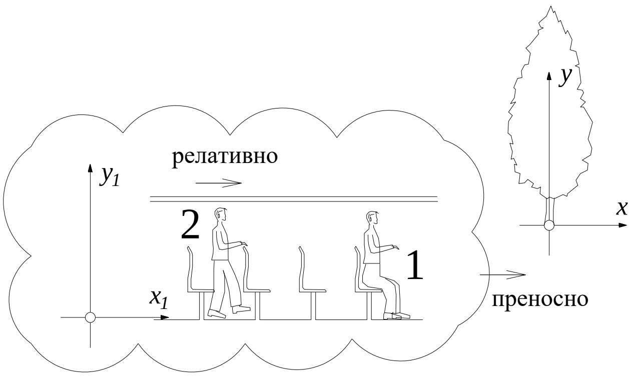
Кинематика на сложното движение на точка
(Кинематика на релативното движение)

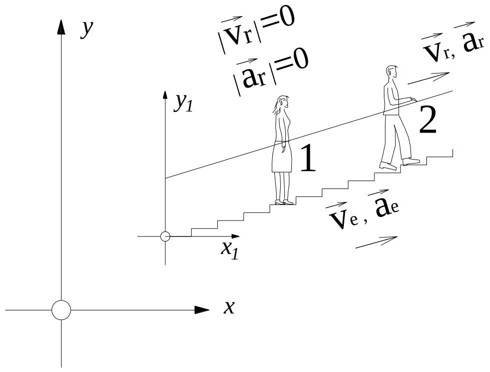
Всяко движение е относително. Ако спрямо един обект сме в движение, то спрямо друг, може да сме неподвижни. Например, нека имаме автобус, за който си представим, че е закачена координатна система x_1y_1. Човек номер 2 ходи по пътеката между седалките. Той се движи спрямо координатна система x_1y_1 (**релативно движение**). Човек 1 е седнал. Той е неподвижен спрямо x_1y_1 (**релативен покой**). Сега ще разгледаме дърво край пътя, за което привързваме координатна система xy. Автобусът се движи спрямо xy, а заедно с него в движение са и хората 1 и 2 (**преносно движение**). Човек 1 е неподвижен спрямо x_1y_1, но спрямо xy извършва движение. Ето защо казваме, че движението е относително.



В задачите за движение на точка и движение на телата се определяха абсолютните характеристики v_a и a_a спрямо абсолютна отправна координатна система.

Сега стои въпросът, **какви са абсолютните характеристики на движението** на точка (човек 2), ако познаваме:

1. Движението на точката (човек 2) спрямо подвижната координатна система x_1y_1 (автобуса), т.е. **известен е релативният закон за движение** и
2. Известно е движението на подвижната координатна система x_1y_1 (автобуса) спрямо неподвижната координатна система xy (дървото) или **познаваме преносния закон за движение**.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Да приемем, че се намираме на ескалатор. Искаме да се изкачим възможно най-бързо. Кога може да се случи това. Когато стоим неподвижно като човек 1 или се изкачваме по стълбите, като човек, докато ескалаторът се движи. Най-бързо ще е ако се изкачваме заедно с движението на ескалатора. Ако ние се изкачваме със скорост $\vec{\mathrm{v}}_r$, а ескалаторът се движи със скорост $\vec{\mathrm{v}}_e$, то той ще ни придаде своята скорост и ще я добави към нашата. Същото се отнася и за ускоренията.

Следователно релативно движение или сложно движение може да се представи като наслагване на две движения:

Абсолютно движение = Релативно движение в Преносното движение

На тази основа може да се получат **кинематичните характеристики на абсолютното движение** чрез наслагване на кинематичните характеристики на **релативното и преносното движение**. Т.е.

I. Абсолютна скорост.

$$\vec{\mathrm{v}}_a = \vec{\mathrm{v}}_r + \vec{\mathrm{v}}_e$$

Абсолютната скорост е равна на сумата на релативната и преносната скорост.

II. Абсолютно ускорение.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Абсолютното ускорение е сума от релативното, преносното и Кориолисовото ускорение.

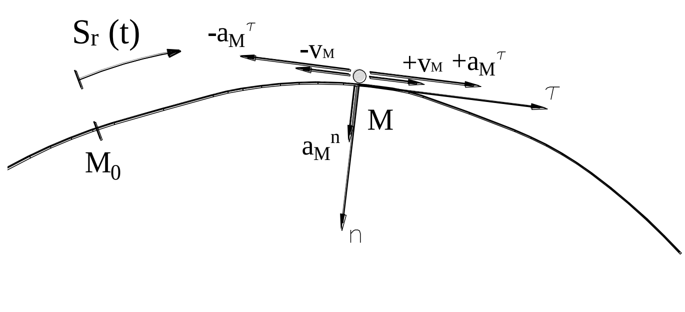
1. **Намирането на релативните кинематични характеристики** $\vec{\mathrm{v}}_r$ и $\vec{a}_r$ при известен закон на преносното движение се свежда до кинематика на точка.

   При зададено $S_r(t)$, зададена траектория, начален момент и посока на движение (законът е зададен в естествени координати), трябва да се определят $\vec{\mathrm{v}}_r$ и $\vec{a}_r$ в конкретен момент от движението (в секунди).

$$\mathrm{v}_r = \dot{S}_r; \qquad \vec{a}_r \left| \begin{array}{l} a_r^{\tau} = \dot{\mathrm{v}}_r = \ddot{S}_r \\ a_r^{n} = \dfrac{\mathrm{v}_r^2}{\rho} \end{array} \right.$$

Нанасят се:

релативно движение



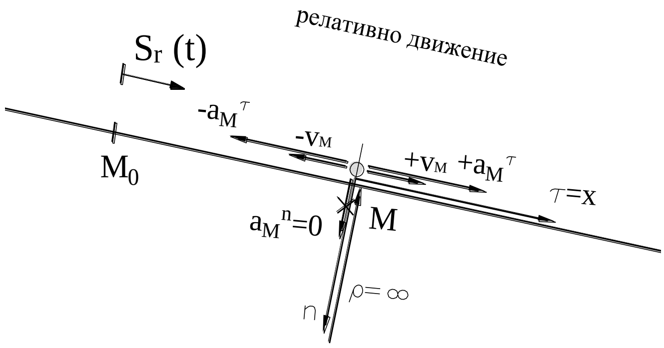
- скоростта $\vec{\mathrm{v}}_r$ и ускорението $\vec{a}_r^{\,\tau}$ по тангентата към траекторията. Изчертават се по $+\tau$ ако при изчисленията са получени с $+$ и по $-\tau$ ако при изчисленията са получени с $-$ ($+\tau$ е по зададената посока на движението).

- ускорението $\vec{a}_r^{\,n}$ е към центъра на кривина.

