Линейна алгебра и аналитична геометрия

1. Увод – общи факти

Предмет на линейната алгебра са твърде много неща, за да бъдат описани в тези кратки лекции; тук излагаме кратка и (да се надяваме) достъпни версия на нещата, които се изучават в курса по ЛА (линейна алгебра). Нестрого казано, предмет на изучаване в ЛА са неща, които наричаме *матрици*. Матрицата е правоъгълна таблица от числа и обикновено се означава в главни латински букви; например така:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Да отбележим, че във втория запис са използвани *двойни индекси*, които и ще употребяваме особено когато матрицата е с малки размери. Например a_{11} следва да се чете (и разбира се да се произнася) като, a „едно-едно“, не като a „единадесет“. Това означение показва, че числото a_{11} е разположено на първия ред и първия стълб в дадената таблица. Разбира се, когато има опасност от нееднозначно разбиране на текста, ще поставяме разделители (най – често запетаи, може и по – големи разстояния) между индексите. Например означението a_{134} е неясно – то може да се тълкува като $a_{1,34}=a_{1\,34}$, което означава, че числото е разположено на първи ре и 34 – ти стълб или като $a_{13,4}=a_{13\,4}$, което пък означава, че числото се намира на 13 – ред и четвърти стълб.

Често ще пишем $A_{(m,n)}$, за по -кратко означение, че таблицата има m реда и n стълба. Наричаме двойката числа *тип* на матрицата A. Понякога ще използваме и означението $A=\left(a_{ij}\right)_{(m,n)}$, което показва, че елементите на елементите на A са a_{ij}, при което i се променя от 1 до m, а j се променя от 1 до n. Множеството на всички матрици от тип (m,n) ще означаваме с $\mathcal{M}_{(m,n)}$, ако $m=n$ ще пишем просто $\mathcal{M}_n$ - това са всички квадратни матрици. Разбира се, всяко число $a\in\mathbb{R}:=(-\infty,\infty)$ може да се разглежда като матрица с един ред и един стълб: $(a)\in\mathcal{M}_1$.

За да привикнете с тези означения, разгледайте самостоятелно няколко примера. Вземете малки стойности на m и n ; например

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{(4,3)},$$

ще казваме, че тази матрица е от тип $(4,3)$; тоест тя има 4 реда п 3 стълба. За да различаваме по – лесно числата в последната таблица ще пишем например $a_{2,3}=4$, което означава, че числото 4 е разположено на 2-ри ред и 3-ти стълб. Сега е прието вместо да пишем $a_{2,3}=4$ да се пише просто

$a_{23} = 4$, но е добре да се помни, че a_{23} е съкратено означение на $a_{2,3}$ тоест това са *два* индекса. С други думи a_{23} е добре да се произнася не като „двадесет и три“, а като a „две, три“. Надяваме се, че тези терминологични особености няма да са причина за разбирането на следващия текст.

Задача 1.1 Дадена е матрицата $A = \left(a_{ij} \right)_{(m,n)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -7 & -3 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Ясно е, че $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$. Кои са m и n?

б) $a_{34} = ?$.

в) Елементите (числата) на A, които имат еднакви индекси – с други думи са от вида a_{ii} лежат на линия, която се нарича *главен диагонал* на A. Пресметнете сумата на елементите от главния диагонал.

г) Напишете всички матрици от $\mathcal{M}_{(4,4)}$, които може да се получат от елементите на A без да се променя разположението им в A. Колко са тези матрици? (те се наричат *подматрици* на A).

д) Колко са всички подматрици на A, които принадлежат на $\mathcal{M}_{(3,3)}$?

И така, матрица от тип $(1,1)$ изглежда така: $A = \left(a_{1,1} \right)$; с други думи тя просто е числото $a_{1,1}$. Следващите „по сложност“ матрици са от тип $(2,1)$ или $(1,2)$ - те изглеждат така $A_{(2,1)} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$ или $A_{(1,2)} = \left(a_{11} a_{12} \right)$. В следващият текст ще видим, че тези матрици имат и друго тълкуване. За сега ще се заемем с по – подробното изучаване на матрици от тип $(2,2)$. Те изглеждат така: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Ще изучим по – подробно действията с матриците с размери $(2,2)$. И така, ако имаме матриците $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то сумата или разликата им се определя по „нормален“ начин: $A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$.

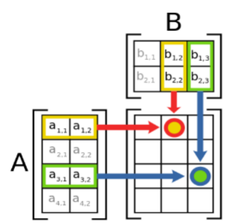
1.2 Дефиниция. Произведение на числото $\lambda \neq 0$ с матрицата A е матрицата $\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$. Произведението на матрица с число има някои очевидни свойства: Например $(\lambda + \mu) A = \lambda A + \mu A$ и $\lambda (A + B) = \lambda A + \lambda B$.

1.3 Дефиниция. Дадени са еднотипните матрици $A_1, A_2, \ldots, A_k$. ***Линейна комбинация*** на тези матрици се нарича матрицата $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \lambda_k A_k$, където $\lambda_l ; l = 1, 2, \ldots, k$ са числа.

Всяка матрица е линейна комбинация на матрици с единствен елемент различен от нула. Например $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и т.н.

Следва да отбележим, че дефинициите 1.2 и1.3 и следствията от тях са верни за произволни матрици.

Произведението на матрица с матрица се дефинира малко по – сложно. То се определя от така нареченото правило „ред по стълб“. Ще го поясним: Нека $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Елементите (числата) в C се определят, както беше споменато по правилото умножение на “ред по стълб“. Ще се пробваме да го обясним: елементът (числото) c_{11} на матрицата C е разположен на *първия ред* на C и съответно на *първия стълб* на C. За да го пресметнем вземаме *първия ред* на A - $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$ и съответно *първия стълб* на B - $\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$ и ги „умножаваме“ по следната схема: $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$ - с други думи умножаваме съответните числа (които са разположени на еднакви места в синия ред и червения стълб) и след това ги събираме. Например за да се получи елемента c_{21} трябва да действаме по предходния начин, но с втория ред на A и първия стълб на B (защото c_{21} е разположен на *втория ред* и *първия стълб* на C).



Изобщо така се получава матрицата C .

И така, матриците от тип $(2,2)$ могат да бъдат събирани, изваждани и умножавани; действия, които правим и с числата. Разбира се, матрицата $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ще наричаме нулева матрица; тя е аналог на нулата: $O + A = A$ и $O.A = O$ за всяка матрица от тип $(2,2)$. Ролята на единица се поема от матрицата $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.(понякога вместо E ще пишем I). Наистина, ***проверете***, че за всяка матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ е изпълнено равенството $AE = EA = A$.

Да отбележим също, че и други правила от действията с числа се запазват. Например за всеки три числа a, b и c е вярно, че $a(b+c) = ab + ac$. Това правило за разкриване на скоби (то се нарича *дистрибутивност*) е вярно и за $(2,2)$ - матрици: ако $A, B, C \in \mathcal{M}_{(2,2)}$, то $A(B+C) = AB + AC$. Доказателството на това равенство е проверка – ***направете*** я. И накрая както за всеки три числа a, b и c е вярно, че $a(bc) = (ab)c$, то и за всеки три матрици $A, B, C \in \mathcal{M}_{(2,2)}$ е вярно, че

$A(BC)=(AB)C$. Проверете, че и това е изпълнено. Ако проверката с произволни (с буквени елементи) матрици ви затруднява, изберете си няколко конкретни примера.

