УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

бул.”Хр. Смирненски” №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

КАНДИДАТСТУДЕНТСКИ ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА УАСГ

14 април 2019 г.

Вариант 2

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
В	В	Б	Г	Б

Задача 1. (1 т.) Броят на целите числа от дефиниционното множество на израза $\sqrt{x^2-2x-3}-\dfrac{1}{\log_3(12-x^2)}$ са:

а) 2; б) 3; в) 4; г) 5.

Решение: Дефиниционното множество е решение на системата $\left|\begin{array}{l} x^2-2x-3\ge 0 \\ 12-x^2>0 \\ 12-x^2\ne 1\end{array}\right.$, което е $x\in(-\sqrt{12},-\sqrt{11})\cup(-\sqrt{11},-1]\cup[3,\sqrt{11})\cup(\sqrt{11},\sqrt{12})$. Целите числа в ДМ са четири на брой: -3, -2, -1 и 3.

Задача 2. (1 т.) За кои стойности на x числата $5-x, \sqrt{2x+10}$ и $3x-3$ образуват аритметична прогресия?

а) -3 и 3; б) -3; в) 3; г) няма такова x.

Решение: От условието, че дадените числа образуват аритметична прогресия, получаваме уравнението $\sqrt{2x+10}=\dfrac{5-x+3x-3}{2}=x+1$, откъдето е ясно, че $x=3$. До същия отговор може да се стигне и чрез непосредствено заместване на дадените отговори в условието.

Задача 3. (1 т.) За кои стойности на x от интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ допирателната към графиката на функцията $y=\sin 2x+2019$ сключва с положителната посока на абсцисата ъгъл $\dfrac{\pi}{3}$?

а) $\pm\dfrac{\pi}{6}$ б) $\pm\dfrac{\pi}{12}$; в) $\dfrac{\pi}{6}$; г) $-\dfrac{\pi}{12}$.

Решение: Производната на функцията е $f'(x)=2\cos 2x$, откъдето $f'(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ и $x=\pm\dfrac{\pi}{12}$.

Задача 4. (1 т.) В равнобедрен триъгълник радиусът на вписаната му окръжност е $\frac{5}{12}$ от височината към основата. Косинусът на ъгъла при върха срещу основата е:

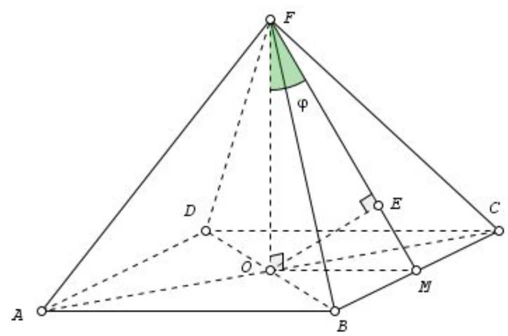
а) $\frac{1}{49}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $-\frac{1}{7}$; г) $-\frac{1}{49}$.

Решение:**.** Нека даденият триъгълник е ABC с основа AB и $\sphericalangle C = \gamma$. Нека $CD\,(D \in AB)$ е височината му към основата, точката O е център на вписаната му окръжност, а точката $K\,(K \in BC)$ е допирната точка на вписаната окръжност до бедрото BC. Тогава $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{5}{7}$ и $\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = -\frac{1}{49}$.

Задача 5. (1 т.) В правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 6 и околен ръб $3\sqrt{3}$, ъгълът между височината ѝ и околна стена е:

а) 30°; б) 45° в) 60°; г) 90°.

Решение:**.** Нека дадената пирамида е $ABCDF$ с основа квадратът $ABCD$ (черт 1.). Тогава очевидно търсеният ъгъл е ъгълът φ между височината на пирамидата FO и апотемата FM на околната стена BCF. При така дадените ръбове на пирамидата получаваме $FM = \sqrt{FB^2 - BM^2} = 3\sqrt{2}$;
$\sin\varphi = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Следователно $\varphi = 45^\circ$.



Черт. 1

Задача 6. (5 т.) Дадена е функцията $f(x) = x^2 - (a+1)x + 2a - 1$, където a е параметър.

а) (2 т.) Да се реши уравнението $f(\cos t) = 0$ за $a = -\frac{1}{3}$.

