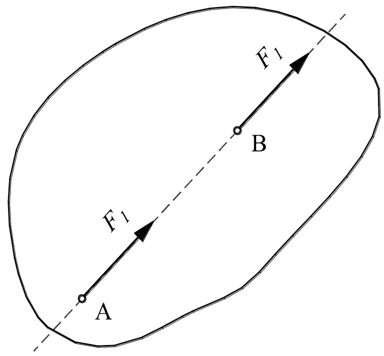
Редукция на равнинна система сили

I. Позволени операции със сили.

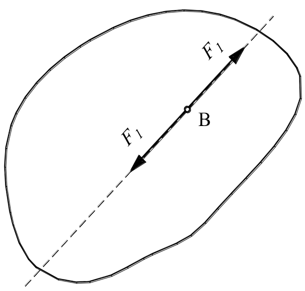
1. Плъзгане на сила по нейната директриса.



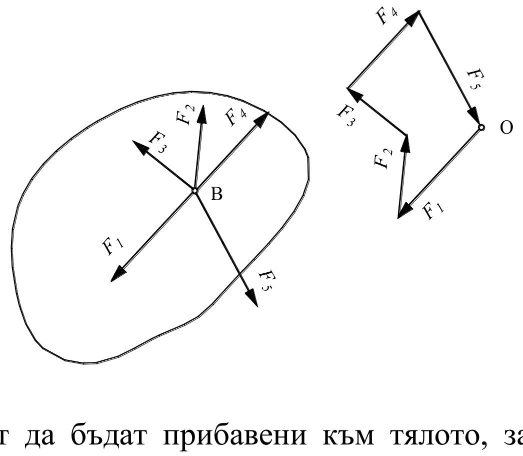
Силата $\vec{F}_1$, приложена в точка A, може свободно да бъде плъзната по своята директриса докато бъде приложена в точка B или в някоя друга точка по директрисата й.

Изместването на силата встрани от нейната директриса не е позволена операция. Такова изместване може да се извърши само с приложение на теоремата на Поансо (виж: **Теорема на Поансо**)

2. Прибавяне на равновесна система сили.



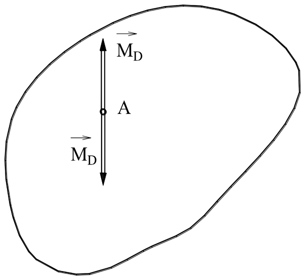
Две правопротивоположни сили са равновесна система сили. Прибавянето им върху едно тяло не води до промяна в неговото кинематично поведение.



Силите $\vec{F}_1 \div \vec{F}_5$ могат да бъдат прибавени към тялото, защото това е система съначални сили, която е равновесна - силовият полигон е затворен.

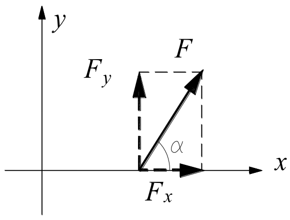
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

3. Отстраняване на равновесна система сили.



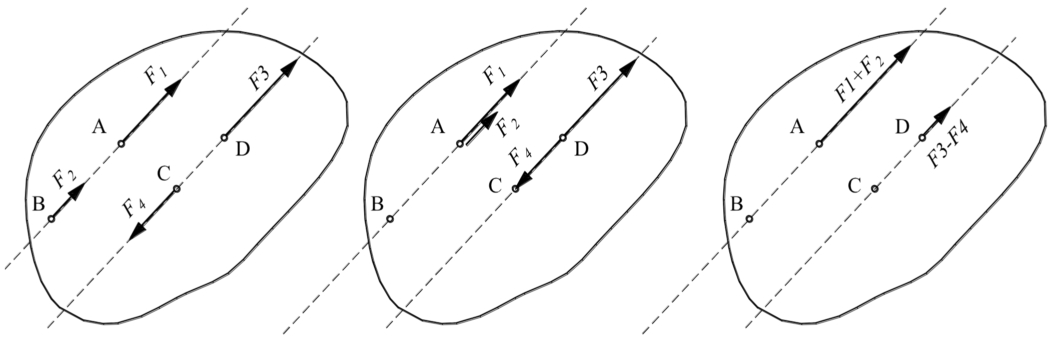
Два правопротивоположни момента също са равновесна система сили. Прибавянето или отстраняването им върху едно тяло не води до промяна в неговото кинематично поведение.

4. Събиране на сили.



Съначални сили могат да бъдат подменени с тяхната равнодействаща, приложена в точката на действие на силите.

Пример:



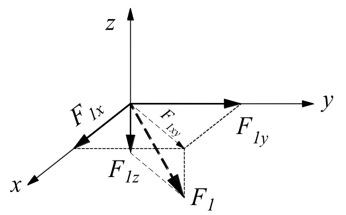
Сили действащи по една директриса могат да бъдат подменени с тяхната сума. Първо е приложена позволената операция плъзгане на сила по нейната директриса, а след това сумиране на съначални сили.