Все пак се оказва, че приликата между аритметичните действия с числата и матриците от $\mathcal{M}_{(2,2)}$ не е пълна. Не е вярно например, че ако $A,B\in\mathcal{M}_{(2,2)}$, то $AB=BA$. Например $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, а $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$. С други думи, произведението в общия случай *не е комутативно*. Ето защо трябва да се провери правилото дистрибутивност и с умножение отдясно. Проверете самостоятелно, че ако $A,B,C\in\mathcal{M}_{(2,2)}$, то $(A+B)C=AC+BC$. Има още едно действие с матрици, което не среща при числата; то се нарича транспониране. Матрицата B е *транспонирана* на матрицата A, ако редовете на B са стълбовете на A. Например ако $A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\\5&3\end{pmatrix}$, то $B=\begin{pmatrix}1&-2&5\\0&1&3\end{pmatrix}$. Тоест ако $A\in\mathcal{M}_{(m,n)}$, то $B\in\mathcal{M}_{(n,m)}$. Ще пишем в този случай $B=A^T$ или $B=A^t$ или $B=A^*$. Операцията транспониране е свързана с умножението на матрици по следния начин: $(AB)^*=B^*A^*$, тоест транспонираната на произведението на две матрици е равно на произведението на техните транспонирани, взето в обратен ред. ***Проверете***, че това е вярно за матриците от $\mathcal{M}_{(2,2)}$.

Остава да видим дали може да се пренесе действието “делене“ за матрици; поне за матрици от $\mathcal{M}_{(2,2)}$. Да напомним първо какво разбираме под „делене на числа“. Фактически частното $\frac{a}{b}$ на числата a и b е произведението на числата a и $\frac{1}{b}$, тоест $\frac{a}{b}=a.\frac{1}{b}$. Значи $a.\frac{1}{a}=1$. Числото $\frac{1}{a}$, което се означава и с a^{-1} се нарича реципрочно или ***обратно*** на a. По аналогия ще казваме, че матрицата B е обратна на A, ако $AB=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, единичната матрица. Умножението обаче не е комутативно, така, че можем да наречем B *дясна обратна* на A. По същия начин *лява обратна* на A е всяка матрица C, за която $CA=E$.

Теорема 1.4 Ако лявата и дясна обратна на A съществуват, то те са равни.

Доказателство: $C=CE=C(AB)=(CA)B=EB=B$.

И така, ако A има лява и дясна обратни матрици, те са равни. В нашия случай $B=C$. Да допуснем, че D е също лява и дясна обратна матрица на A.

Теорема 1.5 $B=D$.

Доказателство: $D=DE=D(AB)=(DA)B=EB=B$.

И така, ако A има лява и дясна обратни, те са равни на матрицата B и тя е определена еднозначно. Ще пишем $B=A^{-1}$. Ясно е, че A^{-1} съответства на „реципрочната“ матрица на A. Въпреки това не е прието да се пише $\frac{C}{A}$, защото не е ясно дали става дума за CA^{-1} или $A^{-1}C$, а те може и да не са равни. Когато матрицата A^{-1} ще казваме, че A е ***неособена***.

В тези лекции няма да излагаме доказателствата на по – сложните за доказване теореми – това е грижа на студентите по Математика. Така например е вярна и следната

Теорема 1.6 Ако някоя матрица има лява обратна, то тя има и дясна и те, разбира се, са равни.

Забележка: Теореми 1.4 и 1.5 са верни за *всички матрици* от $\mathcal{M}_{(n)}$. Тук ще продължим изучаването на $\mathcal{M}_{(2)}$ по няколко причини; но ще изложим матричното смятане в по – общ вид до края на тези лекции.

И така, изложихме елементи от смятането на матрици от тип $(2,2)$. Както се вижда от предходния текст множеството $\mathcal{M}_{(2)}$ притежава доста алгебрични свойства, които приличат на алгебрата на числата, които се изучават в средните училища. Но има и някои разлики. Например умножението на матрици не е комутативно; ***някои*** матрици имат обратни. Но не сме изяснили кои са и как изглежда обратната матрица (ако съществува) на дадена матрица $\mathcal{M}_{(2)}$. Ще отбележим все пак, че и не всяко число има реципрочно – например частното $\frac{1}{0}$ няма смисъл, тоест нулата няма реципрочно число.

Задача. 1.4 Докажете, че

а) Докажете, че матрицата $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$ не съществува.

б) Пресметнете $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1}$.

в) Пресметнете $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

г) Докажете, че ако матриците A и B са неособени, то AB също има обратна и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (Упътване: пресметнете произведението $(AB)B^{-1}A^{-1}$).

2. Продължение: за матриците от $\mathcal{M}_{(2)}$. Комплексни числа.

В този раздел ще продължим с изучаването ма матриците от $\mathcal{M}_{(2)}$. Нека $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(2)}$ и да положим $\overline{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Тогава $A\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ясно е от тази сметка, че числото $\Delta = ad - bc$ е важно за горните пресмятания. Наистина, ако $\Delta = 0$, то $A\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ - нулевата матрица. От друга страна, ако $\Delta \neq 0$ то $\frac{1}{\Delta}A\overline{A} = A\left(\frac{1}{\Delta}\overline{A}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, от където следва, че матрицата $\frac{1}{\Delta}\overline{A}$ е обратната на A; $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\overline{A}$. Числото $\Delta = ad - bc$ се нарича *детерминанта* матрицата и обикновено се отбелязва със символите $\det A$ или с $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Задача 2.1 За матриците $A, B \in \mathcal{M}_{(2)}$ докажете, че $|AB| = |A||B|$.

Упътване: Доказва се посредством съответните пресмятания.

Задача 2.2 Докажете, че $|A| = |A^*|$.

Доказателство: То се извършва както в горното упътване с проверка: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ и $|A^*| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb$, значи $|A| = |A^*|$.

2.2 Комплексни числа.

Тук показваме някои свойства на „алгебрата“ на матриците (за сега) в $\mathcal{M}_{(2)}$. Нестрого казано, по „алгебра“ се разбира някакво множество от обекти между които са дефинирани операции – наричаме ги „алгебрични“. Това са алгебричните свойства на числата, които сте учили в училище. Даже и там се разглеждат различни алгебрични системи – например на рационалните числа $\mathbb{Q}$, на числата изобщо – ще ги наричаме реални и ще ги означаваме с $\mathbb{R}$, това е интервалът $(-\infty, \infty)$ с действията в него. Може да се каже, че $\mathbb{Q}$ е подалгебра на $\mathbb{R}$, защото $\mathbb{Q}$ се съдържа в $\mathbb{R}$ и операциите в двете множества се извършват по еднакви правила. Трябва да кажем, че различните алгебрични системи съвсем не се изчерпват с посочените в предходния текст. Няма да коментираме строго какво е алгебрична система; това е множество, в което е определена една или повече „алгебрични“ операции. Те представляват действия, които приличат на някое от действията с числа.

