Уравнения допускащи понижаване на реда

Припомняме общия вид на обикновено диференциално уравнение от n-ти ред

$$F(t, x, x', \dots x^{(n)}) = 0, \qquad x = x(t)$$

където решенията зависят от n константи $\{C_i\}$ или $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$, чиито стойности могат да бъдат фиксирани ако са зададени съответно $n-1$ начални условия

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

Така изглежда задачата на Cauchy за уравнения от по-висок ред.

Най-напред ще разгледаме случаи, в които определени симетрии в уравнението позволяват редът да бъде редуциран и така да сведем задачата до нещо познато.

Уравнения, които не зависят явно от x, $x', \dots x^{(k-1)}$: В този случай редът може да бъде понижен до $n-k$ с полагането $y = x^{(k)}$, тъй като имаме очевидно

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots x^{(n)}) = F(t, y, y', \dots y^{(n-k)}) = 0$$

а след намиране на общото решение $y = y(t, C_1, \dots C_{n-k})$ остава да интегрираме k пъти за да получим и финалния израз за $x(t, C_1, \dots C_n)$ зависещ от n константи.

Ще илюстрираме този подход с един лесен пример, нека ни е дадено уравнението

$$t^2 x''' + (x'')^2 = 2tx''$$

което не зависи в явен вид от x и x', следователно можем да положим директно $y = x''$ и така да понижим реда с две, а именно

$$t^2 y' + y^2 = 2ty.$$

Последното попада в познатия клас на т. нар. хомогенни уравнения от първи ред, което лесно се вижда след делене на t^2 и стандартното полагане $z = t^{-1} y$

$$y' = tz' + z = 2z - z^2 \quad \Rightarrow \quad tz' = z(1-z).$$

След интегриране (уравнението вече е с разделени променливи), изразяване на константата в логаритмична форма и алгебрични преобразувания получаваме

$$t = \frac{\alpha z}{1-z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{t}{t+\alpha} \quad \Rightarrow \quad y = tz = t - \alpha + \frac{\alpha^2}{t+\alpha}.$$

Тъй като сме положили $y = x''$, последният израз по-горе трябва ще интегрираме два пъти за да видим зависимостта $x = x(t)$. Първото интегриране дава директно

$$x'(t) = \frac{t^2}{2} - \alpha t + \alpha^2 \ln(t+\alpha) + \beta$$

а при второто ползваме интегриране по части за логаритъма и така получаваме

$$x(t) = \alpha^2 (t+\alpha) \left[\ln(t+\alpha) - 1\right] + \frac{t^3}{6} - \alpha \frac{t^2}{2} + \beta t + \gamma.$$

Уравнения, които не зависят явно от t: Тук общият вид се редуцира до $F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$, а стандартното полагане е $x' = y(x)$ дава съгласно верижното правило за производна на съставна функция и правилото на Leibniz

$$x'' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = yy', \qquad x''' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}y + y'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y^2y'' + y(y')^2.$$

Аналогично се пресмятат и производни от по-висок ред, като остава в сила правилото $x^{(k)} = f(y, y', \dots, y^{(k-1)})$. Нека илюстрираме и този подход с един пример

$$x'' + (x')^2 = x, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

Горното полагане дава урвавнение на Bernoulli, което лесно свеждаме до линейно

$$y' + y = y^{-1}x \quad \Rightarrow \quad z' - z = -x, \quad z = y^{-1}$$

с интегриращ множител $\mu(x) = e^{-x}$, и следователно решението има вида

$$z = -e^x \int xe^{-x}\mathrm{d}x = x - 1 + \alpha e^x$$

където сме използвали интегриране по части. Връщане в субституцията дава

$$x' = y(x) = z^{-1}(x) \quad \Rightarrow \quad t(x) = \int (x - 1 + \alpha e^x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \alpha e^x + \beta.$$

Макар тук $x(t)$ да не се изразява в явен вид, задачата на Cauchy има решение

$$0 = \alpha + \beta, \quad 1 = (\alpha - 1)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\beta = 2$$

като началните условия сме заместили в решението и полагането, което дава

$$t(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2\,e^x - 2.$$

Отделяне на пълна производна: Такива примери вече сме разглеждали при уравнения от първи ред, аналогично и тук можем да използваме тъждества като

$$2x'x'' = (x'^2)', \qquad \frac{x''}{x'} = (\ln x')', \qquad \frac{x''}{x'^2} = -\left(\frac{1}{x'}\right)'.$$

Ще илюстрираме тази идея с един пример: уравнението

$$x'' = tx' + x + 1, \qquad x(0) = x'(0) = 0$$

лесно преубразуваме във вида

$$(x' - tx)' = 1 \quad \Rightarrow \quad x' - tx = t + \alpha$$

при което началното условие $x'(0) = 0$ фиксира $\alpha = 0$ и така задачата става с разделени променливи. Тогава директно интегриране ни дава (пресметнете сами)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + 1} = \int t\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x(t) = \beta e^{\frac{t^2}{2}} - 1, \qquad \beta = x(0) + 1 = 1.$$

Хомогенен случай: Накрая ще разгледаме и една по-специфична симетрия при диференциалните уравнения. Казваме, че функцията $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ е хомогенна от степен p ако за всяка ненулева константа $\lambda \in \mathbb{R}$ е изпълнено условието

$$F(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^p F(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Това в общия случай ни помага да намалим броя на променливите като положим например $x_i = x_n \tilde{x}_i$ при $x_n \neq 0$. В частност, ако едно ОДУ е хомогенно по отношение на неизвестната функция x и производните ѝ, удобно е да заместим

$$x' = xy \quad \Rightarrow \quad x'' = x(y' + y^2), \quad x''' = x(y'' + 3yy' + y^3)$$

и аналогично за производни от по-висок ред, като се запзва правилото

$$x^{(k)} = xf(y, y', \ldots, y^{(k-1)}).$$

Нека решим едно уравнение и от този тип, например

$$txx'' - t(x')^2 = 2xx', \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

където полагането дава, след съкращаване на общия множител x^2

$$t(y' + y^2) - ty^2 = ty' = 2y$$

но в този вид уравнението е вече с разделени променливи и се интегрира лесно

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \Rightarrow \quad y = \alpha t^2.$$

Остава да заместим в първоначалната субституция и да интегрираме отново

$$x' = x\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 e^{\beta t^3}$$

където за удобство сме положили $\alpha = 3\beta$. Налагането на начални условия дава $x_0 = x(0) = 1$, но не фиксира константата β, тъй като за всяка нейна стойност е изпълнено $x'(0) = 0$. Подобни примери, в които условията на теоремата за съществуване и единственост не са в сила, се появяват нерядко в практиката. Съществуват и някои обобщения на този клас, на които няма да се спираме тук.

Задачи:

1. $x''(1 + e^t) + x' = 0$;
2. $xx'' = x'^2(1 - x'), \quad x(1) = 1, \;\; x'(1) = 2$;
3. $2tx'x'' = x'^2 - 1$
4. $xx'' + x = x'^2, \quad x(0) = -x'(0) = 1$;
5. $txx'' = x'(x + x')$;
6. $tx'' = 2xx' - x', \quad x(1) = 0, \;\; x'(1) = 1$;
7. $x''' = 2(x'' - 1)\cot t$.