  Частен случай – движение по права.

$$\mathrm{v}_r = \dot{S}_r\,; \qquad \rho = \infty \Rightarrow a_r^n = \frac{\mathrm{v}_r^2}{\rho} = 0 \Rightarrow$$

$$a = a_r^\tau = \dot{\mathrm{v}}_r = \ddot{S}_r$$



- Тогава по правата линия е тангентата, която често се замества с ос x. Векторите скоростта $\vec{\mathrm{v}}_r$ и ускорението $\vec{a}_r$ са по оста x. Нанасят се по $+x$ ако при изчисленията са получени с $+$ и по $-x$ ако при изчисленията са получени с $-$ ($+x$ се задава по посока на движението).

2. **Намирането на кинематични характеристики на преносното движение** $\vec{\mathrm{v}}_e$ и $\vec{a}_e$ при известен закон на преносното движение се свежда до кинематика на точка от тяло (виж **Транслационно движение**., **Ротационно движение**., **Равнинно движение**.)

3. **Кориолисово ускорение -** $\vec{a}_c$.

   Кориолисовото ускорение се определя като удвоено векторно произведение на векторите ъглово ускорение на тялото и релативната скорост на точката.

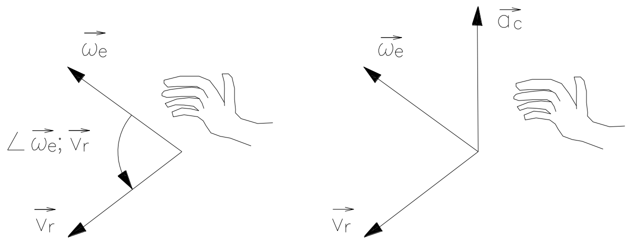
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\mathrm{v}}_r$$

- Големината е $$a_c = 2\omega_e.\mathrm{v}_r.\sin(\sphericalangle \vec{\omega}_e;\vec{\mathrm{v}}_r)$$

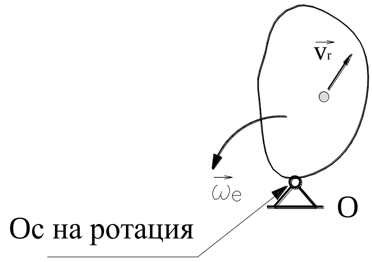
- Посоката на $\vec{a}_c$ се задава от векторното произведение

  - Векторното произведение на два вектора ни дава трети вектор, който е перпендикулярен на равнината дефинирана от първите два – получаваме направлението.

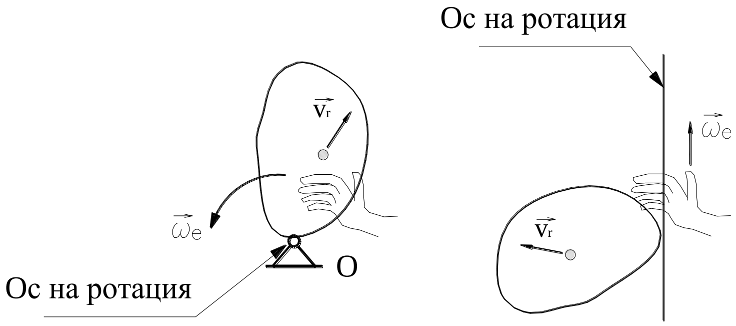
  - Посока – получава се от правилото на <u>дясната ръка</u>. Поставяме пръстите на **дясната ръка** по първия вектор ($\vec{\omega}_e$), а другият вектор ($\vec{\mathrm{v}}_r$) трябва да е откъм дланта, така че като свием пръстите да опишем малкия ъгъл между двата вектора. Палецът ни показва посоката на вектор $\vec{a}_c$.



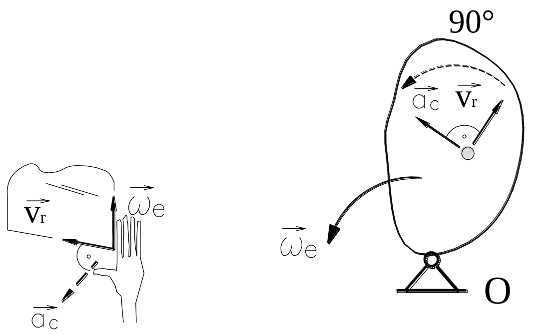
Когато вектор $\vec{\omega}_e$ е зададен като дъга, първо ще го определим като вектор отново с правилото на <u>дясната ръка</u>.



Поставяме пръстите на <u>дясната ръка</u> по дъгата на $\vec{\omega}_e$, така че оста на ротация минаваща през точка O да е от към дланта, сякаш се опитваме да хванем оста. Тогава палецът ни показва вектор $\vec{\omega}_e$ по направление и посока. Това е показано на двете фигури отдолу. Втората схема е изометрично изображение на първата.



Сега си представяме векторите $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$ един до друг и отново с помощта на <u>дясната ръка</u> определяме посоката на вектор $\vec{a}_c$.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Схема едно – поставяме пръстите на дясната ръка по $\vec{\omega}_e$ така че като ги свием да извървим малкия ъгъл към $\vec{v}_r$. Палецът показва посоката на $\vec{a}_c$. Векторът $\vec{a}_c$ е перпендикулярен на равнината определена от векторите $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$. Когато задачата е равнинна, често ползваме едно правило, което се наблюдава и тук. Векторът $\vec{a}_c$ може да се определи и ако завъртим вектор $\vec{v}_r$ на 90° по посока на $\vec{\omega}_e$.

Изразите $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ и $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$ са векторни и за да извършим сумирането по тях, трябва всички вектори да бъдат проектирани по перпендикулярни оси.

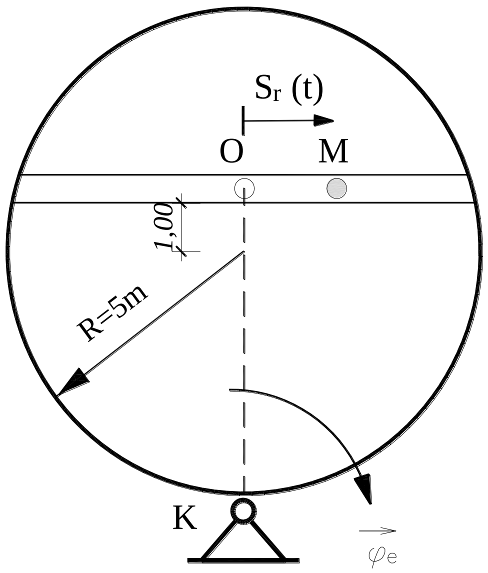
К У Р С О В А З А Д А Ч А 2
КИНЕМАТИКА НА СЛОЖНОТО ДВИЖЕНИЕ НА ТОЧКА

ЗАДАЧА 1

Идеално твърдо тяло извършва преносно движени по закона $x_e(t)$ $(\varphi_e(t))$.

