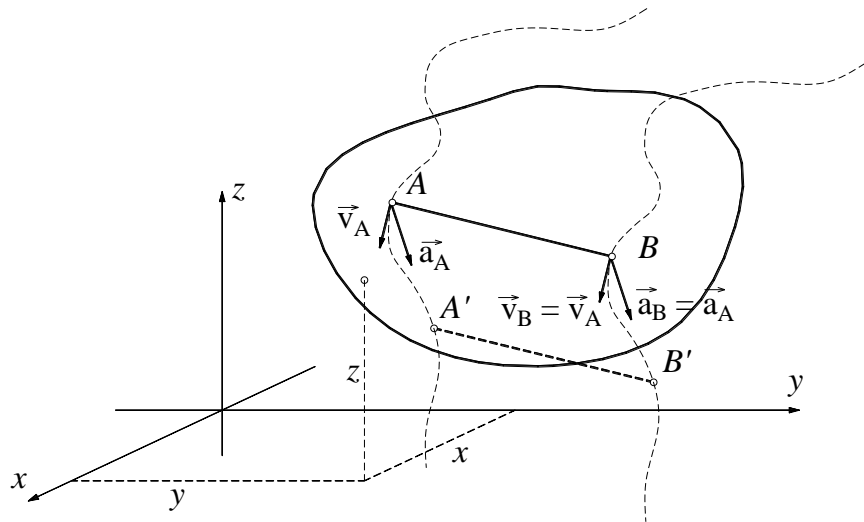


# КИНЕМАТИКА НА ТЯЛО

Движенията на телата разглеждани в настоящият курс са три – трансляция, ротация и равнинно движение.

## I. Транслационно движение.

**Определение:** Ако свържем две точки (А и В) от едно тяло и през цялото време на движението на тялото, правата остава успоредна сама на себе си ( $AB \parallel A'B'$ ), то движението е транслационно.



Тогава траекториите за движение на всички точки са успоредни помежду си.

Скоростите на всички точки са еднакви:

1. Векторите на скоростта на различните точки са успоредни (допирателни към успоредните траектории)
2. Равни по големина.

Ако точка А има скорост  $\vec{v}_A$ , то скоростта на точка В ще бъде  $\vec{v}_B = \vec{v}_A$ .

Мерната единица е  $[m/s]$ .

Ускоренията на всички точки са еднакви:

Ако точка А има ускорение  $\vec{a}_A$ , то ускорението на точка В ще бъде  $\vec{a}_B = \vec{a}_A$ .

Мерната единица е  $[m/s^2]$

**Тялото има три степени на свобода – преместване по трите оси.** Това означава, че за да се опише движението на транслационно движещото се тяло, са необходими следните три уравнения:

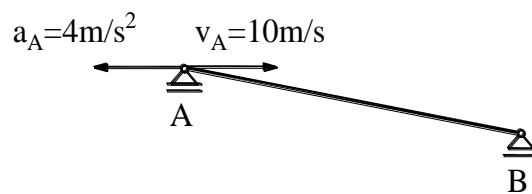
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Тогава скоростта на всяка точка ще бъде:

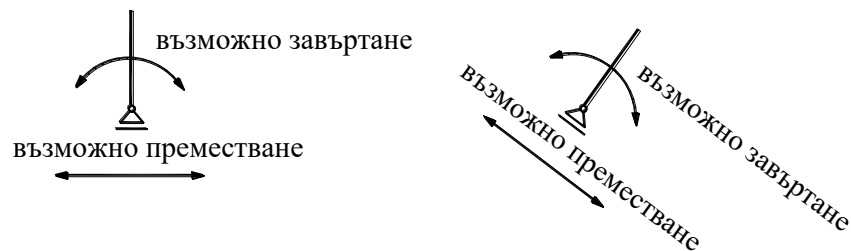
$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \dot{x}(t) \\ v_y = \dot{y}(t) \\ v_z = \dot{z}(t) \end{cases}$$

Ускорението на всяка точка ще е  $\vec{a} \begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}(t) \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}(t) \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}(t) \end{cases}$

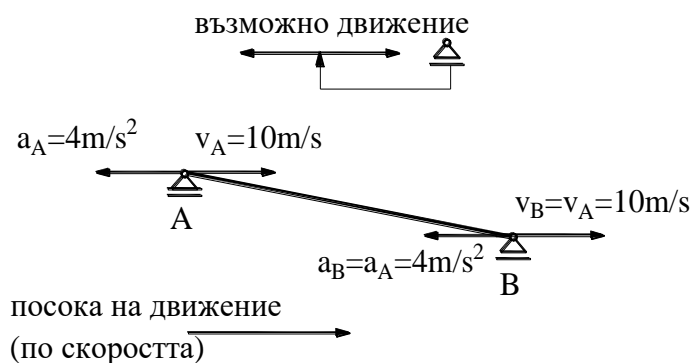
**Пример 1:** Гредата АВ е подпряна на две подвижни опори. Точка А има скорост  $|\vec{v}_A| = 10\text{m/s}$  и ускорение  $|\vec{a}_A| = 4\text{m/s}^2$ . Каква е скоростта и ускорението на точка В.



