ПАРАМЕТРИЧНО ИЗРАВНЕНИЕ ПО МЕТОДА НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ – СЛУЧАЙ, КОГАТО В УРАВНЕНИЯТА НА ИЗМЕРВАНИЯТА УЧАСТВАТ НЯКОЛКО ИЗРАВНЕНИ СТОЙНОСТИ НА ИЗМЕРЕНИ ВЕЛИЧИНИ

Инж. Димитър Т. Тонков
Катедра «Приложна геодезия»

Резюме: Въпросът за параметричното изравнение по Метода на най-малките квадрати (МНМК) обикновено се разглежда при предпоставката, че в отделните уравнения на измерванията участва само по една изравнена стойност на измерена величина. Понякога се налага в отделните уравнения на измерванията да участват по няколко изравнени стойности на измервани величини. В настоящата публикация е разгледан поставеният въпрос за параметрично изравнение по МНМК на резултати от измервания, когато в отделните уравнения на измерванията участват по няколко изравнени стойности на измервани величини.

Abstract: The question for parametric adjustment by Least squares method is usually treated with the precondition that the individual observation equations contain only one adjusted value of the observed quantity. Sometimes it’s necessary to include more than one adjusted value of the observed quantity in the observation equations. The problem with the parametric adjustment of observation data by Least squares method when the individual observation equations contain several adjusted values of the observed quantities is investigated in this article.

Въпросите за параметричното изравнение по Метода на най-малките квадрати (МНМК) обикновено се разглеждат при предпоставката, че в отделните уравнения на измерванията участва само по една изравнена стойност на измерена величина. В този случай съгласно [Атанасов, 1988] «от лявата страна на уравненията на измерванията се записват изравнените стойности на измерените величини, а от дясната – тяхната връзка с неизвестните и с дадените величини, ако има такива». Така съставените уравнения на измерванията са толкова на брой, колкото е броят n на самите измервания и имат следния вид

(1) $$l_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad i = 1,2,\ldots n$$

където l_i са изравнените стойности на измерените величини, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ са избраните неизвестни (параметри), а k е броят на необходимите величини за еднократното решение на задачата. Тъй като между изравнените стойности на измерените величини l_i, измерените стойности $l_i^{'}$ и поправките v_i съществува зависимостта

(2) $$l_i = l_i^{'} + v_i$$

уравненията на измерванията *(1)* могат да се запишат по следния начин

(3) $$l_i^{'} + v_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \quad i = 1,2,\ldots n$$

откъдето се получават т.нар. уравнения на поправките

(4) $$v_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) - l_i^{'} \quad i = 1,2,\ldots n$$

Вижда се, че във всяко отделно уравнение на измерванията *(1)* участва само по една изравнена стойност на измерена величина l_i и във всяко отделно уравнение на поправките *(4)* участва само по една измерена стойност $l_i^{'}$ и по една поправка v_i.

Понякога се налага в отделните уравнения на измерванията да участват по няколко изравнени стойности на измерени величини. При по-нататъшното изложение се приема, че *измерванията са некорелирани* и освен това *всяка изравнена стойност на измерена величина участва само в едно отделно уравнение на измерванията*. В общия случай в първото уравнение на измерванията участват m_1 на брой изравнени стойности на измерени величини, във второто уравнение на измерванията - m_2 на брой изравнени стойности и т.н. Уравненията на измерванията в общ вид се представят по следния начин

(5)
$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_k, l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_m}) = 0$$

където $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_m}$ са m_i на брой изравнени стойности на измерени величини, които участват в i-тото уравнение на измерванията.

Ако се въведат приблизителни стойности на неизвестните $x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0$ така, че всяка изравнена стойност x_i да се представя като сума от приблизителната стойност x_i^0 и нарастването δx_i, т.е.