Силата F_2 е плъзната в точка A и е събрана със силата F_1. Тогава в точка А остава да действа една сила равна по големина на сумата на силите $F_1 + F_2$.

Силата F_4 е плъзната в точка D и е извадена от силата F_4. Тогава в точка D остава да действа една сила равна по големина на разликата на силите $F_3 - F_4$.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

5. Разлагане на сили.



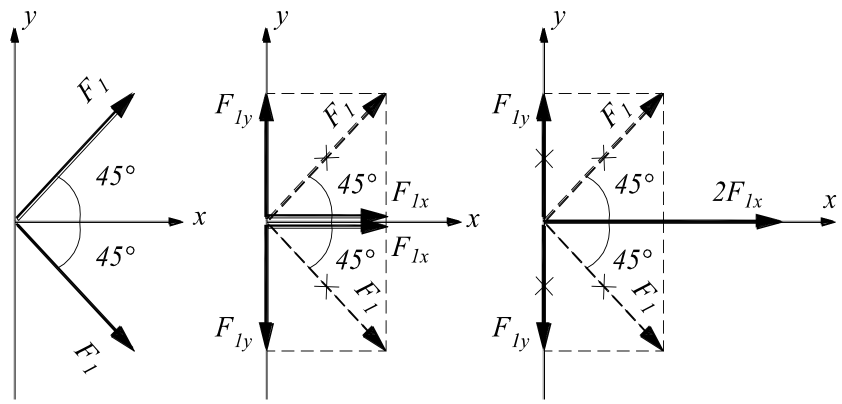
Сила $\vec{F_1}$ може да бъде подменена със система сили, приложена в същата точка и отговаряща на условието геометричната сума на системата сили да е равна на първоначалната сила.

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{1xy} + \vec{F}_{1z} = \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{1z}$$

Пример 1:

Да се сумират силите $\vec{F_1}$, които са равни по големина и с различни директриси.

Аналитично решение:



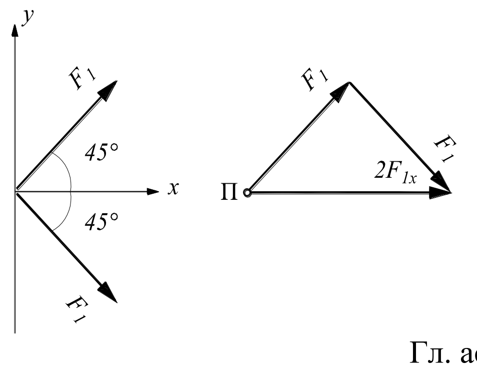
Първо разлагаме силите на вертикална и хоризонтална компонента.

$$\vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1.\cos 45 \\ F_{1y} = F_1.\sin 45 \end{array} \right. \text{ и } \vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1.\cos 45 \\ F_{1y} = -F_1.\sin 45 \end{array} \right.$$

Тогава компонентите по y са система правопротивоположни сили, които можем да отстраним (позволена операция 3), а компонентите по x събираме. Резултатът от събирането ще бъде:

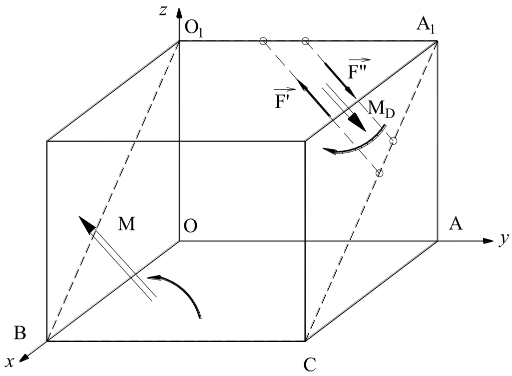
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_1 \rightarrow F_x = F_{1x} + F_{1x} = 2F_1 \cos 45$$

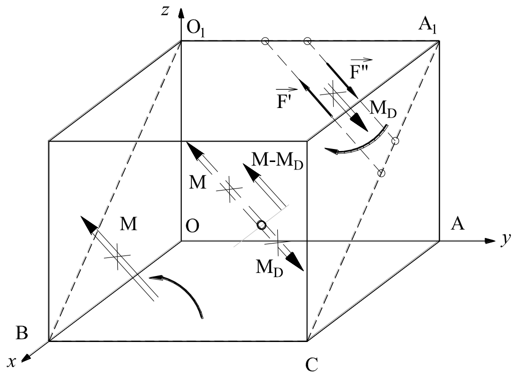
Геометрична сума – графично решение:



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Пример 2:

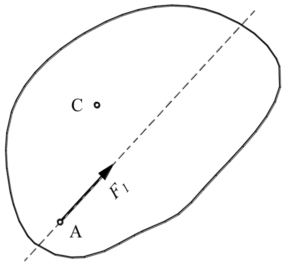




В равнината BCA_1O_1 действат два момента. Може първо да приложим сумиране на M и M_D (позволена операция 4). Резултатът е един момент, който ще бъде перпендикулярен на равнината с големина $M - M_D$. Следва разлагане на момента $\left[M - M_D\right]$ по координатните оси (позволена операция 5).