Точка M извършва относително движение спрямо тялото по закона $s_r(t) = OM(t)$.

Определете абсолютната скорост и абсолютното ускорение на точката при време $t = t_1$.



Законът на релативното движение е $s_r(t) = OM(t) = 4t^2$;

Законът на преносното движение е $\varphi_e(t) = t^3 - 2t^2$;

$t = 0,5s$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Решение:

1. Релативното движение.

Релативното движение е движение на точка M по права линия.

1.1. Положение на точката в изследвания момент $t = 0,5s$

$s_r\left(t = 0,5\right) = OM\left(t = 0,5\right) = 4t^2 = 4.0,5^2 = 1m$ - (Разстоянието се получи със знак плюс, следователно се нанася от точка O към точка M. Ако се получи със знак минус се нанася в обратна посока.)

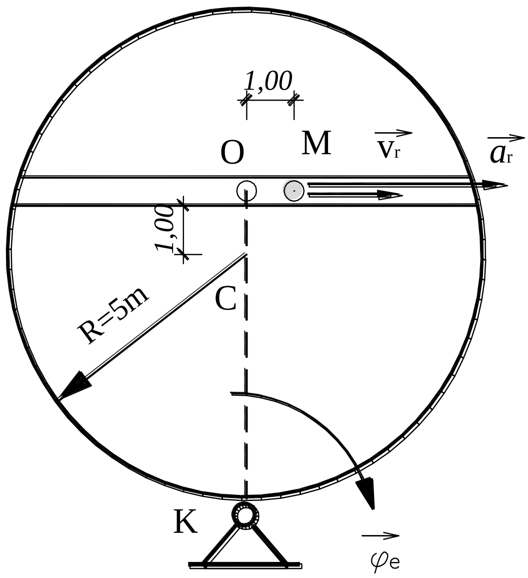
1.2. Релативна скорост.

$$\mathrm{v}_r = \dot{S}_r = \frac{d}{dt}\left(4t^2\right) = 8t$$

$\mathrm{v}_r\left(t = 0,5\right) = 8t = 8.0,5 = 4m/s$ (нанася се по посока от точка O към точка M, защото е положително.)

1.3. Релативно ускорение.

$a_r = \dot{\mathrm{v}}_r = \frac{d}{dt}\left(8t\right) = 8m/s^2$ (положително – посоката е от точка O към точка M)



2. Преносно движение.

Преносното движение е ротация около точка K.

2.1. Кинематични характеристики на тялото.

2.1.1. Ъглова скорост.

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e(t) = \frac{d}{dt}\left(t^3 - 2t^2\right) = 3t^2 - 4t$$

$$\omega_e(t = 0,5) = 3t^2 - 4t = 3.0,5^2 - 4.0,5 = -1,25s^{-1} \text{ (обратно на } \varphi_e\text{)}$$

2.1.2. Ъглово ускорение.

$$\alpha_e = \dot{\omega}_e(t) = \frac{d}{dt}\left(3t^2 - 4t\right) = 6t - 4$$

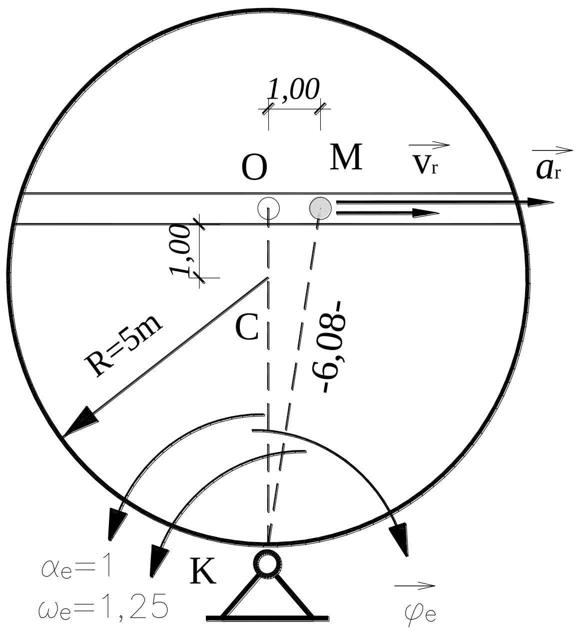
$$\alpha_e(t = 0,5) = 6t - 4 = 6.0,5 - 4 = -1,0s^{-2} \text{ (обратно на } \varphi_e\text{)}$$

2.2. Кинематични характеристики на точка от тялото.

Приема се че точка M замръзва на мястото си. Сега определяме нейните скорост и ускорение като точка от тялото, което извършва ротация около точка K.

Свързваме точка M с точка K и определяме разстоянието KM.

$$KM = \sqrt{6^2 + 1^2} = 6,08m$$



2.2.1. Преносна скорост на точката.

$$v_e = KM.\omega_e = 6,08.1,25 = 7,6m/s$$

Векторът $\vec{v}_e$ е перпендикулярен на KM и е по посока на $\vec{\omega}_e$

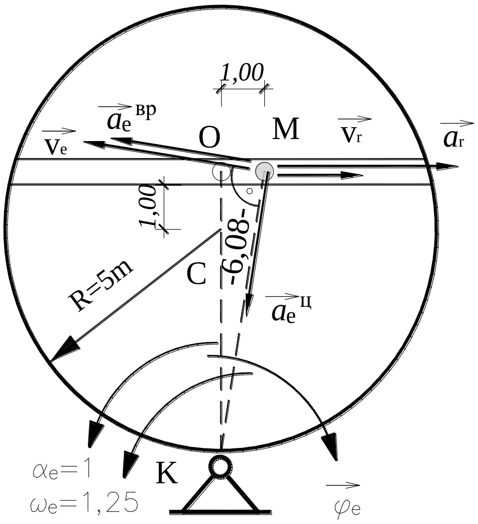
2.2.2. Преносно ускорение на точката.

$$a_e^{вр} = KM.\alpha_e = 6,08.1 = 6,08m/s^2$$

Векторът $\vec{a}_e^{вр}$ е перпендикулярен на KM и е по посока на $\vec{\alpha}_e$

$$a_e^{ц} = KM.\omega_e^2 = 6,08.1,25^2 = 9,5m/s^2$$

Векторът $\vec{a}_e^{ц}$ е от точка M към центъра на ротация точка K.

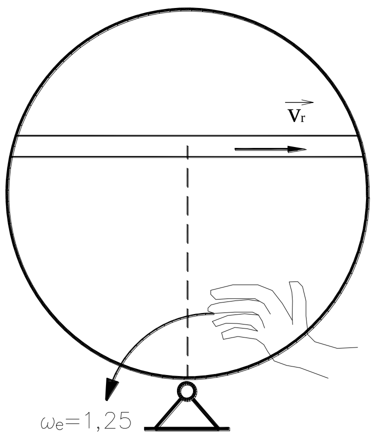


3. Кориолисово ускорение.

