ОПРЕДЕЛЯНЕ НА ПАРАМЕТРИТЕ НА ЛИНЕЙНА ФУНКЦИЯ (ПРАВА ЛИНИЯ) ПО МЕТОДА НА НАЙ-МАЛКИТЕ КВАДРАТИ

Инж. Димитър Т. Тонков
Катедра «Приложна геодезия»

УВОД.

Параметричното изравнение по МНМК започва с избор на неизвестни (параметри) на изравнението съгласно изискванията, разгледани в §30, т.1 на [1]. След като се изберат неизвестни се съставят уравненията на измервнията, като се спазват следните правила:

- Броят на уравненията на измерванията е равен на броя на самите измервания.
- Уравненията на измерванията се съставят по правилото «от лявата страна на уравненията на измерванията се записват изравнените стойности на измерените величини, а от дясната – тяхната връзка с неизвестните и с дадените величини, ако има такива» [1].

$$l_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{1}$$

По-нататъшното решение се извършва по посочения в [1] начин – получаване на уравненията на поправките, съставяне и решаване на системата нормални уравнения и получаване на стойностите на неизвестните (параметрите), изчисляване на поправките от уравненията на поправките, определяне на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни и на измерените величини, крайна проверка и оценка на точността.

Този начин на изравнение може да се приложи при емпиричното определяне на параметрите на линейна функция (права линия), като ролята на «измервания» играят координатите x_i, y_i на определен брой точки, разположени по протежение на линията, както е показано на фиг.1, но само в случай, че координатите x_i са измерени много точно (приети са за безгрешни) и грешки съдържат само координатите y_i или обратно, координатите y_i са измерени много точно (приети са за безгрешни) и грешки съдържат само координатите x_i.

I. ФОРМУЛИРОВКА И АНАЛИЗ НА ЗАДАЧАТА.

В случай, че грешки съдържат както координатите x_i, така и координатите y_i на точките, следва да се отчетат изложените по-долу съображения.

Параметрите на правата се извеждат от n на брой точки, за които са определени координатите $x_i^{'}, y_i^{'}$, като се спазва условието сумата от квадратите на разстоянията от точките до правата да е минимална, т.е.:

$$[\delta_i^2] = min. \tag{2}$$

Такава права се нарича «най-вероятна» права или «изравнителна» права. Като «измерени» величини се разглеждат стойностите $x_i^{'}, y_i^{'}$ на координатите на точките, определящи правата. Броят на измерванията, от които се определя тази права чрез изравнение по МНМК е равен на $2n$ - това са стойностите $x_i^{'}, y_i^{'}$ на координатите на n на брой точки, както е показано на фиг.1. За да се определи броят на необходимите измервания за еднократното решение на задачата се взема предвид, че една права се дефинира от две точки, лежащи върху нея, т.е. необходими са две двойки стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$. Следователно броят на необходимите измервания за еднократното решение на задачата е $k = 4$. Броят на свръхизмерванията (допълнителните измервания) r се определя по формулата:

$$r = 2n - 4 \tag{3}$$

Определените стойности на координатите на точките $x_i^{'}, y_i^{'}$ са некорелирани и равноточни, т.е. $m_x = m_y = m$. За неизвестни могат да се приемат изравнените стойности x_i, y_i на координатите на две произволно избрани точки от правата, напр. първата и последната.

От внимателния анализ на задачата се вижда, че е невъзможно да се съставят $2n$ на брой уравнения на измерванията по правилото «от лявата страна на уравненията на измерванията се записват изравнените стойности на измерените величини, а от дясната – тяхната връзка с неизвестните и с дадените величини, ако има такива» [1] и да се извърши параметрично изравнение по МНМНК. Аналогично не могат да бъдат съставени $r = 2n - 4$ на брой условни уравнения и да се извърши корелатно изравнение.

