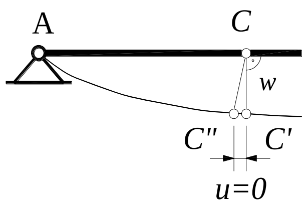
ЕЛАСТИЧНА ЛИНИЯ

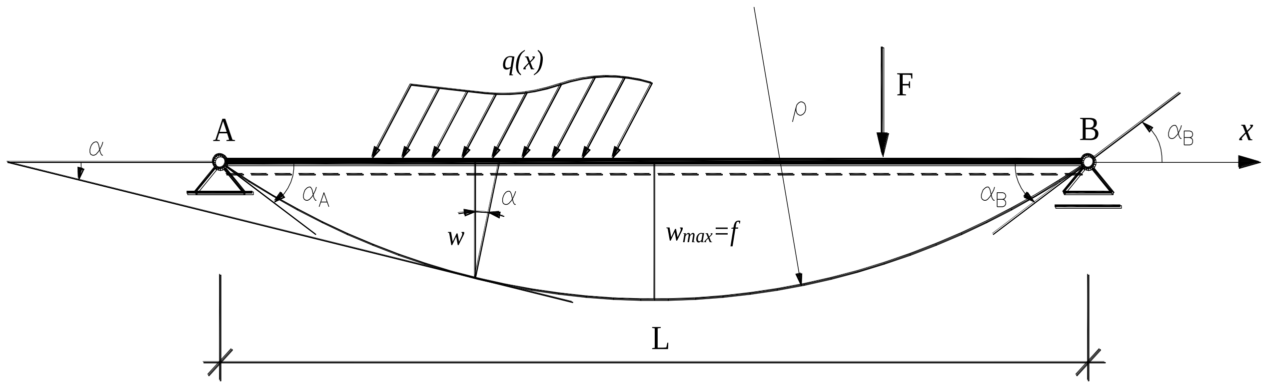
Основни понятия.

Напречното натоварване предизвиква напрежения в точките на гредите както и *преместване на* тези *точки* в нови положения, на което казваме че гредата се е огънала. Изучаването на огъването на гредите се свежда до изучаването на напречните премествания на точките от оста на гредата. Новото положение, което заема оста на гредата след прилагането на натоварването, наричаме еластична линия.

Валидна е хипотезата за малките деформации и приемаме, че напречното преместване на точките от оста на гредата w става перпендикулярно на оста на гредата, т.е. пренебрегваме незначителното преместване в осово направление.



Най-голямото преместване на гредата w_{max} наричаме *стрелка* на гредата и означаваме с f.



Разглежданата теория важи за малки напречни премествания, такива при които отношението $f/l = 1/200 \div 1/1000$.

Ъгълът между оста x и тангентата към еластичната линия се нарича *ъгъл на наклона* или *ъгъл на завъртане на напречното сечение* - α.

Първата производна на функцията на еластичната линия $w'(x)$ представлява $tg\alpha$. Преместванията са малки и тогава приемаме $w'(x) = tg\alpha \approx \alpha$.

Положително е напречното преместване w, когато е по положителната посока на оста z за лява част.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Положителен е ъгълът α, когато завърта положителната ос x към тангентата в дадена точка по посока на часовниковата стрелка. Например, ъгълът α_A е положителен, а α_B е отрицателен.

$$\boxed{w'' = -\frac{M_y}{EI_y}}$$

\- *диференциално уравнение на еластичната линия*

След диференциране получаваме връзки на еластичната линия от напречната сила и разпределения товар:

$$\frac{d}{dx}\left(w''(x)\right) = w'''(x) = -\frac{dM_y}{dx}\frac{1}{EI_y} = -\frac{Q_z}{EI_y}$$

$$\frac{d}{dx}\left(w'''(x)\right) = w^{IV}(x) = -\frac{dQ_z}{dx}\frac{1}{EI_y} = +\frac{q}{EI_y}$$

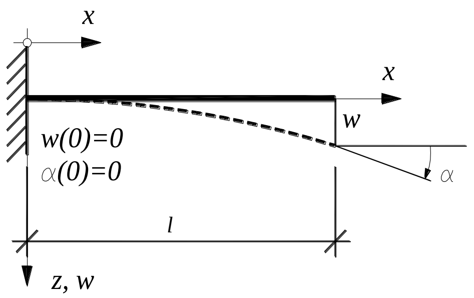
Метод за определяне на еластичната линия чрез непосредствено интегриране на диференциалното уравнение на еластичната линия.

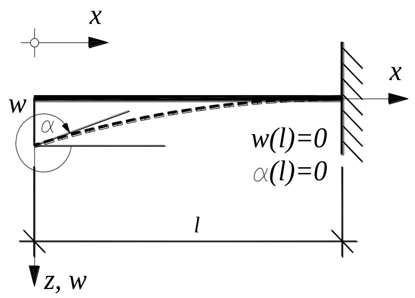
Диференциалното уравнение $w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$ е обикновено, от втори ред, с отделящи се променливи и може директно да се интегрира

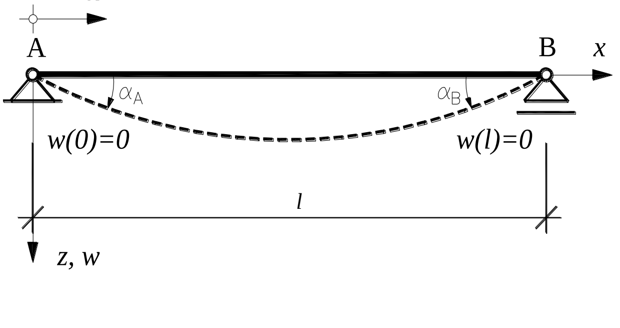
$$w'(x) = -\int \frac{M_y}{EI_y} dx + C_1$$

$$w(x) = -\int dx \int \frac{M_y}{EI_y} dx + C_1 x + C_2 .$$

Интеграционните константи се определят от *геометричните* (*кинематични или деформационни*) граничните условия, които се налагат от опорните устройства (*кинематични*) или *деформационните* условия в границите на участъците.

