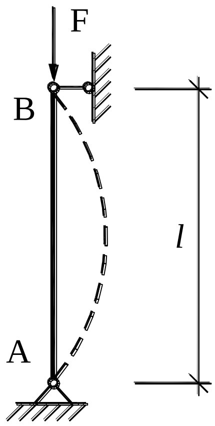
# Устойчивост на центрично натиснати пръти

## I. Основни понятия.

Разглежда се центрично натиснат прът с праволинейна ос. Предполага се, че материалът е еднороден, а деформациите са само еластични. При нарастването на силата прътът преминава през различни състояния на равновесие:




1. Устойчиво равновесие.

Ако малки отклонения от равновесното положение на пръта предизвикват малки изменения в напрегнатото и деформираното му състояние и при премахването на причините за отклонението, той самостоятелно възвръща първоначалната си форма, казваме че равновесието е устойчиво.

2. Безразлично равновесие.

Ако прътът запазва изкривената си форма при премахване на причините за отклонението, то равновесието е безразлично.

3. Неустойчиво равновесие.

Неустойчиво равновесие имаме когато малко отклонение от равновесното положение води до значителни изменения в напрегнатото и деформираното състояние на пръта.

## II. Критична сила.

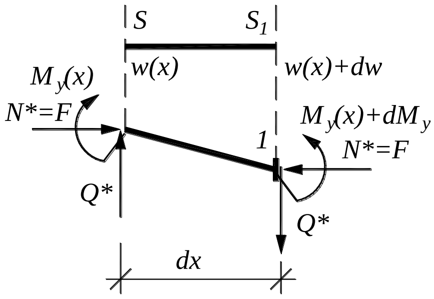
Критичната сила бележим с $F_{cr}\left(F_{кр.}\right)$. Това е силата, която предизвиква безразлично равновесие в пръта. Допустимата сила на натоварване в пръта бележим с $F_{adm}$. Отношението на критичната сила към допустимата е коефициентът на сигурност - $\nu$.

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}}$$

Коефициентът на сигурност приема стойности около 2.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Критичната сила се определя за двустранно ставно подпрян прът с дължина $l$ и коравина на огъване $EI_y$. Записват се условията за равновесие на диференциален участък с дължина $dx$.




$$\left| \begin{array}{l} 1.\ \sum X = 0 \\ 2.\ \sum Y = 0 \\ 3.\ \sum M_1 = 0 \end{array} \right.$$

Първите две уравнения са изпълнени. Третото става:

$$M_y\left(x\right) + dM_y - M_y\left(x\right) - Fdw - Q^*dx = 0$$

$$\frac{dM_y}{dx} - F\frac{dw}{dx} - Q^* = 0$$

Отчита се еластичното поведение на материала и се въвежда диференциалното уравнение на еластичната линия:

$$w''\left(x\right) = -\frac{M_y\left(x\right)}{EI_y}$$

Решава се полученото диференциално уравнение:

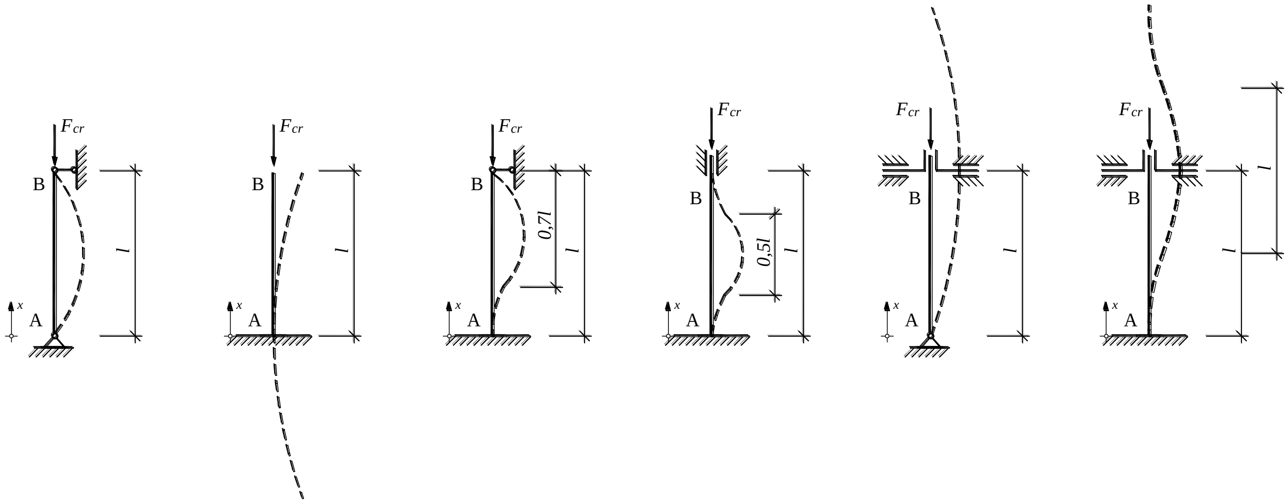
$$w^{IV}\left(x\right) + \frac{F}{EI_y}w''\left(x\right) = 0.$$

След отчитане на граничните условия се достига до критична сила

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

Когато се изследват пръти при други начини на закрепване и съответните им гранични условия достигаме до критичните сили:


Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София




$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_y}{l^2};\quad F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_y}{2^2 l^2};\quad F_{cr}=2\frac{\pi^2 EI_y}{l^2};\quad F_{cr}=4\frac{\pi^2 EI_y}{l^2};\quad F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_y}{2^2 l^2};\quad F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$$

$$\kappa=1\qquad \kappa=2\qquad \kappa=0,7\qquad \kappa=0,5\qquad \kappa=2\qquad \kappa=1$$

Общото във всички формули е $\frac{\pi^2 EI_y}{l^2}$. Така двустранното ставно подпиране е прието за основен Ойлеров случай, а останалите се получават от него чрез въвеждане на така наречената **редуцирана, изкълчвателна или ефективна дължина**

$$l_{red}=\kappa.l\ .$$

Вместо $l_{red}$ се използва също $l_0$. Коефициентът $\kappa$ е редукционен коефициент отчитащ граничните условия. Той се дефинира като: *с каква част от реалната дължина $l$ на пръта се описва една полувълна*. Иначе казано, каква част от дължината $l$ съответства на основния Ойлеров случай.

Ако представим инерционния момент като : $I_y=Ai_y^2$, то:

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI_y}{l_0^2}=\frac{\pi^2 EAi_y^2}{l_0^2}=\frac{\pi^2 EA}{\left(l_0/i_y\right)^2}=\frac{\pi^2 EA}{\lambda^2},$$

където $\lambda=\frac{l_0}{i_y}$ е **стройност** на пръта.