Подвижните опори в точка А и точка В позволяват преместване и завъртане всяка.



Двете опори в двете крайни точки на гредата ограничават нейното възможно завъртане. Остава възможността за преместване на гредата по направление успоредно на опорите (на двете линийки на опорите).

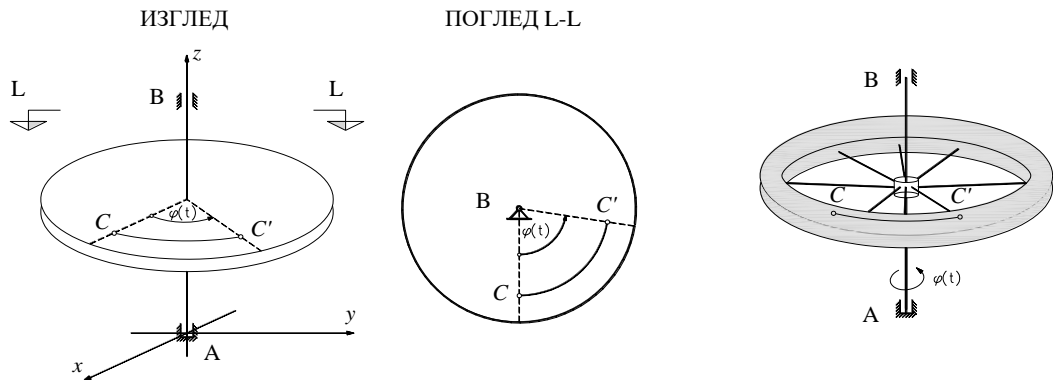


Тялото извършва транслационно движение.

Следователно всички точки имат равни скорости и равни ускорения.

$$v_B = v_A = 10\text{m/s}, \text{ а } a_B = a_A = 4\text{m/s}^2$$

## II. Ротационно движение.



**Определение:** Ако тялото има поне една подвижна точка (т. С) и съществуват две неподвижни точки - точки А и В, били те от тялото (първа и втора схема) или извън тялото (третата схема на колело) то тялото извършва ротационно движение.

Тялото има една степен на свобода – въртене около неподвижната ос (z). Това означава, че за да се опише движението на ротационното тяло, е необходимо едно уравнение:

$$\varphi = \varphi(t) \quad [rad]$$

### 1. Кинематични характеристики на тялото:

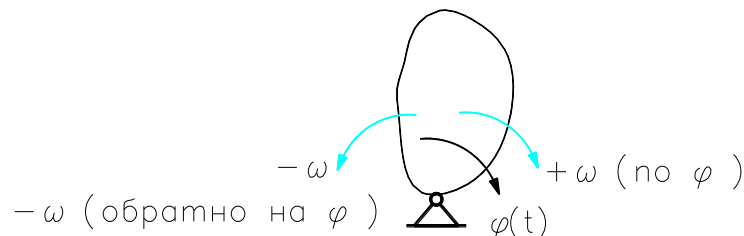
#### а) Ъглова скорост - $\vec{\omega}$ (омега)

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}$$

Ъгловата скорост на тялото е равна на производната по времето на закона на въртене.

Ъгловата скорост има мерна единица  $[s^{-1}]$ .

Определената за конкретен момент ъглова скорост се нанася по посока на въртенето  $\vec{\omega}$  ако сме я получили със знак +. Ако сме я получили със знак -, то нанасяме  $\omega$  обратно на  $\vec{\omega}$ .