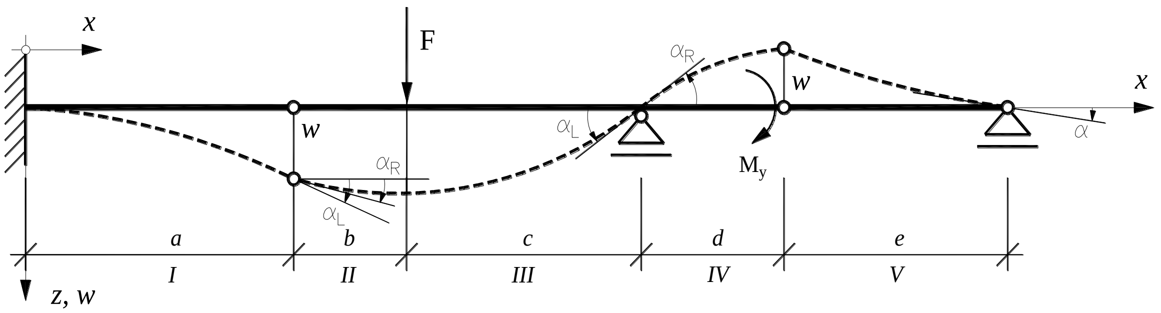






Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Ако участъците са повече на брой, то за всеки участък законът за изменение на огъващият момент е различен и можем да запишем толкова пъти диференциалното уравнение $w'' = -\dfrac{M_y}{EI_y}$, колкото участъци имаме. След извършване на интегрирането ще получим по две интеграционни константи за всеки участък. За определянето им използваме съответните *геометрични* гранични условия. *Винаги разполагаме с толкова гранични условия, колкото е броят на неизвестните интеграционни константи.*



$w_I(0)=0$
$w'_I(0)=\alpha(0)=0$

$w_I(a)=w_{II}(0)$

$w_{II}(b)=w_{III}(0)$
$w'_{II}(b)=w'_{III}(0)$

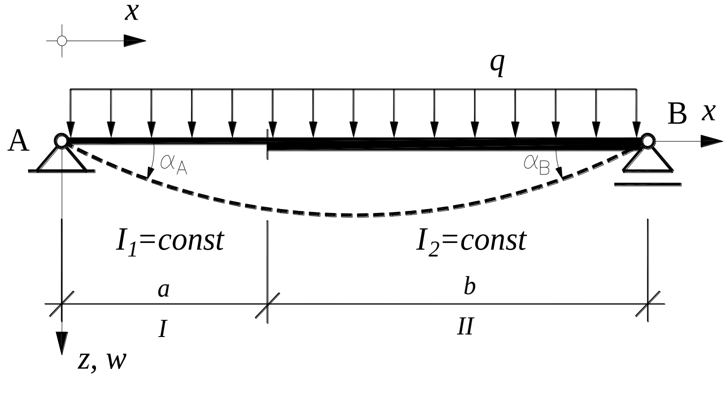
$w_{III}(c)=0$ $w_{IV}(0)=0$
$w'_{III}(c)=w'_{IV}(0)$

$w_{IV}(d)=w_V(0)$ $w_V(e)=0$

Допълнителни забележки:

1. Препоръчва се текущата координата x да се мери винаги отляво надясно за всеки участък поотделно.
2. Еластичната линия е гладка крива. При въвеждането на геометричните гранични условия трябва да се има предвид, че в областта на гредата при границите на участъци имаме не само обща точка, но и обща тангента. При наличие на междинна става, вече имаме две греди, на границите на които двата участъка трябва да имат обща точка, но в общия случай, тангентите ще бъдат различни.

Еластична линия на греда с променлив инерционен момент.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

При наличие на различни инерционни моменти гредата се разделя на участъци по отношение не само на промяна на натоварването и характера на оста на гредата, но и спрямо коравината. За всеки участък записваме диференциалното уравнение на еластичната линия:

$$w_i''(x) = -\frac{M_{yi}(x)}{EI_{yi}}$$, където w_i е преместването,

$M_{yi}(x)$ - огъващият момент в даден участък

I_{yi} - инерционният момент в даден участък

Преместването е малка величина и по-удобно се работи с EI - кратната му стойност. В случаите с различни инерционни моменти се избира една *основна коравина* EI_0, където I_0 е основен инерционен момент. Той може да бъде инерционният момент на някой от участъците на гредата или може да е съвсем произволна стойност, която да е удобна за изчисленията.

За отделните участъци диференциалното уравнение на еластичната линия добива вида:

$$EI_0 w_i''(x) = -M_{yi}(x)\frac{I_0}{I_{yi}}$$

Определянето на еластичната линия чрез непосредствено интегриране на диференциалното уравнение става само с редукция на функцията на огъващия момент чрез постоянен коефициент, който представлява *отношението на избрания основен инерционен момент* I_0 *към инерционни момент на дадения участък* I_{yi}. Може да се каже също, че работим с *редуциран огъващ момент* $M_{yi}(x)\frac{I_0}{I_{yi}}$.

Графоаналитичен метод на мор (Mohr). Аналогия на Мор.

Съществуват физични явления, които се описват с едни и същи по структура диференциални зависимости. Това позволява да се търси аналогия при разглеждането на тези явления. Аналогията на Мор се основава на сходство между диференциалното уравнение на огъващия момент

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = M''(x) = \frac{d}{dx}\frac{dM(x)}{dx} = \frac{d}{dx}V(x) = -q(x)$$

и диференциалното уравнение на еластичната линия

$$\frac{d^2w}{dx^2} = w'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad \text{или} \quad \frac{d^2(EIw)}{dx^2} = EIw'' = -M(x).$$

Двете диференциални уравнения са от втори ред с отделящи се променливи. Следователно, така както от външно натоварване $q(x)$ можем да получим огъващия момент $M(x)$, така би трябвало да може по аналогичен път да се получи EI - кратната стойност на преместването от огъващия момент $M(x)$. В този случай $M(x)$ ще се разглежда като натоварване и ще го наречем *фиктивно (недействително) натоварване* $\overline{q}(x)$, а резултатът - EI - кратната стойност на преместването ще се разгледа като *фиктивен огъващ момент* $\overline{M}(x)$. Така че:

$$\frac{d^2(\overbrace{EIw}^{\overline{M}(x)})}{dx^2} = -\overbrace{M(x)}^{\bar{q}(x)}, \text{ или } \frac{d^2\overline{M}(x)}{dx^2} = \overline{M}''(x) = -\bar{q}(x).$$

От диференциалната зависимост:

$$\frac{d\overline{M}(x)}{dx} = \overline{V}(x)$$

Получаваме:

$$EIw' = EI\alpha = \overline{V}(x),$$

т.е. EI - кратната стойност на завъртането се оказва равна на *фиктивната напречна сила* $\overline{V}(x)$.