## III. Граница на приложение на формулата на Ойлер.

Направените изводи важат при предпоставката, че напреженията не надвишават $\sigma_{pr}$. Ако за $F_{cr}$ въведем *критично напрежение* $\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}$, то от условието:

$$\sigma_{cr}\le\sigma_{pr}$$

следва: $\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{pr}$. От тук $\lambda^2 \ge \frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}$ и $\lambda_{pr} \ge \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}$

**Граничната стройност** е $\lambda_{pr} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}}$.

- За $\lambda \ge \lambda_{pr}$ прътите са стройни и формулата на Ойлер е в сила.
- За $\lambda < \lambda_{pr}$ възникват пластични деформации, а диференциалното уравнение на еластичната линия $w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y}$ не е валидно, както и изводите построени на негова база.

Граничната стройност $\lambda_{pr}$ зависи изцяло от материала. Например за:

- Ст 3 и Ст 2 - $\lambda_{pr} = 105$
- Иглолистно дърво - $\lambda_{pr} = 100$
- Чугун - $\lambda_{pr} = 80$.

И така, при наличие на зони с пластични деформации $\sigma_{cr} > \sigma_{pr}$ и формулата на Ойлер е неприложима. В този случай $\sigma_{cr}$ се определя по формулата на Тетмайер – Ясински, като за стомана тя е от вида:

$$\sigma_{cr} = 30,4 - 0,112\lambda \text{, а}$$

$$F_{cr} = A.\sigma_{cr} = A(30,4 - 0,112\lambda)$$

- Когато $\lambda < 30 \div 40$ имаме зона на малка стройност и на практика $\sigma_{cr} = \sigma_S$, където $\sigma_S$ е границата на провлачане.

IV. Оразмеряване на устойчивост.

1. **Класически метод.**
   Трябва да е зададен коефициент на сигурност за колоната - $\nu$.
   Алгоритъм:
   1. Приема се $\lambda \ge \lambda_{pr} = 105$.
   2. Напречно сечение.
      Напречното сечение се определя от:

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F}; \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_0^2}$$

Следователно:

$$\nu F \le \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_0^2}.$$

Тогава: $$I_{\min} \ge \frac{\nu F l_0^2}{\pi^2 E}.$$

3. Избор на сечение.
   3.1. Зададено напречно сечение.
   Трябва да се определи параметърът на сечението, чрез който са зададени отношенията на страните му.
   Нека този параметър е примерно $a$.
   Определеният $I_2 = f\left(a\right) \ge I_{\min}$.
   $\rightarrow a = ..... \rightarrow I_{2действително};\, A_{действително} \rightarrow i_{\min} = \sqrt{\dfrac{I_{2действително}}{A_{действително}}}$
   3.2. Напречно сечение от валцувани профили.
   От таблиците се избира профил с $I_2$ най-близък до изчисления $I_{\min}$. За този профил се отчитат $\rightarrow I_{2действително};\, A_{действително} \rightarrow i_{\min}$.
4. Реална стройност за подбраното напречно сечение.

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

5. Проверка.
   - Ако реалната стройност се окаже действително $\lambda \ge \lambda_{pr} = 105$, както беше прието в началото на решението – задачата е решена и сечението е оразмерено.
   - Ако обаче действителната стройност $\lambda < \lambda_{pr} = 105$, тогава формулата на Ойлер е неприложима и следва продължение на решението с приложение на формулите на Тетмайер – Ясински в точка 6.

6. Напречно сечение.
   Напречното сечение се определя от:

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F};\; F_{cr} = A.\sigma_{cr}$$

   Следователно:

$$\nu F \le A(a - b\lambda).$$

   Тогава: $$A \ge \frac{\nu F}{a - \lambda b}.$$

7. Избор на сечение.
   7.1. Зададено напречно сечение.
   Нека параметърът на сечението, чрез който са зададени отношенията на страните му е $a$.
   Определеното лице $A = f\left(a\right) \ge A_{изчислено}$.

$$\rightarrow a = ..... \rightarrow I_{2действително}; A_{действително} \rightarrow i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{2действително}}{A_{действително}}}$$

7.2. Напречно сечение от валцувани профили.

От таблиците се избира профил с $A$ най-близък до изчисленото $A$. За този профил се отчитат $\rightarrow I_{2действително}; A_{действително} \rightarrow i_{\min}$.

8. Реална стройност за подбраното напречно сечение.

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

9. Проверка.
   - Отново се прави сравнение на реалната стройност и граничната $\lambda_{pr} = 105$. При $\lambda < \lambda_{pr} = 105$ задачата е решена и сечението е оразмерено.

## 2. $\varphi$ - метод.

Трябва да е зададено допустимото напрежение на натиск - $\sigma_{adm,c}$. Този метод се нарича още метод за намаляване на допустимото напрежение на натиск. Коефициентът $\varphi$ е функция на стройността $\lambda$ и зависи от материала. Чрез него се определя допустимото напрежение на изкълчване $\sigma_{adm,st}$

Алгоритъм:

1. Приема се $\varphi = 0,5 \div 0,6$ и тогава:

$$\sigma_{adm,st} = \varphi.\sigma_{adm,c}.$$

$\varphi$ - методът е приложим както за стройни, така и за нестройни пръти. За разлика от класическия метод където се работи с *критични* сили и критични напрежения, по $\varphi$ - метода тези характеристики са *допустими*. Другата съществена разлика между двата метода е, че докато при класическия метод коефициентът на сигурност $\nu$ се задава в условието, то при $\varphi$ - метода коефициентът на сигурност е въведен чрез допустимото напрежение $\sigma_{adm,c}$.

2. Напречно сечение.

Оразмеряването по $\varphi$ - метода е аналогично на оразмеряването на чист натиск, но с допустимо напрежение на изкълчване $\sigma_{adm,st}$, определено по $\sigma_{adm,st} = \varphi.\sigma_{adm,c}$. Следователно напречното сечение ще се определи от условието:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} \leq \varphi.\sigma_{adm,c} = \sigma_{adm,st}.$$

Тогава $A \geq \dfrac{F}{\sigma_{adm,st}}$.

3. Избор на сечение.

1.1. Зададено напречно сечение.

Нека параметърът на сечението, чрез който са зададени отношенията на страните му е $a$.

Определеното лице $A = f\left(a\right) \geq A_{изчислено}$.

$\rightarrow a = ..... \rightarrow I_{2действително}; A_{действително} \rightarrow i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{2действително}}{A_{действително}}}$

1.2. Напречно сечение от валцувани профили.

От таблиците се избира профил с $A$ най-близко и по-голямо до изчисленото $A$. За този профил се отчитат $\rightarrow I_{2действително}; A_{действително} \rightarrow i_{\min}$.

4. Реална стройност за подбраното напречно сечение е:

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}}$$

5. Проверка.

За изчислената стройност се отчита коефициентът $\varphi$ от таблица. Изчислява се

$$F_{adm} = \varphi.A.\sigma_{adm}$$

и се сравнява със зададената сила $F$.