(6)
$$x_i = x_i^0 + \delta x_i$$

и изравнените стойности на измерените величини l_{i_k} се представят съгласно *(2)* като сума от измерените стойности $l_{i_k}^{'}$ и поправките v_{i_k}, уравненията на измерванията *(5)* приемат следния вид

(7)
$$F_i(x_1^0 + \delta x_1, x_2^0 + \delta x_2, \dots, x_k^0 + \delta x_k, l_{i_1}^{'} + v_{i_1}, l_{i_2}^{'} + v_{i_2}, \dots, l_{i_m}^{'} + v_{i_m}) = 0$$

След развитието на функцията *(7)* в Тейлоров ред се получава

(8)
$$F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, l_{i_1}^{'}, l_{i_2}^{'}, \dots, l_{i_m}^{'}) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_{x_0, l'} \delta x_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_{x_0, l'} \delta x_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x_0, l'} \delta x_k +$$
$$+ \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}}\right)_{x_0, l'} v_{i_1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}}\right)_{x_0, l'} v_{i_2} + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}}\right)_{x_0, l'} v_{i_m} = 0$$

или

(9)
$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}}\right)_{x_0, l'} v_{i_1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}}\right)_{x_0, l'} v_{i_2} + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}}\right)_{x_0, l'} v_{i_m} =$$
$$= -\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_{x_0, l'} \delta x_1 - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_{x_0, l'} \delta x_2 - \dots - \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x_0, l'} \delta x_k - F_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0, l_{i_1}^{'}, l_{i_2}^{'}, \dots, l_{i_m}^{'})$$

При определянето на конкретните числови стойности на частните производни в израза *(9)* се използват измерените стойности и приблизителните стойности на неизвестните. Ако се въведат означенията

(10)

$$v_i = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}}\right)_{x_0,l'} v_{i_1} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}}\right)_{x_0,l'} v_{i_2} + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}}\right)_{x_0,l'} v_{i_m}$$

$$a_i = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)_{x_0,l'} ; \quad b_i = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_2}\right)_{x_0,l'} ; \quad k_i = -\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)_{x_0,l'}$$

$$f_i = -F_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0, l'_{i_1}, l'_{i_2}, \ldots, l'_{i_m})$$

се получават уравненията на поправките в обичайния им вид

(11)
$$v_i = a_i \delta x_1 + b_i \delta x_2 + \ldots + k_i \delta x_k + f_i$$

Сега следва да се изчислят тежестите на свободните членове на уравненията на поправките *(11).* Ако отделните измерени стойности $l'_{i_1}, l'_{i_2}, \ldots, l'_{i_m}$ имат тежести съответно $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_m}$, тежестта p_i на функцията f_i от тези измерени стойности, т.е. тежестта на свободния член на i-тото уравнение на поправките се определя по формулата

(12)
$$\frac{1}{p_i} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}}\right)^2_{x_0,l'} \frac{1}{p_{i_1}} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}}\right)^2_{x_0,l'} \frac{1}{p_{i_2}} + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}}\right)^2_{x_0,l'} \frac{1}{p_{i_m}}$$

Както е известно, за да се получат поправките v_i с така определените съгласно *(12)* тежести p_i при спазване на основния принцип на Метода на най-малките квадрати $[pvv] = min$ е необходимо да се състави и реши системата нормални уравнения. От решението на нормалната система се получават неизвестните $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_k$ и с тези неизвестни чрез уравненията на поправките *(11)* се изчисляват самите поправки v_i. След това се изчисляват изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ по формула *(6)*.