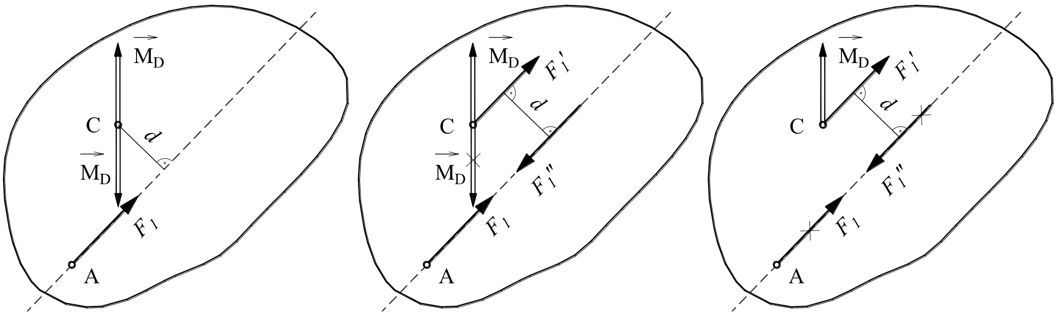
II. Теорема на Поансо

Теоремата на Поансо се отнася за преместване на сила в точка непринадлежаща на директрисата й.



Нека е дадена силата $\overrightarrow{F_1}$, която е приложена в точка A. Трябва да „преместим“ силата в точка C.

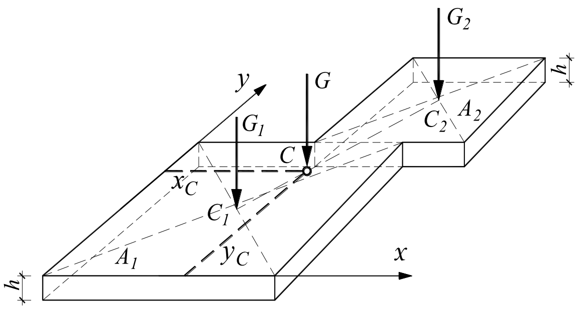
В точка C се прибавя равновесна система моменти. Големината на моментите се подбира от условието $M_D = F_1.d$, където d е разстоянието от точка C до силата $\overrightarrow{F_1}$ (мерено по перпендикуляра от точка C до директрисата на $\overrightarrow{F_1}$). Единият от моментите се подменя с възможна двоица, която е съставена от сили с големина равна на големината на $\overrightarrow{F_1}$ и разположена така, че едната от силите на двоицата да е противоположна на $\overrightarrow{F_1}$, а рамото на двоицата d.



Отстранява се равновесната система сили $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_1''}$, имащи директриси минаващи през точка A. Остава силата $\overrightarrow{F_1'}=\overrightarrow{F_1}$ преместена в точка C, но също така остава и момент M_D, който компенсира преместването на $\overrightarrow{F_1}$ по директриса успоредна на първоначалната.

III. Център на тежестта.

1. Определяне.



Нека разгледаме едно тяло като съставено от по-малки тела, които имат тегла G_i. Центърът на успоредните сили G_i представлява център на тежестта на тялото. Тогава:

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}G_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i};\qquad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}G_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i}.$$

При хомогенни тела може да се премине към други записи

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}G_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}G_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i.g.x_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i.g}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i};\qquad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i},$$

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\rho V_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho V_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}V_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}V_i};\qquad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}V_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n}V_i},$$

$$x_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}V_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}V_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i.h.x_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i.h}=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i};\qquad y_C=\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n}A_i}$$

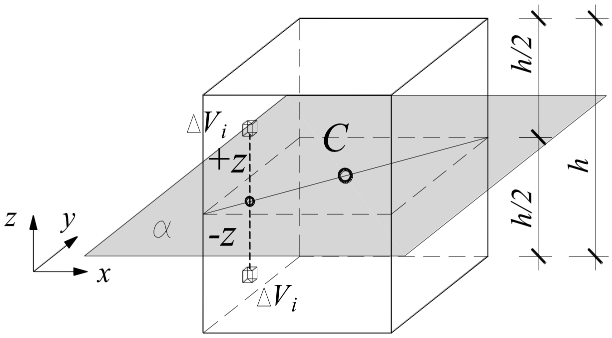
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Ако тялото е със сравнително малки напречни размери с площ A, то можем да го оприличим на линия и $V_i = A.L_i$ тогава:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} V_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n} V_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i.A.x_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i.A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}; \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n} L_i}$$

2. Теореми при симетрия.

