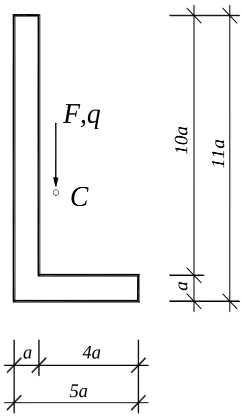
I. Оразмеряване на дървено сечение: Беше решено в упражнението на 09 март. Диаграмите на разглежданата греда бяха построени тогава. Застрашено сечение за σ_x беше определено - $M_{y\max} = 20\,kN.m$

II. Оразмеряване на стоманена греда със показаното сечение:

Пример 1 – Разрезните усилия са решените на упражнението на 09 март.

Зададеното сечение няма ос на симетрия.

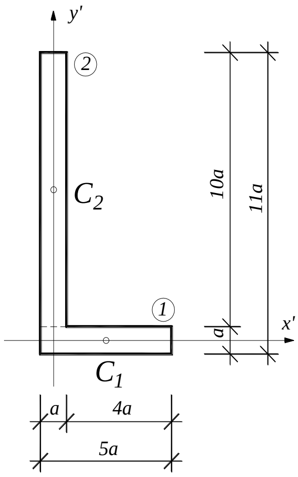


Следователно трябва да определим:

1. Център на тежестта на сечението.
2. Главни централни инерционни оси и съответните им главни инерционни моменти.

Започваме с точка 1.

(Разделяме сечението на удобни фигури. За по-лесни сметки произтичащи от повече нули в изчисленията, често се въвеждат оси, които минават през C_1 и/или C_2.)



$$A_1 = 5a.a = 5a^2 \rightarrow C_1\left(2a;0\right)$$

$$A_2 = 10a.a = 10a^2 \rightarrow C_2\left(0;5,5a\right)$$

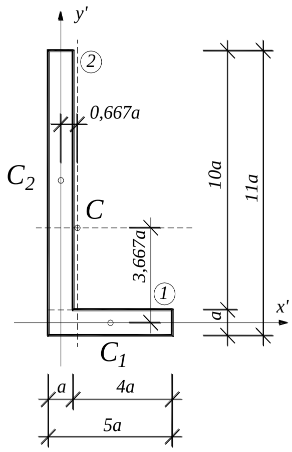
$$x_C^{'} = \frac{5a^2.2a + 10a^2.0}{15a^2} = 0,667a$$

$$y_C^{'} = \frac{5a^2.0 + 10a^2.5,5a}{15a^2} = 3,667a$$

(!!! **Нанасяме ги на схемата.)**

Фиг. 1

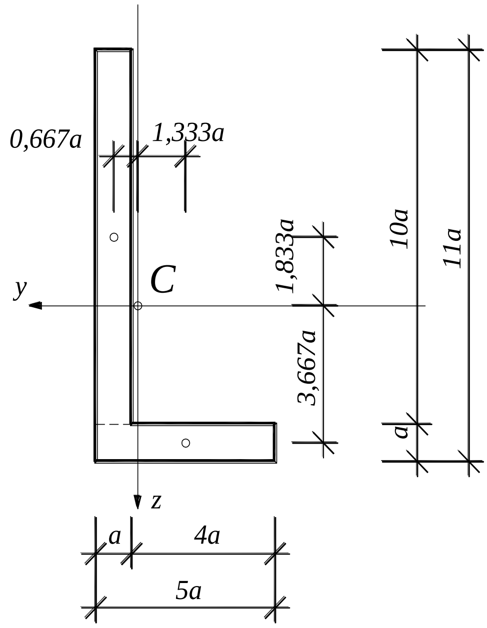
(Нанесени $x_C^{'}$; $y_C^{'}$ на горната схема стават така: тук→)



(Фиг. 1 допълнена)

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

(**Правим втора схема с отбелязани всички разстояния, необходими за добавките по Щайнер.**)



