силата, необходима за удължаване на пружината с $1\ m$. Тъй като при $\Delta x = 0,01\ m$, $F = 1\ N$ то $0,01k = 1$ или $k = 100\ N/m$. Следователно $F(x) = 100x$ и за работата получаваме

$$A = \int_0^{0,04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0,04} = 50.0,0016 = 0,08\ J. \;\blacksquare$$

Задача 8. С помощта на подемен кран се извлича железобетонна отливка от езеро с дълбочина $d = 5\ m$. Каква работа се извършва за пълното изваждане на отливката от водата ако тя има формата на правилен тетраедър с ребро $l = 1\ m$, плътността на бетона е $\rho_1 = 2500\ kg/m^3$, а на водата е $\rho_2 = 1000\ kg/m^3$ и силата на съпротивление на водата се пренебрегва.

Решение. Очевидно до момента, в който върха на пирамидата се покаже над водата подемната сила на крана е постоянна и е равна на $F_n = G - F_A$, където G е силата на тежестта, която действа на пирамидата, а F_A е архимедовата сила, която действа на всяко тяло, потопено в течност или газ. Тук считаме също, че издигането става с постоянна скорост. Следователно работата за извличане на върха на пирамидата до повърхността е $A_1 = F_n(5-h)$, където h е височината на пирамидата. Както е известно, обема на правилен тетраедър с околен ръб l се намира по формулата $V = l^3\frac{\sqrt{2}}{12}$, а височината съответно $h = l\sqrt{2/3}$. Тогава за A_1 получаваме

$$A_1 = F_n(5-h) = (G - F_A)(5-h) = (mg - V\rho_2)g\left(5 - l\sqrt{2/3}\right) =$$
$$= Vg(\rho_1 - \rho_2)\left(5 - l\sqrt{2/3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}.9,8.1500.\left(5 - \sqrt{2/3}\right) \approx 7247,6\ J.$$

За да пресметнем работата A_2 за изваждане на пирамидата от водата, трябва да вземем предвид, че теглителната сила на крана трябва да се расте, тъй като архимедовата намалявя с извличане на пирамидата от водата. Нека разгледаме един фиксиран момент, в който над водата е извадена част от пирамидата с височина y (черт 4.а). Тогава архимедовата сила действа само на потопената под вода част от пирамидата

$$F_n(y) = G - F_A(y) = G - V(y)(\rho_1 - \rho_2)g,$$

където $V(y)$ е обемът на оставащата под вода част на пирамидата. Тъй като

$$V(y) = \frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}y^3,$$

(пресметнете това самостоятелно!), то

$$F_A(y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}y^3\right).1500.9,8,\ \ F_n(y) = G - F_A(y) = 500.9,8.\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + 3\frac{\sqrt{3}}{8}y^3\right).$$

Следователно

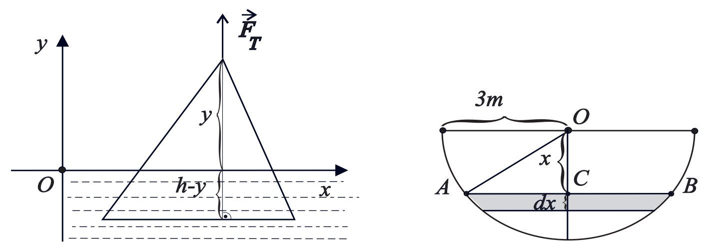
$$A_2 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} 500.9,8.\left(\frac{\sqrt{2}}{6} + 3\frac{\sqrt{3}}{8}y^3\right)dy = 500.9,8.\frac{\sqrt{2}}{6}y\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} + 500.9,8.\frac{3\sqrt{3}}{8}.\frac{1}{4}y^4\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} =$$

$\approx 898,06\ J$ *и следователно* $A = A_1 + A_2 \approx 8145,66\ J$ ■

Задача 9. Намерете натиска, който изпитва вертикална стена на басейн с формата на полукръг с диаметър $d = 6\ m$, ако най-широката част на басейна се намира на повърхността на водата (черт.4.б).

Решение. Както знаем, силата на натиск, която действа на част от стената с площ dS, потопена на дълбочина x под повърхността е $dF \approx \rho.g.x\,dS$ (вж. теоретичните бележки !). Тук с dS е удобно да означим площа на ивица с достатъчно малка ширина dx, която можем да считаме потопена на една и съща дълбочина x. За да изразим dS въвеждаме координатна система, така че оста Ox е насочена надолу и минава през центъра на палукръга. От чертежа е ясно, че $dS \approx AB.\,dx$. Но очевидно $AB = 2\sqrt{9-x^2}$ и следователно $dF \approx \rho.g.2x\sqrt{9-x^2}\,dx$. Обърнете внимание, че има известна разлика при намирането на dS от примера в теоретичните бележки! За сумарния натиск съгласно формула (14) получаваме

$$F = \int_0^3 2\rho g x\sqrt{9-x^2}\,dx = -\rho g\int_0^3 (9-x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(9-x^2) = -\frac{2}{3}\rho g(9-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = 176,4\,kN. \blacksquare$$



черт. 4.а черт. 4.б

Задачи за самостоятелно решаване

Задача 1. Намерете координатите на центъра на тежестта на параболичен сектор, заграден от параболата $y = x^2$ и правата $y = 3x$ и обема на ротационното, тяло получено от завъртане на сектора около Ox и Oy.

Задача 2. Като използвате теоремите на Гулден, намерете лицето на ротационната повърхнина, получена от завъртане на часта от астроидата, която се задава с уравненията $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ 0 \le t \le \pi$, около Ox.