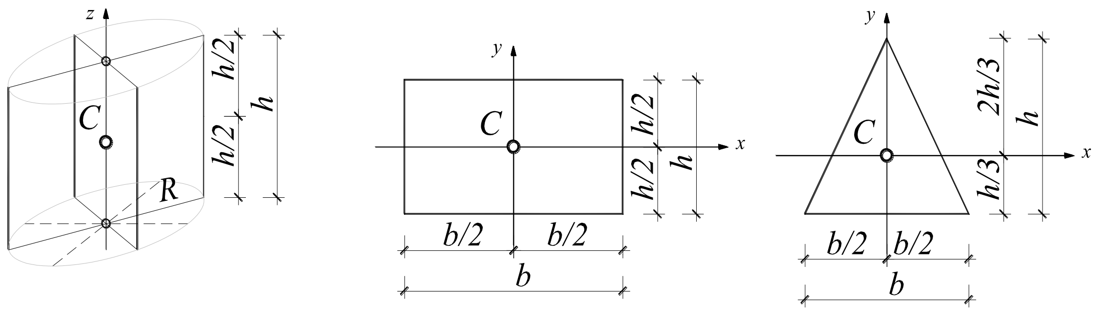
Т1: Ако тяло има равнина на симетрия, то центърът на тежестта лежи на тази равнина.



На всеки елементарен обем ΔV_i с координата $+z$ съответства елементарен обем ΔV_i с координата $-z$.

Т2: Ако <u>тяло</u> има ос на симетрия, то центърът на тежестта лежи на тази ос.

(Ако <u>фигура</u> има ос на симетрия, то центърът на тежестта лежи на тази ос.)



Ос z на цилиндър, минаваща през центровете на тежестта на основите на тялото е ос на симетрия.

Правоъгълникът има две оси на симетрия. Центърът на тежестта е пресечната точка на двете оси.

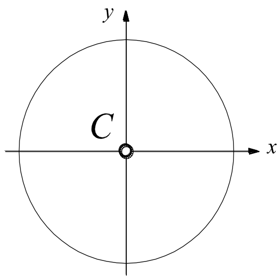
Равнобедреният триъгълник има ос на симетрия, върху която лежи точка C.

Т3: Ако <u>тяло</u> има център на симетрия, то този центърът е центърът на тежестта на тялото.

(Ако <u>фигура</u> има център на симетрия, то той е центърът на тежестта на фигурата.)

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Центърът на сфера съвпада с центърът й на тежестта.



Окръжността има център на тежестта, който е центъра на окръжността.

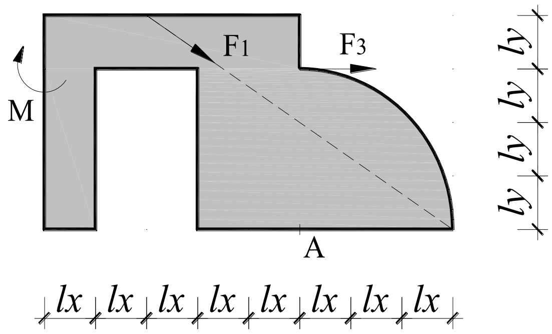
К У Р С О В А З А Д А Ч А № 5
РЕДУКЦИЯ НА РАВНИННА СИСТЕМА СИЛИ

Дадено е тяло, натоварено с равнинна система сили. Сила F_2 е приложена в центъра на тежестта на тялото и е вертикална, насочена надолу.

Да се редуцира системата сили за т. A и се определи до кой основен случай на редукция се свежда.

В подходящ мащаб да се изобразят главният вектор, главният момент и ъгълът на наклона на главния вектор.

Задачата да се реши аналитично и графично.



