Линейни ОДУ с постоянни коефициенти

Основният тип обикновени диференциални уравнения от по-висок ред, който ще разгледаме, е линейният хомогенен случай с постоянни коефициенти. Решението се получава сравнително просто с алгебрични методи, а приложенията са много, включително за приближено решаване на по-сложни задачи. Общият вид на задачата в случая за уравнения от втори ред има вида

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = 0, \quad a_i = const.$$

където $a_0 \neq 0$ и решението е функция $x = x(t)$. Задачата има и матрично представяне във вида

$$\mathbf{Ax' = 0}$$

както лесно се вижда ако положим $x_1 = x$, $x_2 = x'$, което веднага дава $x_2' = -(a_1 x_2 + a_2 x_1)/ a_0$. При определени теоретични разглеждания матричното представяне дава по-удобен модел, но за решаването на задачи ние ще изберем първия запис. То става с известното полагане на Euler, което ограничава решенията до функции от типа $x(t) = \exp(\lambda t)$, а след заместване и делене на общия множител $\exp(\lambda t) \neq 0$ дава така наречения *характеристичен полином* на уравнението

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$$

чиито решения образуват *спектъра* на задачата, в матричния запис това са собствените числа. Ако този спектър е *прост*, т.е. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогава *базисните решения* имат вида $x_i = \exp(\lambda_i t)$ и всяко друго се представя като линейна комбинация от тях, т.е. пространството от решения е *линейно*

$$X_0(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t), \quad C_i = \text{const.}$$

Което дава *общото решение* на хомогенната система, а при различни стойности на числата C_i можем да удовлетворим различни начални условия – тук задачата на Cauchy изисква да се знаят както началното положение $x(t_0) = x_0$, така и скоростта в началния момент $x'(t_0) = v_0$.

Нека разгледаме като пример следната задача на Cauchy

$$x'' - 2x' - 3x = 0, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Субституцията на Euler дава характеристичния полином във вида $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$, откъдето леснно получаваме $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ и следователно за общото решения и производната му имаме

$$X_0(t) = C_1\exp(3t) + C_2\exp(-t) \quad \rightarrow \quad X_0'(t) = 3C_1\exp(3t) - C_2\exp(-t).$$

Като наложим началните условия при $t = 0$, от горното се получава линейна система за C_1 и C_2

$$C_1 + C_2 = 0, \quad 3C_1 - C_2 = 1$$

откъдето намираме, че $C_1 = - C_2 = ¼$ и следователно окончателното решение приема вида

$$x_0(t) = ¼ \exp(3t) - ¼ \exp(-t).$$

За случая на кратен корен λ_i общата теория казва, че на всеки такъв съответства собствено подпространство от решения, които имат вида P(t) exp(λ_it), където P(t) е полином от степен с едно по-малка от кратността на корена. При ОДУ от втори ред например това дава $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и

$$x_2 = tx_1 \quad \rightarrow \quad X_0(t) = (C_1 + C_2 t)\exp(\lambda t).$$

Като пример за двоен корен ще разгледаме този път уравнението от трети ред

$$x''' - x'' - x' + x = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1$$

откъдето получаваме общото решение във вида

$$X_0(t) = (C_1 + C_2 t)\exp(t) + C_3\exp(t)$$

а за да формулираме задача на Cauchy тук вече са ни нужни стойностите на x, x′ и x′′ при $t = t_0$.

Преди да разгледаме нехомогенния случай, обръщаме внимание на една особеност в случая на комплексни корени от вида $\lambda = \alpha + i\beta$, а именно формулата на Euler: $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ позволява да считаме линейните комбинации по-долу за взаимозаменяеми

$$C_1\exp(\lambda t) + C_2\exp(-\lambda t) \quad \leftrightarrow \quad \exp(\alpha t)[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)]$$

като при второто представяне всички коефициенти са реални. Така например, в задачата

$$x''' - x'' + x' - x = 0$$

лесно получаваме общото решение (уверете се сами, че действително е вярно) във вида

$$X_0(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + C\exp(t).$$

В случая на нехомогенно ОДУ, т.е. такова с ненулева дясна част, например

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f, \quad f = f(t)$$

теорията казва, че общото решение се получава като към $X_0(t)$ се прибави кое да е частно решение $\eta(t)$ на горното уравнение. За намирането на такова частно решение има различни методи: един от най-лесните ползва пряка субституция, но работи само при дясна част от вида

$$f(t) = P_r(t)\exp(\alpha t)[A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)]$$

където $P_r(t)$ е полином. Ако числото $\lambda = \alpha + i\beta$ не е решение на характеристичния полином, то частното решение се търси в същия вид като дясната част f(t), но с неопределени коефициенти

$$\eta(t) = \exp(\alpha t)[Q_r(t)\cos(\beta t) + R_r(t)\sin(\beta t)], \qquad \beta = 0 \rightarrow \cos(\beta t) = 1.$$

Последните (за Q_r и R_r, които имат степента на P_r) се определят като се замести $\eta(t)$ в горното уравнение. Ако $\lambda = \alpha + i\beta$ е корен на характеристичния полином с кратност $j+1$, полагането е

$$\eta(t) = t^j \exp(\alpha t)[Q_r(t)\cos(\beta t) + R_r(t)\sin(\beta t)]$$

което е известно като резонанс от ред $j + 1$ (ефектът е наблюдаван най-напред във физиката).