Фиг. 2

По точка 2 извършваме изчисленията:

$$I_y = \left[\frac{5a.(a)^3}{12} + 5a^2.(3,667a)^2\right] + \left[\frac{a.(10a)^3}{12} + 10a^2.(1,833a)^2\right] = 67,65a^4 + 116,93a^4 = 184,58a^4$$

$$I_z = \left[\frac{(5a)^3.a}{12} + 5a^2.(1,333a)^2\right] + \left[\frac{a^3.10a}{12} + 10a^2.(0,667a)^2\right] = 19,30a^4 + 5,28a^4 = 24,58a^4$$

$$I_{yz} = \left[0 + 5a^2.(-1,333a)(3,667a)\right] + \left[0 + 10a^2.(0,667a)(-1,833a)\right] = 24,44a^4 + 12,23a^4 = -36,67a^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} =$$

$$= \frac{184,58a^4 + 24,58a^4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{184,58a^4 - 24,58a^4}{2}\right)^2 + \left(-36,67a^4\right)^2} = 104,58a^4 \pm 88,00a^4$$

$I_1 = I_{y1} = 192,58a^4$ $\qquad\qquad$ $I_2 = I_{z1} = 16,58a^4$

Проверки: *I* инварианта: $\qquad\qquad$ *II* инварианта:

$I_1 + I_2 \overset{?}{=} I_y + I_z$ $\qquad\qquad$ $I_1.I_2 \overset{?}{=} I_y.I_z - I_{yz}^2$

$192,58a^4 + 16,58a^4 \overset{?}{=} 184,58a^4 + 24,58a^4$ $\qquad\qquad$ $192,58a^4.16,58a^4 \overset{?}{=} 184,58a^4.24,58a^4 - \left(36,67a^4\right)^2$

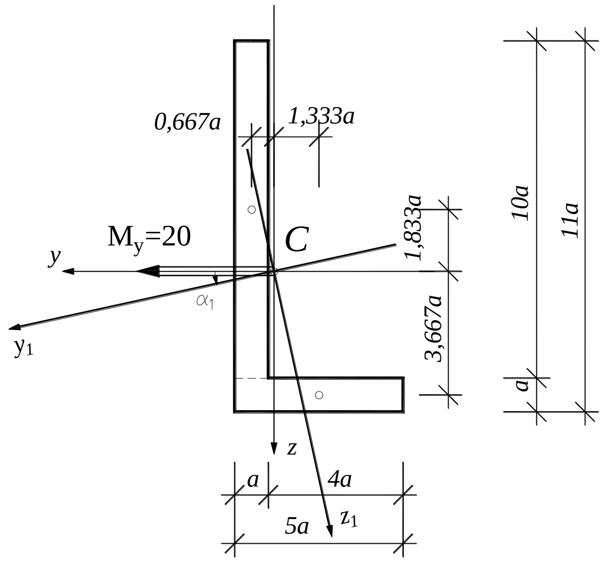
$209,16a^4 \quad = \quad 209,16a^4$ $\qquad\qquad$ $3192,98a^4 \quad = \quad 3192,29a^4$

$$tg\alpha_1 = \frac{I_{yz}}{I_z - I_1} = \frac{-36,67a^4}{24,58a^4 - 192,58a^4} = \frac{-36,67a^4}{-168a^4} = 0,21827 \rightarrow \quad \alpha_1 = 12,312^\circ \quad \left| \begin{array}{l} \sin\alpha_1 = 0,2132 \\ \cos\alpha_1 = 0,9970 \end{array} \right.$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

(Нанасяме на схемата главните централни инерционни оси. Ъгълът α_1 е положителен. Нанасяме го с посока от ос y към ос z. Фиг. 2 се допълва и става:)

(Фиг. 2 допълнена)



(Нанесен е още огъващият момент M_y с неговата посока. Ясно се вижда какви ще са проекциите му върху главните централни инерционни оси y_1 и z_1.)