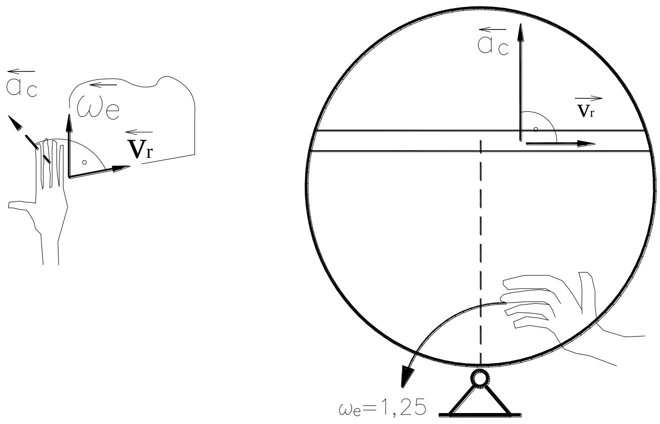
$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{v}_r$$

- Големината е $\quad a_c = 2\omega_e.v_r.\sin(\sphericalangle\vec{\omega}_e;\vec{v}_r)$

Определяме вектор $\vec{\omega}_e$ чрез правилото на дясната ръка.

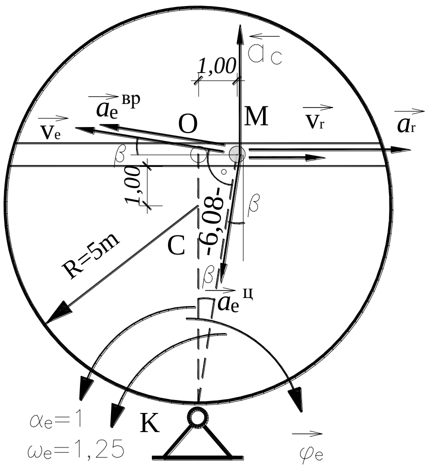


Вектор $\vec{\omega}_e$ е перпендикулярен на равнината на чертежа и е към нас. Следователно сключва с вектор $\vec{v}_r$ ъгъл 90°



Отново с дясна ръка по вектор $\vec{\omega}_e$, така че да опишем малкия ъгъл към $\vec{v}_r$. Палецът показва посоката на $\vec{a}_c$. Векторът $\vec{a}_c$ е перпендикулярен на равнината определена от векторите $\vec{\omega}_e$ и $\vec{v}_r$.

Големина: $a_c = 2\omega_e.v_r.\sin(\sphericalangle\vec{\omega}_e;\vec{v}_r) = 2.1,25.4.\sin 90 = 10 m/s^2$



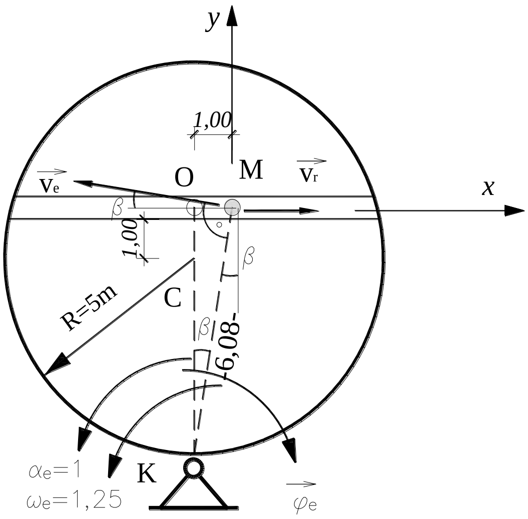
4. Абсолютни кинематични характеристики на точката.

4.1. Абсолютна скорост.

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Въвеждат се оси x и y, които трябва да са перпендикулярни.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



Фиг. 1

От триъгълник $KOM \rightarrow$ $\cos\beta = \dfrac{6}{6,08}$

$\sin\beta = \dfrac{1}{6,08}$

$$\mathrm{v}_{ax} = \mathrm{v}_r - \mathrm{v}_e \cos\beta = 4 - 7,6\frac{6}{6,08} = 4 - 7,5 = -3,5 m/s$$

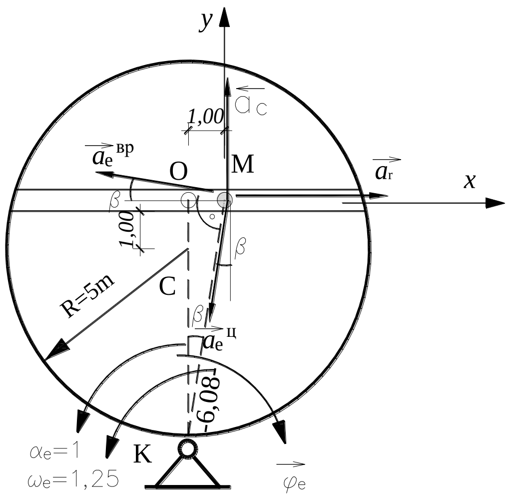
$$\mathrm{v}_{ay} = 0 + \mathrm{v}_e \sin\beta = 0 + 7,6\frac{1}{6,08} = 1,25 m/s$$

$$\mathrm{v}_a = \sqrt{\mathrm{v}_{ax}^2 + \mathrm{v}_{ay}^2} = \sqrt{3,5^2 + 1,25^2} = 3,717 m/s$$

4.2. Абсолютно ускорение.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

Въведените оси x и y, може да се използват отново или да се въведат други оси, които биха били по-удобни при проектирането.



Фиг. 2

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

$$a_{ax} = a_r - a_e^{вр} \cos\beta - a_e^{ц} \sin\beta + 0 = 8 - 6,08\frac{6}{6,08} - 9,5\frac{1}{6,08} = 8 - 6 - 1,563 = 0,437 m/s^2$$

$$a_{ay} = 0 + a_e^{вр} \sin\beta - a_e^{ц} \cos\beta + a_c = 6,08\frac{1}{6,08} - 9,5\frac{6}{6,08} + 10 = 1 - 9,375 + 10 = 1,625 m/s^2$$

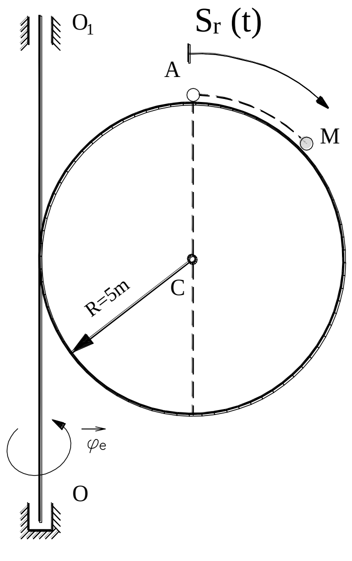
$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = \sqrt{0,437^2 + 1,625^2} = 1,683 m/s^2$$

ЗАДАЧА 2

Идеално твърдо тяло извършва преносно движени по закона $x_e(t)$ $\left(\varphi_e(t)\right)$.