II. РЕШЕНИЕ.

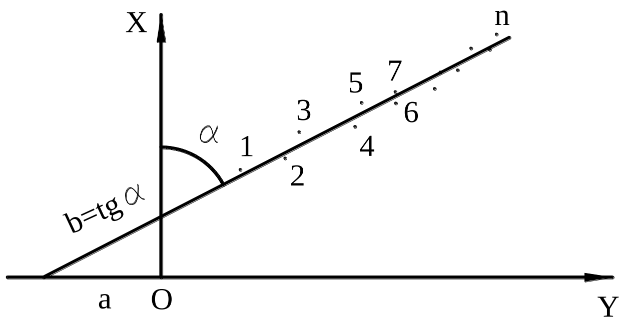
Единствената възможност е да се съставят n на брой уравнения от вида:

$$y_i = a + bx_i \qquad i = 1,2,3, \dots ,n \tag{4}$$

или

$$y_i - bx_i - a = 0 \qquad i = 1,2,3, \dots ,n \tag{5}$$

където a и b са параметри на правата (a е отрезът на правата от оста Y, а $b = tg\,\alpha$ се нарича ъглов коефициент – фиг.1). Те се явяват неизвестни (параметри) на изравнението.



Фиг.1

Вижда се, че във всяко от уравненията *(5)* участват двете неизвестни a и b и по една двойка координати x_i, y_i на отделна точка. Явява се случай на **условно изравнение с неизвестни**, което е най-общия случай на изравнение по МНМК. Уравненията *(5)* са в нелинеен вид и трябва да се линеаризират чрез развитие в Тейлоров ред. За целта се въвеждат приблизителни стойности на неизвестните a и b, като се използват «измерените» координати на първата и последната точка:

$$b_0 = \frac{y_n^{'} - y_1^{'}}{x_n^{'} - x_1^{'}}; \qquad a_0 = \frac{x_n^{'} y_1^{'} - x_1^{'} y_n^{'}}{x_n^{'} - x_1^{'}} \tag{6}$$

Изравнените стойности на неизвестните се представят като сума от приблизителните стойности и нараставанията δa, респ. δb, а изравнените стойности на координатите – като сума от «измерените» стойности и поправките v^x, съотв. v^y :

$$a = a_0 + \delta a; \quad b = b_0 + \delta b$$
$$x_i = x_i^{'} + v_i^x; \quad y_i = y_i^{'} + v_i^y \tag{7}$$

След заместването на изразите *(7)* в *(5)* се получават уравненията на поправките:

$$(y_i^{'} + v_i^y) - (b_0 + \delta b)(x_i^{'} + v_i^x) - (a_0 + \delta a) = 0 \tag{8}$$

Тези уравнения се представят в линеен вид чрез развитие в Тейлоров ред, като се запазват само членовете от първи ред:

$$\begin{aligned} F_i(a,b,x_i,y_i) &= F_i(a_0 + \delta a, b_0 + \delta b, x_i^{'} + v_i^x, y_i^{'} + v_i^y) = \\ &= F_i(a_0, b_0, x_i^{'}, y_i^{'}) + \left(\frac{\partial F_i}{\partial a}\right)\delta a + \left(\frac{\partial F_i}{\partial b}\right)_{x^{'}}\delta b + \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right)_{b_0} v_i^x + \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) v_i^y = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Отделните членове от уравненията на поправките *(9)* имат следния вид:

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial a}\right) = -1; \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial b}\right) = -x_i^{'}; \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right) = -b_0; \quad \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i}\right) = 1$$
$$F_i(a_0, b_0, x_i^{'}, y_i^{'}) = y_i^{'} - b_0 x_i^{'} - a_0 \tag{10}$$

Получават се уравнения на поправките

$$b_0 v_i^x - v_i^y + \delta a + x_i^{'}\delta b + (b_0 x_i^{'} + a_0 - y_i^{'}) = 0 \qquad i = 1,2,3,\dots,n \tag{11}$$

Тези уравнения могат да бъдат представени в матричен вид, както следва:

$$\underset{(n,2n)}{B}\,\underset{(2n,1)}{V} + \underset{(n,2)}{C}\,\underset{(2,1)}{X} + \underset{(n,1)}{W} = \underset{(n,1)}{0} \tag{12}$$