За да се получат отделните значения $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$ на поправките към измерените стойности $l'_{i_1}, l'_{i_2}, \ldots, l'_{i_m}$, първото равенство от формули *(10)* се разглежда като едно отделно условно уравнение на поправките $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$. Ако k_i е корелатата на това условно уравнение, поправките $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$ се определят по формулите

(13)
$$v_{i_1} = \frac{1}{p_{i_1}} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}}\right)_{x_0,l'} ; \quad v_{i_2} = \frac{1}{p_{i_2}} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}}\right)_{x_0,l'} ; \quad \ldots \quad v_{i_m} = \frac{1}{p_{i_m}} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}}\right)_{x_0,l'}$$

Така определените значения на поправките $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$ се заместват в първото равенство на формули *(10)* и се получава

(14) $$v_i = \left\{ \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}} \right)^2_{x_0, l'} \frac{1}{p_{i_1}} + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}} \right)^2_{x_0, l'} \frac{1}{p_{i_2}} + \ldots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}} \right)^2_{x_0, l'} \frac{1}{p_{i_m}} \right\} k_i$$

Изразът в големите скоби на последната формула съгласно *(12)* е обратната тежест $\frac{1}{p_i}$ на свободния член на уравнението на поправките с номер i, т.е.

(15) $$v_i = \frac{1}{p_i} k_i$$

откъдето следва, че корелатата k_i се определя по формулата

(16) $$k_i = p_i v_i$$

След заместване на стойността на корелатата k_i във формули *(13)* се получават следните изрази за поправките $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$

(17) $$v_{i_1} = \frac{p_i}{p_{i_1}} \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}} \right)_{x_0, l'} v_i; \quad v_{i_2} = \frac{p_i}{p_{i_2}} \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}} \right)_{x_0, l'} v_i; \quad \ldots \quad v_{i_m} = \frac{p_i}{p_{i_m}} \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}} \right)_{x_0, l'} v_i$$

които могат да служат като окончателни формули за определянето на тези поправки. С така изчислените стойности на поправките $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}$ се определят изравнените стойности $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_m}$ на измерените величини.

Крайната проверка на изравнението по МНМК следва да се извърши чрез заместване на изравнените стойности $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_m}$ на измерените величини и на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ в уравненията на измерванията *(5)* – те трябва да се удовлетворяват от тези изравнени стойности.

Формули *(17)* могат да бъдат представени по следния начин

(18) $$p_{i_1} v_{i_1} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}} \right)_{x_0, l'} p_i v_i; \quad p_{i_2} v_{i_2} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}} \right)_{x_0, l'} p_i v_i; \quad \ldots \quad p_{i_m} v_{i_m} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}} \right)_{x_0, l'} p_i v_i$$

Ако първото уравнение от *(18)* се умножи от двете страни с v_{i_1}, второто уравнение – с v_{i_2} и т.н. и всички уравнение се сумират, достига се до следния израз

(19) $$p_{i_1} v_{i_1} v_{i_1} + p_{i_2} v_{i_2} v_{i_2} + \ldots + p_{i_m} v_{i_m} v_{i_m} = p_i v_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_1}} \right)_{x^0, l'} v_{i_1} + p_i v_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_2}} \right)_{x^0, l'} v_{i_2} + \ldots + p_i v_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial l_{i_m}} \right)_{x^0, l'} v_{i_m}$$

След като се вземе предвид първото равенство от формули *(10)* се получава

(20) $$p_{i_1} v_{i_1} v_{i_1} + p_{i_2} v_{i_2} v_{i_2} + \ldots + p_{i_m} v_{i_m} v_{i_m} = p_i v_i v_i$$

където p_i и v_i са съответно тежестта и поправката за показаното във формула *(11)* уравнението на поправките с номер i. След сумиране на всички уравнения *(20)* се получава

(21) $$\left[pvv\right]=\left[p_{i_k}v_{i_k}v_{i_k}\right]$$

Едно от възможните приложения на разгледания случай на параметрично изравнение е при определяне на параметрите на емпирични формули по МНМК. Това се налага, когато функционалната зависимост на една величина y от друга величина x не може да се установи теоретично и единствената възможност е тази зависимост да бъде установена по емпиричен път чрез изравнение по МНМК. За целта се извършват измервания, в резултат на които се получават n на брой двойки измерени стойности $x_i^{'}$ и $y_i^{'}$.

