Комбинаторика

Комбинаториката играе важна роля в много дялове на математиката, но едно от най-популярните й приложения е в теория на вероятностите. С нейна помощ се раелизират както елементарни примери на дискретни събития и разпределения, така и някои важни за практиката задачи. Започваме с най-базисната ситуация, в която имаме n на брой различими елемента, които можем да поставим на n номерирани позиции, така че накрая всяка от тях да е запълнена с точно един елемент. За удобство можем да смятаме, че позициите се запълват една по една: така за първата имаме общо n възможности (всеки елемент от множеството), като при всяка от тях, за втората остава избор между $n-1$ елемента, за следващата $n-2$, и така докато накрая имаме само една незапълнена позиция и един свободен елемент. Следователно общият брой наредби се дава с произведението

$$P_n = n(n-1)(n-2)\dots 3\times 2\times 1$$

което ще наричаме *пермутации* от n елемента, а самата операция - *факториел*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

което понякога се задава с рекурентна формула, а именно

$$a_n = na_{n-1}, \qquad a_0 = 1$$

позволяваща да се получи (с рекурсия) всеки елемент на редицата от базисния

$$1! = 1\times 0! = 1, \quad 2! = 2\times 1! = 2, \quad 3! = 3\times 2! = 6, \quad 4! = 4\times 3! = 24, \dots$$

Нека сега разгледаме ситуация, при която броят на позициите k е по-малък от броя на елементите. Подхождайки по същия начин, виждаме, че и тук имаме n за първата позиция, после $n-1$, и така докато не стигнем до последната, при която изборът е между $n-k+1$, тъй като след запълването й остават $n-k$ елемента. Наредби от този тип се наричат *вариации* и броят им лесно се изразява във вида

$$V_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P_n}{P_{n-k}}.$$

С други думи, можем да мислим за вариациите като за пермутации на всевъзможните извадки от елементи на дадено множество, в частност имаме очевидно $V_n^1 = n$ и $V_n^n = P_n$. Понякога обаче (например в хазартни игри) не се интересуваме от конкретната наредба на дадена извадка, а само от това кои елементи попадат в нея. В такива случаи отъждествяваме всичките P_k различни пермутации, съдържащи еднакви елементи, и така стигаме до идеята за *комбинации*

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$$

които се срещат в най-различни конструкции, като например *бинома на Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^k b^{n-k} \tag{0.1}$$

поради което носят още и названието *биномни коефициенти*. Разбира се, изводът на горната формула може да стане и често комбинаторно ако интерпретираме $(a+b)^n$ като произведение от n ненаредени двойки елементи $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$. Тогава коефициентът пред $a^k b^{n-k}$ е равен на броя възможни начини, по които можем да вземем елемента a точно от k двойки. Тези числа могат да бъдат получени и рекурентно чрез конструкция, известна като *триъгълник на Pascal*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

в която n-тият ред съдържа коефициентите в развитието на $(a+b)^n$, а именно

$$(a+b)^0 = 1, \quad (a+b)^1 = a+b, \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \dots$$

и така нататък, като елементът с номер k на всеки ред (тук също броим от 0) дава съответния множител пред $a^k b^{n-k}$. Числата $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ удовлетворяват някои любопитни тъждества, които триъгълникът на *Pascal* добре онагледява:

1. Симетрия относно средата, т.е.

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

2. Всеки коефициент с $n > 0$ е равен на сумата от двата съседни над него[1]

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n-1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Тези свойства следват директно от дефиницията: за първото например имаме

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-(n-k))!}$$

[1]ако единият от тях липсва, просто го броим за нула.

и в частност

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

докато второто може да бъде доказано и по идукция или директно с формулата на *Newton*. Освен това, като фиксираме $a = b = 1$ и $b = -a = 1$ в (0.1), лесно можем да се уверим в други две свойства на биномните коефициенти, а именно

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Съществува и друг тип комбинаторна конструкция, която понякога се нарича *вариации с повторения*, при които за всяка от общо k на брой позиции имаме избор от всички n елемента, което дава и общия им брой възможности във вида

$$W_n^k = k^n$$

а получените по-горе тъждества ни позволяват да изразим връзката

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = W_n^2.$$

Ще илюстрираме разликата между тези понятия с един прост пример. Броят на всевъзможните четирицифрени PIN-кодове от 10 цифри съгласно горните разсъждения е $W_{10}^4 = 10000$, но ако имаме допълнителното изискване нито една цифра да не се повтаря, вариантите ще са едва $V_{10}^4 = 504$. Аналогично, ако играем лотарийна игра, при която се теглят четири едноцифрени числа и редът им няма значение, възможните изходи се описват от комбинациите $C_{10}^4 = 21$, всяка такава извадка ще съдържа $P_4 = 24$ различни наредби, които ще бъдат и различни четирицифрени числа, освен ако не започват с 0. Един проблем на комбинаториката е да отдели еквивалентните и невалидните наредби, например ако в горната задачата позволим едно или две повторения, колко различни PIN-кода ще имаме в крайна сметка и колко от тях ще бъдат четирицифрени числа.

Задачи

1. По колко различни начина могат да се наредят Артур и дванадесетте рицаря около кръглата маса, ако тя се върти, тоест няма фиксирана посока?

2. Каква е вероятността да познаете комбинацията в тото ”5 от 35“, съответно ”6 от 42“ или ”6 от 49“ с един опит? А да познаете всички числа без едно?

3. Колко най-малко перфорирани билета трябва да си носите за да е сигурно, че имате правилния за всеки автобус, при позволено/забранено обръщане?

4. Колко репродуктивни двойки/тройки могат да получат с 8 мъже и 5 жени?

5. В каква част от четирицифрените числа никоя цифра не се среща три пъти?