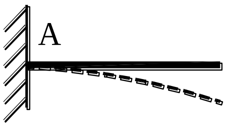
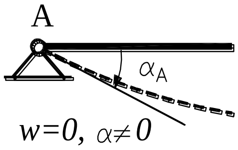
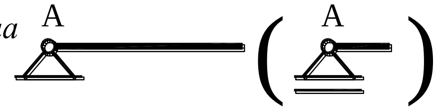
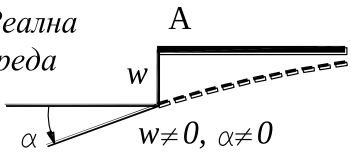
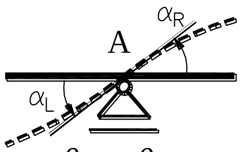
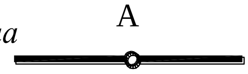
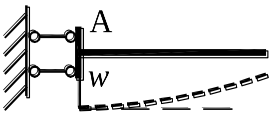
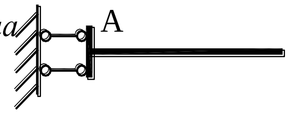
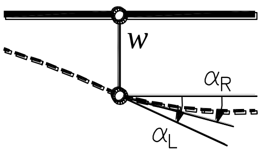
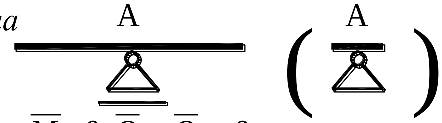
Фиктивното натоварване се прилага върху *фиктивна греда*. Тя е като *дадената реална греда*, но нейното подпиране е съобразено с граничните условия в *действителната греда*.

Например: Когато в реалната греда имаме запъване, в което *преместването и завъртането* са равни на нула, то трябва във фиктивната греда да имаме *фиктивен момент и фиктивна напречна сила* равни на нула. Това може да се реализира в свободен край на гредата.

Най-общо може да се запише:

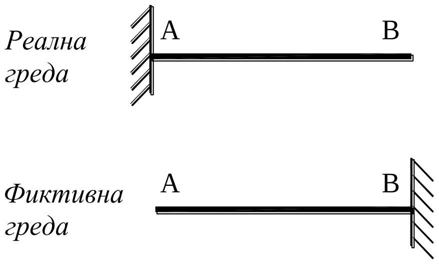
$w = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{M} = 0$ или $w \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{M} \neq 0$

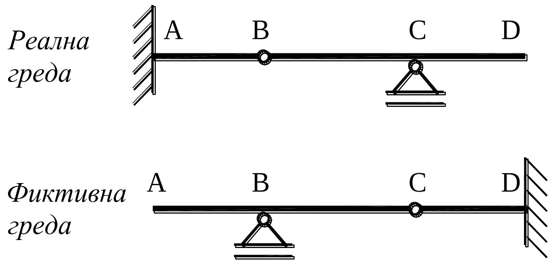
$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V} = 0$ или $\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{V} \neq 0$

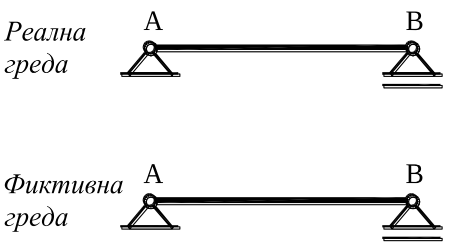
Реална греда  $w=0,\ \alpha=0$ *Фиктивна греда*  $\overline{M}=0,\ \overline{Q}=0$	*Реална греда*  $w=0,\ \alpha\neq 0$ *Фиктивна греда*  $\overline{M}=0,\ \overline{Q}\neq 0$
Реална греда  $w\neq 0,\ \alpha\neq 0$ *Фиктивна греда*  $\overline{M}\neq 0,\ \overline{Q}\neq 0$	*Реална греда*  $w=0,\ \alpha\neq 0$ *Фиктивна греда*  $\overline{M}=0,\ \overline{Q}\neq 0$
Реална греда  $w\neq 0,\ \alpha=0$ *Фиктивна греда*  $\overline{M}\neq 0,\ \overline{Q}=0$	*Реална греда*  $w\neq 0,\ \alpha_L\neq\alpha_R\neq 0$ *Фиктивна греда*  $\overline{M}\neq 0,\ \overline{Q}_L\neq\overline{Q}_R\neq 0$

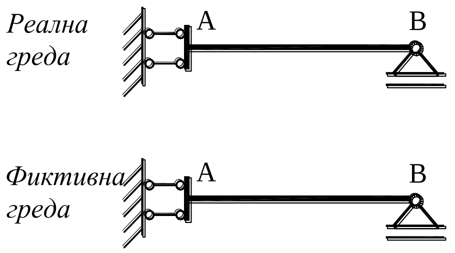
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

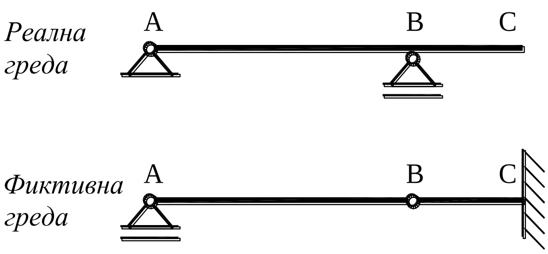
Някои примери:

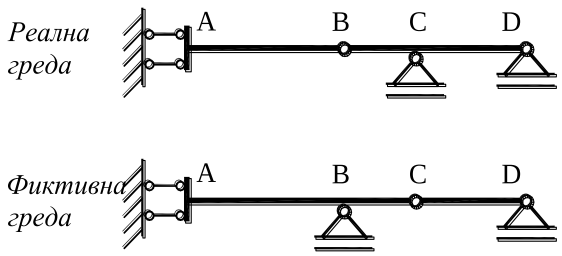








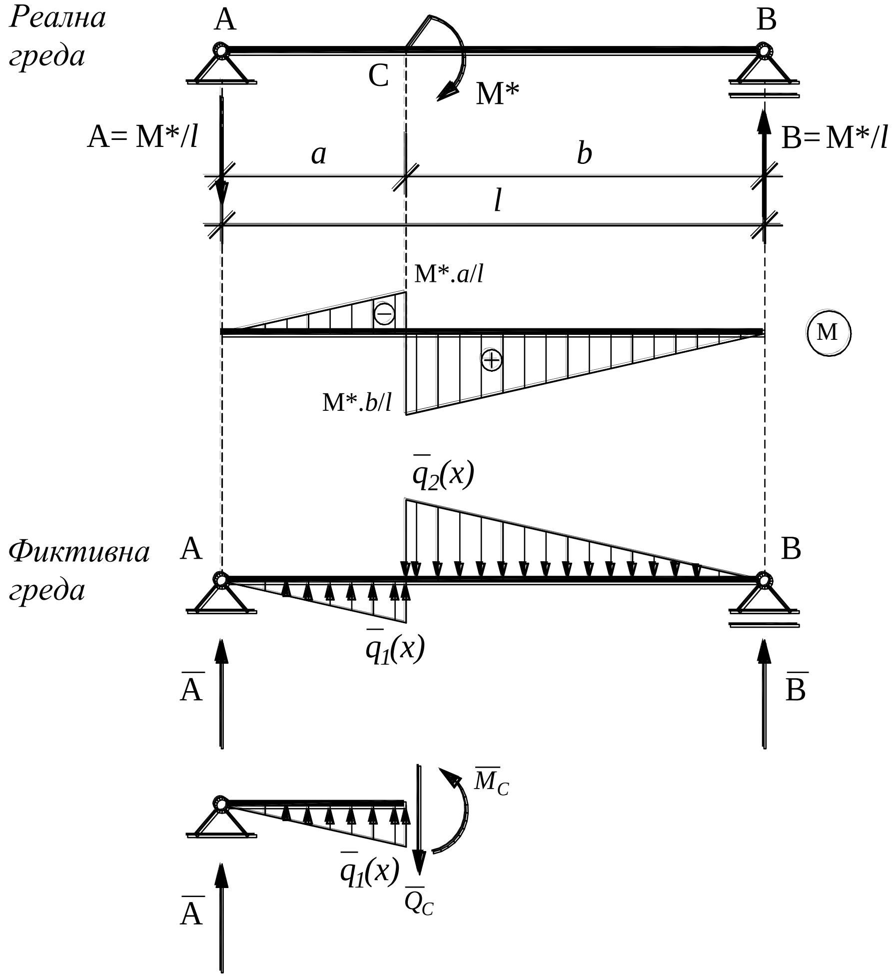




На всяка реална греда съответства фиктивна, която ако бъде разгледана като реална, ще има за фиктивна съответната реална греда. Реалната и фиктивната греди са *взаимно спрегнати*.

Някои правила:

1. С аналогията на Мор обикновено определяме преместванията и завъртанията само на отделни точки от оста на гредата.
2. Реалната и фиктивната греди са статически определими. За статически неопределими греди аналогията на Мор не се прилага.
3. Аналогията на Мор може да се прилага само на греди с праволинейна ос.
4. Дименсиите на фиктивните величини са:
   - фиктивно натоварване $\overline{q}(x)$ - [сила.дължина]
   - фиктивна напречна сила $\overline{V}(x)$ - [сила.дължина^2]
   - фиктивен огъващ момент $\overline{M}(x)$ - [сила.дължина^3]



Стъпки при прилагане на аналогията на Мор.

1. Определяме диаграмата на огъващия момент $M(x)$.
2. Изчертаваме *фиктивната греда* и я натоварваме с *фиктивния товар* $\overline{q}(x) = M(x)$.
    - Ако огъващият момент $M(x)$ е положителен, то *фиктивното натоварване* $\overline{q}(x)$ е с посока надолу.
    - Ако огъващият момент $M(x)$ е отрицателен, то *фиктивното натоварване* $\overline{q}(x)$ е с посока нагоре.
3. Определяме фиктивните опорни реакции $\overline{A}, \ \overline{B}$.
4. Изрязваме гредата през точката, в която търсим преместването и завъртането. С метода на сечението определяме *фиктивните огъващ момент* $\overline{M}(x)$ и *фиктивна напречна сила* $\overline{V}(x)$.
    - $EIw_C = \overline{M}_C(x)$
    - $EI\alpha_C = \overline{V}_C(x)$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Ако искаме да изчертаем диаграмите на преместванията и завъртанията, може да определим фиктивните момент и напречна сила с метода на сечението в няколко точки, да ги нанесем мащабно и свържем с плавна крива.

Ако гредата е с различна коравина, то въвеждаме I_0 - основен инерционен момент. Тогава фиктивното натоварване за всеки участък на фиктивната греда ще се определи по:

$$\bar{q}(x) = M_{yi}(x)\frac{I_0}{I_{yi}}.$$

Определените с метода на сечението фиктивен огъващ момент $\overline{M}(x)$ и фиктивна напречна сила $\overline{V}(x)$ ще бъдат равни съответно на:

- $EI_0 w_C = \overline{M}_C(x)$
- $EI_0 \alpha_C = \overline{V}_C(x)$

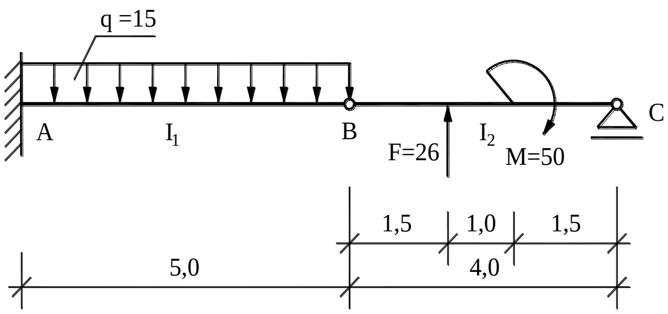
Курсова задача № 9:
Еластична линия на права греда

За показаната стоманена греда се иска:

1) да се построят диаграмите на разрезните усилия;

2) да се определят с аналогията на Мор вертикалното преместване в сечение В и завъртането в сечение С. Дадени са модулът на Юнг $E = 2.10^4 kN/cm^2$; $I_1 = 15{,}5.10^3 cm^4$ и $\frac{I_1}{I_2} = 1{,}5$;

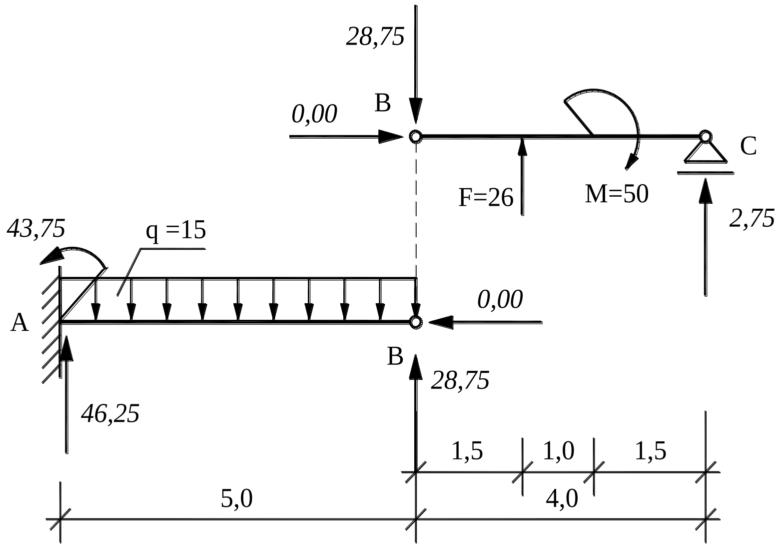
3) да се запишат кинематичните гранични условия за краищата на участъците.



1) Построяване диаграмите на разрезните усилия.

1.1 Определяне на опорните реакции.

(Зададената греда представлява герберова греда. След разделянето й, определяме опорните реакции и ставните сили на греда BC.)



$1.\sum M_B = 0 \rightarrow ....C = 2,75kN(\uparrow)$

$2.\sum M_C = 0 \rightarrow ....B_V = 28,75kN(\downarrow)$ (запишете пълните уравнения)

$3.\sum H = 0 \quad \rightarrow \quad B_H = 0kN$

Проверка: $\sum V \overset{?}{=} 0 \rightarrow 2,75 + 26 - 28,75 = 0$

(Натоварваме греда AB със ставните сили в точка B, въведени в обратна посока на получените в греда BC и определяме опорните реакции в запъването A.)

