ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПАРАМЕТРИТЕ НА КРЪГОВА КРИВА ПО МЕТОДА НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ

Инж. Димитър Т. Тонков
Катедра «Приложна геодезия»
Университет по архитектура, строителство и геодезия

ABSTRACT

The paper considers the definition of the parameters of an adjustment circular curve by the least squares method from empirical data. The coordinates $x_i^{'}, y_i^{'}$ of a number of points, located along the curve, are taken as "measured" values. In the parametric adjustment the compilation of the observation equations using the usual manner is impossible, because in each of these equations there are two adjusted values - x_i and y_i. The solution of the problem is proposed in two ways - by conditional adjustment with unknowns and by a transition from conditional adjustment with unknowns to parametric adjustment. The described methods for determining the parameters of an adjustment circular curve find application in the road rehabilitation, and many other precision engineering surveying works.

РЕЗЮМЕ

Разглежда се определянето на параметрите на «изравнителна» кръгова крива по Метода на най-малките квадрати от емпирични данни. Като «измерени» величини се приемат стойностите $x_i^{'}, y_i^{'}$ на координатите на определен брой точки, разположени по протежение на кривата. При параметричното изравнение съставянето на уравненията на измерванията по обичайния начин е невъзможно, тъй като във всяко от тези уравнения участват по две изравнени стойности - x_i и y_i. Предлага се решение на задачата по два начина - чрез условно изравнение с неизвестни и чрез преход от условно изравнение с неизвестни към параметрично изравнение. Описаните начини за определяне на параметрите на «изравнителна» кръгова крива намират приложение при рехабилитация на пътища и при редица други прецизни инженерно-геодезически работи.

1. УВОД.

Параметричното изравнение по МНМК започва с избор на неизвестни (параметри) на изравнението съгласно изискванията, разгледани в §30, т.1 на [1]. След като се изберат неизвестни се съставят уравненията на измервнията, като се спазват следните правила:

- Броят на уравненията на измерванията е равен на броя на самите измервания.
- Уравненията на измерванията се съставят като «от лявата страна на уравненията на измерванията се записват изравнените стойности на измерените величини, а от дясната – тяхната връзка с неизвестните и с дадените величини, ако има такива» [1].

$$l_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1}$$

По-нататъшното решение се извършва по посочения в [1] начин – съставяне на уравненията на поправките, съставяне и решаване на системата нормални уравнения и получаване на стойностите на неизвестните (параметрите), изчисляване на поправките от уравненията на поправките, определяне на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни и на измерените величини, крайна проверка и оценка на точността.

Този начин на изравнение може да се приложи при емпиричното определяне на параметрите на кръгова крива, като ролята на «измервания» играят координатите x_i, y_i на определен брой точки, разположени по протежение на кривата, както е показано на фиг.1, но само в случай, че координатите x_i са измерени много точно (приети са за безгрешни) и грешки съдържат само координатите y_i или обратно, координатите y_i са измерени много точно (приети са за безгрешни) и грешки съдържат само координатите x_i.

2. ФОРМУЛИРОВКА И АНАЛИЗ НА ЗАДАЧАТА.

В случай, че грешки съдържат както координатите x_i, така и координатите y_i на точките, следва да се отчетат изложените по-долу съображения.

Параметрите на кръговата крива се извеждат от n на брой точки, за които са определени координатите $x_i^{'}, y_i^{'}$, като се спазва условието сумата от квадратите на разстоянията δ_i от точките до кръговата крива да е минимална, т.е.:

$$[\delta_i^2] = min. \tag{2}$$

Такава кръгова крива се нарича «най-вероятна» крива или «изравнителна» крива. Като «измерени» величини се разглеждат стойностите $x_i^{'}, y_i^{'}$ на координатите на точките, определящи кръговата крива. Броят на измерванията, от които се определя тази крива чрез изравнение по МНМК е равен на $2n$ - това са стойностите $x_i^{'}, y_i^{'}$ на координатите на n на брой точки, както е показано на фиг.1. За да се определи броят на необходимите измервания за еднократното решение на задачата се взема предвид, че една кръгова крива се дефинира от три точки, лежащи върху нея, т.е. необходими са три двойки стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$. Следователно броят на необходимите измервания за еднократното решение на задачата е $k = 6$. Броят на свръхизмерванията (допълнителните измервания) r се определя по формулата:

$$r = 2n - 6 \tag{3}$$

Определените стойности на координатите на точките $x_i^{'}, y_i^{'}$ са некорелирани и равноточни, т.е. $m_x = m_y = m$. За неизвестни могат да се приемат изравнените стойности x_i, y_i на координатите на три произволно избрани точки от кривата, напр. първата, средната и последната или трите параметъра на уравнението на кръговата крива, както е показано по-долу.