Точка M извършва относително движение спрямо тялото по закона $s_r(t) = AM(t)$.

Определете абсолютната скорост и абсолютното ускорение на точката при време $t = t_1$.



Законът на релативното движение е $s_r(t) = AM(t) = 4t^2$;

Законът на преносното движение е $\varphi_e(t) = 4t^2 - 2t$;

$t = 0,5s$

Решение:

1. Релативното движение.

Релативното движение е движение на точка M по дъга от окръжност.

1.1. Положение на точката в изследвания момент $t = 0,5s$

$s_r(t=0,5) = AM(t=0,5) = 4t^2 = 4.0,5^2 = 1m$ - (Разстоянието се получи със знак плюс, следователно се нанася от точка A към точка M.)

Централният ъгъл β ще бъде:

$$\beta = \frac{AM}{R} = \frac{1}{5} = 0,2rad$$

$$\beta = 0,2rad.\frac{180}{\pi} = 11,46^\circ$$

1.2. Релативна скорост.

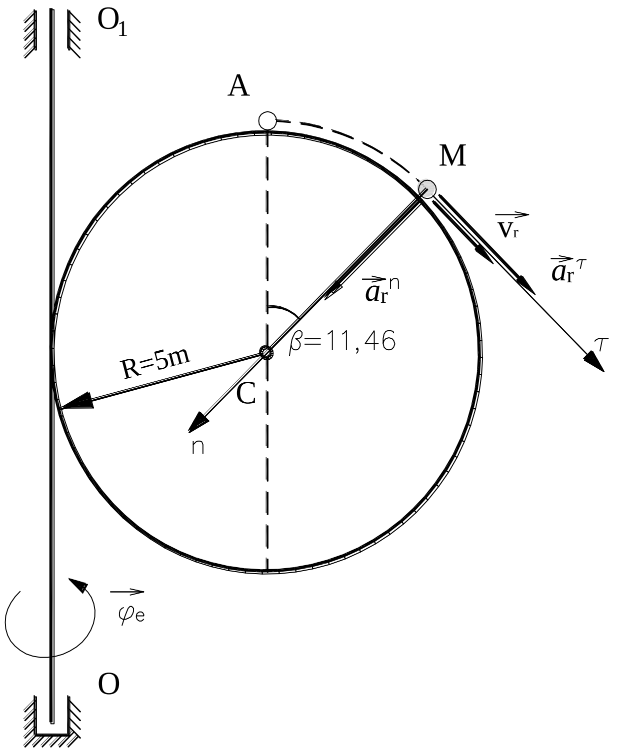
$$\text{v}_r = \dot{S}_r = \frac{d}{dt}\left(4t^2\right) = 8t$$

$\text{v}_r(t=0,5) = 8t = 8.0,5 = 4m/s$ (нанася се по допирателната в точка M по посока от точка A към точка M, защото е положителна.)

1.3. Релативно ускорение.

$a_r^\tau = \dot{\text{v}}_r = \frac{d}{dt}(8t) = 8m/s^2$ (положително – посоката е от точка A към точка M по допирателната в точка M.)

$$a_r^n = \frac{\text{v}_r^2}{\rho} = \frac{4^2}{5} = 3,2m/s^2$$



2. Преносно движение.

Преносното движение е ротация около ос OO_1.

2.1. Кинематични характеристики на тялото.

2.1.1. Ъглова скорост.

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e(t) = \frac{d}{dt}\left(4t^2 - 2t\right) = 8t - 2$$

$$\omega_e(t = 0{,}5) = 8t - 2 = 8.0{,}5 - 2 = 2s^{-1} \text{ (по посока на } \varphi_e\text{)}$$

2.1.2. Ъглово ускорение.

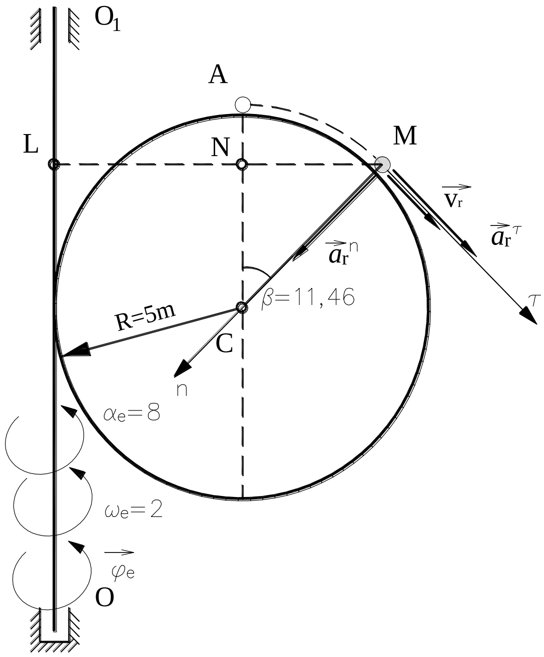
$$\alpha_e = \dot{\omega}_e(t) = \frac{d}{dt}(8t - 2) = 8s^{-2} \text{ (по посока на } \varphi_e\text{)}$$

2.2. Кинематични характеристики на точка от тялото.

Приема се че точка M замръзва на мястото си. Сега определяме нейните скорост и ускорение като точка от тялото, което извършва ротация около ос OO_1. Траекторията на точка M е по окръжност с център точка L, която точка е получена след пускане на перпендикуляр от M към ос OO_1.

Разстоянието $LM = LN + NM = R + R\sin\beta$.

$$LM = R(1 + \sin\beta) = 5(1 + \sin 11{,}46) = 5{,}99m$$



2.2.1. Преносна скорост на точката.

$$v_e = LM.\omega_e = 5,99.2 = 11,98 m/s$$

Векторът $\vec{v}_e$ е по допирателната на траекторията на точка M и е по посока на $\vec{\omega}_e$.