$1.\sum H = 0 \rightarrow ....A_H = 0kN$

$2.\sum V = 0 \rightarrow ....A_V = 46,25kN(\uparrow)$ (запишете пълните уравнения)

$3.\sum M_A = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 43,75kN.m$

Проверка: $\sum M_B \overset{?}{=} 0 \rightarrow 43,75 - 46,25.5 + 15.5.2,5 \overset{?}{=} 0$

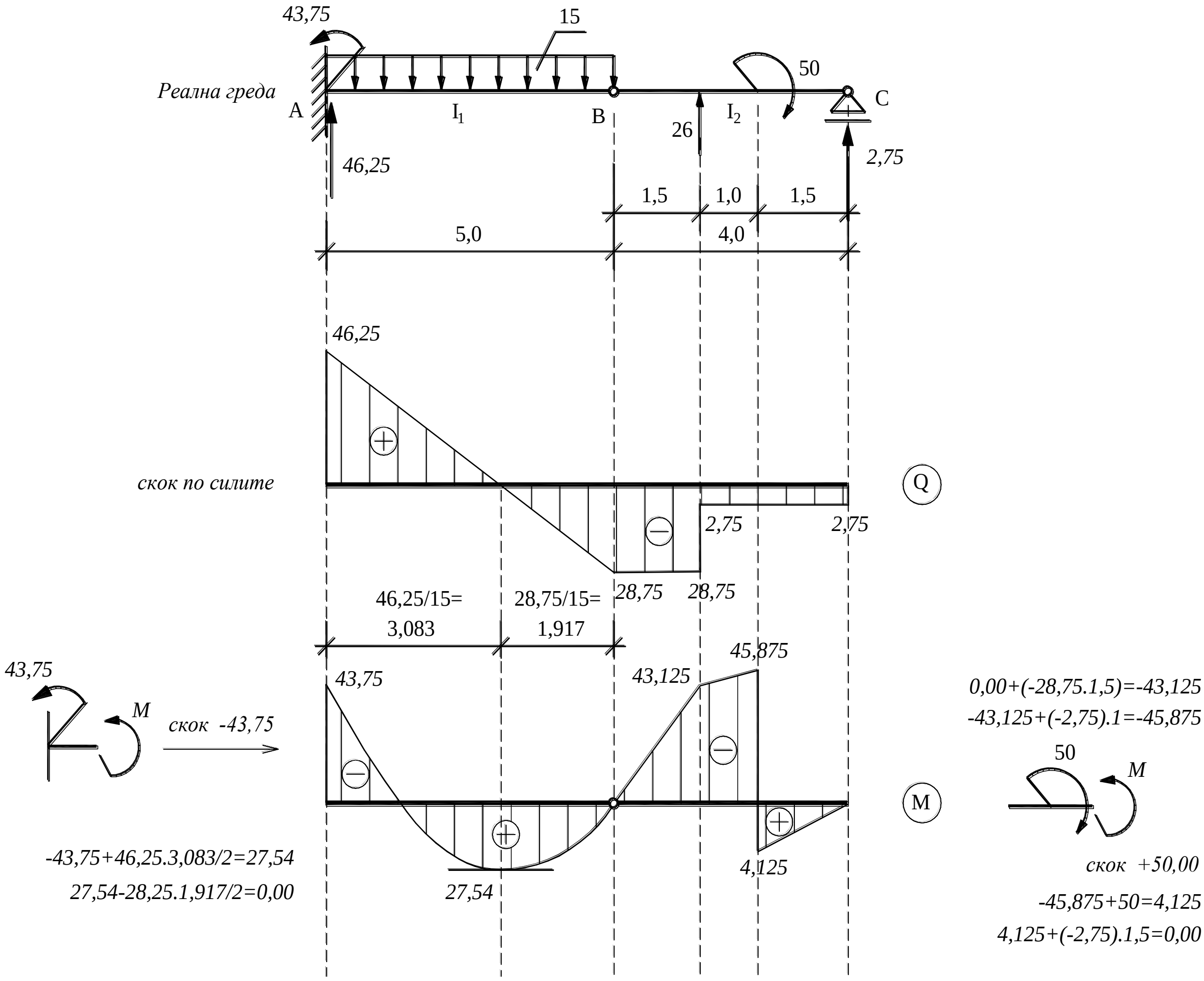
$$231,25 - 231,25 = 0$$

1.2 Изчертаване диаграмите на разрезните усилия.

(Използвано е бързото строене на диаграмите и са подсказани извършените изчисления в страни от диаграмите.

За Q диаграмата е използвано движението по силите с тяхната посока и големина.

M диаграмата се изчислява на база на площната проверка $M_2 - M_1 = A_Q$, от където следва: $M_2 = A_Q + M_1$. Под концентрирания момент имаме скок с големина равна на неговата големина. Посоката на скока се определя от условието за съвпадение на въртенето на външния момент с посоката на въртене на разрезния момент за ляво сечение.)



2) Определяне с аналогията на Мор на вертикалното преместване в сечение B и завъртането в сечение C.

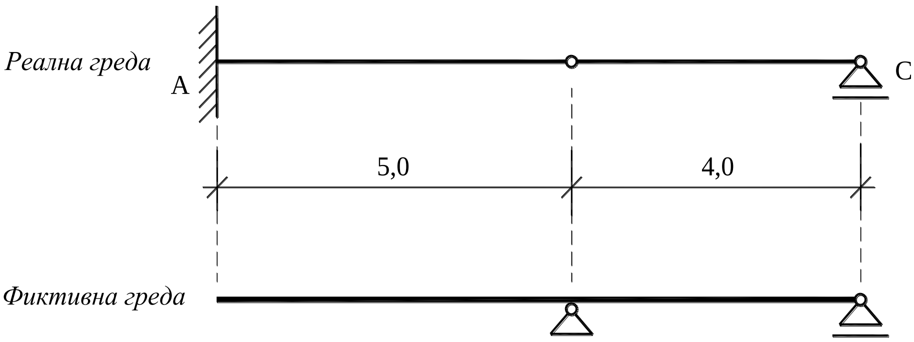
2.1. Изчертаваме фиктивната греда.

(Използваме таблицата показана по-горе.

На запъване в реалната греда, съответства свободен край във фиктивната греда.

При вътрешна става въвеждаме ставна опора под гредата (подвижна или неподвижна, в зависимост от условието фиктивната греда да бъде статически определима.)

Подвижната ставна опора се запазва. (Тя може да бъде заменена с неподвижна ставна опора, ако се наложи, за да се гарантира, че фиктивната греда ще е статически определима.))



2.2. Натоварване на фиктивната греда.