- Ако получената $F_{adm} \in \left[0,95F; 1,1F\right]$, задачата е решена.
- Ако получената $F_{adm} \notin \left[0,95F; 1,1F\right]$, се прави нова итерация. Сега се използва стойност за $\varphi$, която е средно аритметично между стартовата и крайната стойност на $\varphi$ от последната итерация.

V. Основни задачи.

1. Задача за определяне на допустимото натоварване.
   Дадено: материала, начина на закрепване, напречното сечение $A$.
   Търсим: $F_{adm} = ?$.
2. Задача за оразмеряване.
   Дадено: материала, условия на закрепване и допустимата сила $F_{adm}$.
   Търсим: Напречното сечение $A$.
3. Задача за проверка на сигурността.
   Дадено: материала, условия на закрепване, напречното сечение $A$ и допустимата сила $F_{adm}$.
   Търсим: Коефициента на сигурност $\nu$.

## *Задачи за определяне на допустимото натоварване.*

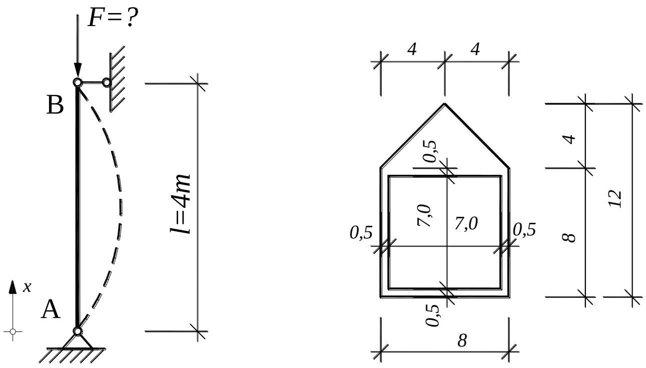
**I. Задача 1**

За показаната стоманена колона се иска:

1. Да се определи допустимата натискова сила F;

2. Да се определи коефициентът на сигурност при загуба на устойчивост.

$E = 2.10^4 kN/cm^2$



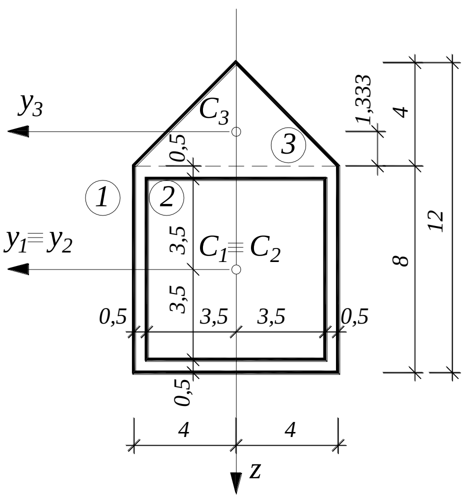

1. Определяне на допустимата натискова сила F.

Необходимо е първо да се определят геометричните характеристики на сечението:

1. Инерционни моменти:

Едната главна централна инерционна ос е вертикалната ос на симетрия. Втората ос е перпендикулярна на нея и минава през центъра на тежестта.

Център на тежестта:




$\boxed{1} \rightarrow \quad A_1 = 8.8 = 64cm^2 \rightarrow \quad C_1(0;0);$

$\boxed{-}\boxed{2} \rightarrow \quad A_2 = 7.7 = 49cm^2 \rightarrow \quad C_2(0;0)$; (отворите се изваждат!)

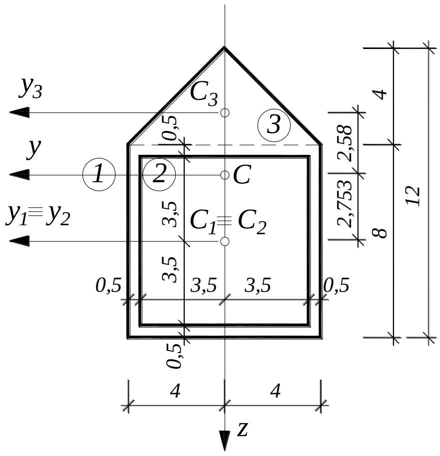
$\boxed{3} \rightarrow \quad A_3 = \dfrac{8.4}{2} = 16cm^2 \rightarrow \quad C_3(0;5,333).$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

$$\sum_{i=1}^{3} A_i = A_1 - A_2 + A_3 = 64 - 49 + 16 = 31cm^2$$

Тогава центърът на тежестта на фигурата ще бъде с координата по $z$ :

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i.z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{64.0 - 49.0 + 16.5,333}{31} = 2,753cm\,;$$




$$I_y = \left(\frac{8^4}{12} + 64.2,753^2\right) - \left(\frac{7^4}{12} + 49.2,753^2\right) + \left(\frac{8.4^3}{36} + 16.2,58^2\right) = 357,66cm^4$$

$$I_z = \left(\frac{8^4}{12}\right) - \left(\frac{7^4}{12}\right) + \left(\frac{4.8^3}{48}\right) = 183,92cm^4$$

Следователно $I_{\min} = I_z = 183,92cm^4$. Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{183,92}{31}} = 2,436cm$$

2. Допустима натискова сила F:

Подпирането е двустранно ставно подпиране, което е основен Ойлеров случай с $\kappa = 1$.

$$l_0 = \kappa.l = 1.4 = 4m = 400cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{400}{2,436} = 164,20$$

$$\rightarrow \varphi = 0,278 - \frac{0,278 - 0,275}{1}0,20 = 0,2774$$

$$F_{adm} = \varphi.A.\sigma_{adm} = 0,2774.31.16 = 137,59kN$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

3. Критична сила.

Стройността на колоната е $\lambda = 164,20 > \lambda_{pr} = 105$, следователно колоната е стройна и формулата на Ойлер е валидна.

Тогава:

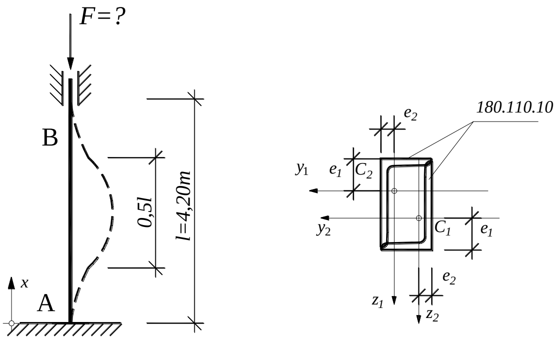
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 .2.10^4 .183,92}{400^2} = 226,90kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{226,90}{137,59} = 1,65$$

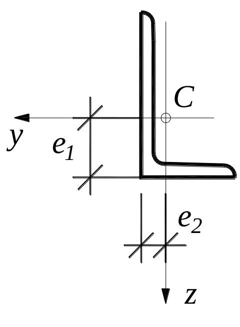
## II. Задача 2

За показаната стоманена колона се иска:

1. Да се определи допустимата натискова сила F;
2. Да се определи коефициентът на сигурност при загуба на устойчивост.