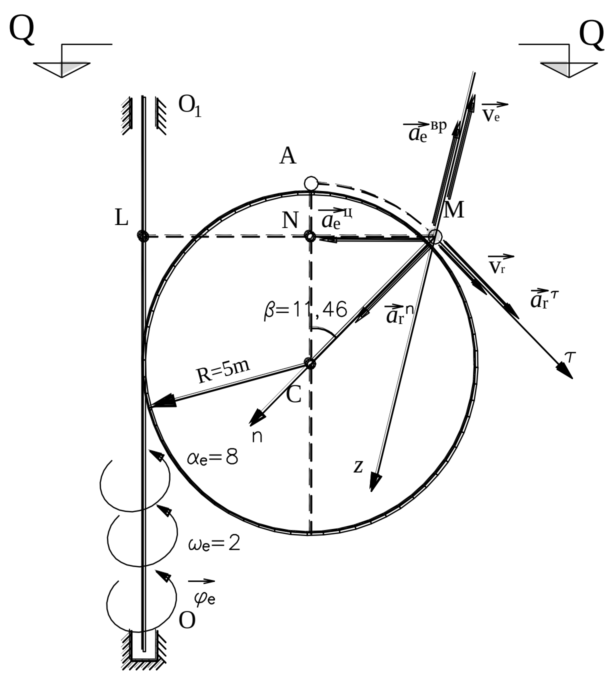
2.2.2. Преносно ускорение на точката.

$$a_e^{вр} = LM.\alpha_e = 5,99.8 = 47,92 m/s^2$$

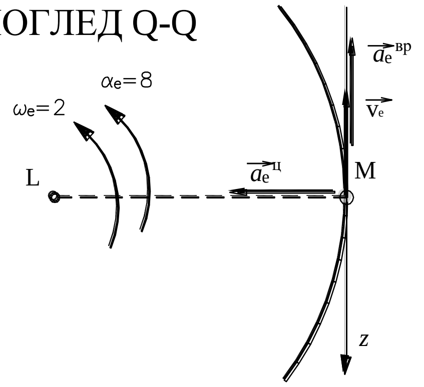
Векторът $\vec{a}_e^{вр}$ е по допирателната на траекторията на точка M и е по посока на $\vec{\alpha}_e$. Въвеждаме ос z, която е перпендикулярна на равнината на чертежа.

$$a_e^{ц} = LM.\omega_e^2 = 5,99.2^2 = 23,96 m/s^2$$

Векторът $\vec{a}_e^{ц}$ е от точка M към центъра на ротация точка L.



ПОГЛЕД Q-Q

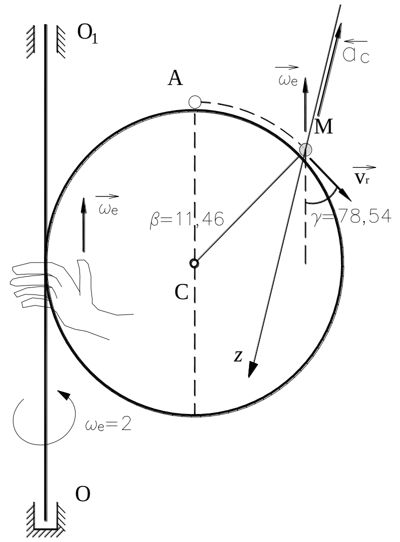


3. Кориолисово ускорение.

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{\mathrm{v}}_r$$

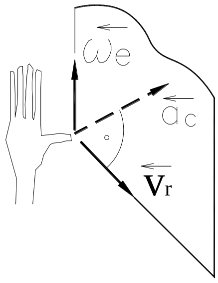
- Големината е $a_c = 2\omega_e.\mathrm{v}_r.\sin(\sphericalangle\vec{\omega}_e;\vec{\mathrm{v}}_r)$

Определяме вектор $\vec{\omega}_e$ чрез правилото на дясната ръка.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Вектор $\overrightarrow{\omega_e}$ е по ос OO_1 вертикален, нагоре. Следователно сключва с вектор $\vec{v}_r$ ъгъл $180-\gamma=101,46^\circ$. (Ъгъл $\gamma=90-\beta=90-11,46=78,54^\circ$)



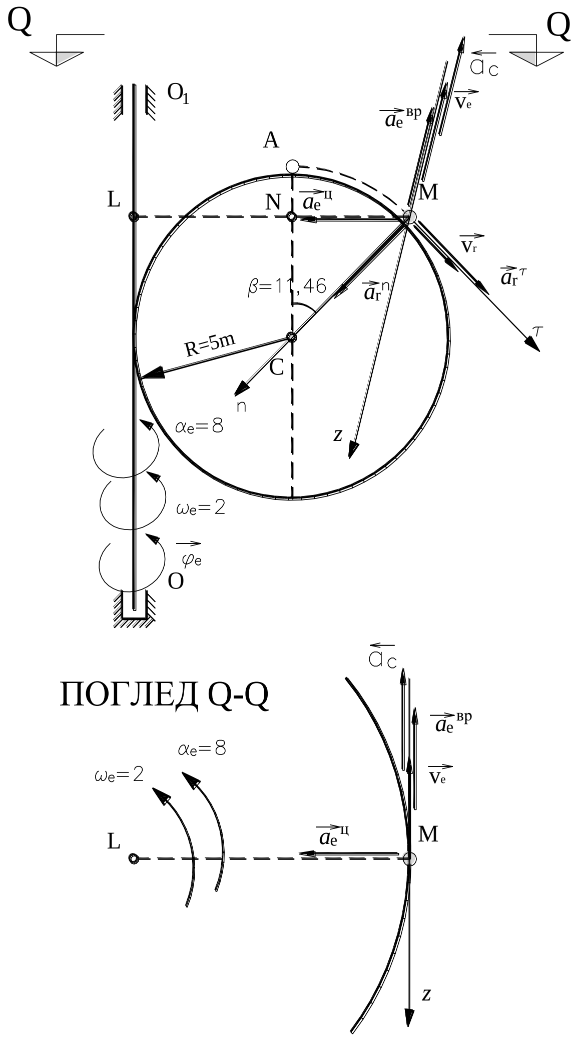
Отново с дясна ръка по вектор $\overrightarrow{\omega_e}$, така че да опишем малкия ъгъл към $\vec{v}_r$. Палецът показва посоката на $\vec{a}_c$. Векторът $\vec{a}_c$ е перпендикулярен на равнината определена от векторите $\overrightarrow{\omega_e}$ и $\vec{v}_r$.

Големина: $a_c=2\omega_e.v_r.\sin(\sphericalangle\overrightarrow{\omega_e};\vec{v}_r)=2.2.4.\sin\left(180-\gamma\right)=16.\sin101,46=15,68m/s^2$

4. Абсолютни кинематични характеристики на точката.

4.1. Абсолютна скорост.

$$\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$$



Фиг. 1

Векторът $\vec{v}_e$ е перпендикулярен на равнината на чертежа, в която лежи вектор $\vec{v}_r$. Следователно векторът $\vec{v}_e \perp \vec{v}_r$.

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{4^2 + 11,98^2} = 12,63 m/s$$

4.2. Абсолютно ускорение.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

По въведената ос z са разположени векторите $\vec{a}_e^{\,вр}$ и $\vec{a}_c$. Те са перпендикулярни на равнината на чертежа и следователно няма да имат проекция върху нея. В равнината на чертежа ще въведем две взаимноперпендикулярни оси. Има три вектора a_r^τ, a_r^n и $a_e^ц$. Два от тях са перпендикулярни. С оглед на по-удобно проектирането избираме осите по a_r^τ, a_r^n, т.е. оси τ и n.

$$a_{a\tau} = a_r^\tau - a_e^ц \cos\beta = 8 - 23,96\cos 11,46 = -15,48 m/s^2$$

$$a_{an} = a_r^n + a_e^ц \sin\beta = 3,2 + 23,96\sin 11,46 = 7,96 m/s^2$$

$$a_{az} = -a_c - a_e^{вр} = -15,68 - 47,92 = -63,6 m/s^2$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

$$a_a = \sqrt{a_{a\tau}^2 + a_{an}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{15,48^2 + 7,96^2 + 63,6^2} = 65,94 m / s^2$$

Да припомним:

I. **Транслационно движение**.

Транслационно движещото се тяло има три степени на свобода.