(Натоварваме фиктивната греда с моментовата диаграма, обърната огледално спрямо реперната линия на гредата. Стойностите на фиктивните товари се изчисляват от:

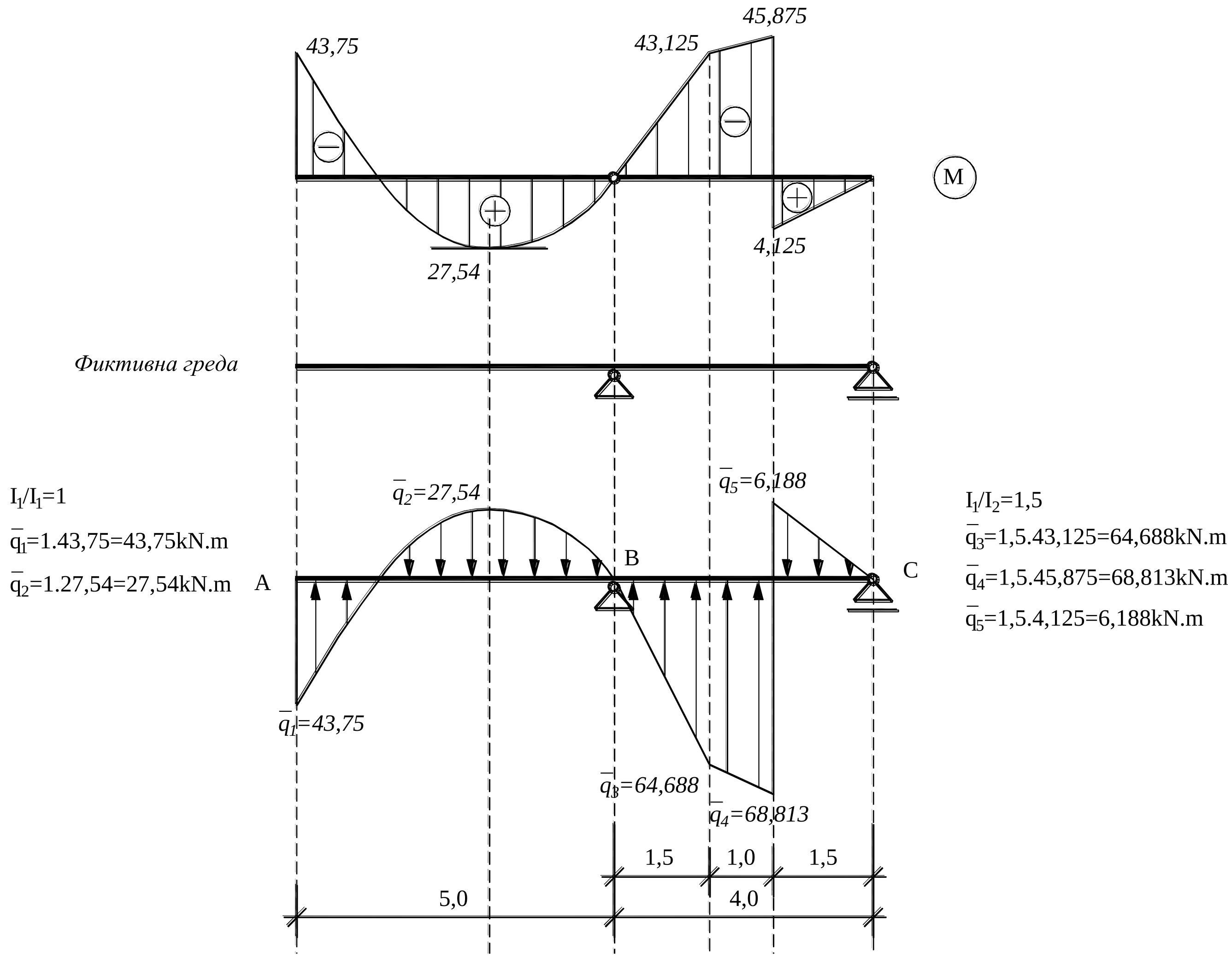
$$\bar{q}(x) = M_{yi}(x)\frac{I_0}{I_{yi}}.$$

Тъй като гредата е с различна коравина, то въвеждаме I_0 - основен инерционен момент (тук I_1). Тогава фиктивното натоварване за всеки участък на фиктивната греда ще се определи по:

$$\bar{q}(x) = M_{yi}(x)\frac{I_1}{I_{yi}}.$$

$M_{yi}(x)$ - огъващият момент в даден участък (сечение)

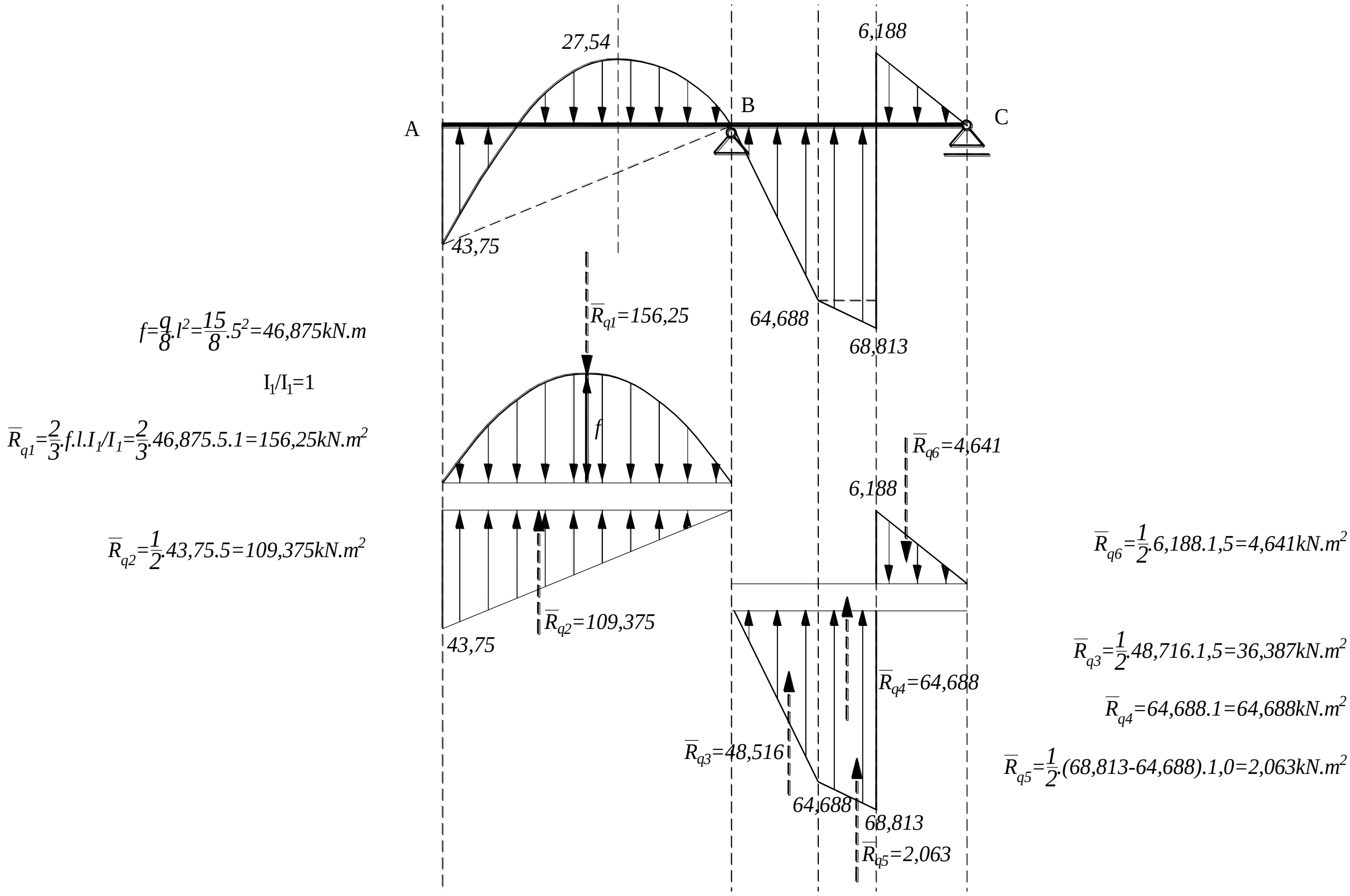
I_{yi} - инерционният момент в даден участък)