От внимателния анализ на задачата се вижда, че е невъзможно да се съставят $2n$ на брой уравнения на измерванията по правилото «от лявата страна на уравненията на измерванията се записват изравнените стойности на измерените величини, а от дясната – тяхната връзка с неизвестните и с дадените величини, ако има такива» и да се извърши параметрично изравнение по МНМНК. Аналогично не могат да бъдат съставени $r = 2n - 6$ на брой условни уравнения и да се извърши корелатно изравнение.

3. РЕШЕНИЕ.

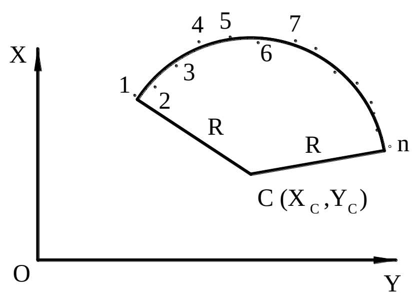
Единствената възможност е да се съставят n на брой уравнения от вида:

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 = R^2 \qquad i = 1,2,3,\dots,n \tag{4}$$

или

$$(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2 - R^2 = 0 \qquad i = 1,2,3,\dots,n \tag{5}$$

където x_c и y_c са координатите на центъра на окръжността, а R - нейния радиус – фиг.1. Те се явяват неизвестни (параметри) на изравнението.



Фиг.1

Вижда се, че във всяко от уравненията *(5)* участват трите неизвестни x_c, y_c и R и по една двойка изравнени стойности x_i, y_i на координатите на отделна точка. Явява се случай на **условно изравнение с неизвестни**, което е най-общия случай на изравнение по МНМК. Уравненията *(5)* са в нелинеен вид и трябва да се линеаризират чрез развитие в Тейлоров ред. За целта се въвеждат приблизителни стойности на неизвестните x_c^0, y_c^0 и R_0, като се използват «измерените» координати на три точки, напр. първата, средната и последната. Нека номерата (индексите) на тези три точки са съответно 1, $\frac{n}{2}$ и n.

Приблизителните стойности на трите неизвестни x_c^0, y_c^0 и R_0 се определят от следната система от три уравнения с три неизвестни:

$$
\begin{aligned}
&(x_1^{'} - x_c^0)^2 + (y_1^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2 = 0 \\
&(x_{\frac{n}{2}}^{'} - x_c^0)^2 + (y_{\frac{n}{2}}^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2 = 0 \\
&(x_n^{'} - x_c^0)^2 + (y_n^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2 = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

След като изразите в скобите се повдигнат на квадрат се получава системата:

$$
\begin{aligned}
&(x_c^0)^2 + (y_c^0)^2 - R_0^2 - 2x_1^{'}x_c^0 - 2y_1^{'}y_c^0 + [(x_1^{'})^2 + (y_1^{'})^2] = 0 \\
&(x_c^0)^2 + (y_c^0)^2 - R_0^2 - 2x_{\frac{n}{2}}^{'}x_c^0 - 2y_{\frac{n}{2}}^{'}y_c^0 + [(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2 + (y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] = 0 \\
&(x_c^0)^2 + (y_c^0)^2 - R_0^2 - 2x_n^{'}x_c^0 - 2y_n^{'}y_c^0 + [(x_n^{'})^2 + (y_n^{'})^2] = 0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

За да се реши системата *(7)* се полага:

$$
t_0 = (x_c^0)^2 + (y_c^0)^2 - R_0^2
\tag{8}
$$

и след заместването се получава линейна система от три уравнения с три неизвестни:

$$
\begin{aligned}
&t_0 - 2x_1^{'}x_c^0 - 2y_1^{'}y_c^0 + [(x_1^{'})^2 + (y_1^{'})^2] = 0 \\
&t_0 - 2x_{\frac{n}{2}}^{'}x_c^0 - 2y_{\frac{n}{2}}^{'}y_c^0 + [(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2 + (y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] = 0 \\
&t_0 - 2x_n^{'}x_c^0 - 2y_n^{'}y_c^0 + [(x_n^{'})^2 + (y_n^{'})^2] = 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Системата *(9)* се решава чрез формулите на Крамер, като за целта се дефинират следните детерминанти от трети ред:

$$
\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2x_1^{'} & -2y_1^{'} \\ 1 & -2x_{\frac{n}{2}}^{'} & -2y_{\frac{n}{2}}^{'} \\ 1 & -2x_n^{'} & -2y_n^{'} \end{vmatrix}
\qquad
\Delta_t = \begin{vmatrix} -[(x_1^{'})^2 + (y_1^{'})^2] & -2x_1^{'} & -2y_1^{'} \\ -[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2 + (y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] & -2x_{\frac{n}{2}}^{'} & -2y_{\frac{n}{2}}^{'} \\ -[(x_n^{'})^2 + (y_n^{'})^2] & -2x_n^{'} & -2y_n^{'} \end{vmatrix}
$$

$$
\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -[(x_1^{'})^2 + (y_1^{'})^2] & -2y_1^{'} \\ 1 & -[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2 + (y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] & -2y_{\frac{n}{2}}^{'} \\ 1 & -[(x_n^{'})^2 + (y_n^{'})^2] & -2y_n^{'} \end{vmatrix}
\qquad
\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -2x_1^{'} & -[(x_1^{'})^2 + (y_1^{'})^2] \\ 1 & -2x_{\frac{n}{2}}^{'} & -[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2 + (y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] \\ 1 & -2x_n^{'} & -[(x_n^{'})^2 + (y_n^{'})^2] \end{vmatrix}
\tag{10}
$$