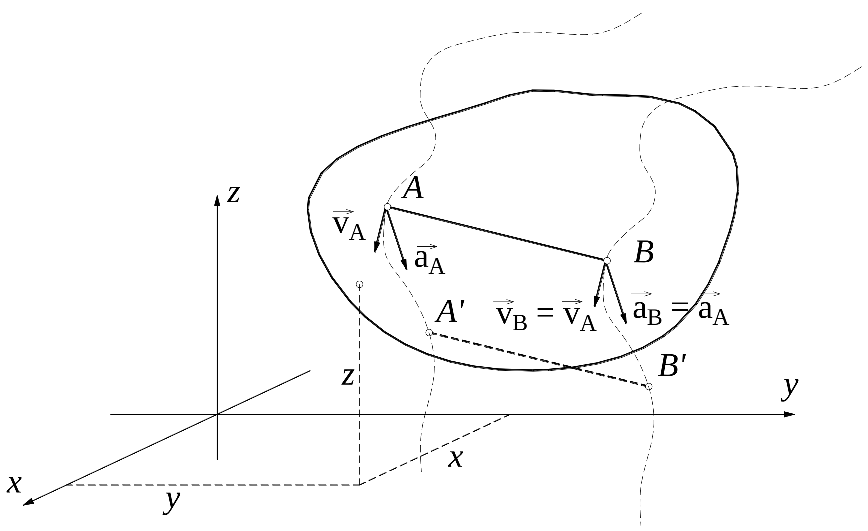
Закон за движение $\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right.$

1. **Кинематични характеристики на тялото:**
   a) Ъглова скорост - $\omega = 0\ s^{-1}$
   b) Ъглово ускорение - $\alpha = 0$
2. **Кинематични характеристики на точка от транслационно движещо се тяло:**
   a) Скорост на точка от тялото

      Скоростите на всички точки са еднакви $\overrightarrow{\mathrm{v}_B} = \overrightarrow{\mathrm{v}_A}$

   b) Ускорение на точка от тялото

Ускоренията на всички точки са еднакви $\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A}$

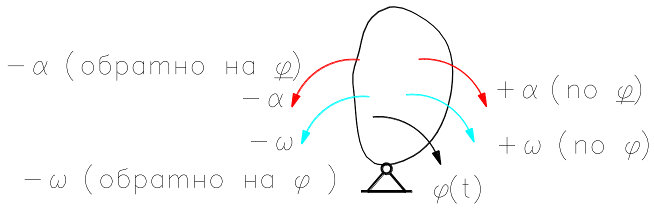


II. **Ротационно движение**.

Закон за движение $\varphi = \varphi(t)$

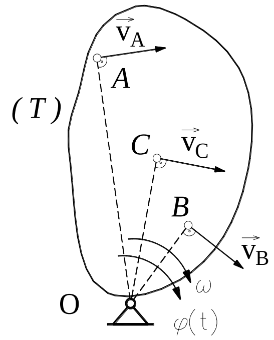
1. **Кинематични характеристики на тялото:**
   a) Ъглова скорост - $\vec{\omega} = \vec{\dot{\varphi}}$
   b) Ъглово ускорение - $\vec{\alpha} = \vec{\dot{\omega}} = \vec{\ddot{\varphi}}$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



2. **Кинематични характеристики на точка от ротационно движещо се тяло:**

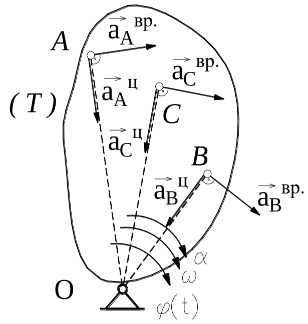
a) Скорост на точка от ротационно движещо се тяло.



$$\mathrm{v}_A = \omega.OA; \qquad \mathrm{v}_B = \omega.OB; \qquad \mathrm{v}_C = \omega.OC$$

Моментен център на скоростите (МЦС) е неподвижната точка O.

b) Ускорение на точка от ротационно движещо се тяло.



$$\vec{a}_A \left| \begin{array}{l} a_A^{вр.} = \alpha.OA \\ a_A^{ц} = \omega^2.OA \end{array} \right. \qquad \vec{a}_B \left| \begin{array}{l} a_B^{вр.} = \alpha.OB \\ a_B^{ц} = \omega^2.OB \end{array} \right. \qquad \vec{a}_C \left| \begin{array}{l} a_C^{вр.} = \alpha.OC \\ a_C^{ц} = \omega^2.OC \end{array} \right.$$

$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{вр}\right)^2 + \left(a_A^{ц}\right)^2}. \qquad a_B = \sqrt{\left(a_B^{вр}\right)^2 + \left(a_B^{ц}\right)^2}. \qquad a_C = \sqrt{\left(a_C^{вр}\right)^2 + \left(a_C^{ц}\right)^2}.$$

Моментен център на ускоренията (МЦУ) е неподвижната точка O.

III. **Равнинно движение**.

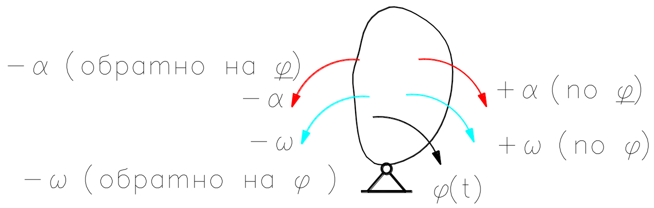
Закон за движение $\left| \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{array} \right.$