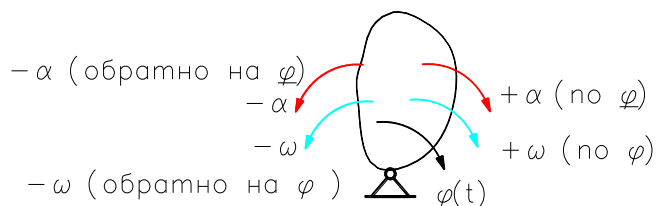
#### б) Ъглово ускорение - $\vec{\alpha}$ (алфа)

$$\vec{\alpha} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

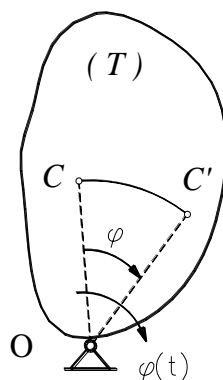
Ъгловото ускорение на тялото е равно на производната по времето на ъгловата скорост.

Мерната единица на ъгловото ускорение е  $[s^{-2}]$ .

Определеното за конкретен момент ъглово ускорение се нанася по посока на въртенето  $\vec{\varphi}$ , ако сме го получили със знак  $+$ . Ако сме го получили със знак  $-$ , то нанасяме  $\alpha$  обратно на  $\vec{\varphi}$ .



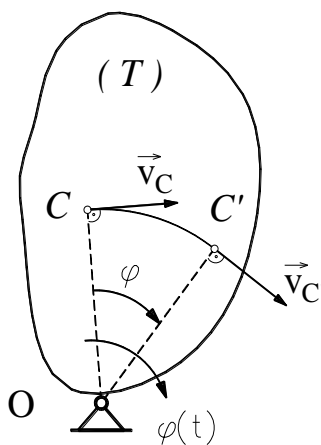
## 2. Кинематични характеристики на точка от тялото:



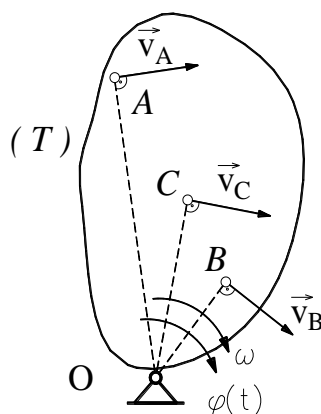
Опората  $O$  е неподвижна. Тя позволява единствено завъртане на тялото  $(T)$ . Следователно тялото  $(T)$  извършва ротация около ос минаваща през точка  $O$ . Законът на въртене е  $\varphi = \varphi(t)$ . Ще разгледаме точка  $C$ , която се намира на разстояние  $CO$  от неподвижната точка  $O$ . След завъртането на тялото, точката  $C$  ще се премести в положение  $C'$ . Траекторията описана от точката е дъга от окръжност с радиус  $CO = C'O$ .

### а) Скорост на точка от ротационно движещо се тяло

От кинематика на точка знаем, че скоростта на точка е по допирателната към траекторията. Следователно тя ще е перпендикулярна на радиуса на траекторията:



Големината на скоростта се определя като произведение на ъгловата скорост на тялото по разстоянието от изследваната точката до неподвижната точка  $O$ .



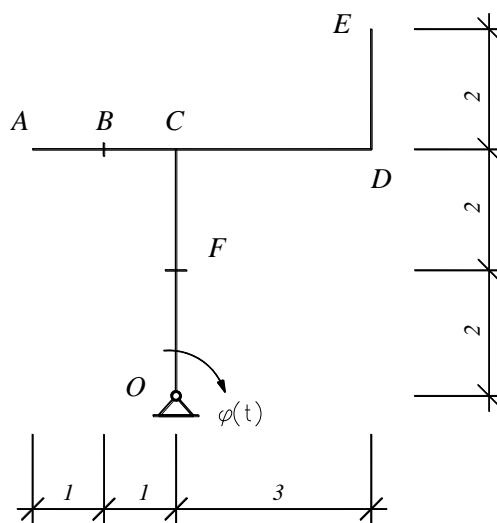
$$v_A = \omega \cdot OA$$

$$v_B = \omega \cdot OB$$

$$v_C = \omega \cdot OC$$

Посоката на скоростта следва посоката на ъгловата скорост.

**Пример 2:** Да се определят скоростите на всички означени точки за момент  $t = 1s$ , ако законът на въртене на тялото е  $\varphi(t) = t^2 - 5t$



1. Определяне на кинематичните характеристики на тялото.