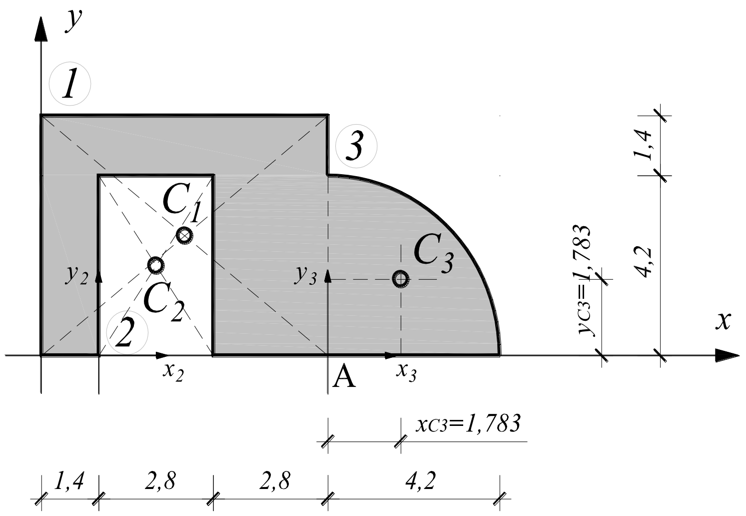
$F_1 = 60kN$; $F_3 = 25kN$

$M = 32kNm$; $\gamma = 1,2kN/m^2$; $l_x = l_y = 1,4m$

Решение:

1. Определяне на центъра на тежестта:

Зададената фигура се разделя на по-прости фигури с позната геометрия, на които може лесно да се определят лицето и координатите на центъра на тежестта.



Разделянето е на три по-прости фигури. Един плътен правоъгълник – фигура $\boxed{1}$, правоъгълен отвор – фигура $\boxed{2}$ и един плътен четвърт кръг – фигура $\boxed{3}$.

За C_3 се използва x_{C_3} спрямо x_3y_3:

$$x_{C_3} = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4.4,2}{3\pi} = 1,783m \text{ и } y_{C_3} = x_{C_3} = \frac{4R}{3\pi} = 1,783m$$

$\boxed{1} \rightarrow \qquad A_1 = 7.5,6 = 39,2m^2 \rightarrow \qquad C_1(3,5;\, 2,8);$

$\boxed{-}\boxed{2} \rightarrow \qquad A_2 = 2,8.4,2 = 11,76m^2 \rightarrow \qquad C_2(2,8;\, 2,1)$; (отворите се изваждат!)

$\boxed{3} \rightarrow \qquad A_3 = \dfrac{\pi 4,2^2}{4} = 13,854m^2 \rightarrow \qquad C_3(8,783;1,783).$

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = A_1 - A_2 + A_3 = 39,2 - 11,76 + 13,854 = 41,294m^2$$

Тогава центърът на тежестта на фигурата ще бъде:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i.x_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{39,2.3,5 - 11,76.2,8 + 13,854.8,783}{41,294} = 5,472m;$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i.y_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{39,2.2,8 - 11,76.2,1 + 13,854.1,783}{41,294} = 2,658m$$

Получените резултати се нанасят на схемата.

2. Разлагане на сили:

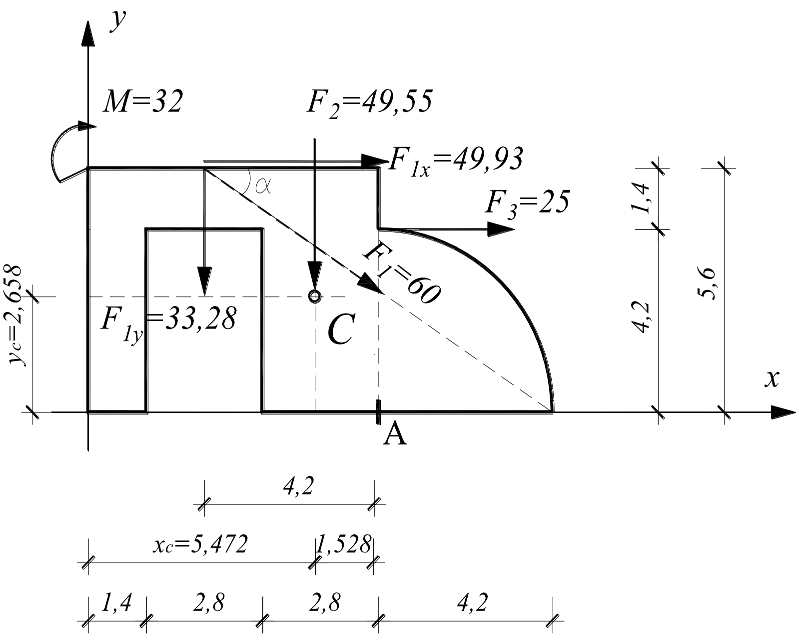
Определя се силата F_2 и се прилага в центъра на тежестта на фигурата, а силата F_1 се разлага.

$$F_2 = \sum_{i=1}^{3} A_i.\gamma = 41,294.1,2 = 49,55kN$$

$$tg\alpha = \frac{5,6}{8,4} = 0,66667 \rightarrow \alpha = arctg0,66667 \rightarrow \alpha = 33,6901^\circ \rightarrow \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = 0,8321 \\ \sin\alpha = 0,5547 \end{array} \right.$$

$$\vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1x} = F_1 \cos\alpha = 60.0,8321 = 49,93kN \\ F_{1y} = -F_1 \sin\alpha = -60.0,5547 = -33,28kN \end{array} \right.$$