$$M_y \left| \begin{array}{l} M_{y1} = M_y.\cos\alpha_1 = 20.0,9970 = 19,54kN.m \\ M_{z1} = -M_y.\sin\alpha_1 = -20.0,2132 = -4,26kN.m \end{array} \right.$$

3. Нормални напрежения.

$$\sigma_x = \frac{M_{y1}}{I_{y1}} z_1 - \frac{M_{z1}}{I_{z1}} y_1 = a^{-4}\left(\frac{19,54.100}{192,58a^4} z_1 - \frac{-4,26.100}{16,58a^4} y_1\right) = a^{-4}\left(10,146z_1 + 25,694y_1\right)$$

Нулева линия: (Определя се от условието $\sigma_x = 0$.)

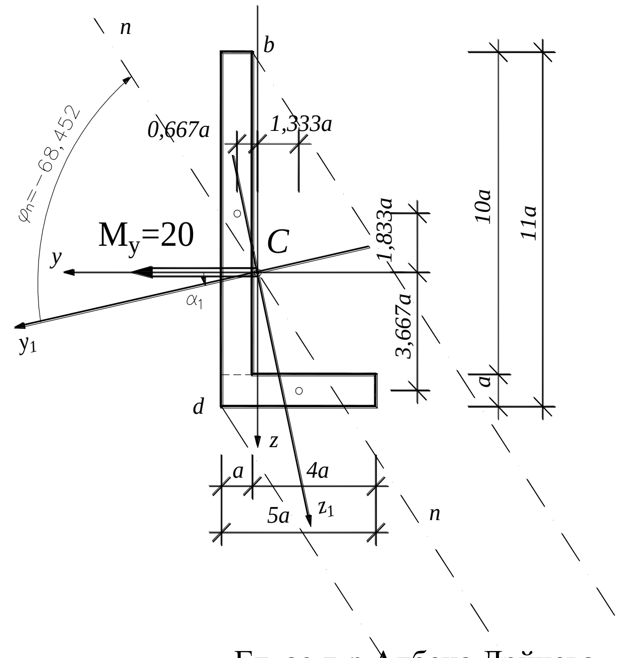
$$10,146z_1 + 25,694y_1 = 0$$

$$z_1 = \frac{-25,694}{10,146} y_1 = -2,532y_1$$

$$tg\varphi_n = -2,532 \quad \rightarrow \quad \varphi_n = -68,452^\circ$$

(Нанасяме φ_n на фиг.2. Ъгълът е относно вече текущата координатна система y_1Cz_1 на главните централни инерционни оси. Посоката за отрицателен ъгъл φ_n е от $y_1 \xrightarrow{към} -z_1$.)

(Фиг. 2 допълнена)



(!!! n-n е между M_y и оста с по-малкия инерционен момент - z_1.)

(Пренасяме нулевата линия $n-n$ през най-отдалечените точки от сечението. За конкретния пример, това са точки b и d. В

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

тези точки σ_x ще има най-големи стойности. Определянето става чрез изразът от по горе $\sigma_x = a^{-4}\left(10,146z_1 + 25,694y_1\right)$. Необходими са координатите на точки b и d в координатна система y_1Cz_1. Определянето им обаче е трудно спрямо y_1Cz_1, но спрямо yCz е напълно възможно.)

Координати спрямо yCz на b и d : $\left| \begin{array}{l} b\left(0,167a\,;-6,833a\right) \\ d\left(1,167a\,;4,167a\right) \end{array} \right.$

Преизчисляване на координатите спрямо y_1Cz_1.