където:

$$\underset{(n,2n)}{B} = \begin{bmatrix} b_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \underset{(2n,1)}{V} = \begin{bmatrix} v_1^x \\ v_1^y \\ v_2^x \\ v_2^y \\ \dots \\ v_n^x \\ v_n^y \end{bmatrix}$$

$$\underset{(n,2)}{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{'} \\ 1 & x_2^{'} \\ 1 & x_3^{'} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n^{'} \end{bmatrix} \qquad \underset{(2,1)}{X} = \begin{bmatrix} \delta a \\ \delta b \end{bmatrix} \qquad \underset{(n,1)}{W} = \begin{bmatrix} b_0 x_1^{'} + a_0 - y_1^{'} \\ b_0 x_2^{'} + a_0 - y_2^{'} \\ b_0 x_3^{'} + a_0 - y_3^{'} \\ \dots \\ b_0 x_n^{'} + a_0 - y_n^{'} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Условното изравнение с неизвестни продължава със съставянето на система уравнения, от която се определят n на брой корелати k_i и двата параметъра на правата (неизвестни) a и b. Дефинира се матрица-стълб с корелатите $\underset{(1,n)}{K^T} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \dots & k_n \end{bmatrix}$. Системата уравнения има вида:

$$\begin{aligned} \underset{(n,n)}{N}\underset{(n,1)}{K} + \underset{(n,2)}{C}\underset{(2,1)}{X} + \underset{(n,1)}{W} &= \underset{(n,1)}{0} \\ \underset{(2,n)}{C^T}\underset{(n,1)}{K} &= \underset{(2,1)}{0} \end{aligned} \tag{14}$$

Матрицата $\underset{(n,n)}{N}$ се определя по формулата:

$$\underset{(n,n)}{N} = \underset{(n,2n)}{B}\underset{(2n,2n)}{P^{-1}}\underset{(2n,n)}{B^T} \tag{15}$$

Матрицата $\underset{(2n,2n)}{P^{-1}}$ е диагонална, т.е. всички елементи извън главния диагонал са равни на 0, тъй като по условие всички «измерени» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ са некорелирани. Измерванията са равноточни ($m_x = m_y = m$), следователно елементите от главния диагонал ще съдържат една и съща стойност, равна на обратната тежест на всички измервания. Тежестта на измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ се определя по известната формула $p = \dfrac{c}{m^2}$. Целесъобразно е за константата да се приеме $c = m^2(b_0^2 + 1)$, откъдето за тежестта на всички «измерени» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ се получава $p = b_0^2 + 1$. Тогава матрицата $\underset{(n,n)}{N}$ от форм.*(15)* се явява единична матрица:

$$\underset{(n,n)}{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{(n,n)}{E} \tag{16}$$

и форм.*(14)* добиват вида:

$$\begin{aligned} \underset{(n,1)}{K} + \underset{(n,2)}{C}\underset{(2,1)}{X} + \underset{(n,1)}{W} &= \underset{(n,1)}{0} \\ \underset{(2,n)}{C^T}\underset{(n,1)}{K} &= \underset{(2,1)}{0} \end{aligned} \tag{17}$$

Записани като блокова матрица, горните формули изглеждат по следния начин:

$$\begin{bmatrix} \underset{(n,n)}{E} & \underset{(n,2)}{C} \\ \underset{(2,n)}{C^T} & \underset{(2,2)}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{(n,1)}{K} \\ \underset{(2,1)}{X} \end{bmatrix} + \underset{(n,1)}{W} = \underset{(n,1)}{0} \tag{18}$$

Системата *(18)* не е нормална, но е симетрична спрямо главния диагонал и може да бъде решена по същия начин, както една нормална система. От решението се получават n на брой корелати k_i и двата параметъра на правата (неизвестни) a и b. Поправките v_i^x, v_i^y към «измерени» стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ се получават от корелатните уравнения на поправките:

$$\underset{(2n,1)}{V} = \underset{(2n,2n)}{P}^{-1} \underset{(2n,n)}{B}^{T} \underset{(n,1)}{K} \qquad (19)$$

след което се определят изравнените стойности на измерените величини, крайна проверка и оценка на точността.