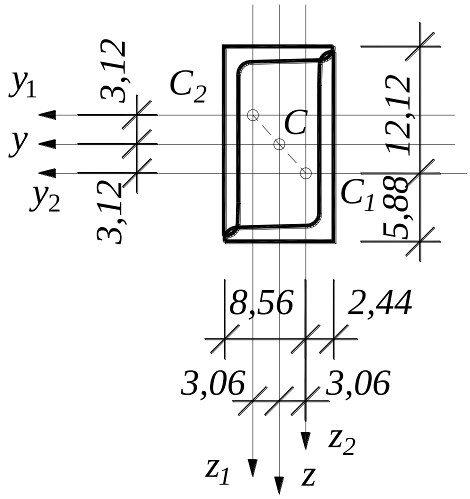

Отчитаме от таблица за $L\,180.110.10$:




$$A = 28,30cm^2;$$
$$I_y = 952cm^4; \quad I_z = 276cm^4; \quad I_{yz} = -295cm^4;$$
$$e_1 = 5,88cm; \quad e_2 = 2,44cm$$

Напречното сечение на колоната е от два еднакви валцувани профила. Следователно центърът на тежестта лежи по средата между $C_1$ и $C_2$

1. Инерционни моменти:




$$I_y = \left(952 + 28,3.3,12^2\right).2 = 2454,97cm^4$$

$$I_z = \left(276 + 28,3.3,06^2\right).2 = 1081,98cm^4$$

$$I_{yz} = \left[+295 + 28,3.\left(3,06\right).\left(-3,12\right)\right] + \left[+295 + 28,3.\left(-3,06\right).\left(3,12\right)\right] = 49,63cm^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{\min} = I_2 = \frac{2454,97 + 1081,98}{2} - \sqrt{\left(\frac{2454,97 - 1081,98}{2}\right)^2 + 49,63^2} =$$

$$= 1768,475 - 688,287 = 1080,188cm^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1080,188}{2.28,3}} = 4,369cm$$

2. Допустима натискова сила F:

Подпирането е двустранно запъване, което се различава от основния Ойлеров случай с $\kappa = 0,5$.

$$l_0 = \kappa.l = 0,5.4,20 = 2,10m = 210cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{210}{4,369} = 48,07$$

$$\rightarrow \varphi = 0,896 - \frac{0,896 - 0,893}{1}0,07 = 0,89579$$

$$F_{adm} = \varphi.A.\sigma_{adm} = 0,89579.\left(28,3.2\right).16 = 811,23kN$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

3. Критична сила.

Колоната е нестройна като $\lambda = 48,07 < \lambda_{pr} = 105$ и формулата на Ойлер е неприложима. Определя се $\sigma_{cr}$ по Тетмайер-Ясински.

$$\sigma_{cr} = 30,4 - 0,112\lambda = 30,4 - 0,112.48,07 = 25,016 kN/cm^2$$

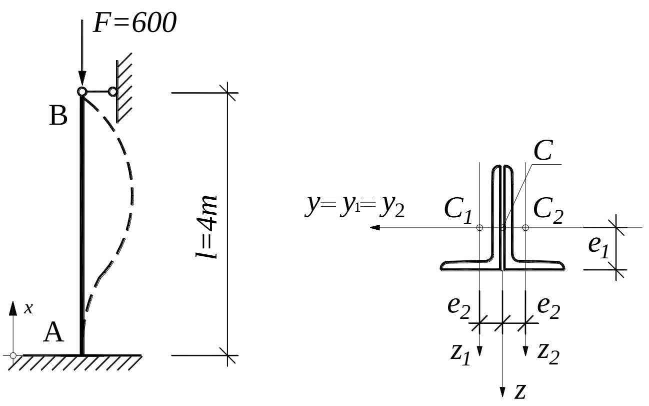
$$F_{cr} = A.\sigma_{cr} = 2.28,3.25,016 = 1415,91 kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1415,91}{811,23} = 1,75$$

## *Задачи за оразмеряване*

### III. Задача 3

Да се оразмери стоманена колона с показаното напречно сечение. Определете коефициента на сигурност $\nu$, с който ще работи колоната.




Подпирането, запъване в единия край и ставно подпиране в другия е с $\kappa = 0,7$.

Решението започва с приемане на стойност за $\varphi_1$ около $0,5 \div 0,6$. При получаване на резултат много различен от желания се прави ново решение. След няколко итерации се достига до стойности близки до зададената $F_{adm} = 600 kN$.

*I итерация:*

Прието: $\varphi_1 = 0,60$; $\rightarrow \sigma_{adm,st} = \varphi_1 \sigma_{adm,c} = 0,60.16 = 9,6 kN/cm^2$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{600}{9,6} = 62,5 cm^2, \qquad \rightarrow A_{профил} = \frac{1}{2} A = \frac{62,5}{2} = 31,25 cm^2.$$

Прието: L 160.100.14 с $\rightarrow A_{профил} = 34,7cm^2$, $I_y = 897cm^4; I_z = 272cm^4$ и $e_1 = 5,4cm; e_2 = 2,43cm$.

За колоната:

$$A' = 2A_{профил} = 2.34,7 = 69,4cm^2$$

$$I_y{}' = 2.I_y = 2.897 = 1794cm^4$$

$$I_z{}' = 2\left(I_z + A.e_2^2\right) = 2\left(272 + 34,7.2,43^2\right) = 953,80cm^4$$

Следователно $I_{\min} = I_z{}' = 953,80cm^4$. Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A'}} = \sqrt{\frac{953,80}{69,4}} = 3,707cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} \qquad \rightarrow l_0 = \kappa.l = 0,7.4 = 2,8m = 280cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{280}{3,707} = 75,5 \qquad \rightarrow \varphi_1{}' = 0,78 - \frac{0,78 - 0,774}{1}0,5 = 0,777$$

$$F_{adm} = \varphi_1{}'.A'.\sigma_{adm} = 0,777.69,4.16 = 862,78 > F_{adm} = 600kN$$

*II итерация:*

Прието: $\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \varphi_1{}'\right) = \frac{1}{2}\left(0,60 + 0,777\right) = 0,6885$;

$$\sigma_{adm,st} = \varphi_2\sigma_{adm,c} = 0,6885.16 = 11,016kN/cm^2$$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{600}{11,016} = 54,47cm^2, \qquad \rightarrow A_{профил} = \frac{1}{2}A = \frac{54,47}{2} = 27,24cm^2.$$

Прието: L 160.100.12 с $\rightarrow A_{профил} = 30cm^2$, $I_y = 784cm^4; I_z = 239cm^4$ и $e_1 = 5,32cm; e_2 = 2,36cm$.