(Става чрез преизчисляване на координатите при завъртяна координатна система. $\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}$. Припомням $\left| \begin{array}{l} \sin\alpha_1 = 0,2132 \\ \cos\alpha_1 = 0,9970 \end{array} \right.$ бяха определени по-рано.)

$$y_{1b} = y_b.\cos\alpha_1 + z_b\sin\alpha_1 = 0,167a.0,997 + (-6,833a).0,2132 = -1,290a$$
$$z_{1b} = -y_b.\sin\alpha_1 + z_b\cos\alpha_1 = -0,167a.0,2132 + (-6,833a).0,997 = -6,848a$$

и
$$y_{1d} = y_d.\cos\alpha_1 + z_d\sin\alpha_1 = 1,167a.0,997 + 4,167a.0,2132 = 2,052a$$
$$z_{1d} = -y_d.\sin\alpha_1 + z_d\cos\alpha_1 = -1,167a.0,2132 + 4,167a.0,997 = 3,906a$$

Напреженията в точки b и d са съответно:

$$\sigma_{xb} = a^{-4}\left(10,146z_{1b} + 25,694y_{1b}\right) = a^{-4}\left(10,146(-6,848a) + 25,694\left(-1,290a\right)\right) = -102,625a^{-3}$$
$$\sigma_{xd} = a^{-4}\left(10,146z_{1d} + 25,694y_{1d}\right) = a^{-4}\left(10,146.3,906a + 25,694.2,052a\right) = 92,354a^{-3}$$

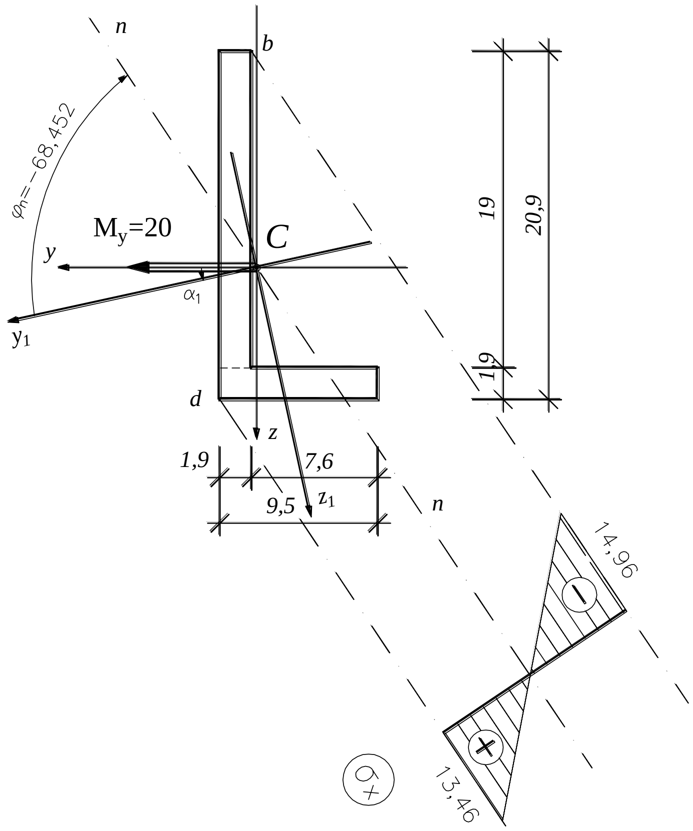
(Условието за оразмеряване е $\max\left|\sigma_x\right| \le \sigma_{adm}$. По-голямо по абсолютна стойност е $\sigma_{xb} = -102,625a^{-3}$.)

$$\max\left|\sigma_x\right| = \sigma_{xb} = \left|-102,625a^{-3}\right| \le 16$$
$$a^3 \ge \frac{102,625}{16} \quad \rightarrow \quad a \ge \sqrt[3]{6,4140625} = 1,858cm$$

Прието $a = 1,9cm$ (Точност до $1\,mm$.)