a) ъглова скорост -  $\vec{\omega}$

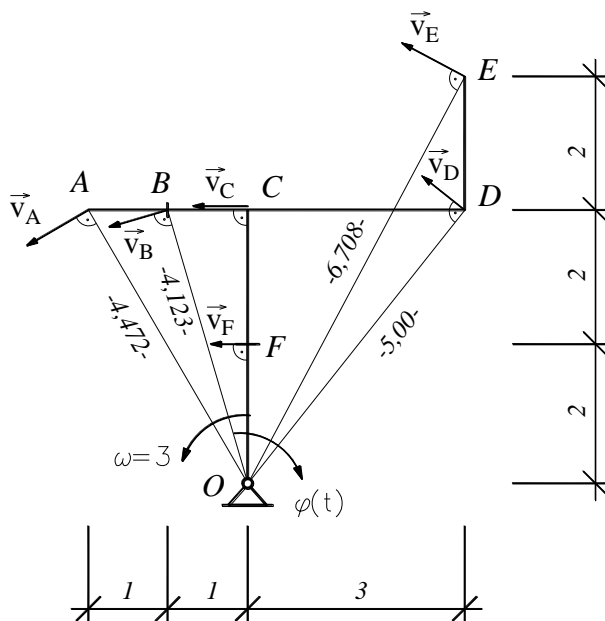
$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(t^2 - 5t) = 2t - 5$$

$$\omega(t = 1s) = 2 \cdot 1 - 5 = -3s^{-1} \text{ (следователно посоката е обратно на } \varphi \text{)}$$

b) ъглово ускорение -  $\vec{\alpha}$  (няма да ни е необходимо за поставената задача, но все пак ще го изчислим.)

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}(2t-5) = 2s^{-2} \quad (\text{const}) \quad (\text{посоката е по } \varphi)$$

Свързваме всяка точка с неподвижната точка  $O$ . По перпендикуляр към всяка от изчертаните отсечки нанасяме векторите скорост, по посока на ъгловата скорост  $\omega$



Изчислени са разстоянията от всяка точка до неподвижната точка  $O$  и са означени на схемата. Изчисляваме скоростите на точките.

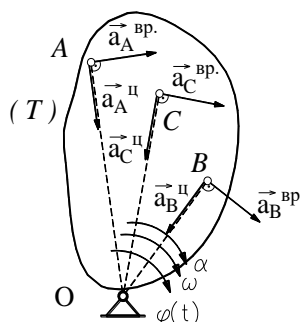
$$\begin{aligned} v_A &= \omega.OA = 3.472 = 13,416m/s; & v_F &= \omega.OF = 3.2 = 6,00m/s \\ v_B &= \omega.OB = 3.4123 = 12,369m/s; & v_D &= \omega.OD = 3.5 = 15,00m/s \\ v_C &= \omega.OC = 3.4 = 12,00m/s; & v_E &= \omega.OE = 3.6708 = 20,124m/s \end{aligned}$$

### b) Ускорение на точка от ротационно движещо се тяло.

Както вече установихме точките от ротационно движещо се тяло описват траектории, които са дъги от окръжност. Ускорението на такава точка се състои от две компоненти:  $a^{вр.}$  и  $a^{ц.}$ . (При свободна точка ускоренията бяха  $a^r$  и  $a^n$ . При точки от тела ускоренията се наричат  $a^{вр.}$  (въртящо ускорение) и  $a^{ц.}$  (центростремително ускорение). На практика те са равни помежду си, т.е.  $a^r = a^{вр.}$  и  $a^n = a^{ц.}$ ). Определени чрез кинематичните характеристики на тялото  $a^{вр.}$  и  $a^{ц.}$  се определят по:

$$a_A^{вр.} = \alpha.OA$$

$$a_A^{ц.} = \omega^2.OA$$

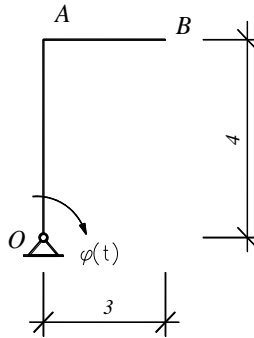


Ускорението  $a^{sp}$  е по тангентата на траекторията, т.е. по перпендикуляра към отсечката свързваща нашата точка с неподвижната точка  $O$ . Ускорението  $a^u$  е насочено от изследваната точка към неподвижната точка  $O$ .

Пълното ускорение на точката ще бъде:

$$a = \sqrt{(a^{sp})^2 + (a^u)^2}$$

**Пример 3:** Да се определят скоростите и ускоренията на означените точки за момента когато тялото се завърти на ъгъл  $30^\circ$ , ако законът на въртене на тялото е  $\varphi(t) = t^2 - 3t$



Необходими са кинематичните характеристики на тялото. За целта трябва да определим в кой момент тялото ще се завърти на ъгъл  $30^\circ$ . Това означава, че трябва да изчислим времето  $t$  когато  $\varphi(t) = \frac{\pi}{6}$ . (Законът за въртене е в  $rad$ . Следователно приравняваме  $\varphi(t)$  на  $\frac{\pi}{6}$ , което е  $30^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{6} [rad]$ .)