2.3. Определяне на фиктивните равнодействащи на натоварването.

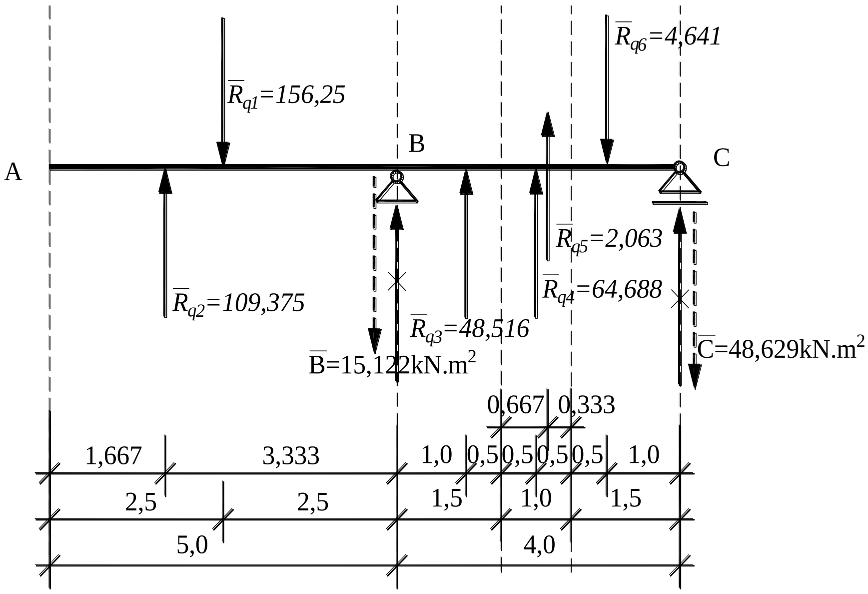
(В участък *AB* разделяме натоварването на линеен разпределен товар със стойност 43,75 и парабола със стрелката $f = \frac{ql^2}{8}$. Равнодействащата на натоварване разпределено по парабола е: $\overline{R}_q = \frac{2}{3} f.l$. Ако имаме различни инерционни моменти в гредата ще стане $\overline{R}_q = \frac{2}{3} f.l.\frac{I_1}{I_{yi}}$.)

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



2.4. Определяне на фиктивните опорни реакции.

(Натоварваме фиктивната греда с фиктивните равнодействащи и определяме фиктивните опорни реакции.)



$$1.\sum M_B = 0 \rightarrow ....\overline{C} = -48,629kN\left(\downarrow\right)$$

$$2.\sum M_C = 0 \rightarrow ....\overline{B}_V = -15,122kN\left(\downarrow\right)$$ (запишете пълните уравнения)

$$3.\sum H = 0 \quad \rightarrow \quad B_H = 0kN$$

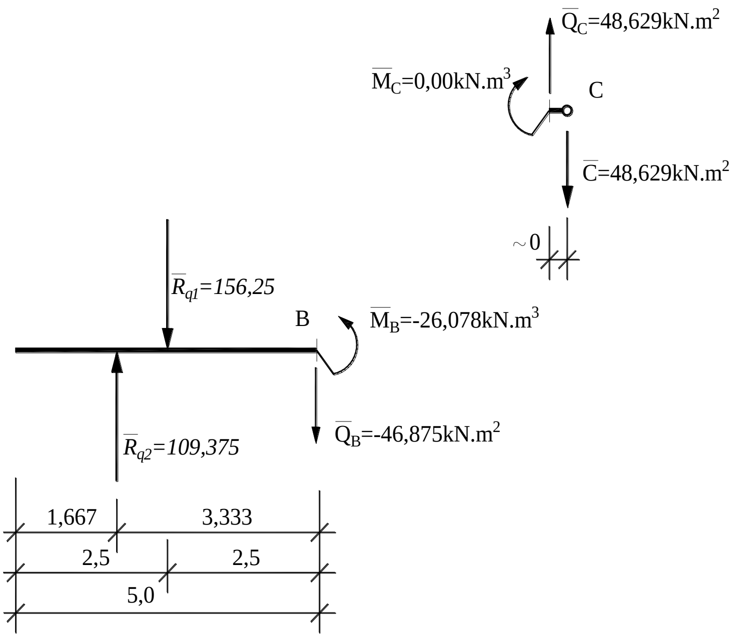
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Проверка: $\sum V \overset{?}{=} 0 \rightarrow .... = 0$

2.5. Определяне на вертикалното преместване в сечение В и завъртането в сечение С.

(Изрязваме гредата през точката, в която търсим преместването и завъртането. С метода на сечението определяме *фиктивните огъващ момент* $\overline{M}(x)$ и *фиктивна напречна сила* $\overline{V}(x)$.)