Стойностите на съответните детерминанти от *(10)* се определят по правилото на Сарус:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= 4x_{\frac{n}{2}}^{'}y_n^{'} + 4x_1^{'}y_{\frac{n}{2}}^{'} + 4x_n^{'}y_1^{'} - 4x_{\frac{n}{2}}^{'}y_1^{'} - 4x_1^{'}y_n^{'} - 4x_n^{'}y_{\frac{n}{2}}^{'} = \\
&= 4\left\{ x_1^{'}(y_{\frac{n}{2}}^{'} - y_n^{'}) + x_{\frac{n}{2}}^{'}(y_n^{'} - y_1^{'}) + x_n(y_1^{'} - y_{\frac{n}{2}}^{'}) \right\} = -8P_{\Delta 1,\frac{n}{2},n}
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_t &= -4[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2]\,x_{\frac{n}{2}}^{'}y_n^{'} - 4x_1^{'}y_{\frac{n}{2}}^{'}[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2] - 4y_1^{'}[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2]\,x_n^{'} + \\
&+4y_1^{'}x_{\frac{n}{2}}^{'}[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2] + 4x_1^{'}[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2]\,y_n^{'} + 4[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2]\,y_{\frac{n}{2}}^{'}x_n^{'} = \\
&= 4[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2](y_{\frac{n}{2}}^{'}x_n^{'} - x_{\frac{n}{2}}^{'}y_n^{'}) + 4[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2](x_1^{'}y_n^{'} - y_1^{'}x_n^{'}) + \\
&+4[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2](y_1^{'}x_{\frac{n}{2}}^{'} - x_1^{'}y_{\frac{n}{2}}^{'})
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_x &= 2[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2]\,y_n^{'} + 2[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2]\,y_{\frac{n}{2}}^{'} + 2y_1^{'}[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2] - \\
&-2y_1^{'}[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] - 2[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2]\,y_n^{'} - 2y_{\frac{n}{2}}^{'}[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2] = \\
&= 2[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2](y_{\frac{n}{2}}^{'} - y_n^{'}) + 2[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2](y_n^{'} - y_1^{'}) + \\
&+2[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2](y_1^{'} - y_{\frac{n}{2}}^{'})
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_y &= 2x_{\frac{n}{2}}^{'}[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2] + 2x_1^{'}[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2] + 2[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2)]\,x_n^{'} - \\
&-2[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2]\,x_{\frac{n}{2}}^{'} - 2x_1^{'}[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2] - 2[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2]\,x_n^{'} = \\
&= 2[(x_1^{'})^2+(y_1^{'})^2)](x_n^{'} - x_{\frac{n}{2}}^{'}) + 2[(x_{\frac{n}{2}}^{'})^2+(y_{\frac{n}{2}}^{'})^2](x_1^{'} - x_n^{'}) + \\
&+2[(x_n^{'})^2+(y_n^{'})^2](x_{\frac{n}{2}}^{'} - x_1^{'})
\end{aligned}
\tag{14}
$$

След като се определят стойностите на детерминантите по форм. *(11)*, *(12)*, *(13)* и *(14)* се изчисляват приблизителните стойностите на неизвестните по формулите на Крамер:

$$
t_0 = \frac{\Delta_t}{\Delta}, \quad x_c^0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_c^0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}
\tag{15}
$$

Приблизителната стойност R_0 на радиуса на кръговата крива се определя по формулата:

$$
R_0 = \sqrt{(x_c^0)^2 + (y_c^0)^2 - t_0}
\tag{16}
$$

Първоначално избраните неизвестни се представят по следния начин:

$$
x_c = x_c^0 + \delta x_c, \quad y_c = y_c^0 + \delta y_c, \quad R = R_0 + \delta R
\tag{17}
$$

Освен това изравнените стойности x_i, y_i на координатите на точките, описващи кривата се представят като сума от «измерените» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ и поправките v_i^x, v_i^y, т.е.:

$$
x_i = x_i^{'} + v_i^x, \quad y_i = y_i^{'} + v_i^y
\tag{18}
$$

След заместване на изразите *(17)* и *(18)* в уравненията *(5)* се получават уравненията на поправките:

$$
[(x_i^{'} + v_i^x) - (x_c^0 + \delta x_c)]^2 + [(y_i^{'} + v_i^y) - (y_c^0 + \delta y_c)]^2 - (R_0 + \delta R)^2 = 0 \quad i = 1,2,3,\dots,n
\tag{19}
$$