Ще бъде решен числен пример за извеждане на параметрите на «изравнителна» права чрез условно изравнение с неизвестни, като се използват определените координати на 8 точки, описващи правата. Данните за примера са взети от [3].

Табл.1

№	$x_i^{'}, [m]$	$y_i^{'}, [m]$	$W_i, [mm]$	$v_i^x, [mm]$	$v_i^y, [mm]$	$x_i, [m]$	$y_i, [m]$
1	427.42	310.49	0	4.9	-7.3	427.425	310.483
2	473.90	341.85	30	-10.3	15.3	473.890	341.865
3	510.12	366.33	11	-2.6	3.8	510.117	366.334
4	569.56	406.50	-17	8.7	-12.8	569.569	406.487
5	620.07	440.59	4	-2.5	3.8	620.067	440.594
6	670.59	474.72	-7	1.1	-1.6	670.591	474.718
7	749.19	527.82	-26	7.6	-11.2	749.198	527.809
8	830.55	582.74	0	-6.8	10.1	830.543	582.750
Σ	4851.40	3451.04		0.1	0.1	4851.400	3451.040

В лявата част на табл.1 са записани определените координати на 8 точки от правата и изчислените съгласно матрицата $\underset{(n,1)}{W}$ от форм.*(13)* несъвпадения. Приблизителните стойности a_0 и b_0 на неизвестните (параметрите на правата) са изчислени по форм.*(6)* и са получени стойностите $a_0 = 21.835980, \quad b_0 = 0.67534046$.

След съставянето и решаването на системата *(17)* са получени корелатите (n на брой) и двете неизвестни $\delta a = -0.037580$ и $\delta b = 0.00006300$. Следва изчисление на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни (параметрите на правата) $a = a_0 + \delta a = 21.798400$ и $b = b_0 + \delta b = 0.67540346$. Окончателното уравнение на «изравнителната» права е:

$$y = 21.798400 + 0.67540346 x \qquad (20)$$

Поправките и изравнените стойности на координатите са изчислени в последните четири колони на табл.1. Контролира се $[vv] = 1038.015$ и $[kW] = -1038.015$. Вижда се, че е изпълнено $[vv] = -[kW]$. Крайната проверка се извършва чрез заместване на изравнените стойности на координатите в уравнение *(20)* – изравнените стойности трябва да удовлетворяват същото уравнение.

Ще бъде разгледано друго решение на същата задача, при което от условно изравнение с неизвестни се преминава към **параметрично изравнение**. За целта уравненията *(11)* се представят в следния вид:

$$-b_0 v_i^x + v_i^y = \delta a + x_i^{'} \delta b + (b_0 x_i^{'} + a_0 - y_i^{'}) \qquad i = 1,2,3, \dots ,n \qquad (21)$$

Въвежда се означението

$$v_i = -b_0 v_i^x + v_i^y \qquad (22)$$

и уравненията *(21)* добиват следния вид:

$$v_i = \delta a + x_i^{'}\delta b + (b_0 x_i^{'} + a_0 - y_i^{'}) \qquad i = 1,2,3,\dots,n \qquad (23)$$

където изразът в скоби от дясната страна на равенството е свободния член f_i, т.е.

$$f_i = b_0 x_i^{'} + a_0 - y_i^{'} \qquad (24)$$

Уравненията *(23)* вече са уравнения на поправките при параметрично изравнение, представени в обичайния им вид. За да се определят техните тежести, отново се изхожда от предпоставката, че «измерените» координати $x_i^{'}, y_i^{'}$ са некорелирани и равноточни, т.е. те имат една и съща средна квадратна грешка $m_x = m_y = m$ и съответно тежест $p_x = p_y = p$. Тъй като свободният член на отделно уравнение на поправките е получен от две стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$, неговата тежест (и тежестта на самото уравнение на поправките) се определя по формулата:

$$\frac{1}{p_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i^{'}}\right)^2 \frac{1}{p} + \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_i^{'}}\right)^2 \frac{1}{p} = b_0^2 \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = (b_0^2 + 1)\frac{1}{p} \qquad (25)$$

Приема се тежест $p = b_0^2 + 1$ на измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$ и всички уравнения на поправките получават тежест $p_i = 1$. Тогава матрицата с тежестите на свободните членове на уравненията на поправките е единична матрица, т.е. $\underset{(n,n)}{P} = \underset{(n,n)}{E}$.