- $EI_1 w_B = \overline{M}_B(x)$ $\qquad EI_1 w_C = \overline{M}_C(x)$
- $EI_1 \alpha_B = \overline{Q}_B(x)$ $\qquad EI_1 \alpha_C = \overline{Q}_C(x)$



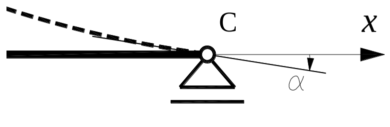
$$\overline{M}_B(x) = -26,078 kN.m^3.10^6 = -26,078.10^6 kN.cm^3$$

$$w_B = \frac{\overline{M}_B(x)}{EI_1} = \frac{-26,078.10^6}{2.10^4.15,5.10^3} = -0,0841cm$$ - преместване по $-z$ за ляво сечение

$$\overline{Q}_C(x) = 48,629 kN.m^2.10^4 = 48,629.10^4 kN.cm^2$$

$$\alpha_c = \frac{\overline{Q}_C(x)}{EI_1} = \frac{48,629.10^4}{2.10^4.15,5.10^3} = 0,0015687 rad$$

$\alpha_c = 0,0015687 rad.\dfrac{180}{\pi} = 0,08988^\circ$ - оста x се завърта по часовниковата стрелка към тангентата в сечение C.



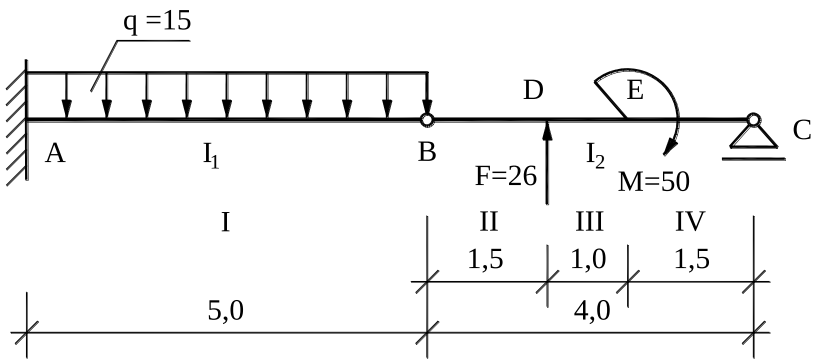
3) Да се запишат кинематичните гранични условия за краищата на участъците.

(В опора A, поради запъването, еластичната линия не се премества и не се завърта.

В ставата B преместването от ляво е равно на преместването от дясно. Тангентите на двете греди обаче са различни и следователно $\alpha_B^L \neq \alpha_B^R$ не може да се използва като гранично условие в решението.

В областта на гредата при границите на участъци имаме не само обща точка, но и обща тангента (под силата и момента).

В подвижната ставна опора C няма преместване във вертикална посока.)



$$w_A = 0 \qquad \alpha_A = 0 \qquad w_B^L = w_B^R \qquad w_D^L = w_D^R \qquad \alpha_D^L = \alpha_D^R \qquad w_E^L = w_E^R \qquad \alpha_E^L = \alpha_E^R \qquad w_C = 0$$

Следователно кинематичните гранични условия за краищата на участъците са:

$$w_I\left(x=0\right)=0 \qquad \alpha_I\left(x=0\right)=0$$

$$w_I\left(x=5\right)=w_{II}\left(x=0\right)$$

$$w_{IV}\left(x=1{,}5\right)=0$$

$$w_{II}\left(x=1{,}5\right)=w_{III}\left(x=0\right) \qquad w_{III}\left(x=1\right)=w_{IV}\left(x=0\right)$$

$$\alpha_{II}\left(x=1{,}5\right)=\alpha_{III}\left(x=0\right) \qquad \alpha_{III}\left(x=1\right)=\alpha_{IV}\left(x=0\right)$$

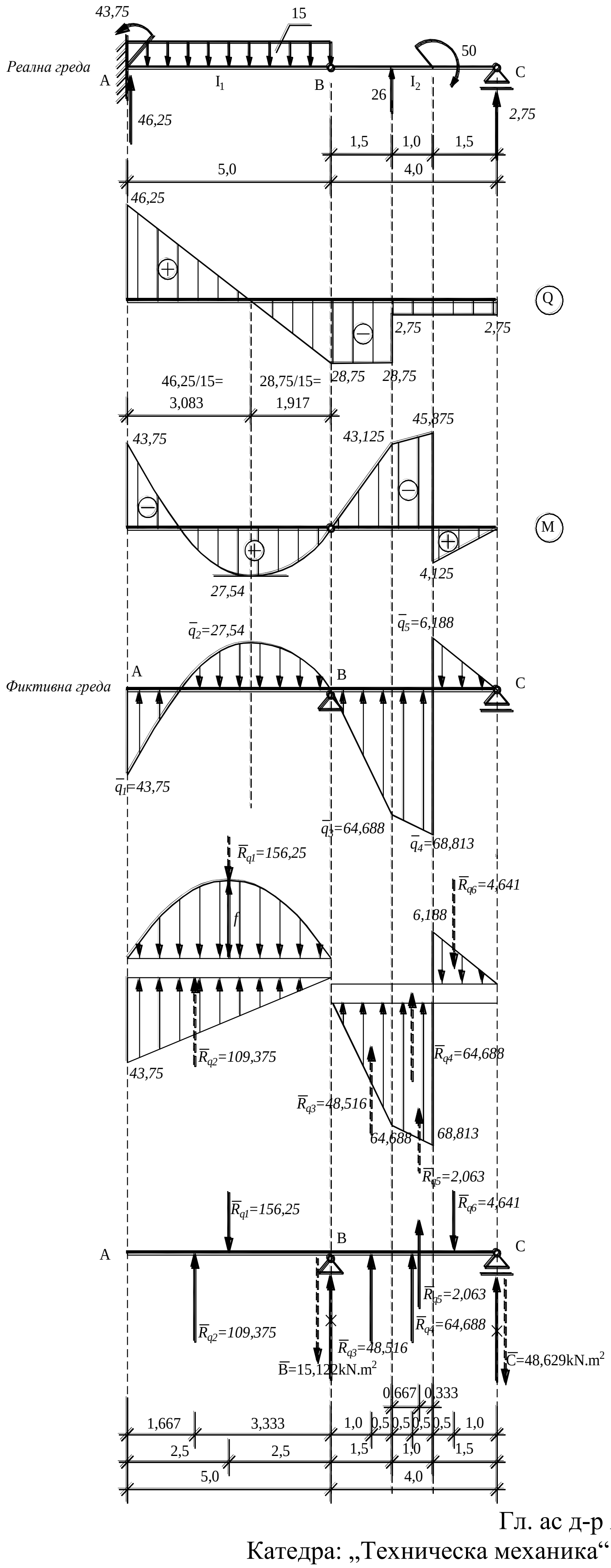
Коментари:

1. Всички обяснения в скоби са за разясняване на решението. Те не се преписват в курсовата задачата, а просто се следват.
2. Всички чертежи са вмъкнати в съответните точки. При оформянето на курсовата работа, всички чертежи се изчертават на една страница. Погледнете как би

изглеждала тя за решената задача. (Ако не можете да ги съберете, тогава ги пренесете на втора страница с логична предхождаща схема.)

3. В отделните точки в показаното решение запишете изчисленията за съответните елементи на задачата ($\overline{q}, \overline{R}q, \overline{B}, \overline{C}, \overline{M}, \overline{Q}$).

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София