Например да разгледаме множеството $\mathcal{T}_3 = \{I, A, B\}$, което се състои от матриците $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $\mathcal{T}_3$ е алгебрична система относно операцията „умножение“. Това означава, че в $\mathcal{T}_3$ съществува единичен елемент I - $AI = IA = A$, $BI = IB = B$, $A^2 = B$, $B^2 = A$, $AB = BA = I$. ***Проверете тези равенства***. Ясно е, че от тях следва, че $\mathcal{T}_3$ е пълна алгебрична система относно операцията умножение: съществува единичен елемент I, всеки елемент има обратен (реципрочен): $A^{-1} = B$; $B^{-1} = A$ и всевъзможните произведения на елементи от $\mathcal{T}_3$ принадлежат на $\mathcal{T}_3$. Например $A^3B^5 = A^2(AB)B^4 = A^2B^4 = A(AB)B^3 = AB^3 = (AB)B^2 = A \in \mathcal{T}_3$, защото умножението на матрици е асоциативно. И така, умножението в $\mathcal{T}_3$ има същите свойства като умножението на числа, но $\mathcal{T}_3$ не се състои от числа. Такива алгебрични обекти се наричат групи.

Изобщо в множеството $\mathcal{M}_{(2)}$ се съдържат доста (всъщност безкрайно много) алгебрични структури. Ще разгледаме някои от тях. Като първи пример да разгледаме множеството $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}_{(2)}$, което се състои от всички матрици от вида $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in (-\infty, \infty)$. Матриците от $\mathcal{R}$ имат

абсолютно идентични свойства с числата. Наистина, ако $Y=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ и $Z=\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ са матрици от $\mathcal{R}$, то (сравнявайте приликите между числа и матрици) действията с числата и матриците от $\mathcal{R}$ са *напълно идентични* (еднакви). Наистина, $Z = X \pm Y$ тогава и само тогава (ще пишем също $\Leftrightarrow$), когато $z = x \pm y$. Резултата от умножението на число с матрица от $\mathcal{R}$: λX е същото като умножението на матрици от $\mathcal{R}$: $\lambda X=\begin{pmatrix} \lambda x & 0 \\ 0 & \lambda x \end{pmatrix}$ и ако Λ е матрицата $\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\in\mathcal{R}$, то $\Lambda X=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda x & 0 \\ 0 & \lambda x \end{pmatrix}$. Умножението на матриците $XY=\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$ съответства на умножението xy; разбира се $XY = YX$. На числото $\frac{1}{x}$ съответства матрицата $X^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$.

Наистина, проверете, че $XX^{-1}=X^{-1}X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\equiv 1$. Значи на числото $\frac{x}{y}$ се отъждествява (знакът е $\equiv$) с матрицата $XY^{-1}\equiv Y^{-1}X=\begin{pmatrix} \frac{x}{y} & 0 \\ 0 & \frac{x}{y} \end{pmatrix}\in\mathcal{R}$. В матриците от $\mathcal{R}$ има и естествена наредба, която е съгласувана с алгебричните операции: $X<Y$ ако $x<y$. При това ако $Z>0$, то $XZ<YZ$, а при $Z<0$ е изпълнено $XZ>YZ$. Изобщо алгебрата на матриците от $\mathcal{R}$ е напълно идентична (тоест същата като) с алгебрата на числата. Това се осъществява посредством съпоставянето $x\leftrightarrow\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$. То се нарича *изоморфизъм*. Да напомним отново, че това означава, че вместо да пишем например числото 7 пишем $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ - малко е по – дълго като запис, но това е единствената разлика.

И така, $\mathcal{M}_{(2)}$ съдържа алгебрата на числата. Тя съдържа както беше казано по – горе и много други алгебри. Една от тях е от особено значение за Математиката.

2.3 Алгебрата $\mathbb{C}$

Ще видим в следващия текст, че матриците от вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{(2)}$ също образуват алгебра, която ще означаваме с $\mathbb{C}$. И така, матрицата Z принадлежи на $\mathbb{C}$ тогава и само тогава, когато $Z=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. Ясно е, че ако $b=0$, то $Z\in\mathcal{R}$, значи $\mathcal{R}\subset\mathbb{C}$. Ще отбележим, че по алгебрични свойства $\mathbb{C}$ *поразително* прилича на действията с числа. Ето приликите:

Сума. Ако $X,Y\in\mathbb{C}$, то $X+Y\in\mathbb{C}$. ***Проверете***.

Произведение. Ако $X,Y \in \mathbb{C}$, то $XY \in \mathbb{C}$. ***Проверете***.

Комутативност. Ако $W = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ е друга матрица от $\mathbb{C}$, то $ZW = WZ$. Доказателството на това е обикновена проверка. Тук ще я извършим, но на някои от другите свойства оставяме това на читателя. И така, $ZW = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Наистина, числата по главния диагонал са равни, а по другия имат различни знаци. За WZ получаваме същото число $WZ = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ -da-cb & -db+ca \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$, наистина, записано по малко по – различен начин, защото произведението е направено в различен ред. Това е същото като да кажем, че например $6.7 = 7.6$.

Дистрибутивност. Проверете самостоятелно, че за матриците $Y,Y,Z \in \mathbb{C}$, е изпълнено тъждеството $X(Y+Z) = (Y+Z)X = XY + XZ \in \mathbb{C}$

Делене. Нека $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$. Матрицата $Z^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ е обратна на Z. *Проверете това*. Освен това е нормално да се пише $Z^{-1} = \dfrac{1}{Z}$, защото произведението в $\mathbb{C}$ е комутативно.

Модул. Модул на $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ по дефиниция е числото $|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Алгебричен запис. Матрицата $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ може да се представи като сумата $Z = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Значи $Z = aE + bi$, като $E \equiv 1$ (вижте предходния текст за алгебрата $\mathcal{R}$ и $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно е, че $i \notin \mathcal{R}$, тоест i ***не е число***. В литературата е общоприето да се пише $Z = a + bi$ защото E се разглежда като единица (и не се изписва). Нещо повече, прието да се пише $z = a + bi$. Използва се малка буква, защото z *се схваща като число.*

Комплексна единица. Ясно е, че $i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathcal{R}$, тоест i ***не е число***. И така, матрицата $Z = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ е линейната комбинация на числото $a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv a \in \mathcal{R}$ и „нечислото“ $b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv bi$ което, както отбелязахме по – горе е прието да се записва $z = a + bi$. Ще казваме в следващия текст, че z е ***комплексно*** (с други думи сложно, съставно) число. От изброените по – горе свойства следва, че с комплексните числа може да се правят алгебрични действия точно както с числата, стига да помним, че $i^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 \equiv -1$. Например ако $z = a + bi$ и $w = c + di$, то $zw = (a+bi)(c+di)$. Имаме право да разкриваме скобите както при обикновените числа (като разкриване на скоби при умножението на числата (които може да се схващат кат полиноми на i) $(a+bx)(c+dx)$) :

$(a+bi)(c+di) = ab + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (bc+ad)i$. Тук просто използвахме, че $i^2 = -1$. (тоест $(a+bx)(c+dx) = ac + (bc+ad)x + bdx^2$ и $x^2 \equiv i^2 = -1$ - заместваме x с i).