Записани в матричен вид, уравненията на поправките *(23)* изглеждат по следния начин:

$$\underset{(n,1)}{V} = \underset{(n,2)}{C}\,\underset{(2,1)}{X} + \underset{(n,1)}{f} \qquad (26)$$

където $\underset{(1,n)}{V}^T = [v_1, v_2, \dots v_n]$, матрицата $\underset{(n,1)}{f}$ е еднаква с матрицата $\underset{(n,1)}{W}$ от форм.*(13)*, а матриците $\underset{(n,2)}{C}$ и $\underset{(2,1)}{X}$ са същите, както във форм.*(13)*. Получава се нормална система

$$\underset{(2,2)}{N}\,\underset{(2,1)}{X} + \underset{(2,1)}{F} = \underset{(2,1)}{0} \qquad (27)$$

където

$$\underset{(2,2)}{N} = \underset{(2,n)}{C}^T\,\underset{(n,2)}{C}; \qquad \underset{(2,1)}{F} = \underset{(2,n)}{C}^T\,\underset{(n,1)}{f} \qquad (28)$$

От решението на системата нормални уравнения *(27)* се получават стойностите на неизвестните δa и δb. След това се изчисляват изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни (параметрите на правата) $a = a_0 + \delta a$ и $b = b_0 + \delta b$. Изчисляват се поправките v_i от уравненията на поправките *(23)*.

За да се определят поправките v_i^x и v_i^y към измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$, всяко уравнение *(22)* се разглежда като отделно условно уравнение на поправките. Ако k_i е единствената корелата, която се получава от това условно уравнение на поправките, самите поправки v_i^x и v_i^y в съответствие с форм. *(10)* се определят от следните корелатни уравнения на поправките:

$$v_i^x = \frac{1}{p} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right) = \frac{-b_0}{b_0^2 + 1} k_i ; \qquad v_i^y = \frac{1}{p} k_i \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_i} \right) = \frac{1}{b_0^2 + 1} k_i \tag{29}$$

Като се заместят корелатните уравнения на поправките *(29)* във форм. *(22)* се получава:

$$v_i = \frac{b_0^2}{b_0^2 + 1} k_i + \frac{1}{b_0^2 + 1} k_i = k_i \tag{30}$$

Корелатата k_i от горната формула се замества с поправката v_i във форм. *(29)* и се получават окончателните изрази за поправките v_i^x и v_i^y към измерените стойности $x_i^{'}, y_i^{'}$:

$$v_i^x = \frac{-b_0}{b_0^2 + 1} v_i ; \qquad v_i^y = \frac{1}{b_0^2 + 1} v_i \tag{31}$$

За контрола трябва да бъде изпълнено:

$$[v_i v_i] = [p v_i^x v_i^x] + [p v_i^y v_i^y] \tag{32}$$

Ще бъде решен числен пример за извеждане на параметрите на «изравнителна» права чрез описания начин на параметрично изравнение, като се използват данните от решения пример от табл.1, при който е приложено условно изравнение с неизвестни.

Табл.2

№	$x_i^{'}, [m]$	$y_i^{'}, [m]$	$f_i, [mm]$	$v_i, [mm]$	$v_i^x, [mm]$	$v_i^y, [mm]$	$x_i, [m]$	$y_i, [m]$
1	427.42	310.49	0	-10.6	4.9	-7.3	427.425	310.483
2	473.90	341.85	30	22.3	-10.3	15.3	473.890	341.865
3	510.12	366.33	11	5.6	-2.6	3.8	510.117	366.334
4	569.56	406.50	-17	-18.7	8.7	-12.8	569.569	406.487
5	620.07	440.59	4	5.5	-2.6	3.8	620.067	440.594
6	670.59	474.72	-7	-2.3	1.1	-1.6	670.591	474.718
7	749.19	527.82	-26	-16.4	7.6	-11.3	749.198	527.809
8	830.55	582.74	0	14.7	-6.8	10.1	830.543	582.750
Σ	4851.40	3451.04		0	0	0	4851.400	3451.040