Ако видът на функцията не е предварително известен от теоретични съображения, двойките стойности $x_i^{'}$ и $y_i^{'}$ се нанасят в подходящ мащаб в правоъгълна координатна система и от получената «полоса» на точките се определя приблизително видът на функцията, напр. линейна, параболична, периодична и т.н. След установяването на вида на функцията задачата се свежда до определяне на нейните параметри по МНМК.

При определянето на аналитичния израз на зависимостта между величините x и y трябва да се има предвид, че графиката на функцията не трябва да преминава през всички получени точки или дори през част от тях, а «трябва да минава между точките така, че да отразява най-правилно зависимостта между величините y и x, като се «изглаждат», «изравняват» случайните отклонения» [Атанасов, 1988].

При определяне на аналитичния израз на функцията са възможни следните три случая:

- Стойностите $x_i^{'}$ са известни (дадени) или са измерени много точно и се приемат за безгрешни – в този случай случайни грешки от измерванията съдържат само стойностите $y_i^{'}$.
- Стойностите $y_i^{'}$ са известни (дадени) или са измерени много точно и се приемат за безгрешни – в този случай случайни грешки от измерванията съдържат само стойностите $x_i^{'}$.
- Случайни грешки от измерванията съдържат както стойностите $x_i^{'}$, така и стойностите $y_i^{'}$.

Във връзка с основния разглеждан въпрос в настоящата публикация, а именно случаят на параметрично изравнение по МНМК, когато в отделните уравнения на измерванията участват по няколко изравнени стойности на измерени величини ще бъде разгледан пример за емпирично определяне на параметрите на линейна функция (права линия), когато случайни грешки от измерванията съдържат както стойностите $x_i^{'}$, така и стойностите $y_i^{'}$.

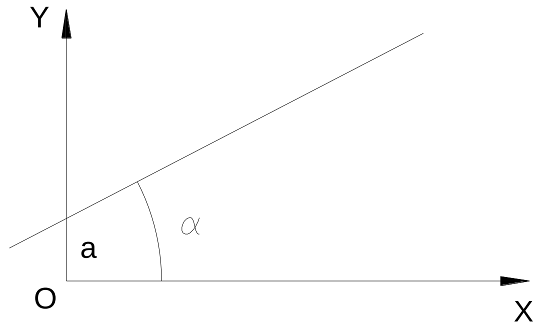
За решаването на формулираната задача се използва уравнението на права

(22) $$y=a+bx$$

където параметрите на правата са величините a и b. Параметърът b се нарича ъглов коефициент на правата и представлява тангенса на ъгъла α, който правата сключва с оста OX, т.е.

(23) $$b = tg\alpha$$

а параметърът a е дължината на отреза, който правата отсича от оста ОУ, както е показано на фиг.1 (понякога параметърът a се нарича «начална ордината»).



Фиг.1

Общият брой на измерванията е $2n$. Измерени са n на брой абсциси x_i' и n на брой ординати y_i'. Измерванията са равноточни, т.е. всички стойности x_i' и y_i' са измерени с една и съща средна квадратна грешка $m_x = m_y = m$. Като неизвестни са избрани параметрите на правата a и b. Очевидно не могат да бъдат съставени $2n$ на брой уравнения на измерванията по правилото «от лявата страна на уравненията на измерванията се записват изравнените стойности на измерените величини, а от дясната – тяхната връзка с неизвестните и с дадените величини, ако има такива», както е формулиран начинът на съставяне на уравненията на измерванията при [Атанасов, 1988]. Във всяко уравнение, което може да се състави участват по две изравнени стойности x_i и y_i на измерени величини, както се вижда от формула *(22)*.