И така, множеството $\mathbb{C}$ има *всички* алгебрични свойства на числата, които (надявам се) се изучават в средното училище. Комплексните числа са не по – малко „съществуващи" от числата, които се преподават в училище – с тях, както знаем се пресмятат разни неща; например цени на стоки, разстояния, време и други неща – например правят се и „далавери" (турцизъм, разбираем за почти всички в България). Е, за сега не съм чувал за „далавери" с комплексни числа; това за жалост не означава, че няма такива (ако все пак има, то тяхната имагинерна част би трябвало да е работа на прокуратурата 😊***. Оцветеният в синьо текст не е от значение за тези лекции; съвета ми е да се схваща като (неуместна) политизирана шега***.

Комплексните числа са от изключително значение за приложенията на Математиката.

Задача 2.3.1 Пресметнете сумите $C = 1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$ и $S = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$.

Решение: Както споменахме, комплексните числа имат *всички* алгебрични свойства на реалните. Например сумата $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$ на геометричната прогресия $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots, a_1 q^n$ е равна на $a_1 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q-1}$. Да напомним още веднъж, че няма никакво значение дали числата са реални или комплексни. Значи равенството $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}$ е вярно за всяко комплексно число $z \neq 1$. Нека да положим сега $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$; $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$. От формулата на Моавр следва, че за z^k е в сила равенството $z^k = \cos k\alpha + i \sin k\alpha$. Значи $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = (1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi) + i(\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots + \sin n\varphi)$.След това може да видите как се получават окончателните суми от лекциите за специалността „Архитектура".

3. Линии и повърхнини от втора степен (конспект)

Да напомним, че основната идея на Аналитичната Геометрия е да опише геометрични обекти посредством алгебрични изрази. Най – общо всеки израз на две променливи $(I): F(x,y) = 0$ описва геометрично място на точки $M(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2$ (равнината), чиито координати относно някоя фиксирана координатна система (x,y) удовлетворяват условието *(I)*. Най – често се разглежда ортонормална система, която ще използваме и в тези бележки. Изразът *F* може да бъде доста сложен и по принцип по този начин може да бъде описано ***всяко*** множество в $\mathbb{R}^2$.

3.1 Линии от първа степен.

Тук ще разглеждаме най – лесните за изучаване множества в равнината: линии от първа и втора степен. Както знаете, всяка права l в $\mathbb{R}^2$ е геометрично място на точки, чиито координати изпълняват условието

(3.1.1) $$l: Ax + By + C = 0.$$

Да отбележим, че това описание не е единствено. По принцип има безброй много начина да се опише дадено множество. Наистина, ако $G(x,y) \neq 0 \;\; \forall\, (x,y) \epsilon \mathbb{R}^2$, то уравнението $G(x,y)F(x,y) = 0$ описва същото геометрично множество *(I)*. Например „линията от първа степен“ от горния текст може да бъде описана и с уравнението:

(3.1.2) $$l\colon (x^2 + 3y^2 + 7)^n (Ax + By + C)^m = 0$$

е „линия“ от степен 2*n*+*m*, но описва същата права. Е, тук ще разглеждаме възможно най – лесната форма на записване; значи линия от първа степен е всяко геометрично място на точки, което се описва с формулата **(3.1)**. Впрочем читателят би трябвало да е запознат с тази тема в достатъчна степен.

3.2 Линии в равнината от втора степен.

Линия в равнината се нарича уравнението от втора степен на два аргумента, които определят някакво геометрично място на точки в равнината:

(3.2.1) $$\gamma\colon ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

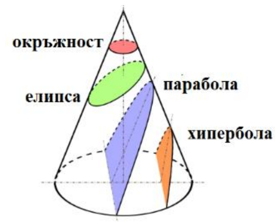
Както споменах и на лекции, добре е първо да се види дали γ има център $O'(x_0, y_0)$ Неговите координати са решение на системата $O'\colon \begin{cases} ax + by + d = 0 \\ bx + cy + e = 0 \end{cases}$. Ако тази система има решение, то след смяната $\begin{cases} x = x' - x_0 \\ y = y' - y_0 \end{cases}$ се получава уравнението $\gamma\colon a{x'}^2 + 2bx'y' + c{y'}^2 + f' = 0$. Остава да се преработи израза $a{x'}^2 + 2bx'y' + c{y'}^2$. В следващия текст няма да пишем „прима“ над променливите. Сега можем да запишем квадратичната форма L= $ax^2 + 2bxy + cy^2$ матрично:

$L = (x\ y)\begin{pmatrix} a\ b \\ b\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. След това пресмятаме единичните собствени вектори $\boldsymbol{v_1} = (\xi_1, \eta_1)$ и $\boldsymbol{v_2} = (\xi_2, \eta_2)$ на матрицата $A = \begin{pmatrix} a\ b \\ b\ c \end{pmatrix}$ и образуваме матрицата на прехода $P = \begin{pmatrix} \xi_1, \eta_1 \\ \xi_2, \eta_2 \end{pmatrix}$. *P* е ортогонална матрица, тоест $P^{-1} = P^t$ и сега можем да извършим смяната $(x\ y) = (X\ Y)P^t$. Получава се

(3.2.2) $$L = (x\ y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (X\ Y)P^t A P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = (X\ Y)\begin{pmatrix} \lambda_1\ 0 \\ 0\ \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2.$$

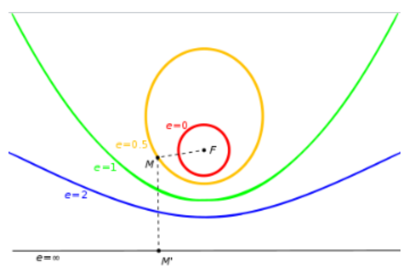
И така, всяка централна линия има уравнение от вида $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = \mu$. Сега вече можем да изследваме някои геометрични свойства на линиите от втора степен. Ще го направим накратко в следващия текст

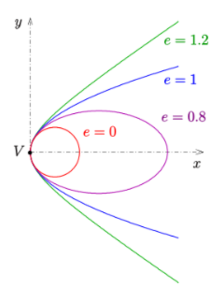
Любопитно все пак е, че още от антична Гърция са били наясно с основните геометрични свойства на основните (неизродени) линии от втора степен. Например ако λ_1, λ_2 и μ имат еднакви знаци, то кривата се нарича *елипса*. Ако $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то получаваме *хипербола* и при $\lambda_1\lambda_2 = 0$ получаваме *парабола*. В тази епоха са знаели, че всяка неизродена линия от втора степен е резултат от сечение на конус с равнина:



Както се вижда от тази рисунка сечението на конуса с равнина, която е перпендикулярна на оста на конуса е окръжност (*червено*), на равнина, която не е успоредна на оста и образуващата на конуса е елипса (з*елено*), на равнина, която е успоредна на образуваща на конуса е парабола (*синьо*) и на равнина, успоредна на оста на конуса е клон на хипербола (*оранжево*). По времето на античността освен това са ***знаели*** как да опишат геометричните свойства на тези криви. В сегашни времена тези свойства (и доста други) се описват по – лесно с методите на аналитичната геометрия.