б) (3 т.) Нека уравнението $f(x) = 0$ има реални корени x_1 и x_2. Да се представи като функция на a изразът $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ и да се намери най-малката му стойност.

Решение: а) При $a = -\frac{1}{3}$ получаваме $f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ и уравнението $f(x) = 0$ има корени $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_2 = -1$. Сега очевидно уравнението $\cos t = \frac{5}{3}$ няма решение, а решенията на уравнението $\cos t = -1$ са $t = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) За да има уравнението $f(x) = 0$ реални корени, трябва дискриминантата му D да е неотрицателна. Тогава $a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$. За израза $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ имаме $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2$ и от формулите на Виет получаваме $g(a) = a^2 - 8a + 6$. Ясно е, че минимумът на $g(a)$ се достига при $a = 4$, което е извън $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

Тъй като $g(a)$ е намаляваща в $(-\infty, 1]$ и растяща в $[5, +\infty)$, то най-малката стойност на $g(a)$ е по-малкото от числата $g(1) = -1$ и $g(5) = -9$.

Задача 7. (5 т.) Точките M, N, P и Q са среди на страните AB, BC, CD и DA на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$). Известно е, че $\sphericalangle BAD = \alpha, NQ = m, PM = n$ и $AD \perp BC$.

а) (2 т.) Пресметнете дължините на страните на трапеца.

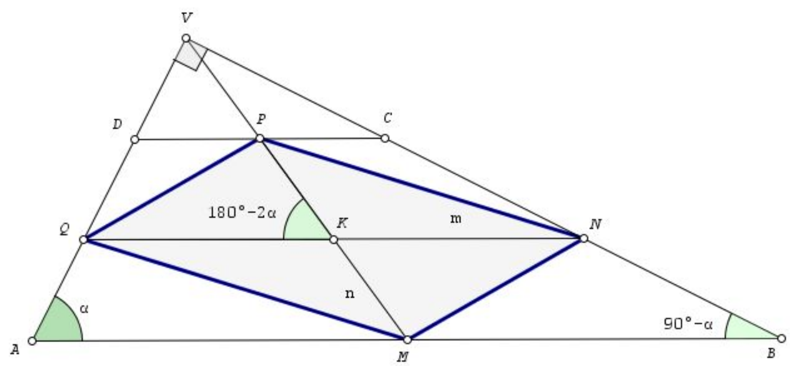
б) (1 т.) Пресметнете лицето на четириъгълника $MNPQ$.

в) (2 т.) Нека $ABCD$ е описан около окръжност. Докажете, че $NQ \le PM\sqrt{2}$.

Решение: а) Нека точката V е пресечната точка на BC и AD (черт. 2). Тогава $\triangle ABV$ е правоъгълен с хипотенуза AB и медиана към хипотенузата VM. Аналогично VP е медиана към хипотенузата в правоъгълния $\triangle CDV$. Така имаме $VM = \frac{1}{2}AB$, $VP = \frac{1}{2}CD$ и $AB - CD = 2n$. От друга страна QN е средна основа в трапеца и $AB + CD = 2m$. Получаваме $AB = m + n$, $CD = m - n$.
За бедрата имаме $VA = AB\cos\alpha$, $VD = CD\cos\alpha$, $AD = VA - VD = 2n\cos\alpha$. Аналогично $BC = 2n\sin\alpha$.

б) Нека пресечната точка на PM и QN е K. От равнобедрения $\triangle AMV$ ($AM = MV$) имаме, че $\sphericalangle AMV = 180^\circ - 2\alpha$. Тъй като $QN \parallel AB$, то $\sphericalangle QKV = 180^\circ - 2\alpha$. Тогава за лицето на $MNPQ$ получаваме $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}PM.QN\sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2}mn\sin 2\alpha$.

в) От условието $ABCD$ да е описан около окръжност имаме $AB + CD = AD + BC$, т. е. $m = n(\cos\alpha + \sin\alpha) = n\sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha)$, откъдето следва исканото неравенство.



Черт. 2

Задача 8. (5 т.) Дадена е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в който $AB = AA_1 = 2\sqrt{2}$ и $BC = 1$. Нека точката N е среда на ръба AB.

а) (1.5 т.) Да се намери обемът на пирамидата $PNCD_1$, където P е пресечната точка на AC и DN.