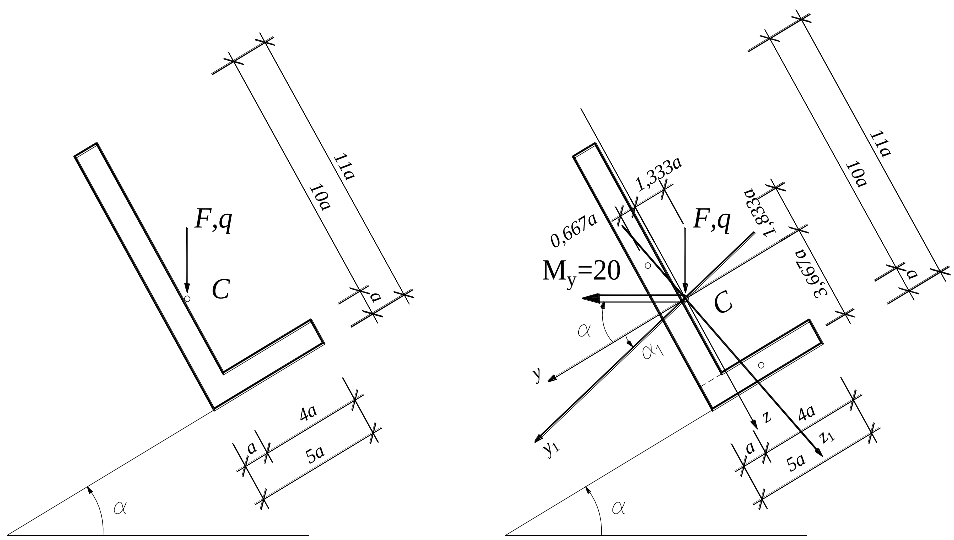
$$\sigma_{xb} = -102,625.1,9^{-3} = -14,96\,kN/cm^2$$
$$\sigma_{xd} = 92,354.1,9^{-3} = 13,46\,kN/cm^2$$

(Изчертаваме диаграмата σ_x.)



Фиг.3

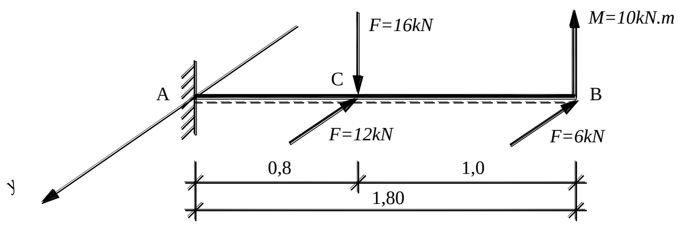
Ако имате схема 1-4 или 9-10 и е зададен ъгъл на наклона на сечението, то той ще се насложи с ъгъла на главните централни инерционни оси и ще се отрази на проектирането на момента върху тях.