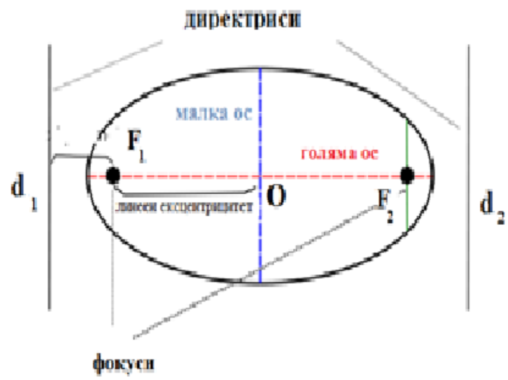
Има различни начини да се определи геометрично място в равнината. Например (следваме част от идеите на Декарт) да разгледаме точка $F\epsilon\mathbb{R}^2$, права $e_\infty \subset \mathbb{R}^2$ и някакво число $e \geqq 0$. Геометричното място к на точките $\mathrm{M}\epsilon\mathbb{R}^2$, за които $|FM| = e|Me_\infty|$ е линия от втора степен (***проверете това***). Тук $|Me_\infty| = |MM'|$, където *M’* е ортогоналната проекция на *M* върху l е всъщност разстоянието от *M* до e_∞. Линията к зависи от числото $e \geqq 0$, което е показано на следните рисунки:



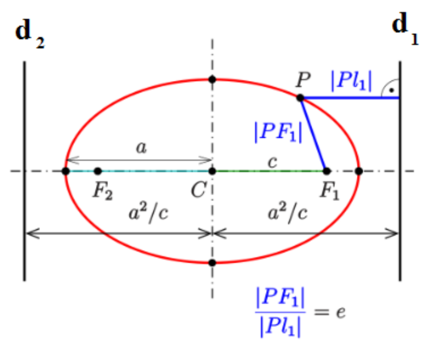


Правата $e_\infty \subset \mathbb{R}^2$ обикновено се нарича директриса на линията, а числото $e \geqq 0$ – ексцентрицитет на к. При $0 < \mathrm{e} < 1$ получаваме елипса (*жълто*), при $e = 1$ парабола (*зелено*) и ако $e > 1$ хипербола (*синьо*). Червената окръжност се получава като граничен преход, при който $|Me_\infty| \to \infty$ - тогава $e \to 0$.

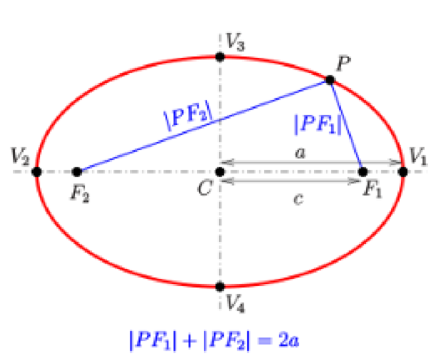
Елипсата има две директриси и два фокуса:



Нейното канонично уравнение е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; a>b$. Ако положим $|OF_1|=c$, то и $|OF_1|=c$ и $c=(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$. Ексцетрицитетът на елипсата е равен на $e=\frac{c}{a}$ и тя е геометрично място на точките P, за които $\frac{|PF_1|}{|Pd_1|}=\frac{|PF_2|}{|Pd_2|}=e$; впрочем всяко от тези равенства е достатъчно.



Елипсата има и много други геометрични свойства; тук ще споменем част от тях. Например следващата рисунка показва и още едно свойство:

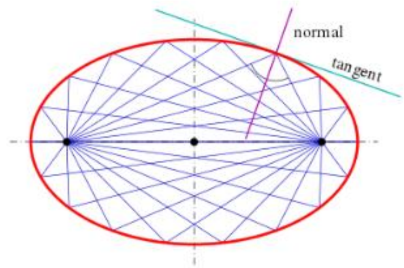


То означава, че елипсата е геометрично място на точки P, за които $|PF_1|+|PF_2|=2a$. Ако запишем това условие алгебрично, то изглежда така

(3.2.3) $$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

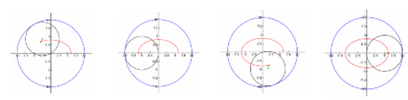
Направете малко сметки (опростете това равенство). За да се убедите, че то е равносилно на

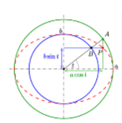
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, където $b^2=a^2+c^2$. Елипсата има и други забавни свойства, описана например със следващата рисунка:



която показва, че всеки лъч или вълна, които излизат от единия фокус се отразяват от елипсата и преминават през другия.

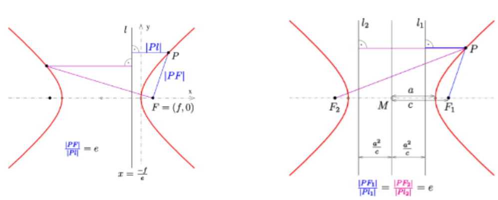
(Една забавна и достоверна история е, че през средновековието това свойство на елипсата е осигурявало доста ефективен начин за работата на тогавашните тайни служби. Работата е в това, че ако в някое заведение с елипсовиден таван (на ротационен елипсоид) са поставени две маси във фокусите; при което на една от тях са слушали агенти, а на другата са приказвали наивни заговорници, то всеки шепот от едната маса се е чувал съвсем ясно на другата, но не и на околните. Това се дължи на факта, че всички звукови вълни се събират в другия фокус след отражението им от елиптичния таван☹).

Ето още някои забавни свойства на елипсата: 

Елипсата има параметрични уравнения $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$: 

(3.2.4) Хиперболата е геометрично място на точки *P* за които е изпълнено равенството

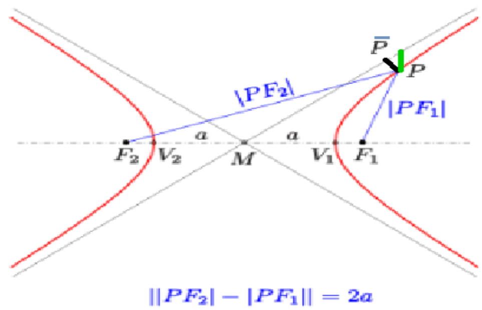
$||PF_1|-|PF_2||=2a$, където $F_{1,2}(\pm c,0)$ са дадени фиксирани точки. Аналитичния запис на това условие е $\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$. След като се опрости, изразът става $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, при което $c^2=a^2+b^2$ (стандартното уравнение на хипербола). Направете съответните алгебрични преобразувания.