Проверка: $\sqrt{49,93^2 + 33,28^2} = 60,00kN$



3. Определяне на главния вектор (първа инварианта на редукцията).

$$\vec{R} \left| \begin{array}{l} R_x = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = 49,93 + 25 = 74,93kN \\ R_y = \sum_{i=1}^{3} F_{iy} = -33,28 - 49,55 = -82,83kN \end{array} \right.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{74,93^2 + 82,83^2} = 111,69kN$$

$$tg\beta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-82,83}{74,93} = -1,1054317 \rightarrow \beta = arctg -1,1054317 \rightarrow \beta = -47,8668^\circ$$

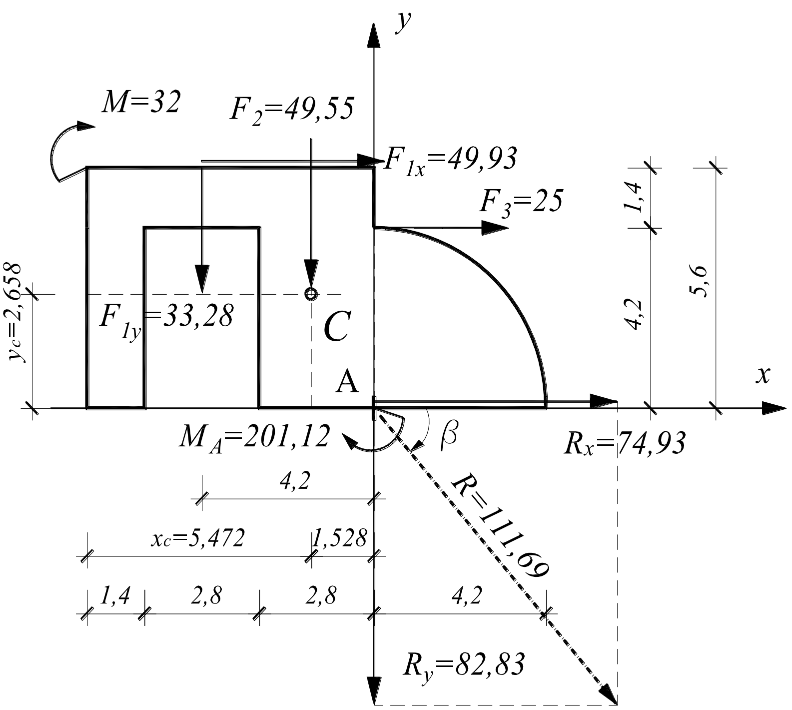
4. Главен момент за точка A.

$$M_A = -F_{1x}5,6 + F_{1y}4,2 + F_2 1,528 - F_3 4,2 - M =$$
$$= -49,93.5,6 + 33,28.4,2 + 49,55.1,528 - 25.4,2 - 32 = -201,12kN.m$$

5. Уравнение на равнодействащата и нейните отрези от осите Ax и Ay.

$R_y x - R_x y = M_A$ (виж Уравнение на равнодействащата.)

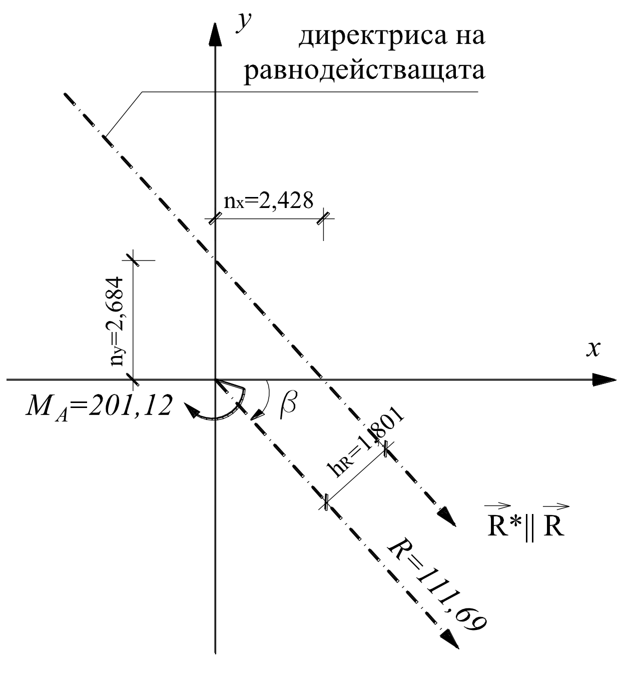
$-82,83x - 74,93y = -201,12$



$$y = 0: \quad n_x = \frac{M_A}{R_y} = \frac{-201,12}{-82,83} = 2,428m$$

$$x = 0: \quad n_y = \frac{M_A}{R_x} = \frac{-201,12}{-74,93} = 2,684m$$

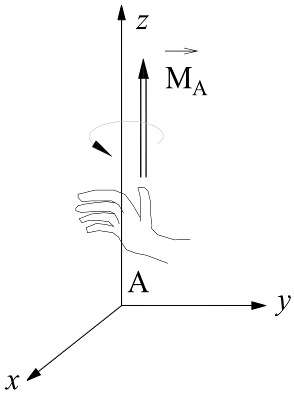
$$h_R = \left|\frac{M_A}{R}\right| = \left|\frac{-201,12}{111,69}\right| = 1,801m$$