б) (2 т.) Да се намери ъгълът между равнините (ABC) и (DNC_1).

в) (1,5 т.) Да се намери лицето на сечението на дадения паралелепипед с равнината (DNC_1).

Решение: а) Тъй като от подобието на триъгълниците ANP и CDP (черт. 3) следва, че P дели AC в отношение $1:2$, то $S_{\triangle PNC} = \frac{2}{3}S_{\triangle ANC} = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AN.BC = \frac{1}{3}\sqrt{2}.1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Ясно е, че CC_1 е височина на пирамидата $PNCD_1$ и тогава обемът ѝ е $V_{PNCD_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle PNC}.CC_1 = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{2}}{3}.2\sqrt{2} = \frac{4}{9}$.

б) Да построим търсения двустенен ъгъл. Тъй като $CC_1 \perp (ABC)$ (черт. 4) прекарваме перпендикуляр CE към ръба DN ($E \in DN$) на ъгъла. Тогава от теоремата за трите перпендикуляра следва, че и $C_1E \perp DN$. Значи въпросният ъгъл е $\sphericalangle C_1EC = \varphi$. Да продължим DN до пресичането ѝ с

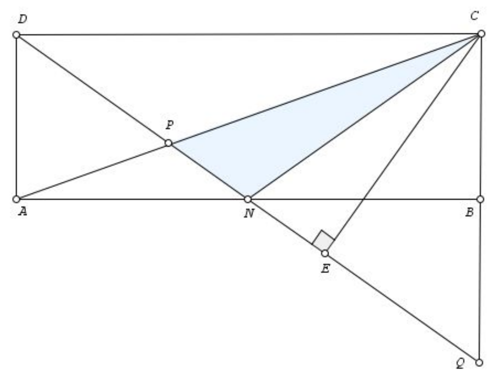
BC в точката Q. Сега от $\triangle DQC$ получаваме $CE = \dfrac{CD.CQ}{DQ} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Сега от правоъгълния $\triangle C_1EC$ $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{C_1C}{CE} = \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = 60^\circ$.

в) Да построим търсеното сечение. Нека C_1Q пресича ръба BB_1 в точка F. Тогава сечението е четириъгълникът C_1DNF. Тъй като $C_1D \parallel NF$, то този четириъгълник е трапец. Не е трудно да се изчислят страните му: основи 4 и 2 и равни бедра по $\sqrt{3}$. Оттук височината му е $\sqrt{2}$ и непосредствено се изчислява и лицето.

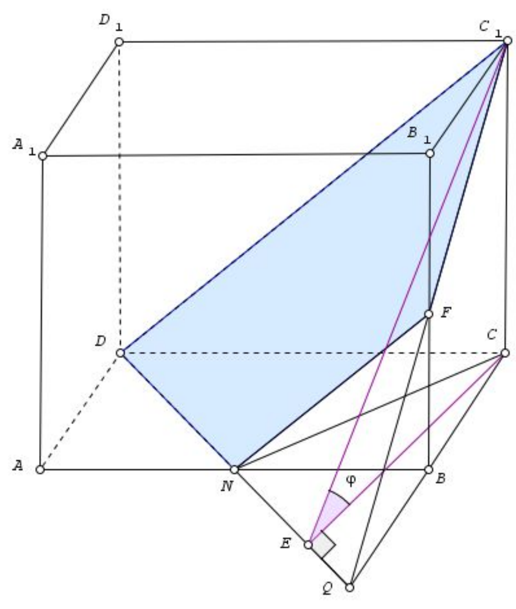
Може би по-рационално е да използваме формулата $S_{пр} = S_{сеч}\cos\varphi$, където $S_{пр}$ е лицето на проекцията на сечението в долната основа на паралелепипеда. Тъй като върховете C_1 и F се проектират съответно в точките C и B, то $S_{пр} = S_{DNBC} = S_{ABCD} - S_{AND} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Сега

$S_{сеч} = \dfrac{S_{пр}}{\cos 60^\circ} = 3\sqrt{2}$.

<u>Забележка:</u> За предложеното решение не е необходимо да построяваме самото сечение. Достатъчно е да съобразим, че равнината (DNC_1) пресича ръба BB_1.



Черт. 3



Черт. 4