Задача 3. Намерете статичните и инерционните моменти на хомогенен диск относно Ox и Oy с радиус r и плътност 1, центърът на който е разположен в началото на координатната система.

Задача 4. Намерете инерционните моменти на хомогенен обръч с радиус r и плътност $\rho = r\ kg/m$. Сравнете със задача 3!

Задача 5. Материална точка се движи праволинейно, като скоростта и се изменя по закона $v(t) = 70 - 8t\ m/s$. Намерете пътя, който изминава точката от момента $t_1 = 0$ до $t_2 = 10\ s$ и преместването и за същия интервал време.

Задача 6. Материална точка се движи равнинно по закона $x = R\cos(t^2),\ y = R\sin(t^2)$. Намерете пътя, който изминава точката от моментите $t_1 = 0$ до $t_2 = 4\ s$. Определете траекторията на точката.

Задача 7. Материална точка започва да се движи с ускорение $a(t) = 30t+2$ по положителната посока на оста Ox. Намерете какъв път изминава точката след време $\Delta t = 5\ s$ и скоростта на точката в този момент, ако е известно, че $v(0) = 0\ m/s$.

Задача 8. С помощта на подемен кран от басейн с вода се извлича камък с формата на прав кръгов конус. Намерете работата за пълното извличане на камъка от водата , ако върха на конуса се намира на водната повърхност и е известно, че височината му е $h = 3\ m$, радиуса $r = 1\ m$, плътността на бетона е $\rho_1 = 2500\ kg/m^3$, на водата $\rho_2 = 1000\ kg/m^3$. Съпротивлението на водата и архимедовата сила във въздуха да се пренебрегнат.

Задача 9. В несвиваема течност с плътност ρ е потопена пластинка с форма на равнобедрен триъгълник. Намерете силата на натиск, който изпитва пластинката, ако основата и има дължина a, височината и е равна на h и върха и е на повърхността на водата.

Задача 10. Намерете масата на прът с дължина $l = 1\ m$ и линейна плътност $\rho(x) = 20x + 0,15x^2\ kg/m, 0 \leq x \leq 1$.

Задача 11. Топче с маса $m = 1\ kg$ е закачено на пружина и предизвиква разстягане $\Delta x = 0,01\ m$. Каква работа се извършва при разтягане на пружината до положение $x_1 = 0,1\ m$? (Приемете за удобство земното ускорение $g = 10\ m/s^2$.)

Отговори и упътвания.

Задача 1. *Упътв.* Използвайте, че за криволинеен трапец, който се задава чрез неравенства по следния начин: $a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$, формулли (8) изглеждат така: $M_x = \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,dx,\ M_y = \int_a^b x(y_2(x) - y_1(x))\,dx$. *Отг.* $M_x = 16,2,\ M_y = 6,75,\ S = 4,5,\ C(1,5; 3,6),\ V_x = 32,4.\pi \approx 101,79,\ V_y = 13,5.\pi \approx 42,41$.

Задача 2. *Упътв.* Поради симетрията на астроидата разглеждаме частта разположена в първи квадрант ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$). За тази част съответно получаваме получаваме $M_x = M_y = 0,6a^2$, дължината $L = 1,5a$, $C(0,4a; 0,4a),\ S_x = 2.1,2\pi a^2 = 2,4\pi a^2$кв. ед.

Задача 3. *Упътв.* Уравнението на окръжността, която е контур на диска е $x^2 + y^2 = r^2$, откъдето $y = \sqrt{r^2 - x^2},\ dS = 2y\,dx$. Като вземем предвид, че дискът е разположен симетрична относно Ox и Oy, получаваме $I_x = I_y = 0,25\pi r^4$. Тъй като в случая плътността $\rho = 1$, то масата на диска е $M = \pi r^2$, $I_x = I_y = \frac{1}{4}Mr^2$. $M_x = M_y = 0$. (Защо?)

Задача 4. *Упътв.* В този случай $\rho = r\ kg/m$ и следователно $I_x = I_y = \pi r^4$. Очевидно $M = \rho L = r2\pi r = 2\pi r^2$ и тогава $I_x = I_y = \frac{1}{2}Mr^2$. Обърнете внимание, че плътният диск има по-малък инерционен момент от обръч със същия радиус и маса.

Задача 5. $S = \int_0^{10} |v(t)|\,dt = 1400\ m$, $\Delta x = \int_0^{10} v(t)\,dt = -300\ m$. Какво означава това, че $\Delta x < 0$?

Задача 6. $S = 16R$, траекторията е окръжност.

Задача 7. *Упътв.* Използвайте, че $v(t) - v(o) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau$. *Отг.* $v(5) - v(o) = \int_0^5 a(t)\,dt = 335\ m/s$, $S = \int_0^5 |v(t)|\,dt = 650\ m$.

Задача 8. *Упътв.* Аналогично на задача 8 от решените задачи $F_n(y) = G - F_A(y)$. Тук $F_A(y)$ е архимедовата сила, която действа на тази часта от конуса, оставаща под водата. Направете чертеж! *Отг.* $A = \int_0^3 F_n(y)\,dy = 51450\pi\ J \approx 161635\ J$.

Задача 9. *Упътв.* Аналогично на задача 9. *Отг.* $F = \frac{1}{3}\rho g a h^2$. Защо пластинката остава в равновесие?

Задача 10. $m = \int_0^1 \rho(x)\,dx = 10,05\ kg$.

Задача 11. *Упътв.* Силата необходима за разтягане на пружината е равна на разликата от пружинната сила и силата на тежестта $F(x) = kx - mg$, където k е коравината на пружината. От условието лесно се намира, че $k = 100\ N/m$. *Отг.* $A = \int_{0,01}^{0,1} F(x)\,dx = 0,405\ J$.