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

IV. Допълнителни обяснения.

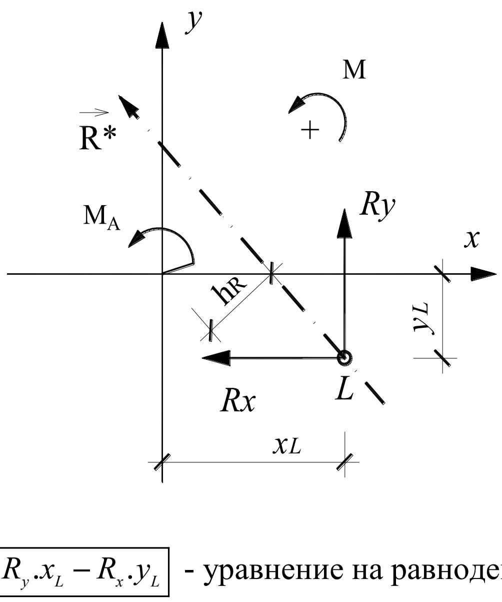
1. Моментът се приема положителен когато върти по посока обратно на часовниковата стрелка.



Ако равнината на силите е xy, то моментите ще са по ос z. За да са положителни моментите, те трябва да се проектират по $+z$. Тогава пръстите на ръката показват посока обратно на часовниковата стрелка, гледайки срещу стрелката на ос $+z$.

2. Уравнение на равнодействащата.

Система равнинни сили се редуцира до равнодействаща. Тя подменя действието на всички сили. Равнодействащата е равна по големина на главния вектор и в най-общия случай не минава през точката на редукция. Моментът на равнодействащата R^* за точката на редукция – точка A е $M_A = R^*.h_R$. Същият момент може да се получи и чрез момента на компонентите на R^*, които са R_x и R_y. За да е положителен моментът трябва R^* да създава момент по посока обратно на часовниковата стрелка и тогава:



$\boxed{M_A = R_y.x_L - R_x.y_L}$ - уравнение на равнодействащата

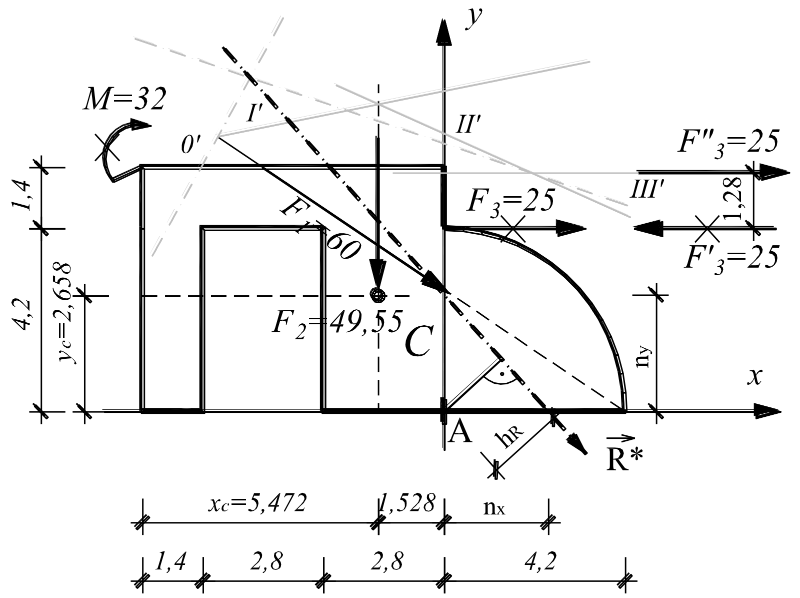
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Графично решение:

$$d_3 = \frac{M}{F_3} = \frac{32}{25} = 1,28m$$

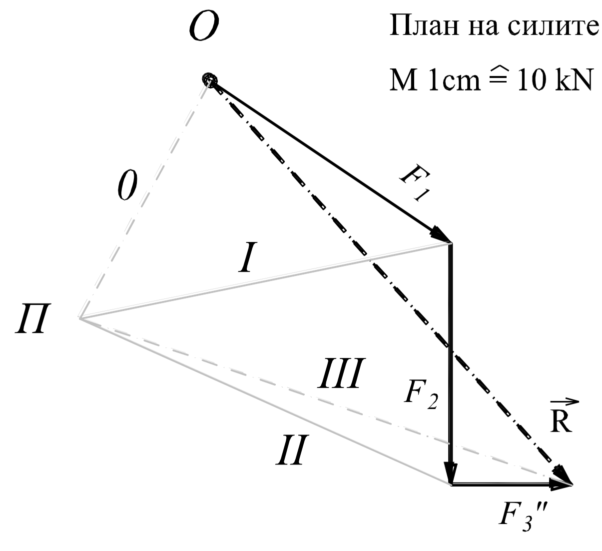
План на положението:

M 1cm $\hat{=}$ 2m



План на силите:

M 1cm $\hat{=}$ 10 kN



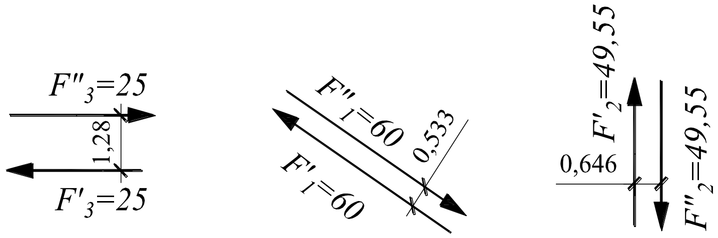
Отчитаме:

$$R = 11,16.10 = 111,6kN$$

$$h_R = 0,9.2 = 1,8m$$

$$M_A = -R.h_R = -111,6.1,8 = -200,88kNm$$

Моментът $M = 32kNm$ се подменя с двоица. Тя може да бъде от сили с произволна големина или от сили с големина равна на някоя от зададени сили $F_1; F_2$ или F_3. Избира се измежду:



Рамената на различните двоици са определени от $d_i = \dfrac{M}{F_i} = \dfrac{32}{F_i}\left[m\right]$.

$$d_3 = \frac{M}{F_3} = \frac{32}{25} = 1,28m; \qquad d_1 = \frac{M}{F_1} = \frac{32}{60} = 0,533m, \qquad d_2 = \frac{M}{F_2} = \frac{32}{49,55} = 0,646m$$

Избраната двоица $F_3'; F_3''$ се разполага срещу съответната сила F_3, така че едната от силите на двоицата и зададената сила да са правопротивоположни - $F_3'; F_3$. Отстраняваме ги като равновесна система сили.

Построява се силовият полигон, който започва от точка O. В съответния мащаб се нанасят последователно силите $F_1; F_2; F_3''$. Изчертава се главния вектор R и се отчита.

От точка $П$ се построяват лъчите за верижния полигон - $0 \div III$, които се връщат на плана на положението. Правилото е лъчите, които ограждат дадена сила в плана на силите, трябва да се пресичат върху същата сила в плана на положението. Примерно лъчи 0 и I ограждат силата F_1 в план на силите, следователно в плана на положението се нанася лъч $0'$, който пресича силата F_1 някъде по нейната директриса. През точката на пресичане пренасяме успоредно лъч I'. Той трябва да пресече силата F_2. През пресечната точка се пренася другият ограждащ лъч за силата F_2 от силовия полигон, който е лъч II. Лъч II' пресича F_3''. В пресечната точка изчертаваме последния лъч ограждащ F_3 от силовия полигон, лъч III. Пресечната точка на I' и III' е точка от равнодействащата, през която изчертаваме успоредно на главния вектор самата равнодействаща R^*.

Отчитаме: R, h_R и изчисляваме $M_A = R.\,h_R$.

Коментар:

1. Векторите сили и моменти не се нанасят мащабно. Те са такива каквито ги виждате на няколкото чертежа в решените примери. Може просто да са съразмерни. Т.е. векторите на по-големите сили да са по-големи от по-малките по големина сили и т.н.

2. В показаните решения са използвани обръщения към теоретичните бележки в началото на материала. За целта се маркира текстът, който следва подканата виж:…...

   В обясненията са изобразени необходимите схеми, които показват последователността на решение и разсъждения. В курсовата задача се изчертават същите чертежите, които трябва да са мащабни. За яснота следете решения пример в ръководството.

   Това е материалът за Курсова задача 5 (по номерация от ръководството), за Вас това е четвърта задача, която правите като курсова. Моля, прегледайте и решете примера в ръководството за тренировка, както и примерите решени тук. При несигурност, можете да снимате и да ми изпратите снимката с въпроси.

Желая Ви успех в подготовката на подадената информация.

При въпроси, моля пишете на: doicheva_fhe@abv.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева