Няколко задачки, които човек би могъл да срещне и по изпити...

1. В уравнението $y\,y'' - y'^2 = y^3$ променливата x не участва в явен вид, така че можем да положим $y' = p(y)$ (това е стандартен метод за понижаване на реда), съответно за втората производна получаваме, съгласно правилото за диференциране на съставна функция, $p'' = p'p$. Тогава за новата функция имаме уравнението $p'p\,y - p^2 = y^3$. Да разделим двете страни на $p\,y$. По този начин загубваме решението $p = 0, y = 0$, което е само тривиалното решение на изходното уравнение, така че няма проблем. В крайна сметка стигнахме до линейното уравнение $p(y)' - \dfrac{1}{y}p(y) = y^2$, което всеки знае как да реши. Получава се нещо от сорта на $p(y) = y(\dfrac{y^2}{2} + C)$. С други думи трябва да решим още едно уравнение от първи ред, а именно $y' = y(\dfrac{y^2}{2} + C)$, т.е. трябва да пресметнем неопределения интеграл

$$x(y) = \int \frac{2dy}{y(y^2 + C_1)} + C_2$$

и после да обърнем функцията. В някои случаи това може да се направи, но не винаги. В случя е интересно да се види докъде можем да докараме нещата, но това е добро упражнение за любознателни студенти, от което един доброжелателен асистент не би следвало да ги лишава.

2. Уравнението $x^2y' = x^2 + y^2 = xy$, $y(1) = 1$. Тук трябва да сме наблюдателни и да забележим, че уравнението е хомогенно. По-лесно се вижда като разделим двете страни[1] на x^2. Като въведем новата функция z, $y = zx$ получаваме от горното

$$y' = z'x + z = 1 + z^2 + z$$

което е уравнение с разделени променливи и може да се запише във вида

$$\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{dx}{x}$$

удобен за интегриране. Решението очевидно е $z = \operatorname{tg}(\ln Cx)$, или, като се върнем в полагането, $y(x) = x\operatorname{tg}(\ln Cx)$. Условието $y(1) = 1$ е равносилно на $\ln C = \frac{\pi}{4}$, т.е. $C = e^{\frac{\pi}{4}}$. Окончателно, търсеното решение на задачата на *Cauchy* с това начално условие има вида $y(x) = x\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4} + \ln x)$.

[1]обърни внимание, че при всяко хомогенно уравнение от $x = 0$ следва $y = 0$, значи изключваме само една точка от множеството на решенията

3. Уравнението $y'' - y' - 2y = 3xe^{2x}$ е линейно, с постоянни коефициенти и дясна част от много любим на всички нас вид. Първо се заемаме с хомогенната част - търсим решенията във вида $y = e^{\lambda x}$, както е правил още *Euler* и много други след него. Това налага условието $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, което има за решения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Общото решение на хомогенното уравнение се задава следователно с дву-параметричната фамилия функции (траектории):

$$y^h(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Частно решение на нехомогенното уравнение можем да потърсим във вида[2]

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B)e^{2x}$$

Приравнявайки по-нататък коефициентите пред различните степени на x вляво и вдясно, получаваме съответно $A = \frac{1}{2}$ и $B = -\frac{1}{3}$ (ако съм смятал правилно - никой не е длъжен да ми вярва за това!).

4. $y'' + y' - 2y = 5e^{-2x}$ има характеристично уравнение $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ с прости корени[3] $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Хомогенната част, в такъв случай, има две линейно независими решения $y_1(x) = e^{-2x}$ и $y_2(x) = e^x$. Да се опитаме за разнообразие да намерим общото решение на нехомогенната задача по метода на *Lagrange*. Търсим го във вида

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) = c_2(x)y_2(x) \tag{1}$$

Заместваме в уравнението и определяме коефициентите функции, като наложим допълнителното условие[4] $c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0$. В крайна сметка получаваме линейна система за производните на c_1 и c_2, която решаваме с формулата на *Cramer*. След интегриране получаваме

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2}{W(y_1, y_2)} 5e^{-2x} dx + c_1^0, \qquad c_2(x) = \int \frac{y_1}{W(y_1, y_2)} 5e^{-2x} dx + c_2^0 \tag{2}$$

където $W(y_1, y_2) = 3e^{-x}$ е съответната детерминанта на *Wronski*. Като пресметнем интегралите, намираме окончателно $c_1 = -\frac{5}{3}x + c_1^0$ и $c_2 = -\frac{5}{9}e^{-3x} + c_2^0$ съответно. Остава само да заместим в изходното уравнение и да проверим дали сме смятали вярно - който иска, нека заповяда...

---

[2] допълнителният фактор x^1 е резултат на обстоятелството, че коефициентът на степенния показател $\alpha = 2$ вдясно е решение с кратност едно на характеристичния полином - ако пробваме да решим задачата без тази малка добавка, няма да ни се отдаде, защото зависимостта от x вляво се съкращава и така получаваме безумие

[3] тук отново имаме резонанс, както в предната задача

[4] имаме право да наложим произволно условие, тъй като системата от едно уравнение за две неизвестни функции е неопределена