За колоната:

$$A' = 2A_{профил} = 2.30,0 = 60,0cm^2$$

$$I_z{}' = 2\left(I_z + A.e_2^2\right) = 2\left(239 + 30.2,36^2\right) = 812,176cm^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A'}} = \sqrt{\frac{812,176}{60}} = 3,679cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{280}{3,679} = 76,11 \qquad \rightarrow \varphi_2' = 0,774 - \frac{0,774 - 0,768}{1} 0,11 = 0,773$$

$$F_{adm} = \varphi_2'.A'.\sigma_{adm} = 0,773.60.16 = 742,08 > F_{adm} = 600kN$$

*III итерация:*

Прието: $\varphi_3 = \frac{1}{2}\left(\varphi_2 + \varphi_2'\right) = \frac{1}{2}\left(0,6885 + 0,773\right) = 0,731$;

$$\sigma_{adm,st} = \varphi_3 \sigma_{adm,c} = 0,731.16 = 11,696kN / cm^2$$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{600}{11,696} = 51,30cm^2, \qquad \rightarrow A_{профил} = \frac{1}{2} A = \frac{51,30}{2} = 25,65cm^2.$$

Прието: L 160.100.10 с $\rightarrow A_{профил} = 25,3cm^2$, $I_y = 667cm^4; I_z = 204cm^4$ и $e_1 = 5,23cm; e_2 = 2,28cm$.

За колоната:

$$A' = 2A_{профил} = 2.25,3 = 50,6cm^2$$

$$I_z' = 2\left(I_z + A.e_2^2\right) = 2\left(204 + 25,3.2,28^2\right) = 671,04cm^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A'}} = \sqrt{\frac{671,04}{50,6}} = 3,642cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{280}{3,642} = 76,88 \qquad \rightarrow \varphi_3' = 0,774 - \frac{0,774 - 0,768}{1} 0,88 = 0,769$$

$$F_{adm} = \varphi_3'.A'.\sigma_{adm} = 0,769.50,6.16 = 622,58 > F_{adm} = 600kN$$

Допустимо отклонение за силата $F_{adm}$ действаща върху колоната трябва да е в границите $0,95F_{adm} \leq F_{adm} \leq 1,1F_{adm}$. Следователно за $F_{adm} = 600kN$ допустимите граници на отклонение на получената сила са:

$$0,95.600 \leq 600 \leq 1,1.600$$
$$570 \leq 600 \leq 660$$

Получената $F_{adm} = 622,58 \quad \in \left[570; 660\right]$.

Остава стоманена колона от два профила L 160.100.10 .

Стройността на колоната е $\lambda = 76,88 < \lambda_{pr} = 105$, следователно колоната е нестройна и формулата на Ойлер е неприложима. Определя се $\sigma_{cr}$ по Тетмайер-Ясински.

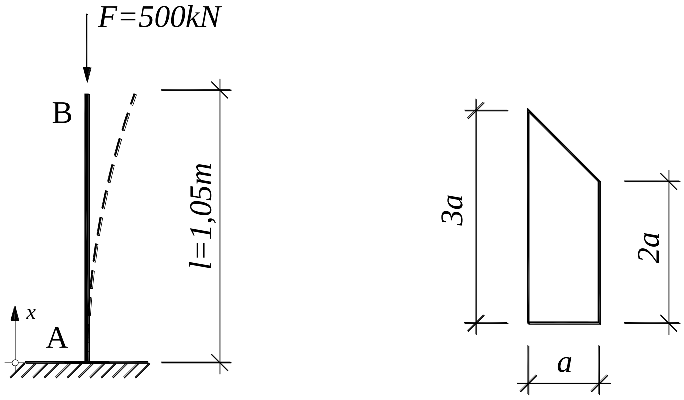
$$\sigma_{cr} = 30,4 - 0,112\lambda = 30,4 - 0,112.76,88 = 21,789kN / cm^2$$

$$F_{cr} = A.\sigma_{cr} = 50,6.21,789 = 1102,52kN / cm^2$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1102,52}{622,58} = 1,77$$

## IV. Задача 4

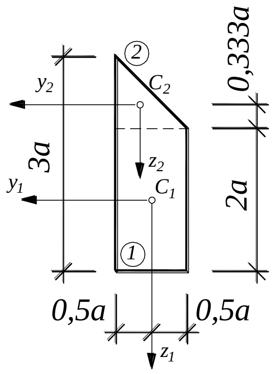
Да се оразмери стоманена колона с показаното напречно сечение. Определете коефициента на сигурност $\nu$, с който ще работи колоната.




Подпирането, запъване в единия край е с $\kappa = 2$.

Решението започва от определянето на геометричните характеристики на сечението.

1. Център на тежестта:




$$\boxed{1} \rightarrow \qquad A_1 = 2a.1a = 2a^2 \left[cm^2\right] \rightarrow \qquad C_1\left(0;0\right);$$

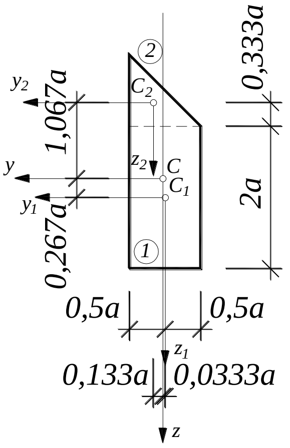
$$\boxed{2} \rightarrow \qquad A_3 = \frac{1a.1a}{2} = 0,5a^2 \left[cm^2\right] \rightarrow \qquad C_3\left(0,167a;-1,333a\right).$$

$$\sum_{i=1}^{2} A_i = A_1 + A_2 = 2a^2 + 0,5a^2 = 2,5a^2 \left[cm^2\right]$$

Тогава центърът на тежестта на фигурата ще бъде с координати:

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i.z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{2a^2.0 + 0,5a^2.0,167a}{2,5a^2} = 0,0333a\left[cm\right];$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i.z_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i} = \frac{2a^2.0 + 0,5a^2.\left(-1,333a\right)}{2,5a^2} = -0,267a\left[cm\right]$$




2. Инерционни моменти.

$$I_y = \left[\frac{1a.\left(2a\right)^3}{12} + 2a^2.\left(0,267a\right)^2\right] + \left[\frac{1a.\left(1a\right)^3}{36} + 0,5a^2.\left(1,067a\right)^2\right] = 1,40627a^4\left[cm^4\right]$$

$$I_z = \left[\frac{2a.\left(1a\right)^3}{12} + 2a^2.\left(0,0333a\right)^2\right] + \left[\frac{1a.\left(1a\right)^3}{36} + 0,5a^2.\left(0,133a\right)^2\right] = 0,20555a^4\left[cm^4\right]$$

$$I_{yz} = \left[0 + 2a^2.\left(-0,0333a\right)\left(0,267a\right)\right] + \left[-\frac{\left(1a\right)^2.\left(1a\right)^2}{72} + 0,5a^2.\left(0,133a\right)\left(-1,067a\right)\right] =$$

$$= -0,102643a^4\left[cm^4\right]$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{\min} = I_2 = \left[\frac{1,40627 + 0,20555}{2} - \sqrt{\left(\frac{1,40627 - 0,20555}{2}\right)^2 + 0,102643^2}\right]a^4 =$$

$$= 0,80591a^4 - 0,609071a^4 = 0,196839a^4\left[cm^4\right]$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,196839a^4}{2,5a^2}} = 0,280599a\left[cm\right]$$

3. Оразмеряване.