Получават се n на брой уравнения на измерванията, показани в общ вид във формула *(5).* Конкретно за разглеждания пример могат да се напишат n на брой уравнения на измерванията от вида

(24) $$y_i - bx_i - a = 0 \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Така написаните уравнения на измерванията са в нелинеен вид и следва да се линеаризират чрез развитие в Тейлоров ред, като се запазят само линейните членове. За целта се въвеждат приблизителни стойности за неизвестните a и b. Тези приблизителни стойности a_0 и b_0 се изчисляват от произволно избрани две двойки измерени стойности (x_i', y_i'), например от (x_1', y_1') и (x_n', y_n') по формулите

(25) $$b_0 = \frac{y_n' - y_1'}{x_n' - x_1'}; \qquad a_0 = \frac{x_n' y_1' - x_1' y_n'}{x_n' - x_1'}$$

Първоначално избраните неизвестни се представят по следния начин:

(26) $$a = a_0 + \delta a; \quad b = b_0 + \delta b$$

и всъщност като неизвестни при изравнението остават нарастванията δa и δb. Освен това изравнените стойности x_i и y_i на измерените величини се представят в уравненията на измерванията *(24)* като сума от измерените стойности и поправките

(27) $$x_i = x_i^{'} + v_i^x ; \quad y_i = y_i^{'} + v_i^y$$

Тогава формула *(24)* добива вида

(28) $$(y_i^{'} + v_i^y) - (b_0 + \delta b)(x_i^{'} + v_i^x) - (a_0 + \delta a) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

След линеаризиране на уравненията на поправките *(28)* чрез развитие в Тейлоров ред със запазване само на линейните членове се получава следния израз

(29) $$\begin{aligned} & F_i(a_0 + \delta a, b_0 + \delta b, x_i^{'} + v_i^x, y_i^{'} + v_i^y) = \\ & = F_i(a_0, b_0, x_i^{'}, y_i^{'}) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial a} \right) \delta a + \left(\frac{\partial F_i}{\partial b} \right)_{x'} \delta b + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right)_{b_0} v_i^x + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right) v_i^y = 0 \end{aligned}$$

Частните производни в *(29)* се изчисляват с приблизителната стойност b_0 и с измерените стойности $x_i^{'}$ и имат следния вид

(30) $$\left(\frac{\partial F_i}{\partial a} \right) = -1; \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial b} \right) = -x_i^{'}; \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) = -b_0; \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right) = 1$$

Получават се следните уравнения на поправките

(31) $$-b_0 v_i^x + v_i^y = \delta a + x_i^{'} \delta b + (b_0 x_i^{'} + a_0 - y_i^{'})$$

където изразите в скоби от дясната страна са свободните членове на същите уравнения.

В съответствие с първото уравнение на *(10)* се въвежда означението

(32) $$v_i = -b_0 v_i^x + v_i^y$$

след което уравненията на поправките изглеждат по известния начин

(33) $$v_i = \delta a + x_i^{'} \delta b + (b_0 x_i^{'} + a_0 - y_i^{'})$$

Следва да бъдат определени тежестите p_i на уравненията на поправките *(33)* съгласно формула *(12).* Приема се, че всички стойности $x_i^{'}$ и $y_i^{'}$ са измерени с една и съща средна квадратна грешка $m_x = m_y = m$, т.е. имат еднаква тежест $p_x = p_y = p$. Целесъобразно е за тежестта на измерените стойности $x_i^{'}$ и $y_i^{'}$ да се приеме $p = b_0^2 + 1$ и тогава в съответствие с *(30)* формула *(12)* добива вида

(34) $$\frac{1}{p_i}=\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)^2\frac{1}{p}+\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right)^2\frac{1}{p}=\frac{b_0^2}{b_0^2+1}+\frac{1}{b_0^2+1}=1;\quad p_i=1$$

т.е. уравненията на поправките имат еднакви тежести, равни на единица.

Определянето на поправките v_i и на неизвестните δa и δb се свежда до решаване на уравненията на поправките *(33)* при спазване на основния принцип на Метода на най-малките квадрати $[\,pvv\,]=min$. За целта се образува системата нормални уравнения

(35) $$\begin{aligned}&n\delta a+\left[x'\right]\delta b+\left\{\left[x'\right]b_0+na_0-\left[y'\right]\right\}=0\\&\left[x'\right]\delta a+\left[x'x'\right]\delta b+\left\{\left[x'x'\right]b_0+\left[x'\right]a_0-\left[x'y'\right]\right\}=0\end{aligned}$$

където изразите в големите скоби представляват свободните членове на нормалните уравнения.