1. **Кинематични характеристики на тялото:**

a) Ъглова скорост - $\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$

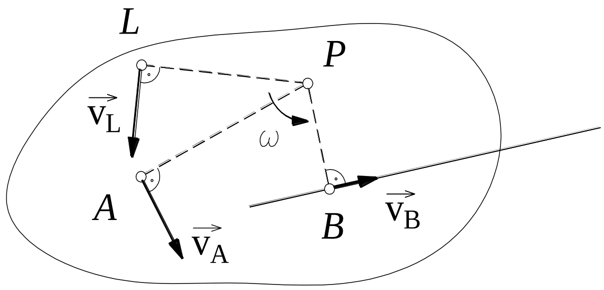
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

b) Ъглово ускорение - $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$



2. **Кинематични характеристики на точка от равнинно движещо се тяло:**

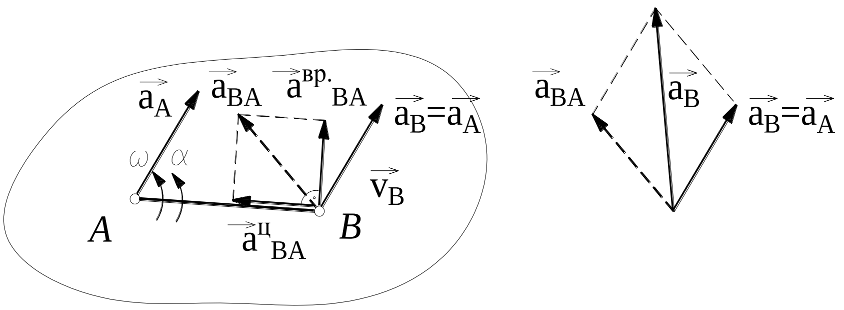
a) Скорост на точка от равнинно движещо се тяло.



$$v_A = \omega.PA; \qquad v_B = \omega.PB; \qquad v_L = \omega.PL$$

Моментен център на скоростите (МЦС) е точка P

b) Ускорение на точка от равнинно движещо се тяло.



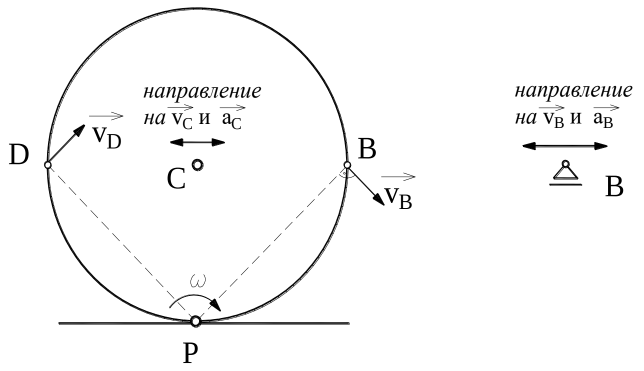
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{ц}_{BA} + \vec{a}^{вр.}_{BA}$$

$$\vec{a}_{BA} \left| \begin{array}{l} a^{вр.}_{BA} = \alpha.BA \\ a^{ц}_{BA} = \omega^2.BA \end{array} \right.$$ - както при ротация около точка A, $a_{BA} = \sqrt{\left(a^{вр.}_{BA}\right)^2 + \left(a^{ц}_{BA}\right)^2}$

Както и при скоростите така и тук има моментен център на ускоренията - Q (МЦУ), но неговото определяне е значително по трудно от МЦС. По тази причина се работи с векторното решение за ускорение на точка $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{ц}_{BA} + \vec{a}^{вр.}_{BA}$.

Частни случаи при равнинното движение:

1. Колело.



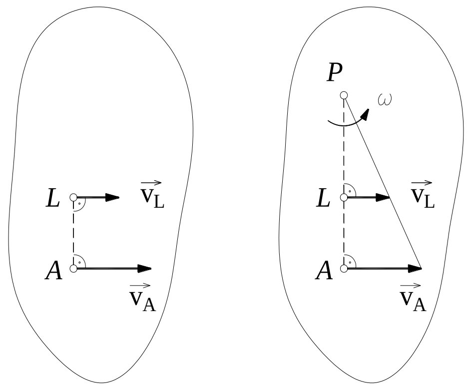
<u>Колелото извършва равнинно движение.</u>

МЦС точка P е допирната точка между колелото и терена, по който то се търкаля.

Скоростта и ускорението на центъра C са успоредни на терена и са както при подвижна опора.

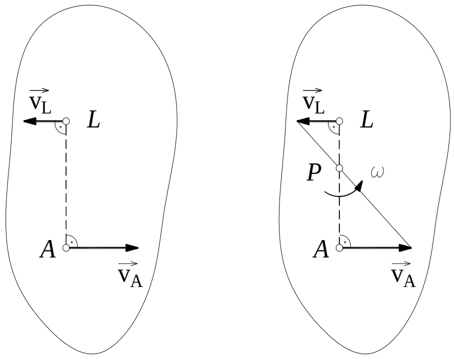
2. Точки, чиито скорости са успоредни.

a) Точките лежат на една права, която е перпендикулярна на векторите скорост, а скоростите са еднопосочни.



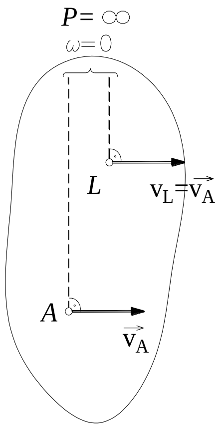
Очевидно МЦС точка P е върху правата AL. Съобразяваме че скоростите се изменят по линеен закон. Изчертаваме права през краищата на векторите скорост. Нейната пресечна точка с правата AL е точка P. Положението на точка P се определя от подобните триъгълници с катети $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_L$

b) Точките лежат на една права, която е перпендикулярна на векторите скорост, а скоростите са разнопосочни.



Разсъжденията са аналогични на тези в подточка а). МЦС точка P е между A и L. Положението й се определя от подобните триъгълници с катети $\overrightarrow{\mathrm{v}_A}$ и $\overrightarrow{\mathrm{v}_L}$.

c) Точките не лежат на една права, а скоростите са равни.



Дадените скорости са успоредни и равни $\overrightarrow{\mathrm{v}_A} = \overrightarrow{\mathrm{v}_L}$. Перпендикулярите към скоростите са успоредни прави, които се пресичат в безкрайността. Затова $P = \infty$. Следователно $\omega = 0\ s^{-1}$. Тогава скоростите на всички точки в този момент (миг) ще бъдат равни, но не и ускоренията.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Коментар:

1. Векторите скорост и ускорение не се нанасят мащабно. Те са такива каквито ги виждате на няколкото чертежа в решените примери. Може просто да са съразмерни. Т.е. векторите на по-големите скорости да са по-големи от по-малките по големина скорости и т.н.

2. В показаните решения са използвани обръщения към теоретичните бележки в края на материала. За целта се маркира текстът, който следва подканата (виж…..) в скобите.

   В обясненията са изобразени множество схеми, които показват последователността на решение и разсъждения. В курсовата задача се изчертават само чертежите дадени тук като Фиг.1 и Фиг.2. За яснота следете решения пример в ръководството.

   Това е материалът за Курсова задача 3 (по номерация от ръководството), за Вас това е втора задача, която правите като курсова. Моля, прегледайте и решете примера в ръководството за тренировка, както и примерите решени тук. При несигурност, можете да снимате и да ми изпратите снимката с въпроси.

Желая Ви успех в подготовката на подадената информация.

При въпроси, моля пишете на: doicheva_fhe@uacg.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София