Тези уравнения се представят в линеен вид чрез развитие в Тейлоров ред, като се запазват само членовете от първи ред:

$$
\begin{aligned}
&F_i(x_c, y_c, R, x_i, y_i) = F_i(x_c^0 + \delta x_c, y_c^0 + \delta y_c, R_0 + \delta R, x_i^{'} + v_i^x, y_i^{'} + v_i^y) = \\
&= F_i(x_c^0, y_c^0, R_0, x_i^{'}, y_i^{'}) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_c}\right)\delta x_c + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_c}\right)\delta y_c + \left(\frac{\partial F_i}{\partial R}\right)\delta R + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)v_i^x + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right)v_i^y = 0
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Частните производни в уравненията на поправките *(20)* се изчисляват с приблизителните стойности на неизвестните x_c^0, y_c^0, R_0 и «измерените» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ и имат следния вид:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_c}\right) = -2(x_i^{'} - x_c^0), \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_c}\right) = -2(y_i^{'} - y_c^0), \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial R}\right) = -2R_0,$$
$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) = 2(x_i^{'} - x_c^0), \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) = 2(y_i^{'} - y_c^0) \qquad (21)$$

Тъй като след заместването на стойностите на частните производни от *(21)* в уравненията на поправките *(20)* двете страни на същите се разделят на 2, несъвпаденията W_i в уравненията на поправките *(20)* се определят по следната формула:

$$W_i = \frac{1}{2} F_i(x_c^0, y_c^0, R_0, x_i^{'}, y_i^{'}) = \frac{1}{2}[(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2] \qquad (22)$$

Окончателно за уравненията на поправките се получава:

$$(x_i^{'} - x_c^0)v_i^x + (y_i^{'} - y_c^0)v_i^y - (x_i^{'} - x_c^0)\delta x_c - (y_i^{'} - y_c^0)\delta y_c - R_0\delta R + W_i = 0 \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (23)$$

Тези уравнения могат да бъдат представени в матричен вид, както следва:

$$\underset{(n,2n)}{B}\,\underset{(2n,1)}{V} + \underset{(n,3)}{C}\,\underset{(3,1)}{X} + \underset{(n,1)}{W} = \underset{(n,1)}{0} \qquad (24)$$

където:

$$\underset{(n,2n)}{B} = \begin{bmatrix} x_1^{'} - x_c^0 & y_1^{'} - y_c^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2^{'} - x_c^0 & y_2^{'} - y_c^0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3^{'} - x_c^0 & y_3^{'} - y_c^0 & \ldots & 0 & 0 \\ & & & & \ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & x_n^{'} - x_c^0 & y_n^{'} - y_c^0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2n,1)}{V} = \begin{bmatrix} v_1^x \\ v_1^y \\ v_2^x \\ v_2^y \\ \ldots \\ v_n^x \\ v_n^y \end{bmatrix} \qquad \underset{(n,3)}{C} = \begin{bmatrix} -(x_1^{'} - x_c^0) & -(y_1^{'} - y_c^0) & -R_0 \\ -(x_2^{'} - x_c^0) & -(y_2^{'} - y_c^0) & -R_0 \\ -(x_3^{'} - x_c^0) & -(y_3^{'} - y_c^0) & -R_0 \\ & \ldots & \\ -(x_n^{'} - x_c^0) & -(y_n^{'} - y_c^0) & -R_0 \end{bmatrix} \qquad (25)$$

$$\underset{(3,1)}{X} = \begin{bmatrix} \delta x_c \\ \delta y_c \\ \delta R \end{bmatrix} \qquad \underset{(n,1)}{W} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(x_1^{'} - x_c^0)^2 + (y_1^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2] \\ \frac{1}{2}[(x_2^{'} - x_c^0)^2 + (y_2^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2] \\ \frac{1}{2}[(x_3^{'} - x_c^0)^2 + (y_3^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2] \\ \ldots \\ \frac{1}{2}[(x_n^{'} - x_c^0)^2 + (y_n^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2] \end{bmatrix}$$

Условното изравнение с неизвестни продължава със съставянето на система уравнения, от която се определят n на брой корелати k_i и трите параметъра на кръговата крива (неизвестни) x_c, y_c и R.