В лявата част на табл.2 са записани определените координати на 8 точки от правата (същите, както в табл.1) и са изчислени елементите на матрицата $\underset{(n,1)}{f}$, които се явяват свободни членове на уравненията на поправките *(26)*. Приблизителните стойности a_0 и b_0 на неизвестните (параметрите на правата) са определени по форм.*(6)* и са получени стойностите $a_0 = 21.835980, \quad b_0 = 0.67534046$.

След съставянето и решаването на системата *(27)* са получени двете неизвестни $\delta a = -0.037580$ и $\delta b = 0.00006300$. Следва изчисление на изравнените стойности на първоначално избраните неизвестни (параметрите на правата) $a = a_0 + \delta a = 21.798400$ и $b = b_0 + \delta b = 0.67540346$. Окончателното уравнение на «изравнителната» права е същото, както при форм.*(20)*:

$$y = 21.798400 + 0.67540346 x \tag{33}$$

Поправките v_i се определят от уравненията на поправките *(23)*. От тях по форм.*(31)* се изчисляват поправките v_i^x и v_i^y към «измерените» координати $x_i^{'}, y_i^{'}$. Изчисляват се изравнените стойности на координатите на точките от правата в последните две колони на табл.2:

$$x_i = x_i^{'} + v_i^x ; \quad y_i = y_i^{'} + v_i^y \tag{34}$$

Проверява се $[vv] = 1511.438$ и $[ff.2] = 1511.438$. Изпълнено е $[vv] = [ff.2]$, което гарантира верността на решаването на нормалната система. Крайната проверка не може да бъде направена по стандартния за параметричното изравнение начин – чрез двукратно изчисляване на поправките, един път от уравненията на поправките и втори път като разлики между изравнените и измерените стойности. Причината е, че изравнените стойности на координатите x_i, y_i се определят по форм.*(34)* чрез поправките v_i^x и v_i^y, които на свой ред са получени от поправката v_i.

Изравнените стойности не могат да се определят от уравненията на измерванията *(5)*, тъй като във всяко такова уравнение фигурират по две изравнени стойности на координати x_i, y_i. Тогава крайната проверка ще се извърши чрез заместване на изравнените стойности x_i, y_i, определени по форм.*(34)* в уравнението на правата *(33)* – изравнените стойности трябва да удовлетворяват това уравнение.

За контрола са извършена следната проверка:

$$\begin{gathered} [v_i v_i] = 1511.438 \quad [pv_i^x v_i^x] = 472.529 \quad [pv_i^y v_i^y] = 1037.257 \\ [pv_i^x v_i^x] + [pv_i^y v_i^y] = 1509.786 \end{gathered} \tag{35}$$

Вижда се, че проверката *(32)* е изпълнена в границите на изчислителната точност.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Описаните начини на извеждане на параметрите на «изравнителна» права по МНМК намират приложение в инженерната геодезия при рехабилитация на пътища. За отделен праволинеен участък от съществуващия път се заснемат определен брой точки от оста, след което техните координати се определят в геодезическа координатна система. След това по някои от описаните начини се определят параметрите на «изравнителната» права, която представлява проектната ос на рехабилитирания път в същия праволинеен пътен участък. Възможно е приложението при редица други прецизни инженерно-геодезически работи.

Използвана литература

1. Атанасов, С., Теория на математическата обработка на геодезическите измервания, С., Техника, 1988.
2. Бурмистров, Г., Основы способа наименьших квадратов, М., Госгеолтехиздат, 1963.
3. Тонков, Д., Параметрично изравнение по МНМК – случай, когато в уравненията на измерванията участват няколко изравнени стойности на измерени величини, С., Юбилейна научна конференция 65 години УАСГ, С. 17-18 май 2007.