От решението на нормалната система се получават нарастванията δa и δb

(36) $$\begin{aligned}\delta a&=\frac{\left[x'x'\right]\left[y'\right]-\left[x'y'\right]\left[x'\right]-n\left[x'x'\right]a_0+\left[x'\right]^2a_0}{n\left[x'x'\right]-\left[x'\right]^2}\\\delta b&=\frac{n\left[x'y'\right]-\left[x'\right]\left[y'\right]+\left[x'\right]^2b_0-n\left[x'x'\right]b_0}{n\left[x'x'\right]-\left[x'\right]^2}\end{aligned}$$

а чрез тях и стойностите на първоначално избраните неизвестни a и b

(37) $$\begin{aligned}a&=a_0+\delta a=\frac{\left[x'x'\right]\left[y'\right]-\left[x'y'\right]\left[x'\right]}{n\left[x'x'\right]-\left[x'\right]^2}\\b&=b_0+\delta b=\frac{n\left[x'y'\right]-\left[x'\right]\left[y'\right]}{n\left[x'x'\right]-\left[x'\right]^2}\end{aligned}$$

Вижда се, че изразите *(36)* за определяне на нарастванията δa и δb са по-сложни от изразите *(37)* за получаване на стойностите на първоначално избраните неизвестни a и b (параметрите на правата), поради което е целесъобразно неизвестните a и b да се определят директно по формули *(37)*, без да се изчисляват нарастванията δa и δb съгласно формули *(36)*. В този случай уравненията на поправките *(33)* добиват следния вид

(38) $$v_i=a+x_i'b-y_i'$$

Ако се изчисляват нарастванията δa и δb съгласно формули *(36)*, стойностите на първоначално избраните неизвестни a и b се определят по формули *(26)*, а поправките v_i – по формула *(33).*

Следва изчисляване на поправките v_i^x и v_i^y към измерените стойности x_i' и y_i' по формули *(17).* Конкретно за разглеждания пример всички измерени стойности x_i' и y_i'

са измерени с еднаква точност и за тях е приета една и съща тежест $p=b_0^2+1$, откъдето следва, че уравненията на поправките *(33)*, респ. *(38)* имат също една и съща тежест $p_i=1$, изчислена по формула *(34).* Поправките v_i^x и v_i^y се изчисляват по следния начин

$$v_i^x=-\frac{b_0}{b_0^2+1}v_i; \quad v_i^y=\frac{1}{b_0^2+1}v_i \tag{39}$$

След изчисляването на поправките v_i, v_i^x и v_i^y трябва да се провери равенство *(20)*, което за разглеждания пример добива вида

$$[vv]=\left[pv^x v^x\right]+\left[pv^y v^y\right] \tag{40}$$

Изравнените стойности на измерените величини се изчисляват по формулите

$$x_i=x_i^{'}+v_i^x; \quad y_i=y_i^{'}+v_i^y \tag{41}$$

Ще бъде решен числен пример за определяне на параметрите a и b на права при условие, че са измерени абсцисите $x_i^{'}$ и ординатите $y_i^{'}$ на 8 точки от същата права. Измерените стойности $x_i^{'}$ и $y_i^{'}$ имат еднаква грешка $m_x=m_y=m$ и са дадени в таблица 1.