Дефинира се матрица-стълб $\underset{(n,1)}{K}$ с корелатите, а нейната транспонирана матрица-ред се представя като $\underset{(1,n)}{K}^{T} = \left[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \ldots \quad k_n \right]$. Системата уравнения има вида:

$$\begin{aligned} &\underset{(n,n)}{N}\underset{(n,1)}{K} + \underset{(n,3)}{C}\underset{(3,1)}{X} + \underset{(n,1)}{W} = \underset{(n,1)}{0} \\ &\underset{(3,n)}{C^T}\underset{(n,1)}{K} = \underset{(3,1)}{0} \end{aligned} \tag{26}$$

Матрицата $\underset{(n,n)}{N}$ се определя по формулата:

$$\underset{(n,n)}{N} = \underset{(n,2n)}{B}\underset{(2n,2n)}{P^{-1}}\underset{(2n,n)}{B^T} \tag{27}$$

Матрицата $\underset{(2n,2n)}{P^{-1}}$ е диагонална, т.е. всички елементи извън главния диагонал са равни на 0, тъй като по условие всички «измерени» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ са некорелирани. Измерванията са равноточни ($m_x = m_y = m$), следователно елементите от главния диагонал ще съдържат една и съща стойност, равна на обратната тежест на всички измервания. Тежестта на измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ се определя по известната формула $p = \frac{c}{m^2}$. Целесъобразно е за константата да се приеме $c = m^2$, откъдето за тежестите на всички «измерени» стойности $x_i^{'}, y_i^{'} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots n)$ се получава $p = 1$. Матрицата на тежестите $\underset{(2n,2n)}{P}$, както и матрицата на обратните тежести $\underset{(2n,2n)}{P^{-1}}$ са единични, т.е.:

$$\underset{(2n,2n)}{P} = \underset{(2n,2n)}{P^{-1}} = \underset{(2n,2n)}{E} \tag{28}$$

Тогава матрицата $\underset{(n,n)}{N}$ от форм.*(27)* приема следния вид:

$$\begin{aligned} &\underset{(n,n)}{N} = \underset{(n,2n)}{B}\underset{(2n,n)}{B^T} = \\ &= \begin{bmatrix} (x_1 - x_c)^2 + (y_1 - y_c)^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (x_2 - x_c)^2 + (y_2 - y_c)^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (x_n - x_c)^2 + (y_n - y_c)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{29}$$

Записани като блокова матрица, формули *(26)* изглеждат по следния начин:

$$\begin{bmatrix} \underset{(n,n)}{N} & \underset{(n,3)}{C} \\ \underset{(3,n)}{C^T} & \underset{(3,3)}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{(n,1)}{K} \\ \underset{(3,1)}{X} \end{bmatrix} + \underset{(n,1)}{W} = \underset{(n,1)}{0} \tag{30}$$

Системата *(30)* не е нормална, но е симетрична спрямо главния диагонал и може да бъде решена по същия начин, както една нормална система. От решението се получават n на брой корелати k_i и трите параметъра (неизвестни) $\delta x_c, \delta y_c$ и δR. Стойностите на първоначално избраните неизвестни (параметрите на кръговата крива) x_c, y_c и R се определят по форм.*(17)*. Поправките v_i^x, v_i^y към «измерени» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ се получават от корелатните уравнения на поправките:

$$\underset{(2n,1)}{V} = \underset{(2n,2n)}{P^{-1}}\underset{(2n,n)}{B^T}\underset{(n,1)}{K} \tag{31}$$

след което се определят изравнените стойности на измерените величини по форм.*(18)*, извършва се крайна проверка и оценка на точността.

Ще бъде решен числен пример за извеждане на параметрите на «изравнителна» кръгова крива чрез условно изравнение с неизвестни, като се използват определените координати на 8 точки, описващи кривата, както е показано на фиг.1.

Табл.1

№	$x_i^{'}, [m]$	$y_i^{'}, [m]$	$W_i, [m^2]$	$v_i^x, [mm]$	$v_i^y, [mm]$	$x_i, [m]$	$y_i, [m]$
1	1424.31	1080.51	-0.092	-11.4	7.4	1424.299	1080.517
2	1479.15	1151.60	19.515	10.8	-9.8	1479.161	1151.590
3	1575.98	1236.90	7.273	-7.2	10.3	1575.973	1236.910
4	1695.92	1301.07	40.897	16.0	-41.0	1695.936	1301.029
5	1820.71	1334.10	-0.249	-3.8	25.5	1820.706	1334.126
6	1937.12	1339.32	-3.140	1.5	25.9	1937.122	1339.346
7	2085.50	1310.99	17.240	-6.3	-19.0	2085.494	1310.971
8	2182.77	1268.26	-0.256	0.3	0.6	2182.770	1268.261
Σ	14201.46	10022.75		-0.1	-0.1	14201.461	10022.750

В лявата част на табл.1 са записани определените координати на 8 точки от кръговата крива. Изчислени са следните стойности на детерминантите $\Delta, \Delta_t, \Delta_x$ и Δ_y съгласно формули *(11)*, *(12)*, *(13)* и *(14)* за $\frac{n}{2} = 5$ и $n = 8$:

$$\Delta = -471655.086 \qquad \Delta_t = -1832605373880$$

$$\Delta_x = -898271307 \qquad \Delta_y = -361522464$$

Приблизителните стойности на неизвестните x_c^0, y_c^0, t_0 и се определят по формулите на Крамер *(15)*, а приблизителната стойност R_0 се определя по форм. *(16)*. С оглед на анализа, който се прави в табл.2 приблизителните стойности са изчислени и записани с точност до четвъртия знак след десетичната точка.