Ще илюстрираме този метод с няколко примера: нека първо разгледаме задачата от началото на урока, само че с отлична от нула дясна част във вида

$$x'' - 2x' - 3x = 3t^2, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Можем да използваме вече полученото общо решение на хомогенното уравнение

$$X_0(t) = C_1\exp(3t) + C_2\exp(-t)$$

но преди да наложим началните условия, трябва да получим и частното решение. Тъй като дясната част има вида $f(t) = P(t)\exp(0)$ и 0 не е решение на характеристичния полином, можем да положим $\eta(t) = at^2 + bt + c$, откъдето имаме $\eta' = 2at + b$ и $\eta'' = 2a$, след което заместваме

$$\eta'' - 2\eta' - 3\eta = 3t^2 \quad \rightarrow \qquad (a+1)t^2 + (2a+3b)t - 2a + 3c = 0.$$

За да бъде полиномът вдясно тъждествено нула, всички негови коефициенти трябва да са нула или с други думи a = -1, b = ⅔ и c = - ⅔, т.е. общото решение на нехомогенното ОДУ има вида

$$X(t) = X_0(t) + \eta(t) = C_1\exp(3t) + C_2\exp(-t) - t^2 + \tfrac{2}{3}(t - 1).$$

Сега остана да наложим началното условие като този път в сметката влиза и η', а именно

$$X'(t) = 3C_1\exp(3t) - C_2\exp(-t) - 2t + \tfrac{2}{3}$$

откъдето лесно се вижда, че $X(0) = 0$, $X'(0) = 1$ води до системата $C_1 + C_2 - \frac{2}{3} = 0$ и $3C_1 - C_2 + \frac{2}{3} = 1$.

Нека разгледаме и случая на резонанс – така, както възниква във физиката. Уравнението

$$x'' + \omega_0^2 x = F\cos(\omega t)$$

описва хармоничен осцилатор (проста трептяща система, например пружина с прикачена към нея тежест) където F = *const.* е амплитудата на външната периодична сила с кръгова честота ω, а ω_0 наричаме *собствена честота* на системата (зависеща само от вътрешните й параметри – маса и еластичност). Лесно се вижда, че решението на хомогенното уравнение има вида

$$X_0(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

докато това за нехомогенната част при $\omega \neq \omega_0$ се получава като заместим

$$\eta(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

откъдето лесно пресмятаме $\eta'' = -\omega^2 \eta$ и така в крайна сметка решението приема вида

$$a = F/(\omega_0^2-\omega^2), \quad b = 0 \quad \rightarrow \quad X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + F\cos(\omega t)/(\omega_0^2-\omega^2).$$

В случая на резонанс обаче полагането ще бъде, според написаното по-горе

$$\eta(t) = t[a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)] \quad \rightarrow \quad \eta''(t) = (2b-\omega^2 at)\cos(\omega t) - (2a + \omega^2 bt)\sin(\omega t)$$

откъдето със заместване в уравнението получаваме

$$a = 0, \quad b = \tfrac{1}{2}F \quad \rightarrow \qquad X(t) = A\cos(\omega_0 t) + (B + \tfrac{1}{2}Ft)\sin(\omega_0 t).$$

Характерното тук е, че амплитудата на трептенето нараства линейно с времето, което обяснява способността на оперни певци да трошат кристални чаши с гласа си – вероятно може и вие да успеете, но се иска прецизност, силен и добре трениран глас, както и много въздух. Преди този експеримент опитайте да решите задачата като линейна система, както често правят физиците. За целта работим във *фазово пространство*, при което освен координати x_i (в случая е една) имаме и съответните скорости (или импулси) $v_i = x_i'$, т.е. уравнението става матрично от вида

$$x' = v, \qquad v' = -\omega_0^2 x - F\cos(\omega t)$$

като отново първата стъпка е получаването на хомогенната част на решението – векторът $\mathbf{X}_0(t)$, който е линейна комбинация от собствените вектори на ситемната матрица с коефициенти от вида $C_i\exp(\lambda_i t)$, както изисква полагането на Euler. В нашия случай обаче собсвените стойности са $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, а както видяхме, линейните комбинации от този вид са еквивалентни на такива от синуси и косинуси. Полагането за $\boldsymbol{\eta}(t)$ отново е във векторна форма с отчитане на резонанса.