*I итерация:*

Прието: $\varphi_1 = 0,60$; $\quad \rightarrow \sigma_{adm,st} = \varphi_1 \sigma_{adm,c} = 0,60.16 = 9,6 kN/cm^2$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{500}{9,6} = 52,09 cm^2, \qquad \rightarrow A_{сечение} = 2,5a^2 \left[cm^2\right].$$

$$2,5a^2 > 52,09$$
$$a > 4,56 cm$$

Прието: $a = 4,6 cm$, откъдето се определя:

$$A_{сечение} = 2,5.4,6^2 = 52,9 cm^2,$$

$$I_{\min} = 0,196839a^4 = 0,196839.4,6^4 = 88,134\ cm^4$$

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,196839a^4}{2,5a^2}} = 0,280599a = 0,280599.4,6 = 1,2908 cm$$

$$l_0 = \kappa.l = 2.1,05 = 2,1 m = 210 cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{210}{1,2908} = 162,69 \qquad \rightarrow \varphi_1' = 0,284 - \frac{0,284 - 0,281}{1} 0,68 = 0,28196$$

$$F_{adm} = \varphi_1'.A'.\sigma_{adm} = 0,28196.52,9.16 = 238,65 < F_{adm} = 500 kN$$

*II итерация:*

Прието: $\varphi_2 = \left(\dfrac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}\right) = \dfrac{(0,60 + 0,28196)}{2} = 0,44098$;

$$\rightarrow \sigma_{adm,st} = \varphi_2 \sigma_{adm,c} = 0,44098.16 = 7,05568 kN/cm^2$$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{500}{7,05568} = 70,86 cm^2, \qquad \rightarrow A_{сечение} = 2,5a^2 \left[cm^2\right].$$

$$2,5a^2 > 70,86$$
$$a > 5,32 cm$$

Прието: $a = 5,4 cm$, откъдето се определя:

$$A_{сечение} = 2,5.5,4^2 = 72,9 cm^2,$$

$$I_{\min} = 0,196839a^4 = 0,196839.5,4^4 = 167,37\ cm^4$$

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,196839a^4}{2,5a^2}} = 0,280599a = 0,280599.5,4 = 1,5152cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{210}{1,5152} = 138,6 \qquad \rightarrow \varphi_2' = 0,368 - \frac{0,368-0,364}{1}0,6 = 0,3656$$

$$F_{adm} = \varphi_2'.A.\sigma_{adm} = 0,3656.72,9.16 = 426,44 < F_{adm} = 500kN$$

*III итерация:*

Прието: $\varphi_3 = \left(\frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2}\right) = \frac{(0,44098 + 0,3656)}{2} = 0,40329$;

$$\rightarrow \sigma_{adm,st} = \varphi_3 \sigma_{adm,c} = 0,40329.16 = 6,45264kN/cm^2$$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{500}{6,45264} = 77,49cm^2, \qquad \rightarrow A_{сечение} = 2,5a^2\left[cm^2\right].$$

$$2,5a^2 > 77,49$$
$$a > 5,567cm$$

Прието: $a = 5,6cm$, откъдето се определя:

$$A_{сечение} = 2,5.5,6^2 = 78,4cm^2,$$

$$I_{\min} = 0,196839a^4 = 0,196839.5,6^4 = 193,58\,cm^4$$

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,196839a^4}{2,5a^2}} = 0,280599a = 0,280599.5,6 = 1,57135cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{210}{1,57135} = 133,64 \qquad \rightarrow \varphi_3' = 0,388 - \frac{0,388-0,384}{1}0,64 = 0,38544$$

$$F_{adm} = \varphi_3'.A.\sigma_{adm} = 0,38544.78,4.16 = 483,50 < F_{adm} = 500kN$$

*IV итерация:*

Прието: $\varphi_4 = \left(\frac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2}\right) = \frac{(0,40329 + 0,38544)}{2} = 0,394365$;

$$\rightarrow \sigma_{adm,st} = \varphi_4 \sigma_{adm,c} = 0,394365.16 = 6,30984kN/cm^2$$

$$A \geq \frac{F_{adm}}{\sigma_{adm,st}} = \frac{500}{6,30984} = 79,24cm^2, \qquad \rightarrow A_{сечение} = 2,5a^2\left[cm^2\right].$$

$$2,5a^2 > 79,24$$
$$a > 5,63cm$$

Прието: $a = 5,7cm$, откъдето се определя:

$$A_{сечение} = 2,5.5,7^2 = 81,225cm^2,$$

$$I_{\min} = 0,196839a^4 = 0,196839.5,7^4 = 207,78\,cm^4$$

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,196839a^4}{2,5a^2}} = 0,280599a = 0,280599.5,7 = 1,5994cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{210}{1,5994} = 131,30 \qquad \rightarrow \varphi_4' = 0,396 - \frac{0,396 - 0,392}{1}0,3 = 0,3948$$

$$F_{adm} = \varphi_4'.A.\sigma_{adm} = 0,3948.81,225.16 = 513,08 > F_{adm} = 500kN$$

Допустимо отклонение за силата $F_{adm}$ действаща върху колоната трябва да е в границите $0,95F_{adm} \le F_{adm} \le 1,1F_{adm}$. Следователно за $F_{adm} = 500kN$ допустимите граници на отклонение на получената сила са:

$$0,95.500 \le 500 \le 1,1.500$$
$$475 \le 500 \le 550$$

Получената $F_{adm} = 513,08 \quad \in [475; 550]$.

Остава $a = 5,7cm$.

4. Критична сила.

Стройността на колоната е $\lambda = 131,30 > \lambda_{pr} = 105$, следователно колоната е стройна и формулата на Ойлер е валидна.

Тогава:

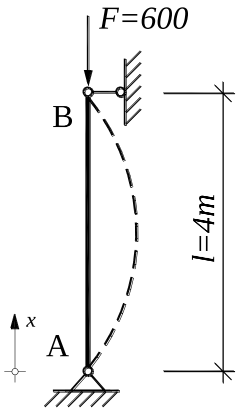
$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2.2.10^4.207,78}{210^2} = 930,03kN$$

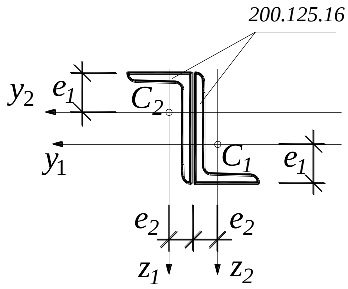
$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{930,03}{513,08} = 1,81$$

## *Задачи за проверка*

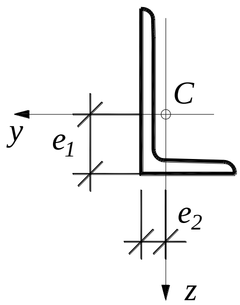
**V. Задача 5**

Да се направи проверка на изкълчване за показаната стоманена колона с допустима сила $F_{adm} = 600kN$. Да се изчисли коефициентът на сигурност.