$$x_c^0 = 1904.5089 \quad y_c^0 = 766.4975 \quad t_0 = 3885477.8169 \quad R_0 = 573.7550$$

С така изчислените приблизителни стойности на неизвестните се определят несъвпаденията W_i по форм. *(22)* и коефициентите пред поправките и неизвестните в уравненията на поправките от форм. *(23)*. Следва да се обърне внимание, че несъвпаденията W_i се получават в дименсия *квадратни метри* и техните абсолютни стойности в много голяма степен зависят от броя на значещите цифри на приблизителните стойности на неизвестните, от които се определят самите несъвпадения. Това се обяснява с обстоятелството, че в изразите *(22)* за изчисляване на несъвпаденията приблизителните стойности участват, повдигнати на квадрат. В таблица 2 са дадени стойностите на несъвпаденията, изчислени с приблизителни стойности на неизвестните с различен брой значещи цифри за първата, петата и осмата точка от списъка, от които точки съгласно уравнения *(6)* са изведени приблизителните стойности на трите неизвестни.

Табл.2

№	$x_c^0, [m]$	$y_c^0, [m]$	$R_0, [m]$	$W_1, [m^2]$	$W_5, [m^2]$	$W_8, [m^2]$
1	1904.51	766.50	573.76	2.629	-4.169	-4.406
2	1904.509	766.498	573.755	-0.092	-0.249	-0.256
3	1904.5089	766.4975	573.7550	0.017	0.027	0.023

За тези точки, респ. за тези уравнения на поправките трябва да се получат нулеви стойности на несъвпаденията в границите на изчислителната точност, защото «измерените» координати $x_1^{'}, y_1^{'}, x_5^{'}, y_5^{'}$ и $x_8^{'}, y_8^{'}$ заедно с приблизителните стойности x_c^0, y_c^0 и R_0 трябва да удовлетворяват уравненията *(6)*. От табл.2 се вижда, че за да се получи практически нулева стойност на несъвпаденията W_1, W_5 и W_8 е необходимо приблизителните стойности на неизвестните да бъдат определени с точност до милиметър.

След съставянето и решаването на системата *(30)* са получени корелатите (n на брой) и трите неизвестни $\delta x_c = -27.1\ mm$, $\delta y_c = 69.4\ mm$ и $\delta R = -47.3\ mm$. Следва изчисление на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни (параметрите на кръговата крива) $x_c = x_c^0 + \delta x_c = 1904.482\ m$, $y_c = y_c^0 + \delta y_c = 766.567\ m$ и $R = R_0 + \delta R = 573.708\ m$. Окончателното уравнение на «изравнителната» кръгова крива е:

$$(x - 1904.482)^2 + (y - 766.567)^2 - 573.708^2 = 0 \qquad (32)$$

Поправките и изравнените стойности на координатите са изчислени в последните четири колони на табл.1. Контролира се $[vv] = 4230.01$ и $[kW] = -4230.01$. Вижда се, че е изпълнено $[vv] = -[kW]$. Крайната проверка се извършва чрез заместване на изравнените стойности на координатите в уравнение *(32)* – изравнените стойности трябва да удовлетворяват същото уравнение.

Ще бъде разгледано друго решение на същата задача, при което от условно изравнение с неизвестни се преминава към **параметрично изравнение**. За целта уравненията на поправките *(23)* се представят в следния вид:

$$(x_i^{'} - x_c^0)v_i^x + (y_i^{'} - y_c^0)v_i^y = (x_i^{'} - x_c^0)\delta x_c + (y_i^{'} - y_c^0)\delta y_c + R_0\delta R + f_i = 0 \quad i = 1,2,...,n \qquad (33)$$

Въвежда се означението

$$v_i = (x_i^{'} - x_c^0)v_i^x + (y_i^{'} - y_c^0)v_i^y \qquad (34)$$

и уравненията *(33)* добиват следния вид:

$$v_i = (x_i^{'} - x_c^0)\delta x_c + (y_i^{'} - y_c^0)\delta y_c + R_0\delta R + f_i = 0 \quad i = 1,2,...,n \qquad (35)$$

където свободните членове f_i в дясната част на уравнения *(35)* са равни на несъвпаденията W_i от матрицата $\underset{(n,1)}{W}$ на форм. *(25)*, взети с обратен знак:

$$f_i = -W_i = -\frac{1}{2}[(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2 - R_0^2] \qquad (36)$$

Уравненията *(35)* вече са уравнения на поправките при параметрично изравнение, представени в обичайния им вид. За да се определят техните тежести, отново се изхожда от предпоставката, че «измерените» координати $x_i^{'}, y_i^{'}$ са некорелирани и равноточни, т.е. те имат една и съща средна квадратна грешка $m_x = m_y = m$ и съответно тежест $p_x = p_y = p$. Тъй като свободният член на отделно уравнение на поправките е получен от двойка стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$, неговата тежест (и тежестта на самото уравнение на поправките) се определя по формулата:

$$\frac{1}{p_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i^{'}}\right)^2 \frac{1}{p} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i^{'}}\right)^2 \frac{1}{p} = (x_i^{'} - x_c^0)^2 \frac{1}{p} + (y_i^{'} - y_c^0)^2 \frac{1}{p} = [(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2]\frac{1}{p} \qquad (37)$$