Тези илюстрации показват някои допълнителни свойства на хиперболите. Докажете ги. Хиперболата е единствената неизродена крива от втора степен, която има асимптоти.

Ще напомня какво е асимптота. Нека Δ е безкраен интервал и $f(x)$ функция, дефинирана в Δ, то правата l_f е асимптота на f, ако разстоянието от точката $(x, f(x))$ до правата l_f клони към нула, когато x клони към безкрайност (+) или (-) – интервалът е безкраен. Е, хиперболата $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, има

две асимптоти: правите с уравнения $l_{\pm} : y = \pm\frac{b}{a}x$



За да се докаже, че например правата $l_+ : y = \frac{b}{a}x$ е асимптота на горния клон на $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ в интервала $[a, \infty)$ е досттатъчно да се погледне горната рисункта. Наистина ако имаме точката $P\left(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$, очевидно за разстоянието имаме $0 < \left|P, \overline{P}\right| <$ *зелената отсечка* От друга страна, зелената отсечка е равна на $\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Накрая че отбележа, че хиперболата има параметрични уравнения: $\chi : \begin{cases} x = a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}$ - функциите са хиперболичен косинус и синус (и заради това и така се казват).

Ще се постарая в следващия текст да бъда по „полезен“ в помощните факти. За тази цел ще оцветя текста „без който може“ (т.е. – необходимия минимум за успешно ≧3 представяне на изпита). Все пак имайте пред вид, че на изпита може да има въпроса „това защо е така“ и за цветен текст.

(3.2.5) До сега не е коментиран случая $\lambda_1\lambda_2 = 0$ в който едно от числата не е нула. Тогава в уравнението **(3.2.1)** се привежда в каноничен вид квадратичната форма $ax^2 + 2bxy + cy^2$. Тъй като нулата е собствено число, то $ax^2 + 2bxy + cy^2$ е точен квадрат, защото за детерминантата $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$ имаме $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 = 0$, защото има собствено значение 0. Значи

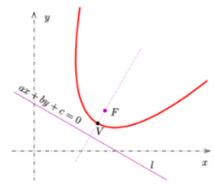
$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (\alpha x + \beta y^2)$ и можем да направим смяната X= $(\alpha x + \beta y^2)$; тогава

то след смяната ще се получи израз от вида

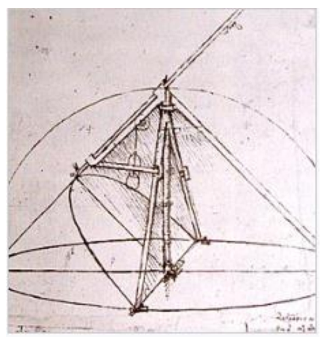
$\gamma: (\alpha x + \beta y)^2 + 2dx + 2ey + f = X^2 + \frac{2d}{\alpha}(X - \beta y) + 2ey + f = 0$. Разбира се, можем да направим и още една смяна: $2Y = -p\left(\frac{2d}{a}(X - \beta y) + 2ey + f\right)$. Тогава ще получим уравнение от вида $X^2 = 2pY$. До тук това е добре, но смяната на променливите *не е ортогонална*. Може все пак да се получи уравнение на всяка крива от втора степен (с ортогонална смяна) така, че да има за ос на симетрия оста $Ox^{\rightarrow}$. То изглежда по следния начин: $y^2 = 2px + \left(e^2 - 1\right)x^2$, където e е ексцентрицитетът. При $e = 1$ получаваме уравнението на параболата с ос на симетрия $Ox^{\rightarrow}$.

В общия случай уравнението на парабола с директриса правата $ax + by + c = 0$ и фокус $F\left(f_x, f_y \right)$

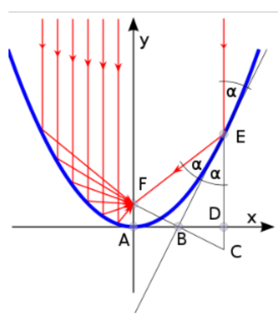
изглежда така: $\dfrac{\left(ax + by + c \right)^2}{a^2 + b^2} = \left(x - f_x \right)^2 + \left(y - f_y \right)^2$.



Изобщо параболата има интересни и важни за приложенията геометрични свойства, например следната илюстрация е параболичният компас на Леонардо да Винчи:



Друго популярно свойство на параболата е изразено в следната рисунка:



която показва, че сноп от успоредни на оста лъчи се събира във фокуса на параболата. Това е причината телескопите да имат параболични огледала.

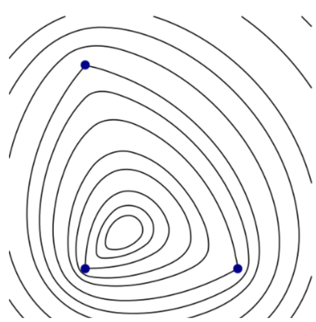
(3.2.6) Най – общо, уравнението на крива от втора степен в равнината зависи от 6 коефициента (вижте **(3.2.1)**), които са определени с точност до общ множител (пропорционалност). При тези условия е нормално да се предположи, че през всеки 5 точки преминава някаква линия от втора степен (както през всеки две точки преминава права – линия от първа степен, чието общо уравнение се определя от 3 константи). И това наистина е така.

(3.2.7) През всеки пет точки $M_i(x_i, y_i); i = 1,2, \dots ,5$ минава крива γ от втора степен. Уравнението на γ може да се запише по следния начин:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Например ако са дадени точките $M_1(1,0)$; $M_2(0,1)$; $M_3(1,1)$; $M_4(-1,1)$; $M_5(1,-1)$, то уравнението на кривата, която минава през тях е $\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Сметнете детерминантата, за да се получи уравнение от втора степен, което очевидно съдържа токите M_i и определете вида и.

(3.2.8) n **- елипса**. Според мен аналитичната геометрия предлага много повече, отколкото предвиждат утвърдените учебни програми, съгласно които се отпуска и съответния брой часове. Тези неща даже не са от XX век; по -скоро са от края на XIX. Например елипсата е геометрично място на точки *P*, за които $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. Е, какво пречи да се изучи например геометричното място на точките *P*, за които сумата $|PF_1| + |PF_2| + \cdots + |PF_n| = const$ е постоянна. Това е аналог на елипсата, но с n фокуса - $\{F_k\}_{k=1}^n$. Ето как изглежда например една 3-елипса: (Впрочем за срам не е XIX, а нашият си век; n – елипси са изучавани още от James Clerk Maxwell (1831–1879))



4. Конспекти (таблици).

Не ги приемайте буквално. Има части от текста, които вероятно ще трябва да се осъзнаят самостоятелно. И така, до сега използвах малко остарели и (за жалост) все още използвани в доста книги означения и формализъм от преди около 100-150 назад. Един от несложните проблеми е, че все още се означават координатите на даден вектор $\boldsymbol{v}$ с $\boldsymbol{v}(x, y, z)$, или $\boldsymbol{v}(x, y)$ в зависимост от това дали векторът е три или двумерен. Сега е прието координатите да се означават с индекси, което съкращава писането на формули и позволява лесното използване не многомерни пространства.