Табл.1

№	$x_i^{'}, [m]$	$y_i^{'}, [m]$	$f_i, [mm]$	$v_i, [mm]$	$v_i^x, [mm]$	$v_i^y, [mm]$	$x_i, [m]$	$y_i, [m]$
1	427.42	310.49	0	-10.5	4.9	-7.2	427.425	310.483
2	473.90	341.85	30	22.2	-10.3	15.2	473.890	341.865
3	510.12	366.33	11	5.3	-2.5	3.6	510.118	366.334
4	569.56	406.50	-17	-18.7	8.7	-12.8	569.569	406.487
5	620.07	440.59	4	5.9	-2.7	4.1	620.067	440.594
6	670.59	474.72	-7	-2.8	1.3	-1.9	670.591	474.718
7	749.19	527.82	-26	-16.1	7.5	-11.1	749.198	527.809
8	830.55	582.74	0	14.7	-6.8	10.1	830.543	582.750
Σ	4851.40	3451.04		0	0.1	0	4851.401	3451.040

Изчисляват се приблизителни стойности a_0 и b_0 на неизвестните съгласно формули *(25)*

$$a_0=21.835980; \quad b_0=0.67534046$$

след което се определят тежестите на измерените стойности $x_i^{'}$ и $y_i^{'}$ по формулата $p=b_0^2+1$. Съгласно формули *(34)* уравненията на поправките *(33)*, респ. *(38)* имат тежест $p_i=1$. Следва изчисление на величините $\left[x^{'}\right],\left[y^{'}\right],\left[x^{'}x^{'}\right],\left[y^{'}y^{'}\right]$ и $\left[x^{'}y^{'}\right]$. Получени са следните резултати

$$\left[x^{'}\right]=4851.40; \quad \left[x^{'}x^{'}\right]=3077166.79$$

$$\left[y'\right] = 3451.04\,; \quad \left[y'y'\right] = 1550363.87$$

$$\left[x'y'\right] = 2184082.05 \qquad n = 8$$

След това се изчисляват нарастванията δa и δb по формули *(36)*, а чрез тях и стойностите на първоначално избраните неизвестни a и b. Възможно е стойностите на първоначално избраните неизвестни да бъдат директно определени по формули *(37).* Получени са следните резултати

$$\delta a = -0.037164 \qquad a = a_0 + \delta a = 21.798816$$
$$\delta b = 0.000062407 \qquad b = b_0 + \delta b = 0.67540287$$

С изчислените нараствания δa и δb чрез уравненията на поправките *(33)* се получават поправките v_i, след което по формули *(17)* се определят поправките v_i^x и v_i^y към измерените стойности x_i' и y_i'. Резултатите са дадени в таблица 1. В същата таблица са дадени и изравнените стойности на измерените величини, изчислени по формули *(39).* Извършена е крайната проверка.

За да не се губи изчислителна точност при проверката на формула *(21)* поправките v_i, v_i^x и v_i^y в таблица 1 са изчислени с точност до десета от милиметъра, въпреки че определянето им с точност до милиметър е напълно достатъчно, като се има предвид, че измерените стойности са записани с 2 знака след десетичната точка, т.е. до сантиметър. Получава се

$$[vv] = 1498.8; \quad \left[pv^xv^x\right] = 471.1; \quad \left[pv^yv^y\right] = 1027.1$$

$$\left[pv^xv^x\right] + \left[pv^yv^y\right] = 1498.2$$

Вижда се, че проверката по формула *(21)* е изпълнена в границите на изчислителната точност.

Използвана литература

Атанасов, Ст., Теория на математическата обработка на геодезическите измервания. С., ДИ “Техника”, 1988.

Бурмистров, Г., Основы способа найменьших квадратов, М., Госгеолтехиздат, 1963.

PARAMETRIC ADJUSTMENT BY LEAST SQUARES METHOD WITH ADJUSTED VALUES OF THE OBSERVATIONS

Abstract: The question for parametric adjustment by Least squares method is usually treated with the precondition that the individual observation equations contain only one adjusted value of the observed quantity. Sometimes it’s necessary to include more than one adjusted value of the observed quantity in the observation equations. The problem with the parametric adjustment of observation data by Least squares method when the individual observation equations contain several adjusted values of the observed quantities is investigated in this article.