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t^2 - 3t = \frac{\pi}{6}$$

$$t^2 - 3t - 0,5236 = 0 \quad \begin{aligned} t_1 &= 3,165s \\ t_2 &= -0,165s \end{aligned}$$

Отрицателният корен не е решение. Ако имаме повече от един положителен корен, приемаме най-малкото положително число, различно от нула.

### 1. Определяне на кинематичните характеристики на тялото.

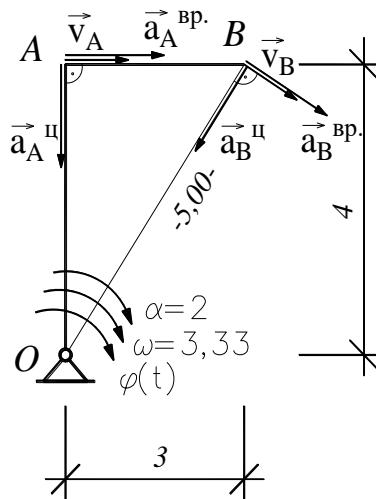
a) ъглова скорост -  $\vec{\omega}$

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d}{dt}(t^2 - 3t) = 2t - 3$$

$$\omega(t = 3,165s) = 2 \cdot 3,165 - 3 = 3,33s^{-1} \text{ (следователно посоката е по } \varphi \text{)}$$

b) ъглово ускорение -  $\vec{\alpha}$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{d}{dt}(2t - 3) = 2s^{-2} \text{ (const) (посоката е по } \varphi \text{)}$$



## 2. Кинематични характеристики на точки от тялото:

а) Скорост на точките (линейна скорост).

Свързваме всяка точка с неподвижната точка  $O$ . По перпендикуляр към всяка от изчертаните отсечки нанасяме векторите скорост, по посока на ъгловата скорост  $\omega$ .

$$v_A = \omega \cdot OA = 3,33 \cdot 4 = 13,32 \text{ m/s}$$

$$v_B = \omega \cdot OB = 3,33 \cdot 5 = 16,65 \text{ m/s}$$

б) Ускорения на точките (линейни ускорения).

По перпендикуляр към всяка от правите, свързваща разглежданите точки с неподвижната точка  $O$ , нанасяме векторите  $a^{вр.}$ , по посока на ъгловото ускорение  $\alpha$ . Векторите  $a^ц$  са насочени от изследваните точки към неподвижната точка  $O$ .

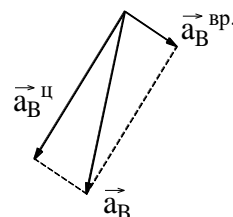
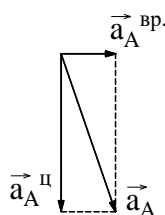
$$\begin{cases} a_A^{вр.} = \alpha \cdot OA = 2 \cdot 4 = 8 \text{ m/s}^2 \\ a_A^ц = \omega^2 \cdot OA = 3,33^2 \cdot 4 = 44,36 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^{вр.})^2 + (a_A^ц)^2} = \sqrt{(8)^2 + (44,36)^2} = 45,08 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{cases} a_B^{вр.} = \alpha \cdot OB = 2 \cdot 5 = 10 \text{ m/s}^2 \\ a_B^ц = \omega^2 \cdot OB = 3,33^2 \cdot 5 = 55,44 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^{вр.})^2 + (a_B^ц)^2} = \sqrt{(10)^2 + (55,44)^2} = 56,33 \text{ m/s}^2$$

Векторите  $\vec{a}_A$  и  $\vec{a}_B$  могат да се покажат и графично, получени на принципа на паралелограма от компонентите си  $a^{вр.}$  и  $a^ц$ .





Коментар:

1. Решението за скорости и ускорение на точки се нарича графо-аналитично, защото след графично изобразяване на векторите скорост и ускорения, те се изчисляват аналитично като големина.
2. Векторите скорост и ускорение не се нанасят мащабно. Те са такива каквито го виждате на няколкото чертежа в решените примери. Може просто да са съразмерни. Т.е. векторите на по-големите скорости да са по-големи от по-малките по големина скорости.

Желая Ви успех в подготовката на подадената информация.

При въпроси, моля пишете ми на: [doicheva\\_fhe@uacg.bg](mailto:doicheva_fhe@uacg.bg).