И така, *n* – мерен вектор е всяка матрица ред или стълб от *n* числа: $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $\vec{x}^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ще използваме и двете означения, когато това е по – удобно. Множеството от всички *n* - мерни вектори ще наричаме *n* – мерно векторно пространство и ще го означаваме с $\mathbb{R}^n$. Линейните операции на векторите са линейни операции с матрици. Скаларното произведение на векторите $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ се дефинира по стандартния начин за ортогонална база: $\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Понякога вместо $\vec{x}\vec{y}$ ще пишем $\vec{x}.\vec{y}$. Забележете впрочем, при използване на матричен запис, то

(4.0) $$\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{y}^t \text{; с други думи } \vec{x}.\vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Дължината $|\vec{x}|$ на вектора $\vec{x}$ дефинираме по стандартния начин: $|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x}^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Не е трудно е да се докаже, че $|x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ (неравенство на Коши – Буняковски; - ***докажете го***). Записано по – компактно, последното неравенство изглежда така: $|\vec{x}.\vec{y}| \le |\vec{x}|.|\vec{y}|$. Забележете, че в лявата страна на неравенството имаме обикновена абсолютна стойност, а в дясната са дължини на вектори. Това ни дава възможност да определим ъгъла φ между векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ с равенството $\cos\varphi = \frac{\vec{x}.\vec{y}}{|\vec{x}|.|\vec{y}|}$, като $\varphi \in [0, \pi]$ е определен еднозначно. Забавно е, че за многомерни (≥ 4 мерни) пространства ъгълът между вектори се определя от дефиницията на скаларно произведение, а не е част от нея. Това позволява да кажем че $\vec{x} \perp \vec{y}$ (тоест векторите са перпендикулярни) само ако $\vec{x}.\vec{y} = 0$.(или някой от векторите е нулев). Ще отбележим за пълнота, че всичко до сега (а и след това) се представя в стандартния ортонормален базис $\{\vec{e}_k\}|_{k=1}^{n}$, където $\vec{e}_k = \left(0, 0, \ldots, \underset{k}{1}, 0, \ldots, 0\right)$. Това е **стандартния** базис в $\mathbb{R}^n$; всяка линейно независима система от *n* вектора също е база, на $\mathbb{R}^n$, не непременно ортогонална. Сега ще променя темата за малко. Нека $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ е квадратна матрица. Полагаме след това

$\vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}$. Значи матрицата *A* може да се запише по следния начин: $A = \left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\right)$, при което „векторите“ в този запис са стълбове. Не е трудно да се съобрази, че за транспонираната матрица се получава $A^t = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,t} \\ \vec{a}_2^{\,t} \\ \vdots \\ \vec{a}_n^{\,t} \end{pmatrix}$. където транспонираните вектори са редове. Значи произведението е на практика матрица чиито елементи са скаларни произведения:

(4.0.1)
$$AA^t = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^{\,2} & \vec{a}_1.\vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_1.\vec{a}_n \\ \vec{a}_2.\vec{a}_1 & \vec{a}_2^{\,2} & \ldots & \vec{a}_2.\vec{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \vec{a}_n.\vec{a}_2 & \vec{a}_n.\vec{a}_2 & \ldots & \vec{a}_n^{\,2} \end{pmatrix}$$

(4.1) Дефиниция Ако $AA^t = E$, то A се нарича ***ортогонална матрица***. Това означава, че $A^t = A^{-1}$ което също може да е дефиниция за това, какво е ортогонална матрица. Важно е да се забележи, че матрицата A е ортогонална тогава и само тогава, когато редовете (или стълбовете ѝ) са единични перпендикулярни вектори. Обратно, ако имаме n единични перпендикулярни два по два n - мерни вектора и ги запишем като редове или стълбове, ще се получи ортогонална матрица. Хубавото на ортогоналните матрици е, че с тях се описват преобразования (функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), които запазват дължините на векторите и ъглите между тях. Това се вижда лесно. Да вземем два вектора $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Нека освен това A е ортогонална матрица и $\vec{u}^{\,t} = A\vec{x}^{\,t}$, $\vec{v}^{\,t} = A\vec{y}^{\,t}$. Да напомним, че $\vec{u} = \left(\vec{u}^{\,t}\right)^t = \left(A\vec{x}^{\,t}\right)^t = \vec{x}A^t$ (вижте **(4.0)**). Значи

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}^{\,t} = \left(\vec{x}A^t\right)\left(A\vec{y}^{\,t}\right) = \vec{x}\left(A^tA\right)\vec{y}^{\,t} = \vec{x}.\vec{y}^{\,t} = \vec{x}.\vec{y}$, което означава, че скаларното произведение се запазва и значи дължините на векторите и ъглите между тях също се запазват при изображението $\vec{u}^{\,t} = A\vec{x}^{\,t}$. Такива изображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ се наричат **изометрии**.

(4.1.1) Примери:

(а) Векторите $\vec{a}\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ и $\vec{b}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ имат дължини единица и са перпендикулярни. Значи матрицата $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ е ортогонална (проверете го). Проверете също, че ако $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, то $u_1v_1 + u_2v_2 = x_1y_1 + x_2y_2$.

(б) Направете същите неща, ако матрицата е $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ - разбира се, проверете, че това е ортогонална матрица, която запазва скаларното произведение в $\mathbb{R}^3$.

(в) Същото за матрицата $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ в $\mathbb{R}^4$.

(4.2) Дефиниция Квадратична форма е всеки израз от вида $L_n\left(\vec{x}\right)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$; $a_{ij}=a_{ji}$.

Когато размерността е малка може да се запише по – лесно: $L_2=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$ при $n=2$ и $L_3=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{23}x_2x_3+2a_{31}x_3x_1$ при $n=3$ Лесно може да се види, че квадратичните форми могат да се записват матрично. Например

$$L_2=(\,x_1\ x_2\,)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=(\,a_{11}x_1+a_{21}x_2\ \ a_{12}x_1+a_{22}x_2\,)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\left(a_{11}x_1^2+a_{21}x_1x_2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2\right)$$

защото $a_{12}=a_{21}$. Изобщо за е ясно, че за $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ имаме $L_n\left(\vec{x}\right)=\vec{x}A\vec{x}^t$, където A е симетрична матрица.

5. Канонизиране на квадратични форми.

По много причини е важно да се направи смяна на променливите, която запазва геометричните свойства на квадратичните форми. Работата е там, че някои важни за приложенията геометрични обекти (напр. криви от втора степен – груби казано, по такива криви се движат телата около Слънцето) и много други. За да се разберат геометричните свойства на нещата, които се описват с квадратични форми е добре да се направи смяна на променливите, която е изометрична (тоест, запазва свойствата и формите на геометричните обекти).

(5.1) Рецептата. И така, дадена е квадратичната форма $L_n\left(\vec{x}\right)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$

(а) Пресмята се характеристичния полином $P_A(\lambda)=\det(A-\lambda E)$. Тъй като A симетрична матрица, то уравнението $P_A(\lambda)=0$ непременно има толкова реални решения $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, колкото е степента му, защото A е симетрична матрица.