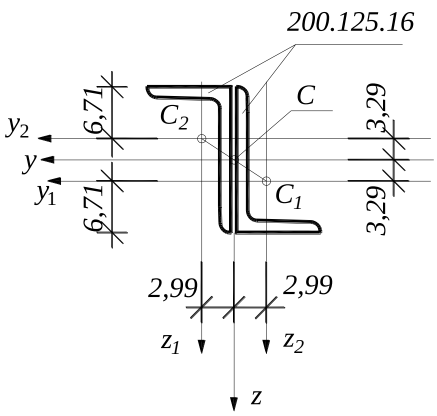

Отчитаме от таблица за $L\ 200.125.16$:




$$A = 49,80cm^2;$$
$$I_y = 2026cm^4; \quad I_z = 617cm^4; \quad I_{yz} = -643cm^4;$$
$$e_1 = 6,71cm; \quad e_2 = 2,99cm$$

Напречното сечение на колоната е от два еднакви валцувани профила. Следователно центърът на тежестта лежи по средата между $C_1$ и $C_2$

1. Инерционни моменти:



$$I_y = \left(2026 + 49,8.3,29^2\right).2 = 5130,08cm^4$$
$$I_z = \left(617 + 49,8.2,99^2\right).2 = 2124,43cm^4$$
$$I_{yz} = \left[-643 + 49,8.\left(-2,99\right).\left(3,29\right)\right] + \left[-643 + 49,8.\left(2,99\right).\left(-3,29\right)\right] = -2265,78cm^4$$

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$$

$$I_{\min} = I_2 = \frac{5130,08 + 2124,43}{2} - \sqrt{\left(\frac{5130,08 - 2124,43}{2}\right)^2 + 2265,78^2} =$$
$$= 3627,26 - 2718,87 = 908,39cm^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{908,39}{2.49,8}} = 3,02cm$$

2. Допустима натискова сила F:

Подпирането е двустранно ставно, което е основен Ойлеров случай с $\kappa = 1$.

$$l_0 = \kappa.l = 1.4,0 = 4,0m = 400cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{400}{3,02} = 132,45$$

$$\rightarrow \varphi = 0,392 - \frac{0,392 - 0,388}{1}0,45 = 0,3902$$

$$F_{adm} = \varphi.A.\sigma_{adm} = 0,3902.\left(49,8.2\right).16 = 621,82kN$$

Допустимата сила $F_{adm} = 621,82kN > F = 600kN$. Следователно проверката излиза.

3. Критична сила и коефициент на сигурност.

Колоната е стройна като $\lambda = 132,45 > \lambda_{pr} = 105$ и формулата на Ойлер е валидна.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2.2.10^4.908,39}{400^2} = 1120,68kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1120,68}{621,82} = 1,802$$

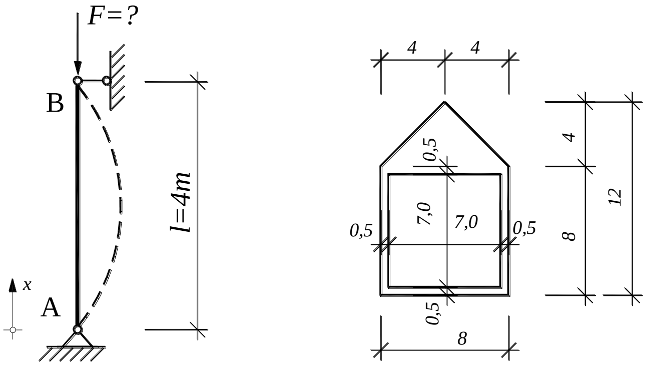
**Класически метод.**

## *Задача за определяне на допустимото натоварване.*

**VI. Задача 6 (Условието на задача 1 решена по класически метод)**

За показаната стоманена колона се иска:

Да се определи допустимата натискова сила F, ако коефициентът на сигурност е $\nu = 2$, $E = 2.10^4 kN/cm^2$




Подпирането е двустранно ставно, което е основен Ойлеров случай с $\kappa = 1$.

1. Инерционни моменти:

   Определени по-горе. (виж Инерционни моменти:)

$I_{\min} = I_z = 183{,}92 cm^4$, а инерционния радиус:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{183{,}92}{31}} = 2{,}436 cm$$

$$l_0 = \kappa . l = 1.4 = 4m = 400 cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{400}{2{,}436} = 164{,}20$$

2. Критична сила.

Стройността на колоната е $\lambda = 164{,}20 > \lambda_{pr} = 105$, следователно колоната е стройна и формулата на Ойлер е валидна.

Тогава:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 .2.10^4 .183{,}92}{400^2} = 226{,}90 kN$$

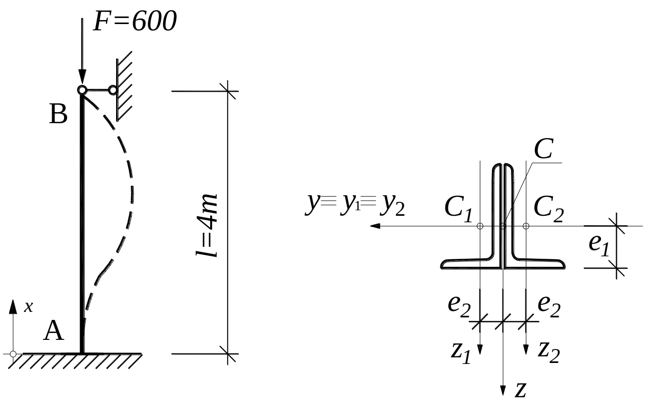
$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{\nu} = \frac{226{,}90}{2} = 113{,}45 kN$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

## *Задача за оразмеряване.*

**VII. Задача 7 (Задача 3 решена по класически метод)**

Да се оразмери стоманена колона с показаното напречно сечение. Коефициентът на сигурност $\nu = 2$.




Подпирането, запъване в единия край и ставно подпиране в другия е с $\kappa = 0,7$.

$\rightarrow l_0 = \kappa . l = 0,7.4 = 2,8m = 280cm$

Първо се приема, че $\lambda \geq \lambda_{pr}$ и колоната е стройна. Валидна е формулата на Ойлер за критичната сила.