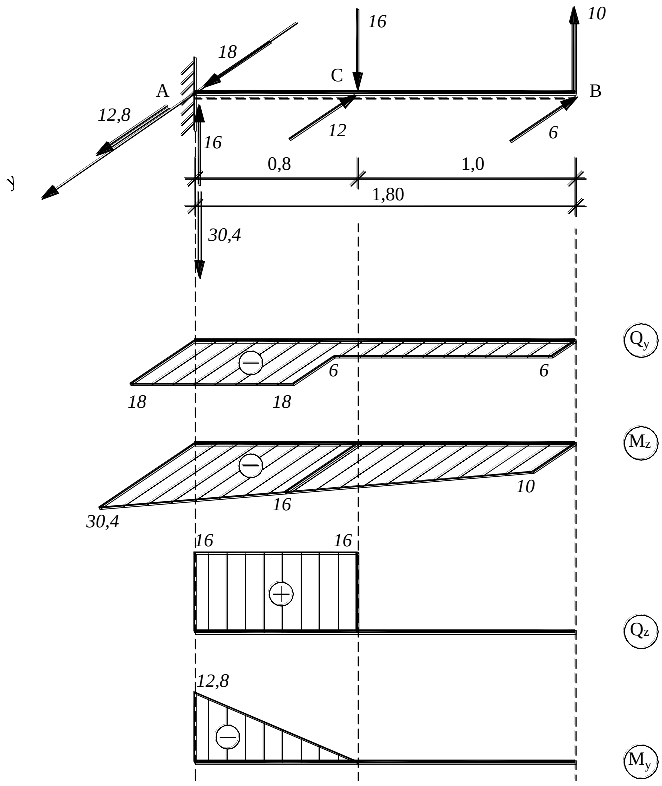


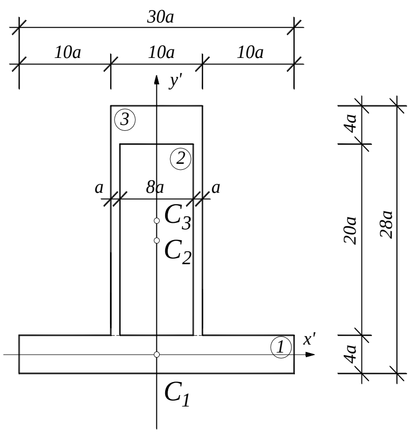
$$M_y \left| \begin{aligned} M_{y1} &= M_y.\cos(\alpha+\alpha_1) \\ M_{z1} &= -M_y.\sin(\alpha+\alpha_1) \end{aligned} \right.$$

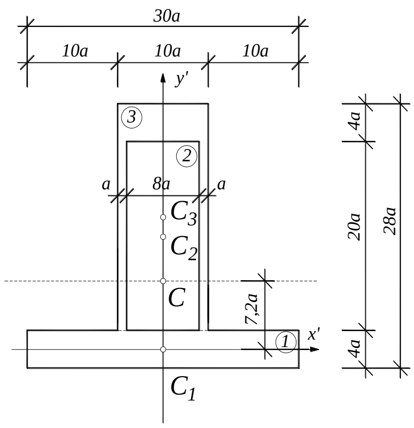
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Пример 2 – сечение с ос на симетрия.









$$A_1 = 30a.4a = 120a^2 \rightarrow C_1\left(0;0\right)$$

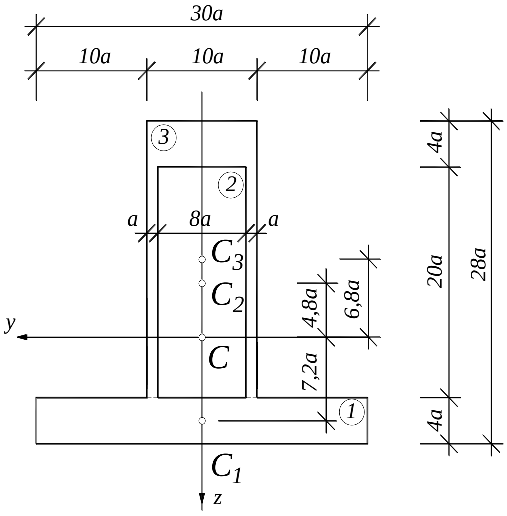
$$-\ A_2 = 8a.20a = 160a^2 \rightarrow C_2\left(0;12a\right)$$

$$A_3 = 10a.24a = 240a^2 \rightarrow C_3\left(0;14a\right)$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева

Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

$$y_C' = \frac{120a^2.0 - 160a^2.12a + 240a^2.14a}{200a^2} = \frac{1440}{200}a = 7,2a$$



$$I_y = \left[\frac{30a.(4a)^3}{12} + 120a^2.(7,2a)^2\right] - \left[\frac{8a.(20a)^3}{12} + 160a^2.(4,8a)^2\right] + \left[\frac{10a.(24a)^3}{12} + 240a^2.(6,8a)^2\right] =$$

$$= 6380,8a^4 - 9019,73a^4 + 22617,6a^4 = 19978,67a^4$$

$$I_z = \left[\frac{(30a)^3.4a}{12}\right] - \left[\frac{(8a)^3.20}{12}\right] + \left[\frac{(10a)^3.24a}{12}\right] = 9000a^4 - 853,33a^4 + 2000a^4 = 10146,67a^4$$