В рамките на изчислителната точност се приема тежест $p = (x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2 = R_0^2$ на измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ и всички уравнения на поправките получават тежест $p_i = 1$. Тогава матрицата с тежестите на свободните членове на уравненията на поправките е единична матрица, т.е. $\underset{(n,n)}{P} = \underset{(n,n)}{E}$.

Записани в матричен вид, уравненията на поправките *(35)* изглеждат по следния начин:

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,3)}{C}\,\underset{(3,1)}{X} + \underset{(n,1)}{f} \qquad (38)$$

където $\underset{(1,n)}{V^T} = [v_1, v_2, ... v_n]$, матрицата $\underset{(n,1)}{f}$ е равна на матрицата $\underset{(n,1)}{W}$ от форм. *(13)*, умножена с -1, а матриците $\underset{(n,3)}{C}$ и $\underset{(3,1)}{X}$ са същите, както във форм. *(25)*. Получава се нормална система

$$\underset{(3,3)}{N}\,\underset{(3,1)}{X} + \underset{(3,1)}{F} = \underset{(3,1)}{0} \qquad (39)$$

където

$$\underset{(3,3)}{N} = \underset{(3,n)}{C^T}\,\underset{(n,3)}{C}; \qquad \underset{(3,1)}{F} = \underset{(3,n)}{C^T}\,\underset{(n,1)}{f} \qquad (40)$$

От решението на системата нормални уравнения *(39)* се получават стойностите на неизвестните δx_c, δy_c и δR. След това се изчисляват изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни (параметрите на кръговата крива) $x_c = x_c^0 + \delta x_c$, $y_c = y_c^0 + \delta y_c$ и $R = R_0 + \delta R$. Изчисляват се поправките v_i от уравненията на поправките *(35)*.

За да се определят поправките v_i^x и v_i^y към измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$, всяко уравнение *(34)* се разглежда като отделно условно уравнение на поправките. Ако k_i е единствената корелата, която се получава от това условно уравнение на поправките, самите поправки v_i^x и v_i^y в съответствие с форм. *(21)* се определят от следните корелатни уравнения на поправките:

$$v_i^x = \frac{1}{p} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) = \frac{x_i^{'} - x_c^0}{(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2} k_i ;$$

$$v_i^y = \frac{1}{p} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right) = \frac{y_i^{'} - y_c^0}{(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2} k_i \tag{41}$$

Като се заместят корелатните уравнения на поправките *(41)* във форм. *(34)* се получава:

$$v_i = \frac{(x_i^{'} - x_c^0)^2}{(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2} k_i + \frac{(y_i^{'} - y_c^0)^2}{(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2} k_i = k_i \tag{42}$$

Корелатата k_i от горната формула се замества с поправката v_i във форм. *(41)* и се получават следните изрази за поправките v_i^x и v_i^y към измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$:

$$v_i^x = \frac{x_i^{'} - x_c^0}{(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2} v_i ; \qquad v_i^y = \frac{y_i^{'} - y_c^0}{(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2} v_i \tag{43}$$

Във форм. *(43)* вместо изразите $(x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2$ с достатъчна точност може да се използва квадрата на приблизителната стойност на радиуса R_0. Така се получават окончателните формули за поправките v_i^x и v_i^y:

$$v_i^x = \frac{x_i^{'} - x_c^0}{R_0^2} v_i ; \qquad v_i^y = \frac{y_i^{'} - y_c^0}{R_0^2} v_i \tag{44}$$

За контрола трябва да бъде изпълнено:

$$[v_i v_i] = [p v_i^x v_i^x] + [p v_i^y v_i^y] \tag{45}$$

Ще бъде решен числен пример за извеждане на параметрите на «изравнителна» кръгова крива чрез описания начин на параметрично изравнение, като се използват данните от решения пример от табл.1, при който е приложено условно изравнение с неизвестни.