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F}; \qquad F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_0^2}$$

Следователно:

$$\nu F \leq \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_0^2}.$$

Тогава:

$$I_{\min} \geq \frac{\nu F l_0^2}{\pi^2 E}.$$

$$I_{\min} \geq \frac{\nu F l_0^2}{\pi^2 E} = \frac{2.600.280^2}{\pi^2 .2.10^4} = 476,61cm^4$$

*I итерация:*

Прието: L 140.90.10 с $\rightarrow A_{профил} = 22,2cm^2$, $I_y = 444cm^4; I_z = 146cm^4$ и $e_1 = 4,58cm; e_2 = 2,12cm$.

$$I_y' = 2.I_y = 2.444 = 888cm^4$$

$$I_z' = 2\left(I_z + A.e_2^2\right) = 2\left(146 + 22,2.2,12^2\right) = 491,55cm^4$$

Следователно $I_{\min} = I_z' = 491,55cm^4$.

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A'}} = \sqrt{\frac{491,55}{2.22,2}} = 3,327cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{280}{3,327} = 84,16$$

Следователно приемането, че $\lambda \geq \lambda_{pr}$ и колоната е стройна не е вярно, а формулата на Ойлер за критичната сила не е валидна. Определя се $\sigma_{cr}$ по Тетмайер-Ясински.

$$\sigma_{cr} = 30,4 - 0,112\lambda = 30,4 - 0,112.84,16 = 20,97kN / cm^2$$

$$F_{cr} = A.\sigma_{cr} = (2.22,2).20,97 = 931,07kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{973,07}{600} = 1,62$$

Полученото $\nu = 1,62$ е по-малко от зададеното $\nu_{зададено} = 2$. Следователно решението не е завършено. Прави се ново решение с увеличаване на размерите на сечението. Решението продължава от нов избор на сечение.

*II итерация:*

Прието: L 160.100.10 с $\rightarrow A_{профил} = 25,3cm^2$, $I_y = 667cm^4; I_z = 204cm^4$ и $e_1 = 5,23cm; e_2 = 2,28cm$.

$$I_y' = 2.I_y = 2.667 = 1334cm^4$$

$$I_z' = 2\left(I_z + A.e_2^2\right) = 2\left(204 + 25,3.2,28^2\right) = 671,04cm^4$$

Следователно $I_{\min} = I_z' = 671,04cm^4$.

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A'}} = \sqrt{\frac{671,04}{2.25,3}} = 3,642cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{280}{3,642} = 76,88$$

Следователно колоната не е стройна, а формулата на Ойлер за критичната сила не е валидна. Определя се $\sigma_{cr}$ по Тетмайер-Ясински.

$$\sigma_{cr} = 30,4 - 0,112\lambda = 30,4 - 0,112.76,88 = 21,79kN / cm^2$$

$$F_{cr} = A.\sigma_{cr} = (2.25,3).21,79 = 1102,57kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1102,57}{600} = 1,84$$

Полученото $\nu = 1,84 < \nu_{зададено} = 2$. Следователно решението не е завършено. Следва ново решение с увеличаване на размерите на сечението.

*III итерация:*

Прието: $L\,160.100.12$ с $\rightarrow A_{профил} = 30,0cm^2$, $I_y = 784cm^4; I_z = 239cm^4$ и $e_1 = 5,32cm; e_2 = 2,36cm$.

$$I_y{}' = 2.I_y = 2.784 = 1568cm^4$$

$$I_z{}' = 2\left(I_z + A.e_2^2\right) = 2\left(239 + 30.2,36^2\right) = 812,176cm^4$$

Следователно $I_{\min} = I_z{}' = 812,176cm^4$.

Тогава:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A'}} = \sqrt{\frac{812,176}{2.30}} = 3,679cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{280}{3,679} = 76,11$$

Следователно колоната не е стройна, а формулата на Ойлер за критичната сила не е валидна. Определя се $\sigma_{cr}$ по Тетмайер-Ясински.

$$\sigma_{cr} = 30,4 - 0,112\lambda = 30,4 - 0,112.76,11 = 21,88kN/cm^2$$

$$F_{cr} = A.\sigma_{cr} = (2.30).21,88 = 1312,54kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1312,54}{600} = 2,18$$

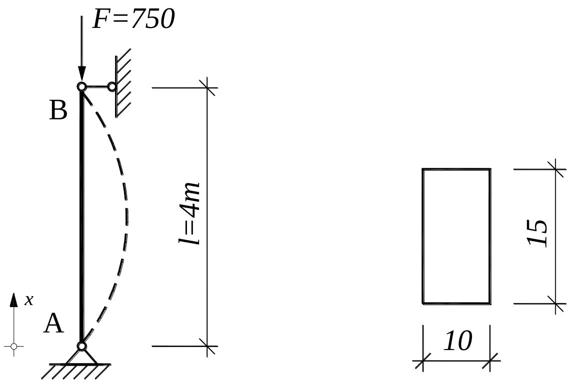
Полученото $\nu = 2,18 > \nu_{зададено} = 2$. Следователно решението е завършено.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

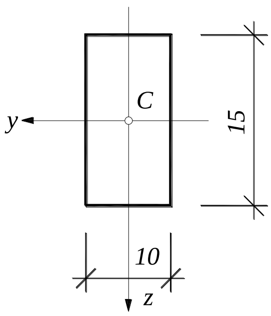
## *Задача за проверка.*

### VIII. Задача 8 (Класически метод)

Да се направи проверка на изкълчване за показаната стоманена колона с допустима сила $F_{adm} = 600kN$ и коефициент на сигурност $\nu = 2$.




1. Инерционни моменти:




$$A = 15.10 = 150cm^2$$

$$I_{\min} = I_z = \frac{15.10^3}{12} = 1250cm^4$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{1250}{150}} = 2,887cm$$

2. Допустима натискова сила F:

Подпирането е двустранно ставно, което е основен Ойлеров случай с $\kappa = 1$.

$$l_0 = \kappa.l = 1.4,0 = 4,0m = 400cm$$

$$\lambda = \frac{l_0}{i_{\min}} = \frac{400}{2,887} = 138,55$$

3. Критична сила.

Колоната е стройна като $\lambda = 138,55 > \lambda_{pr} = 105$ и формулата на Ойлер е валидна.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{l_0^2} = \frac{\pi^2 .2.10^4.1250}{400^2} = 1542,13kN$$

$$\nu = \frac{F_{cr}}{F_{adm}} = \frac{1542,13}{750} = 2,056$$

Изчисленият коефициент на сигурност е $\nu = 2,056 > \nu_{зададено} = 2$. Прътът е подходящ за да поеме зададеното натоварване при зададения коефициент на сигурност.

Коментари:

1. Всички обяснения в скоби са за разясняване на решението. Те не се преписват в курсовата задачата, а просто се следват.
2. Всички чертежи са мащабни. Всички размери използвани в решението да се виждат на чертежите.
3. Всички разстояния използвани като добавки по Щайнер да се нанесат на чертежа.

Желая Ви успех в изготвянето на шеста курсова задача.

При въпроси, моля пишете ми на: doicheva_fhe@abv.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София