(б) Пресмятат се съответните собствени вектори $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_n$. Както беше обсъждано и на лекции, векторите може да се изберат да са единични. Ако някой корен, например λ_1 има кратност k, то се получават k линейно независими собствени вектори, които могат да бъдат единични и перпендикулярни. Ако $\vec{p}_i$ и $\vec{p}_j$ отговарят на стойностите $\lambda_i\neq\lambda_j$, то $\vec{p}_i\perp\vec{p}_j$. И така, винаги може да се открият n единични собствени вектори на A, които образуват ортогонална база: $\left\{\vec{p}_1,\vec{p}_2,\ldots,\vec{p}_n\right\}$.

(в) Образуваме матрицата $P = \left(\vec{p}_1^{\,t}, \vec{p}_2^{\,t}, \ldots, \vec{p}_n^{\,t} \right)$.

(г) Правим смяна на променливите $\vec{x}^t = P\vec{y}^t$.

(д) Получава се $L_n\left(\vec{y}\right) = \vec{x}A\vec{x}^t = \vec{y}\left(P^t AP\right)\vec{y}^t$.

(е) Проверете, че матрицата $B = P^t AP$ е диагонална: $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (вижте **(4.0.1)**).

(ж) Получава се $L_n\left(\vec{y}\right) = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

Забележка: Предполагам, че някой може да се затрудни от предходния текст, поради което съветвам да го напише старателно при $n = 2$ и $n = 3$. Това е необходимо (но не непременно достатъчно условие) за успешно представяне на изпита.

Да резюмираме: всяка квадратична форма $\vec{x}A\vec{x}^t$ може да се представи във вида $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

(5.2) Още малко за кривите от втора степен.

И така, нека γ: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ е кривата от **(3.2.1)**. Ако тя е централна, то можем след линейната смяна да сведем γ в каноничен вид: γ: $ax^2 + 2bxy + cy^2$+d'=0. Привеждаме квадратичната форма в каноничен вид и се получава уравнението

(5.2.0) $$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 X^2 = \mu .$$

То предполага различни линии в зависимост от параметрите.

(5.2.1) Ако $\lambda_{1,2}$ и μ имат еднакви знаци и са различни от нула, то можем да извършим следните неща: $\frac{\lambda_1}{\mu} X^2 + \frac{\lambda_2}{\mu} X = 1$ и след това $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ тоест получаваме уравнение на елипса. Ясно е, че $a = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_1}}$ и $b = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda_2}}$. Обикновено се пишат малки букви за променливите. Да напомня отново, че е добре да направите някои несложни (е, може би леко досадни) сметки, които показват някои геометрични свойства на елипсата (стр. 10-13).

(5.2.2) Ако например $\lambda_1 > 0; \lambda_2 > 0$, а $\mu < 0$, то се получава невъзможно равенство от типа на $x^2 + y^2 = -1$ (което обаче понякога се нарича имагинерна окръжност или елипса, но това е друга история)

(5.2.3.а) Когато $\lambda_1\lambda_2 < 0$, а $\mu \neq 0$, от (5.2.0) се получава уравнение от вида $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ - това геометрично място се нарича хипербола.

(5.2.3.а) При $\lambda_1\lambda_2 < 0$: като $\lambda_{1,2} \neq 0$ и $\mu = 0$ поучаваме уравнение от вида $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$, което е уравнение на две прави, които се пресичат в началото на координатната система.

(5.2.3.а) При $\mu = 0$ и $\lambda_2 = 0$ от **(5.2.0)** се получава $X^2 = 0$ - уравнение на права на втора степен и така нататък. Изобщо геометричното тълкуване на тривиалното равенство **(5.2.0)** е стандартно нещо и може би досаждам с тези разбори. BTW, може ли **(5.2.0)** да описва цялата равнина? Ако „да“, съобразете при какви условия.

6. Повърхнини от втора степен.

Повърхнина от втора степен в $\mathbb{R}^3$ е геометричното място ζ на точки $M(x_1, x_2, x_3)$, координатите на които удовлетворяват уравнението

(6.1) $$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_1 + 2a_{34}x_1 + a_{44} = 0.$$

Следваме стандартната процедура, първо трябва да се види дали системата

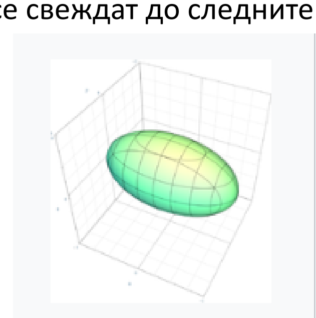
(6.1.0) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24} = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34} = 0 \end{cases}$$ има решение $M_0\left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$. Ако е така, то M_0 е център на повърхнината ζ.

(6.1.1) Централни повърхнини.

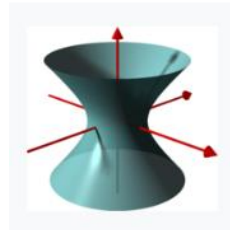
Това са повърхнините, за които системата **(6.1.0)** има решение. След стандартно преместване на началото на координатната система, уравнението на ζ става

$\zeta : a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + a'_{44} = 0$. След това канонизираме квадратичната форма $a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1$. Получава се уравнението $\lambda_1x_1^2 + \lambda_1x_1^2 + \lambda_1x_1^2 = \mu$, където $\mu = -a'_{44}$, а λ_k са собствените числа, които в този случай са ненулеви. Централните повърхнини се свеждат до следните случаи:

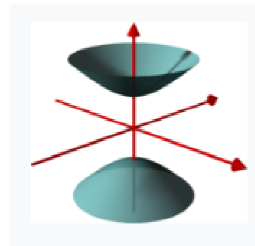
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - триосен елипсоид;



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ - хиперболоид с една повърхнина;



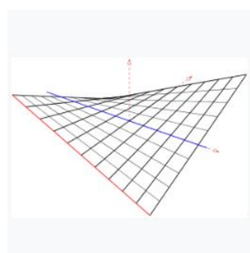
$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ - хиперболоид с две повърхнини.

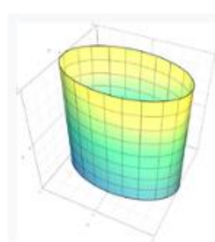


(6.1.2) Нецентрални повърхнини.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ - елиптичен параболоид;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ - хиперболичен параболоид



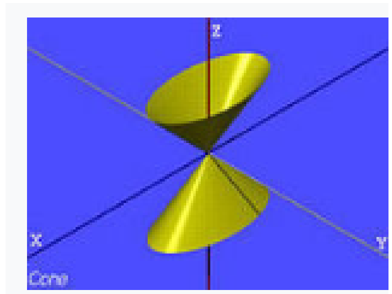


$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - елиптичен цилиндър;

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - хиперболичен цилиндър;

$y^2 = 2px$ - параболичен цилиндър;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ - конус;



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ - двойка пресичащи се равнини;

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ - двойка успоредни равнини и

$x^2 = 0$ - двойка съвпадащи равнини.