Табл.3

№	$x_i^{'}, [m]$	$y_i^{'}, [m]$	$f_i, [m^2]$	$v_i, [m^2]$	$v_i^x, [mm]$	$v_i^y, [mm]$	$x_i, [m]$	$y_i, [m]$
1	1424.31	1080.51	0.092	7.80	-11.4	7.4	1424.299	1080.517
2	1479.15	1151.60	-19.515	-8.35	10.8	-9.8	1479.161	1151.590
3	1575.98	1236.90	-7.273	7.18	-7.2	10.3	1575.973	1236.910
4	1695.92	1301.07	-40.897	-25.25	16.0	-41.0	1695.936	1301.029
5	1820.71	1334.10	0.249	14.80	-3.8	25.5	1820.706	1334.126
6	1937.12	1339.32	3.140	14.90	1.5	25.9	1937.122	1339.346
7	2085.50	1310.99	-17.240	-11.48	-6.3	-19.0	2085.494	1310.971
8	2182.77	1268.26	0.256	0.41	0.3	0.6	2182.770	1268.261
Σ	14201.46	10022.75		0.01	-0.1	-0.1	14201.461	10022.750

В лявата част на табл.3 са записани определените координати на 8 точки от кръговата крива (същите, както в табл.1) и са изчислени елементите на матрицата $\underset{(n,1)}{f}$, които се явяват свободни членове на уравненията на поправките *(38)*. Приблизителните стойности x_c^0, y_c^0 и R_0 на неизвестните (параметрите на кръговата крива) са определени по форм. *(15)* и *(16)* и са получени следните стойности:

$$x_c^0 = 1904.509 \quad y_c^0 = 766.498 \quad t_0 = 3885477.817 \quad R_0 = 573.755$$

В сила са изложените по-горе съображения за броя на значещите цифри на приблизителните стойности.

След съставянето и решаването на системата *(39)* са получени трите неизвестни $\delta x_c = -27.1\ mm,\ \delta y_c = 69.4\ mm$ и $\delta R = -47.3\ mm$. Следва изчисление на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни (параметрите на кръговата крива) $x_c = x_c^0 + \delta x_c = 1904.482\ m$, $y_c = y_c^0 + \delta y_c = 766.567\ m$ и $R = R_0 + \delta R = 573.708\ m$. Окончателното уравнение на «изравнителната» права е същото, както при форм. *(32)*:

$$(x - 1904.482)^2 + (y - 766.567)^2 - 573.708^2 = 0$$

Поправките v_i се определят от уравненията на поправките *(35)*. От тях по форм.*(44)* се изчисляват поправките v_i^x и v_i^y към «измерените» координати $x_i^{'}, y_i^{'}$. Изчисляват се изравнените стойности на координатите на точките от правата по форм. *(18)* и се записват в последните две колони на табл.3.

Проверява се $[vv] = 1392.67$ и $[ff.3] = 1392.67$. Изпълнено е $[vv] = [ff.3]$, което гарантира верността на решаването на нормалната система. Крайната проверка не може да бъде направена по стандартния за параметричното изравнение начин – чрез двукратно изчисляване на поправките, един път от уравненията на поправките и втори път като разлики между изравнените и измерените стойности. Причината е, че изравнените стойности на координатите x_i, y_i се определят по форм. *(18)* чрез поправките v_i^x и v_i^y, които на свой ред са получени от поправката v_i.

Изравнените стойности не могат да се определят от уравненията на измерванията *(5)*, тъй като във всяко такова уравнение фигурират по две изравнени стойности на координати x_i, y_i. Тогава крайната проверка ще се извърши чрез заместване на изравнените стойности x_i, y_i, определени по форм. *(18)* в уравнението на кръговата крива *(32)* – изравнените стойности трябва да удовлетворяват това уравнение.

Като се отчита, че в рамките на изчислителната точност тежестите на «измерените» координати $x_i^{'}, y_i^{'}$ се определят от израза $p = (x_i^{'} - x_c^0)^2 + (y_i^{'} - y_c^0)^2 = R_0^2$, се извършва следната проверка:

$$\begin{aligned} &[v_i v_i] = 1392.67 && [pv_i^x v_i^x] = R_0^2 [v_i^x v_i^x] = 201.11 \\ &[pv_i^y v_i^y] = R_0^2 [v_i^y v_i^y] = 1191.79 && [pv_i^x v_i^x] + [pv_i^y v_i^y] = 1392.90 \end{aligned} \tag{46}$$

Поправките v_i^x и v_i^y участват в горните формули в димензия *метри*, тъй като поправките v_i са в димензия *квадратни метри*. Вижда се, че проверката *(45)* е изпълнена в границите на изчислителната точност.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Описаните начини на извеждане на параметрите на «изравнителна» кръгова крива по МНМК намират приложение в инженерната геодезия при рехабилитация на пътища. За отделен участък от кръгова крива на съществуващия път се заснемат определен брой точки от оста, след което техните координати се определят в геодезическа координатна система. След това по някои от описаните начини се определят параметрите на «изравнителната» кръгова крива, която представлява проектната ос на рехабилитирания път в същия криволинеен пътен участък.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасов, С., Теория на математическата обработка на геодезическите измервания, С., Техника, 1988.
2. Бурмистров, Г., Основы способа наименьших квадратов, М., Госгеолтехиздат, 1963.
3. Тонков, Д., Параметрично изравнение по МНМК – случай, когато в уравненията на измерванията участват няколко изравнени стойности на измерени величини, С., Юбилейна научна конференция 65 години УАСГ, С. 17-18 май 2007.