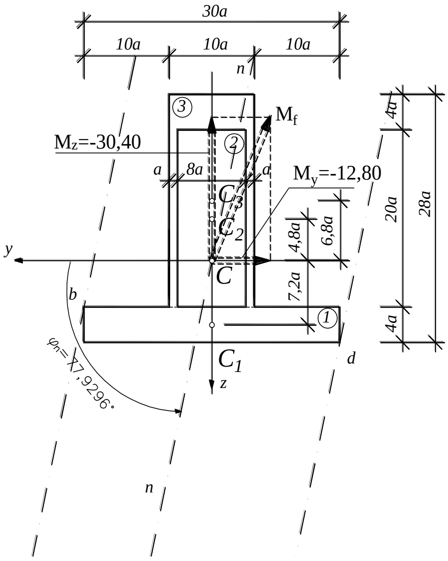
Застрашено сечение е сечение А с $M_y = -12,80kN.m$ и $M_z = -30,40kN.m$

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = a^{-4}\left(\frac{-12,80.100}{19978,67a^4}z - \frac{-30,4.100}{10146,67a^4}y\right) = a^{-4}\left(-0,064068z + 0,299606y\right)$$

n-n: $-0,064068z + 0,299606y = 0$

$z = 4,6764y$

$tg\varphi_n = 4,6764 \;\rightarrow\; \varphi_n = 77,9296^\circ$ (Ъгълът е положителен $\Rightarrow y_1 \xrightarrow{към} +z_1$. На схемата се нанасят и моментите $\overrightarrow{M_y}$ и $\overrightarrow{M_z}$, както и общият момент $\overrightarrow{M_f} = \overrightarrow{M_y} + \overrightarrow{M_z}$. Вижда се че n-n е между $\overrightarrow{M_f}$ и ос z - оста с минимален инерционен момент.)



(Най-отдалечени точки от n-n са b и d. Техните координати спрямо координатната система на главните централни инерционни оси са:)

$$\left| \begin{array}{l} b\left(15a\,;5,2a\right) \\ d\left(-15a\,;9,2a\right) \end{array} \right.$$

$$\sigma_{xb} = a^{-4}\left(-0,064068z_b + 0,299606y_b\right) = a^{-4}\left(-0,064068.5,2a + 0,299606.15a\right) = 4,16094a^{-3}$$

$$\sigma_{xd} = a^{-4}\left(-0,064068z_d + 0,299606y_d\right) = a^{-4}\left(-0,064068.9,2a + 0,299606.(-15a)\right) = -5,08352a^{-3}$$

$$\max\left|\sigma_x\right| \le \sigma_{adm}$$

$$\max\left|\sigma_x\right| = \sigma_{xd} = \left|-5,08352a^{-3}\right| \le 16$$

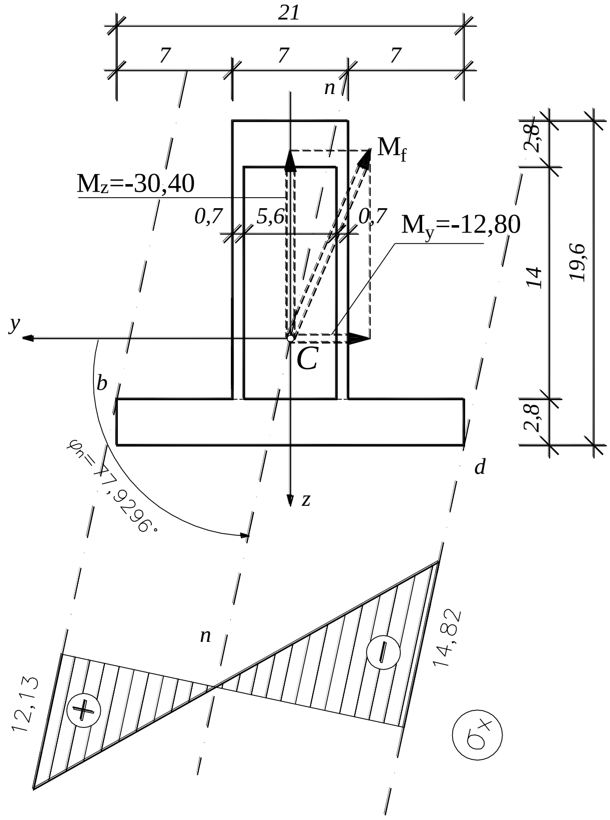
$$a^3 \ge \frac{5,08352}{16} \quad \rightarrow \quad a \ge \sqrt[3]{0,3177} = 0,6824cm$$

