УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул.”Хр. Смирненски” №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
УАСГ

14 юни 2019 г.

Вариант 1

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Б	В	Б	Г	Б

Задача 1. (1 т.) Броят на решенията на уравнението $(x^2-4)\sqrt{1-x}=0$ е:

а) 1　　б) 2;　　в) 3;　　г) 4.

Решение: Тъй като $x\le 1$, даденото уравнение има корени $x_1=1$ и $x_2=-2$.

Задача 2. (1 т.) Дадена е аритметична прогресия, за която $\left|\begin{array}{l} a_1+a_3+a_5=9 \\ 2a_7-3a_3=5 \end{array}\right.$. Сумата $a_1+a_3+a_5+a_7+\cdots+a_{2017}+a_{2019}$ е равна на:

а) 2019^2　　б) $2019\cdot 1010$;　　в) 1010^2;　　г) 2019.

Решение: За дадената аритметична прогресия $a_1=1$ и $d=1$. Търсената сума е сумата на първите 1010 члена на аритметична прогресия с първи член 1 и разлика 2.

Задача 3. (1 т.) Най-голямата стойност на функцията $f(x)=\log_{x^2-2x+3}4$ е:

а) 1　　б) 2;　　в) 3;　　г) 4.

Решение: Дадената функция е $f(x)=\dfrac{1}{\log_4(x^2-2x+3)}$ и има най-голяма стойност 2 при $x=1$, защото тогава знаменателят е най-малък.

Задача 4. (1 т.) В $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB=75^\circ$, $AC=\sqrt{3}+1$ и $AB=\sqrt{3}+2$. Лицето на $\triangle ABC$ е:

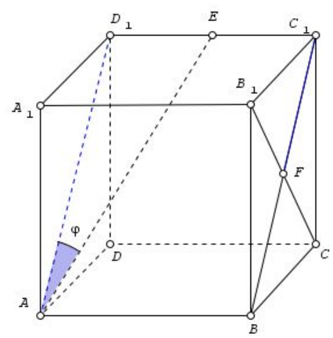
а) $\dfrac{3\sqrt{3}+1}{4}$; б) $\dfrac{3\sqrt{3}+2}{2}$; в) $\dfrac{5\sqrt{3}+9}{2}$; г) $\dfrac{5\sqrt{3}+9}{4}$.

Решение: От синусова теорема получаваме, че $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ и следователно $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Тогава за лицето имаме $S_{\vartriangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \sin 60^\circ = \dfrac{5\sqrt{3}+9}{4}$.

Задача 5. (1 т.) Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точката E е среда на C_1D_1, а центърът на стената BCC_1B_1 е точка F. Синусът на ъгъла между правите AE и C_1F е:

а) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{3}{3+\sqrt{3}}$.

Решение: Споменатият ъгъл е всъщност $\sphericalangle D_1AE$ (черт 1.). Тогава $\sin\varphi = \dfrac{D_1E}{AE} = \dfrac{1}{3}$.



Черт. 1

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията $f(x) = ax^2 - 2x - 1$, където $a \neq 0$ е параметър.

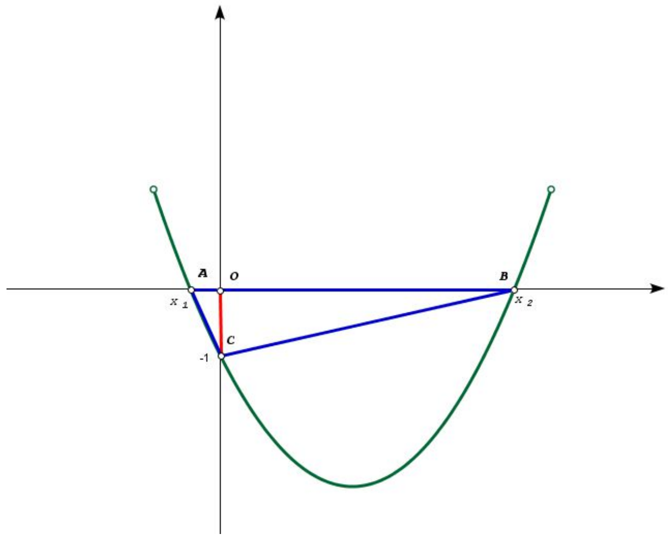
а) (2 т.) Да се реши уравнението $f(3^t) = 0$ за $a = 3$.

б) (1 т.) Да се намерят в зависимост от a координатите на точката от графиката на функцията $f(x)$, в която допирателната е успоредна на оста Ox.

в) (2 т.) Нека $S(a)$ е лицето на триъгълника с върхове – пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси. За кои положителни стойности на a $S(a) > \sqrt{2}$?

Решение: а) При $a = 3$ уравнението $f(x) = 0$ има корени 1 и $-\dfrac{1}{3}$, откъдето $3^t = 1$ или $3^t = -\dfrac{1}{3}$. Първото от получените уравнения има корен 0, а второто няма решение.

б) Абсцисата на търсената точка е корен на уравнението $f'(x) = 0$, т. е. $2ax - 2 = 0$, откъдето $x = \dfrac{1}{a}$ и точката е $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{1}{a} - 1\right)$.



Черт. 2

в) От $a > 0$ следва, че уравнението има два различни реални корена с различни знаци. Ясно е, че графиката на функцията пресича оста Ox в корените x_1 и x_2 на уравнението $f(x) = 0$, а оста Oy - в $f(0) = -1$. Тогава лицето на $\triangle ABC$ (черт. 2) е

$$S(a) = \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\left|f(0)\right| = \frac{\sqrt{1+a}}{a}.$$

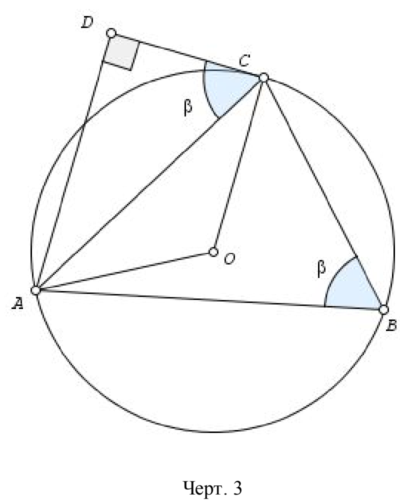
Така получаваме неравенството $\frac{\sqrt{1+a}}{a} > \sqrt{2}$ с положителни решения числата от интервала $(0,1)$.

Задача 7. (5 т.) Нетъпоъгълният $\triangle ABC$ е вписан в окръжност с радиус 2. Разстоянието от върха A до допирателната към окръжността през върха C е 3.

а) (2 т.) Да се намери $\sphericalangle ABC$.

б) (1 т.) Да се намери страната AC.

в) (2 т.) Да се намерят страните AB и BC, ако $AB - BC = 2$.



Черт. 3

Решение: а) Нека AD е перпендикулярът от върха A до допирателната към окръжността през върха C (черт. 3). Тогава, ако $\sphericalangle ABC = \beta$, то $\sphericalangle DCA = \sphericalangle ABC = \beta$. От правоъгълния $\triangle ADC$ имаме

$\sin\beta = \dfrac{AD}{AC}$, а от синусова теорема за $\triangle ABC$ - $AC = 2R\sin\beta = 4\sin\beta$. Получаваме $\sin^2\beta = \dfrac{3}{4}$ и тъй като $\triangle ABC$ не е тъпоъгълен, то $\beta = 60^\circ$.

б) От а) $AC = 2\sqrt{3}$.

Едно друго решение на а) и б) може да се получи с помощта на правоъгълния трапец $DAOC$, в който $AD = 3$ и $AO = OC = R$.

в) Прилагаме косинусова теорема за $\triangle ABC$ и получаваме $BC = 2$ и $AB = 4$. (Всъщност AB се оказва диаметър на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.)

Задача 8. (5 т.) Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ръб $2m$, $m > 0$. Нека точките F и G са среди съответно на ръбовете DD_1 и BB_1, а ρ е равнината, определена от точките A, F и C_1.

а) (1 т.) Да се докаже, че точката G лежи в ρ.

б) (2 т.) Да се намери лицето на сечението на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с равнината ρ.

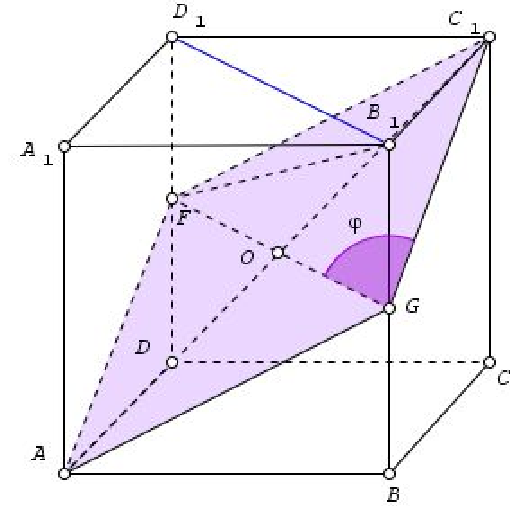
в) (2 т.) Да се пресметне косинусът на ъгъла и разстоянието между правите B_1D_1 и C_1G.

<u>Решение:</u> а) Тъй като правите AF и C_1G са успоредни, то точката G е от равнината ρ, определена от точките A, F и C_1.

б) Сечението на куба с равнината ρ е ромбът AFC_1G (черт. 4) с диагонали $FG = BD = 2\sqrt{2}m$ и $AC_1 = 2\sqrt{3}m$. Тогава $S_{AFC_1G} = \dfrac{1}{2}FG \cdot AC_1 = 2\sqrt{6}m^2$.

в) Тъй като $B_1D_1 \parallel FG$, то търсеният ъгъл е $\varphi = \sphericalangle FGC_1$. От косинусова теорема за $\triangle FGC_1$ (или от $\triangle C_1GO$) получаваме $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

От $B_1D_1 \parallel FG$ следва, че търсеното разстояние d е разстоянието от върха B_1 до равнината ρ, което е всъщност височината през върха B_1 на пирамидата C_1GFB_1. За обема ú получаваме $V_{C_1GFB_1} = \dfrac{1}{3}S_{B_1C_1G}h_F = \dfrac{1}{3}S_{FGC_1}d$. Тъй като $h_F = 2m$, непосредствено се получава, че $d = \dfrac{m\sqrt{6}}{3}$.



Черт. 4