Понякога резонансът е прикрит ако дясната част е полином и спектъра съдържа {0}, например

$$x'' - 2x' = -6t^2 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 2 \quad \rightarrow \quad X_0(t) = C_1\exp(0) + C_2\exp(2t)$$

допуска частно решение във вид на кубична, а не квардатна функция $\eta(t) = at^3 + bt^2 + ct$, като допълнителният множител се дължи на това, че дясната част има вида $f(t) = P(t)\exp(0t)$, а 0 е корен на характеристичния полином. След диференциране и заместване накрая получаваме

$$X(t) = C_1 + C_2\exp(2t) + t^3 + 3t(t+1).$$

Друг популярен и ефективен метод за отркиване на частно решение съответсващо на дадена дясна част $f(t)$ е предложен от Lagrange, който в израза за $X_0(t)$ допуска C_1 и C_2 да зависят от t:

$$X(t) = C_1(t)\, x_1(t) + C_2(t)\, x_2(t).$$

Твърдението е, че при подходящ избор на тази зависимост, горният израз дава пълно решение на нехомогенното уравнение. Като диференцираме съгласно правилото на Leibniz получаваме

$$X' = C_1'\, x_1 + C_2'\, x_2 + C_1\, x_1' + C_2' x_2'$$

но тъй като имаме две неопределени функции и само едно уравнение за тях, тази свобода ни позволява да наложим допълнително условие (физиците го наричат калибровка). Удобно е да изберем например условието $C_1' x_1 + C_2' x_2 = 0$, така изразът за втората производна добива вида

$$X'' = C_1'\, x_1' + C_2'\, x_2' + C_1\, x_1'' + C_2\, x_2''$$

и като заместим в уравнението

$$a_0\, x'' + a_1\, x' + a_2\, x = f(t)$$

след прегрупиране на събираемите получаваме

$$C_1(a_0 x_1'' + a_1 x_1' + a_2 x_1) + C_2(a_0 x_2'' + a_1 x_2' + a_2 x_2) + C_1'(a_0 x_1' + a_1 x_1) + C_2'(a_0 x_2' + a_1 x_2) = f(t)$$

но изразите в скоби при първите две събираеми са тъждествено нула, тъй като x_1 и x_2 са по построение решения на хомогенното уравнение, а калибровъчното условие съкращава още две събираеми и така уравнението се свежда до линейна система за неизвестните C_1' и C_2'

$$C_1'x_1 + C_2'x_2 = 0, \qquad C_1'x_1' + C_2'x_2' = f/a_0$$

за която винаги съществува единствено решение, тъй като нейната детерминанта съвпада с детерминантата на Wronski за фундаменталната система решения (ФСР) x_1, x_2 която е ненулева

$$W(x_1, x_2) = x_1\, x_2' - x_1'\, x_2 \neq 0.$$

Тогава можем лесно да получим, например от формулите на Cramer, изразите за C_1' и C_2'

$$C_1' = -\, x_2 f/a_0 W, \qquad C_2' = x_1 f/a_0 W$$

които след това интегрираме (ако можем) за да намерим функциите $C_1(t)$ и $C_2(t)$. При това, интеграционните константи, които ще бележим с C_1^0 и C_2^0 за да не се бъркат с фунциите C_1 и C_2, отделят хомогенната част на решението, а методът работи при произволна дясна част, не само от специалния вид полином по експонента, но не е чисто алгебричен и самото интегриране може да доведе до трудности. Нека го илюстрираме с малка модификация на предната задача

$$x''(t) + x(t) = tg(t)$$

където фундаменталната система решения, както видяхме, може да бъде избрана във вида

$$x_1 = \cos t\,, \; x_2 = \sin t \quad \rightarrow \quad W = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Понеже в слуая имаме очевидно $a_0 = 1$, горните изрази за нашата задача дават

$$C_1' = -\sin(t)tg(t) = -\sin^2(t)/\cos(t), \qquad C_2' = \cos(t)tg(t) = \sin(t)$$

като интегралът за C_2 е табличен, а този за C_1 изисква хиперболични или рационални фунцкии

$$C_1(t) = \sin(t) - \operatorname{arcth}(\sin(t)) + C_1^0, \qquad C_2(t) = -\cos(t) + C_2^0$$

което заместено в израза за $X(t)$ дава окончателното решение във вида

$$X(t) = C_1^0\cos(t) + C_2^0\sin(t) - \operatorname{arcth}(\sin(t))\cos(t).$$

Изборът на конкретно частно решение не се отразява на крайния резултат – коефициентите в хомогенната част се грижат за тази еквивалентност. Съществуват различни методи, а на теория човек би могъл и да налучка отговора, стига да е развил нужните паранормални способности.

Задачи:

1. $x'' - 2x' + x = \cos(2t)$, $\quad x'' - x' - 2x = 3t\exp(2t)$;
2. $x'' - x = th(t)$, $\quad x'' + 2x' = \exp(-t)/t$;
3. $x''' + 4x' = 8t^2$, $\quad x''' + 8x = \exp(-2t)$, $\quad x''' - x'' - x' + x = 12\exp(t)$;
4. $x'' - x' = t + \exp(t)$, $\quad x'' - 5x' = t^2 - \sin(5t)$.

<u>Упътване</u>: ако дясната част има вида $f = f_1+f_2$, то и частното решение се представя като $\eta = \eta_1+\eta_2$.