Прието $a = 0,7cm$ (Точност до $1\,mm$.)

$$\sigma_{xb} = 4,16094.0,7^{-3} = 12,13\,kN/cm^2$$

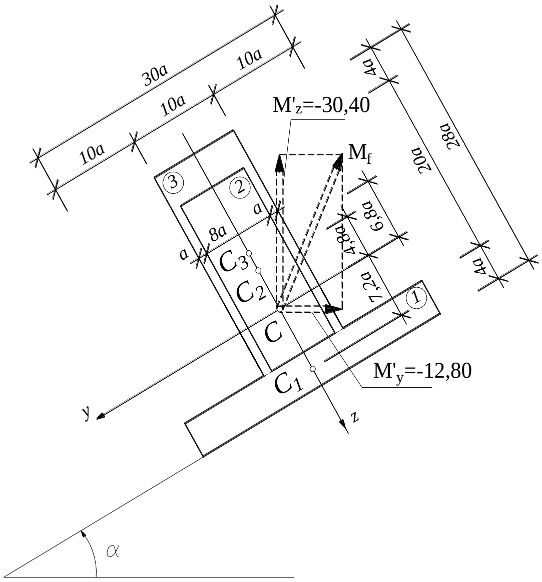
$$\sigma_{xd} = -5,08352.0,7^{-3} = -14,82\,kN/cm^2$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



Коментари:

1. Решението при симетрични профили е значително по лесно. Не се търсят главни инерционни оси, защото са ясни – осите на симетрия. Не се налага да се преизчисляват координатите на най-отдалечените точки – няма въртене на координатна система заради завъртени главни централни инерционни оси.
2. Ако профилът от заданието е поставен под ъгъл спрямо хоризонта, това ще се отрази на компонентите на момента за главните централни инерционни оси y и z, както решеният пример 1.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Примерно: За показаната схема

$$M_f \left| \begin{array}{l} M_y = -M'_y.\cos\alpha - M'_z.\sin\alpha \\ M_z = M'_y.\sin\alpha - M'_z.\cos\alpha \end{array} \right.$$

3. Задължително спазвайте мащаб при чертането, за да можете вярно да определите най-отдалечените точки. Ако случайно сгрешите и изберете друга точка, по-близка до n-n, то размерът на сечението ще подберете така, че $\max|\sigma_x| \le \sigma_{adm}$, но ако заместите с координатите на друга крайна точка, която се окаже по далече от n-n от подбраната (но Вие не сте видели това) ще получите $\max|\sigma_x| \ge \sigma_{adm}$, което е недопустимо.
4. Всички обяснения в скоби са за разясняване на решението. Те не се преписват в курсовата задачата, а просто се следват.
5. Някои от схемите са задени по два или три пъти, като е указано, че е допълнение към конкретна фигура. Вие правите една фигура, на която ще имате всички стъпки. Показването по няколко пъти на една фигура в тези обяснения е с цел да се проследи редът на решение и нанасянето върху чертежите на получени от решението резултати. В някои случаи, те определят посоката на решението в последствие.

Желая Ви успех в подготовката на втората част от курсовата работа.

При въпроси, моля пишете ми на: doicheva_fhe@uacg.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София