

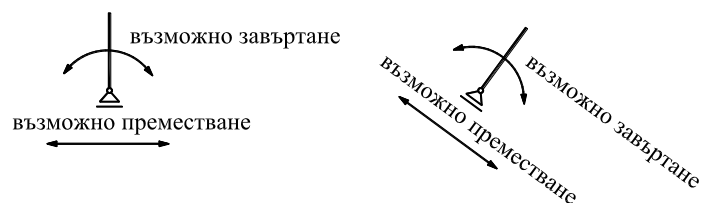
Равновесие на тяло натоварено с пространствена система сили

Едно тяло в пространството има **шест** степени на свобода, които са преместване по трите оси (x, y, z) и ротации по същите три оси. За да бъде гарантирано равновесието на тялото, то трябва да бъде ограничено в своето движение от **шест** опорни реакции, които възникват в съответните опорни устройства.

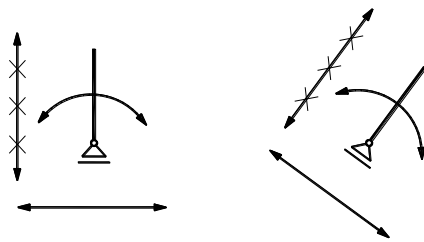
I. Опорни устройства.

В раздел кинематика бяха разгледани възможните движения, които някои опори позволяват на телата.

1. Подвижна опора:



Подвижната опора позволява на тялото да се движи по направление на опорните линии, както и да се завърта. Това което не позволява тази опора на тялото е то да се движи по направление перпендикулярно на опорните линии.



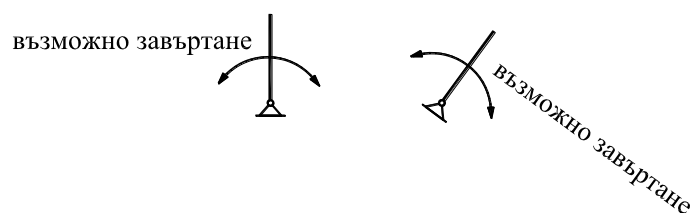
Следователно по това направление ще възникне опорна реакция.



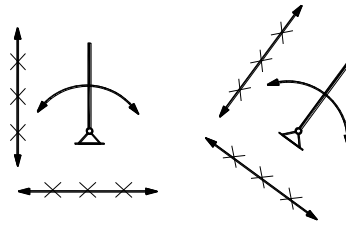
Подвижната опора може да се представи с притовия си аналог.

2. Неподвижна опора:

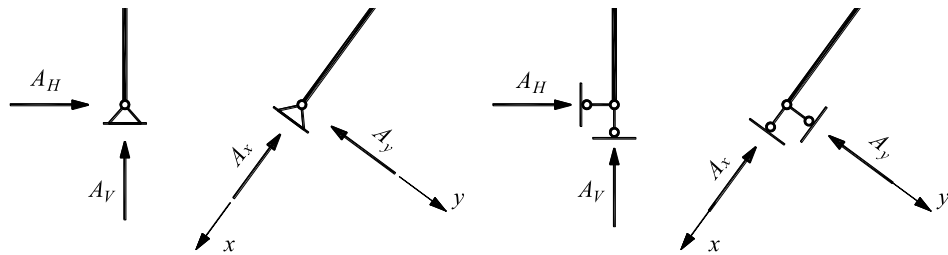
Позволеното движение при неподвижната опора е ротация на тялото около опорното устройство в неговата равнина.



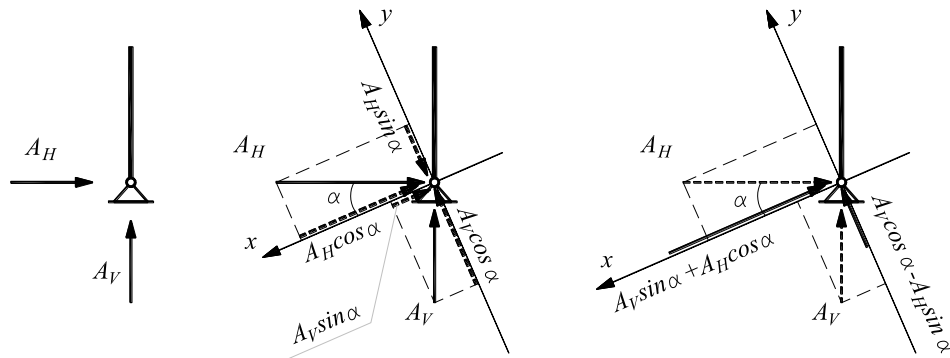
Неподвижната опора не позволява движение в равнината.



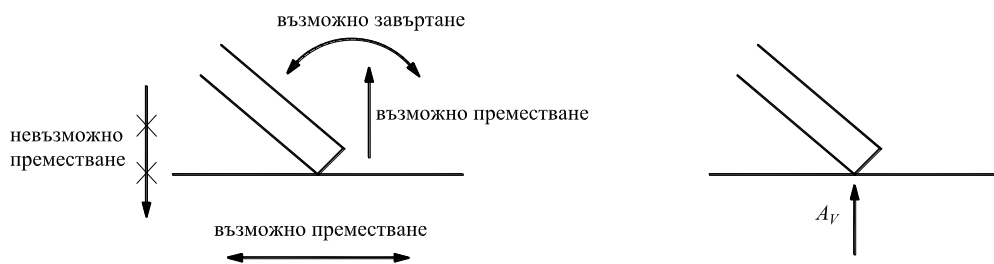
Невъзможността за движение води до възникване на две перпендикулярни опорни реакции.



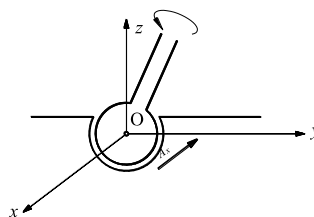
Тези опорни реакции могат да бъдат разлагани по произволни други взаимноперпендикулярни направления и да бъдат подменени с опорни реакции по новите направления:



3. Едностранна връзка:

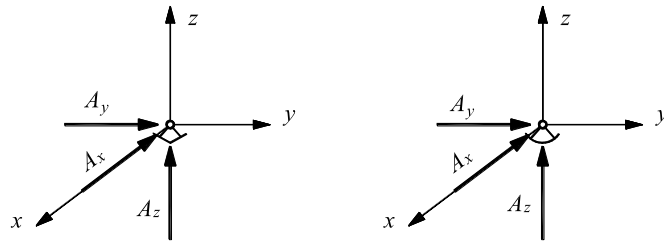


4. Сферична опора:



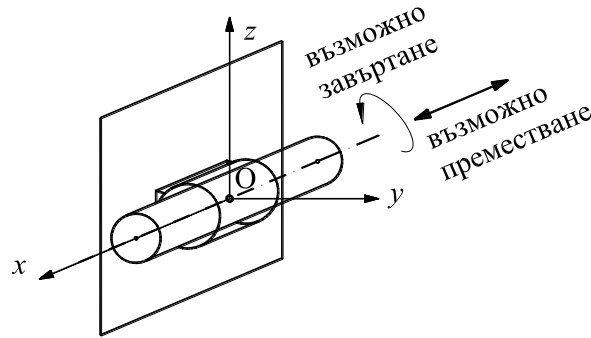
Възможни ротации във всички посоки.

Невъзможни премествания по трите оси. Възникват опорни реакции по трите оси.

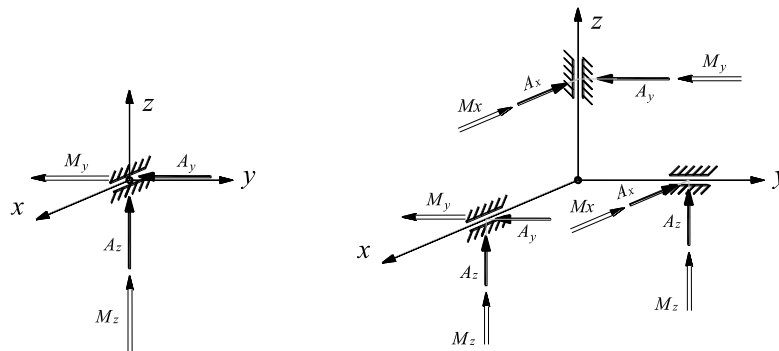


5. Цилиндрична опора:

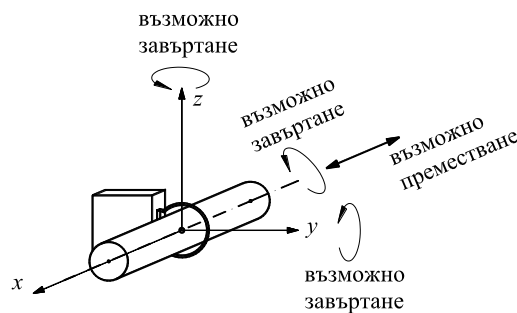
5.1. Дълга цилиндрична опора.



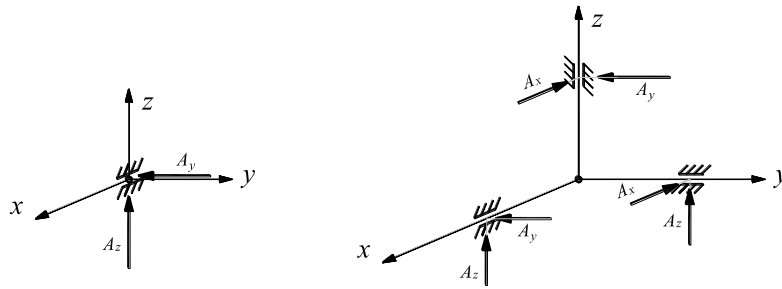
Възможно преместване и завъртане има само по ос x . По другите оси са наложени ограничения на движението и завъртането. Следователно по тях ще възникнат опорни сили и опорни моменти.



5.2. Къса цилиндрична опора.

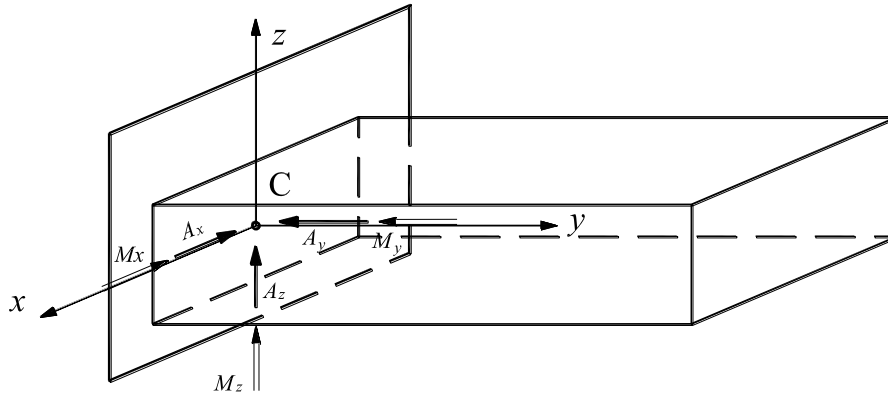


Възможно преместване има само по ос x , докато завъртане има по трите оси. Наложените ограничения са на движение по осите y и z . Следователно по тях ще възникнат опорни сили. (В курсовите задачи всички цилиндрични опори са от този вид.)



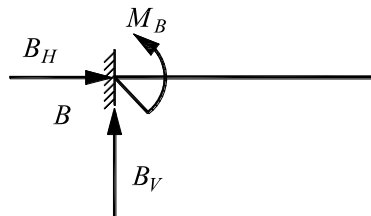
6. Запъване (конзола).

6.1. При пространствено натоварване.



Запъването отнема шестте степени на свобода на тялото. Следователно в него се задават три опорни сили и три опорни момента. Когато тялото е зададено с размери по трите оси, координатната система се въвежда в центъра на тежестта на сечението на запъване.

6.2. При равнинно натоварване.



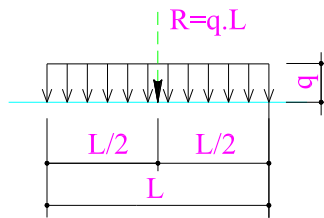
Едно тяло в равнината има три степени на свобода, които са отнети от запъването. Трите свободи са преместване по двете оси в равнината на конзолата и ротация около третата ос, която е перпендикулярна на същата равнина. Следователно в точката на запъване ще се въведат две опорни сили и един опорен момент.

II. Разпределени товари.

Разпределеният товар се задава с интензивност q и дължина на действие $L [m]$ или площ на действие $A [m^2]$. Мерната единица на q е $[kN/m]$ за разпределен товар по линия или q е в $[kN/m^2]$ при площно разпределен товар.

1. Разпределени товари по линия.

1.1. Равномерно разпределен товар (правоъгълен).

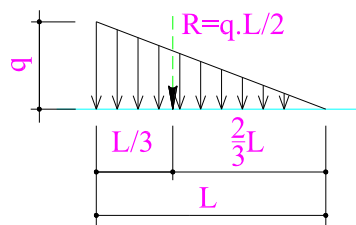


Равномерно разпределеният товар е система от равни по големина и равномерно разпределени успоредни сили. Такава система сили се редуцира до равнодействаща. Тя се разполага в центъра на успоредните сили и има големина равна на интензивността на товара по дължината на действие на товара. Т.е.

$$R_q = q \cdot L$$

и се разполага по средата на правоъгълника (товара).

1.2. Линеен разпределен товар (триъгълен).

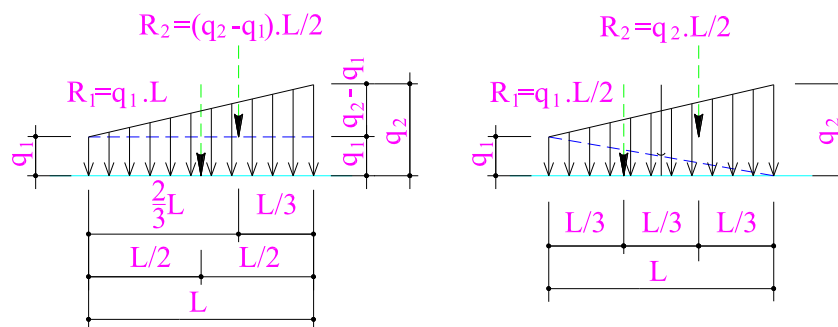


Равнодействащата е

$$R_q = \frac{q \cdot L}{2}$$

Тя се разполага на разстояние $\frac{1}{3}L$ от страната на интензивността на товара.

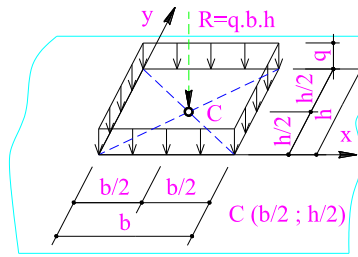
1.3. Линеен разпределен товар (трапецовиден).



Такъв товар се разделя на един правоъгълен и един триъгълен или на два триъгълни товара.

2. Разпределени товари по площ.

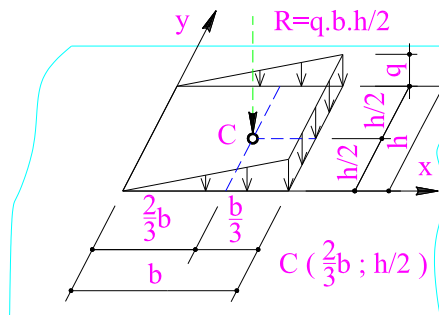
2.1. Равномерно разпределен товар.



Равнодействащата е равна на площта на действие на товара по неговата интензивност. Тя се разполага в центъра на тежестта на товарната призма или след свободното плъзгане на равнодействащата по нейната директрисата тя се прилага в центъра на тежестта на площта на действие на товара.

$$R_q = [b.h]q$$

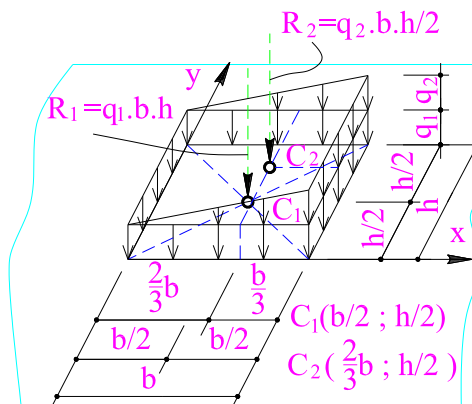
2.2. Площно разпределен товар зададен по линеен закон (триъгълен).



Равнодействащата е равна на половината от произведението на площта на действие на товара по неговата интензивност. Тя се разполага на разстояние $\frac{1}{3}L$ от страната на интензивността на товара, в едната посока и по средата на страната, в другата посока.

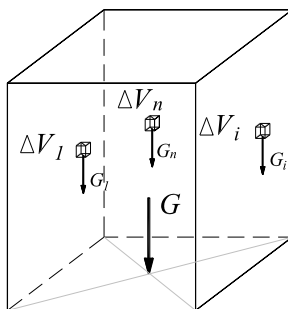
$$R_q = [b.h] \frac{q}{2}$$

2.3. Площно разпределен товар зададен по линеен закон (трапец).



Такъв товар се разделя на две призми. Може да се избира измежду две триъгълни призми или един паралелепипед и една триъгълна призма.

3. Съществуват и обемни разпределени товари.



$$\frac{G_i}{\Delta V_i} = q \text{ [kN / m}^3 \text{]}$$

$$G = q.V \text{ [kN]}$$

III. Условия за равновесие.

Максималният брой силови уравнения, които можем да запишем са три. Всяко следващо би било следствие от първите три.

Максималният брой моментни уравнения, които можем да запишем са шест. Всяко следващо би било следствие от първите шест.

Можем да избираме произволни оси за написване на моментните условия за равновесие, но те могат да бъдат комбинирани само в следните четири съчетания.

Уравнения за решение	3 силови	2 силови	1 силово	
	3 моментни	4 моментни	5 моментни	6 моментни
Уравнения за проверка		1 силово	2 силови	3 силови
	3 моментни	2 моментни	1 моментно	

Кое съчетание бихме използвали за дадена задача зависи от разположението на неизвестните величини, с оглед на получаване на уравнения, в които има най-малък брой неизвестни величини. Желателно е уравненията да бъдат „независими“, т.е. да съдържат само по едно неизвестно, но това не винаги е възможно.

Могат да се използват произволни оси, свързани или несвързани в координатна система.

След приключването на решението се прави проверка, като се записват неизползваните уравнения от съответната група, като сега стремежът е да се включат колкото се може повече от току-що определените опорни реакции.

КУРСОВА ЗАДАЧА № 5

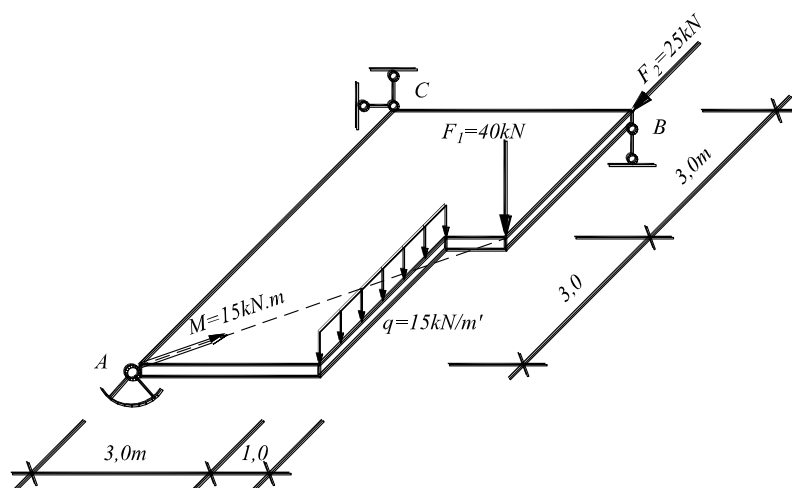
РАВНОВЕСИЕ НА ПРОСТРАНСТВЕНА СИСТЕМА СИЛИ

1. ЗАДАЧА

Дадено е тяло, подпряно в пространството и натоварено с пространствена система сили.

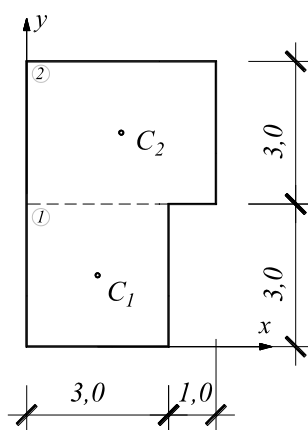
Определете силата на тежестта на тялото и я приложете в центъра му на тежестта.

Определете опорните реакции и направете необходимите проверки.



$$\gamma = 1,2 \text{ kN} / \text{m}^2$$

1. Определяне на центъра на тежестта.



$$\boxed{1} \rightarrow A_1 = 3 \cdot 3 = 9,0 \text{ m}^2 \rightarrow C_1(1,5; 1,5);$$

$$\boxed{2} \rightarrow A_2 = 3 \cdot 3 = 9,0 \text{ m}^2 \rightarrow C_2(2,0; 4,5).$$

$$\sum_{i=1}^2 A_i = A_1 + A_2 = 9 + 12 = 21 m^2$$

Тогава центърът на тежестта на фигурата ще бъде:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{9 \cdot 1,5 + 12 \cdot 2}{21} = 1,786 m ;$$

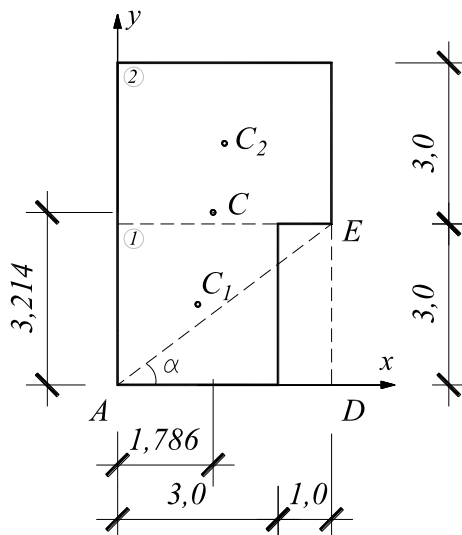
$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{9 \cdot 1,5 + 12 \cdot 4,5}{21} = 3,214 m$$

2. Разлагане на силите и моментите.

Силата на тежестта, която се прилага в центъра на тежестта е:

$$G = \gamma \sum A = 1,2 \cdot 21 = 25,2 kN$$

Получените резултати се нанасят на схемата.



Определя се ъгъл α , необходим за разлагането на момента действащ по направление AE .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75 \rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 0,75 = 36,87 \rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0,8 \\ \sin \alpha = 0,6 \end{cases}$$

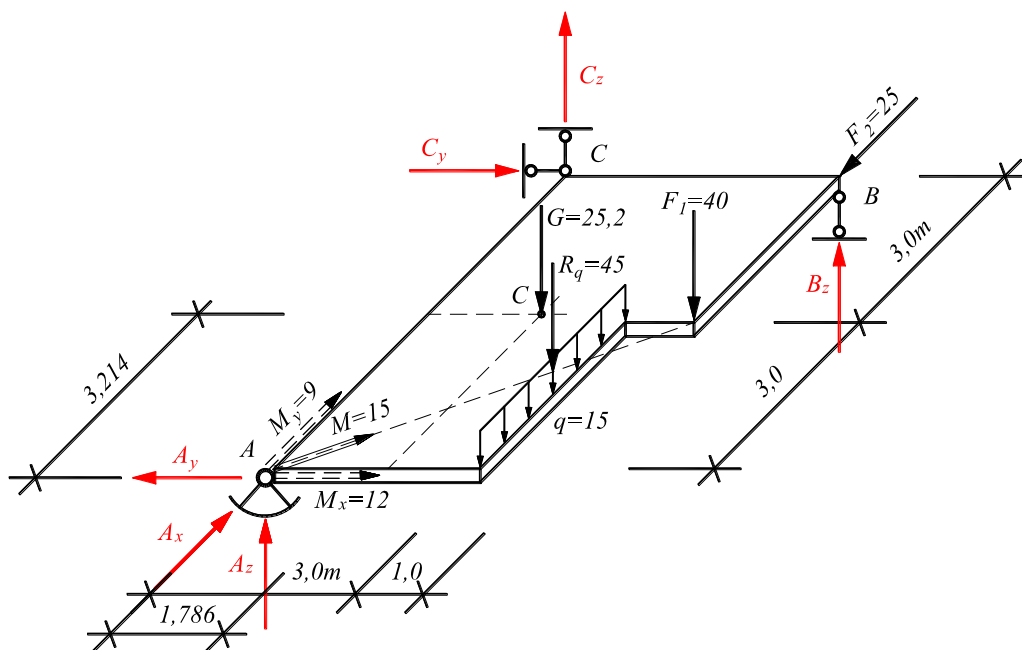
Тогава моментът ще има проекции по осите x и y :

$$M \begin{cases} M_x = M \cos \alpha = 15 \cdot 0,8 = 12 kN \cdot m \\ M_y = M \cdot \sin \alpha = 15 \cdot 0,6 = 9 kN \cdot m \end{cases}$$

Равномерно разпределения товар подменяме с неговата равнодействаща, получена като произведение на интензивността по дължината на действие на товара.

$$R_q = q \cdot L = 15 \cdot 3 = 45 kN$$

Прилагаме принципа на освобождаването. Мислено отстраняваме опорните устройства и на тяхно място въвеждаме съответните опорни реакции.



3. Въвеждане на оси за решението.

Подбирането на осите е продиктувано от желанието за „независими“ уравнения. За целта започваме с въвеждане на оси през точките в които се събират най-много опорни реакции.

3.1 През точки A и C прекарваме ос x . За нея опорните реакции в точки A и C няма да дават момент (пресичат оста). Единствената опорна реакция, която ще участва в това уравнение е опорна реакция B_z - независимо уравнение.

3.2 През точки A прекарваме ос z . За нея опорните реакции в точка A (пресичат), както и вертикалните опорни реакции в точки B и C (успоредни) няма да дават момент. Единствената опорна реакция, която ще участва в това уравнение е опорна реакция C_y - независимо уравнение.

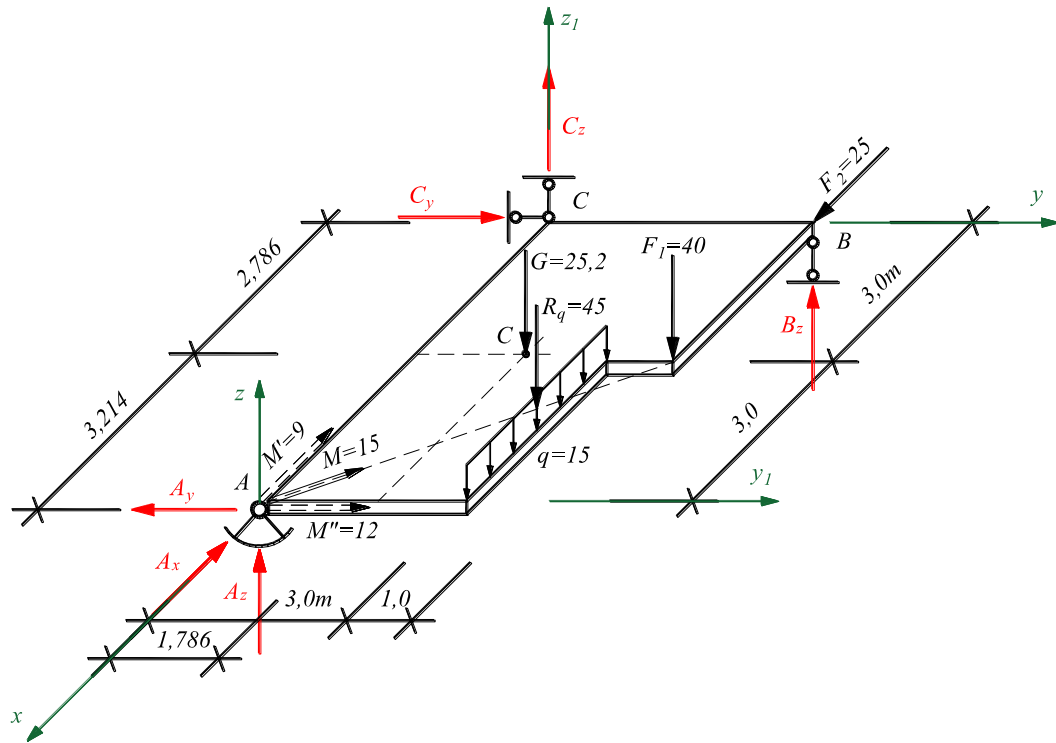
3.3 През точки C прекарваме ос y . За нея опорните реакции в точки B и C , както и A_x (пресичат) и A_y (успоредна) няма да дават момент. Единствената опорна реакция, която ще участва в това уравнение е опорна реакция A_z - независимо уравнение.

3.4 През точки C прекарваме ос z_1 . За нея опорните реакции в точка C , както и A_x (пресичат), B и A_z (успоредни) няма да дават момент. Единствената опорна реакция, която ще участва в това уравнение е опорна реакция A_y - независимо уравнение.

Другата „независима ос“ е ос BA по отношение на A_z , но ако решим да използваме тази ос ще трябва да преизчислим всички рамена на силите до нея, както и да проектираме

момента върху нея. Това е повторение на подготвителната работа, което ще подменим с въвеждане на уравнения за други оси, макар и те да не са „независими“.

Първо ще проверим за „независимо“ силово уравнение. Такова е уравнението по ос x .



3.1 $\sum X = 0$ е независимо уравнение по отношение на A_x .

3.6 През точка A прекарваме ос y_1 . За нея опорните реакции в точка A (пресичат), както и C_y (успоредна) няма да дават момент. Опорните реакции, които ще участва в това уравнение са опорни реакции C_z и B_z . Последната е определена от първото уравнение. Това уравнението не е независимо.

4. Уравнения за решение.

$$4.1 \sum M_x = 0; \rightarrow -9 - 25,2 \cdot 1,786 - 45 \cdot 3 - 40 \cdot 4 + B_z \cdot 4 = 0 \quad \rightarrow B_z = 87,25 \text{ kN}$$

$$4.2 \sum M_z = 0; \rightarrow -25 \cdot 4 - C_y \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow C_y = -16,67 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$4.3 \sum M_y = 0; \rightarrow 12 + 45 \cdot 4,5 + 25,2 \cdot 2,786 + 40 \cdot 3 - A_z \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow A_z = 67,45 \text{ kN}$$

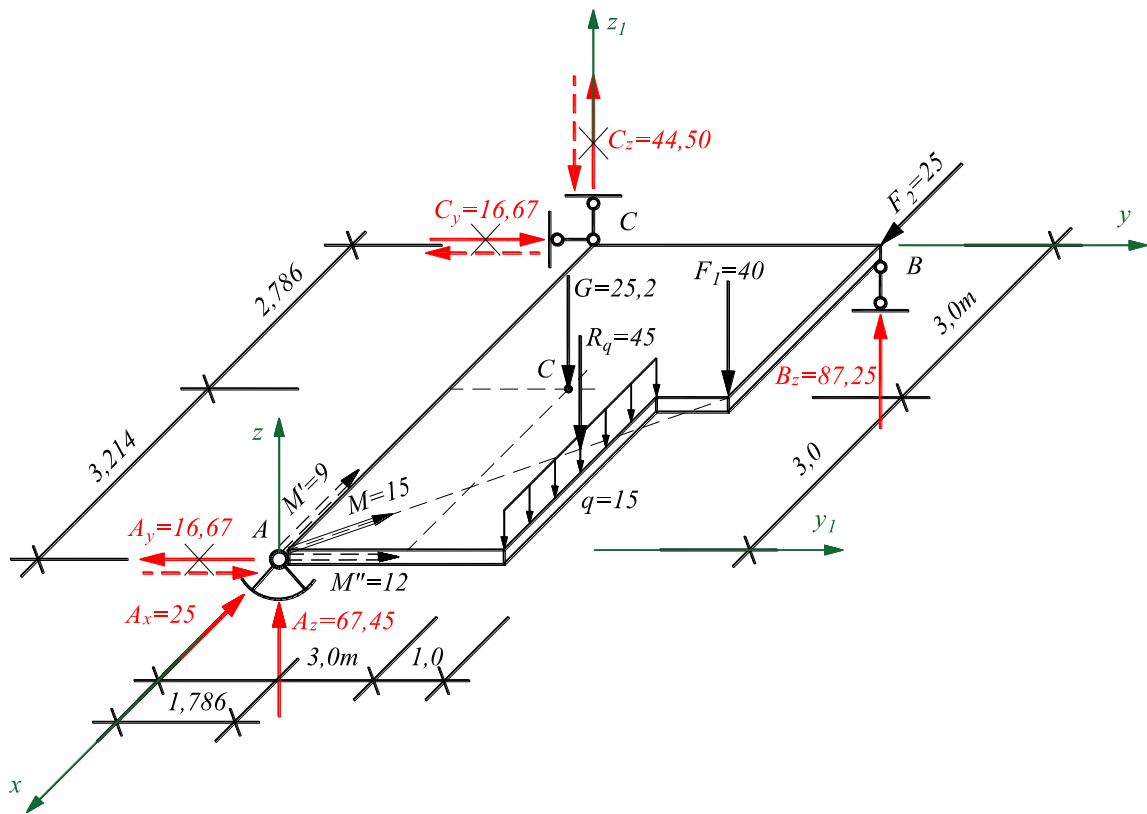
$$4.4 \sum M_{z_1} = 0; \rightarrow -25 \cdot 4 - A_y \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow A_y = -16,67 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$4.1 \sum X = 0; \rightarrow -A_x + 25 = 0 \quad \rightarrow A_x = 25 \text{ kN}$$

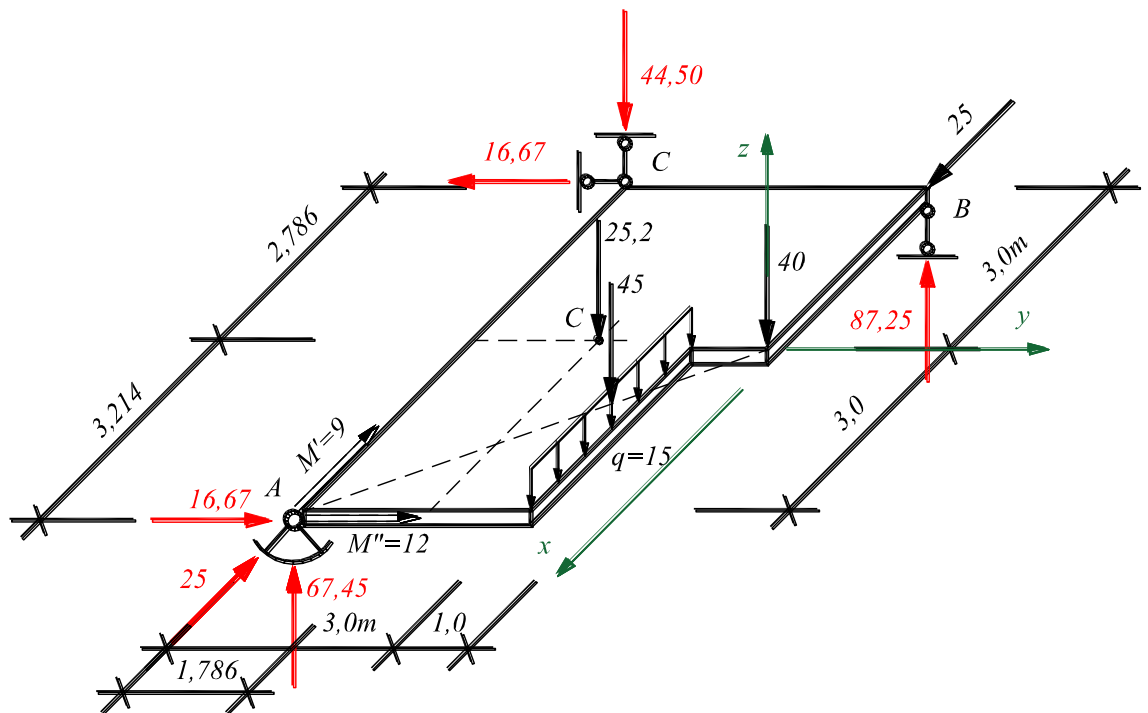
$$4.6 \sum M_{y_1} = 0; \rightarrow 12 - 45 \cdot 1,5 + -25,2 \cdot 3,214 - 40 \cdot 3 + B_z \cdot 6 + C_z \cdot 6 = 0$$

$$\rightarrow -256,49 + 87,25 \cdot 6 + C_z \cdot 6 = 0 \quad \rightarrow C_z = -44,50 \text{ kN} (\downarrow)$$

Всички получени резултати се нанасят на чертежа.



5. Проверка.



Избира се нова координатна система за проверка. Първо се използват всички останали силови уравнения, неизползвани в решението.

$$5.1 \sum Y = 0; \rightarrow 16,67 - 16,67 = 0$$

$$5.2 \sum Z = 0; \rightarrow 67,45 - 45 - 25,2 - 40 + 87,25 - 44,50 = 0 \rightarrow 154,7 - 154,7 = 0$$

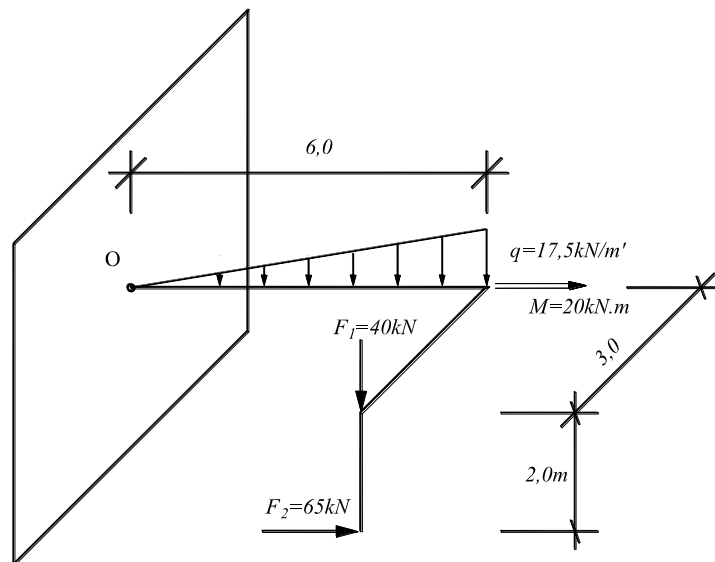
Третото уравнение трябва да е моментово. Целта сега е да се подбере уравнение с възможно повече от определените опорни реакции и възможно по-малко от външните сили.

$$5.3 \sum M_z = 0; \rightarrow -25,4 + 16,67 \cdot 3 + 16,67 \cdot 3 = 0 \rightarrow 100,02 - 100 = 0,02$$

2. ЗАДАЧА

Дадено е тяло, подпряно в пространството и натоварено с пространствена система сили.

Определете опорните реакции и направете необходимите проверки.

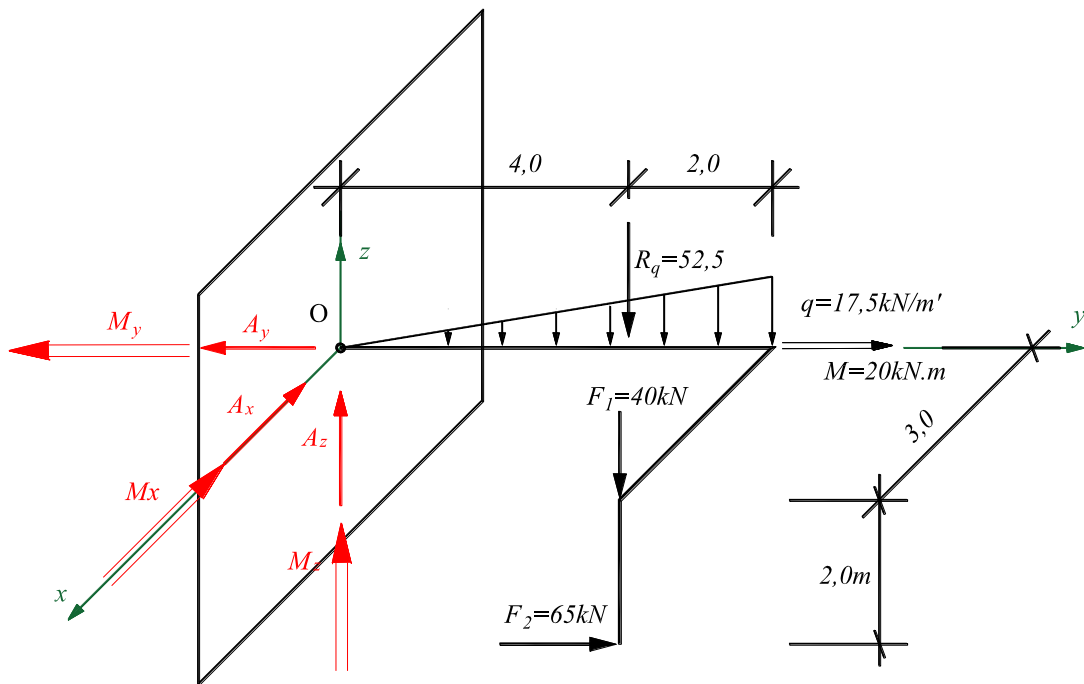


1. Подготовка на товарите.

$$R_q = \frac{q \cdot L}{2} = \frac{17,5 \cdot 6}{2} = 52,5 \text{ kN}$$

Въвежда се координатна система в точката на запъване.

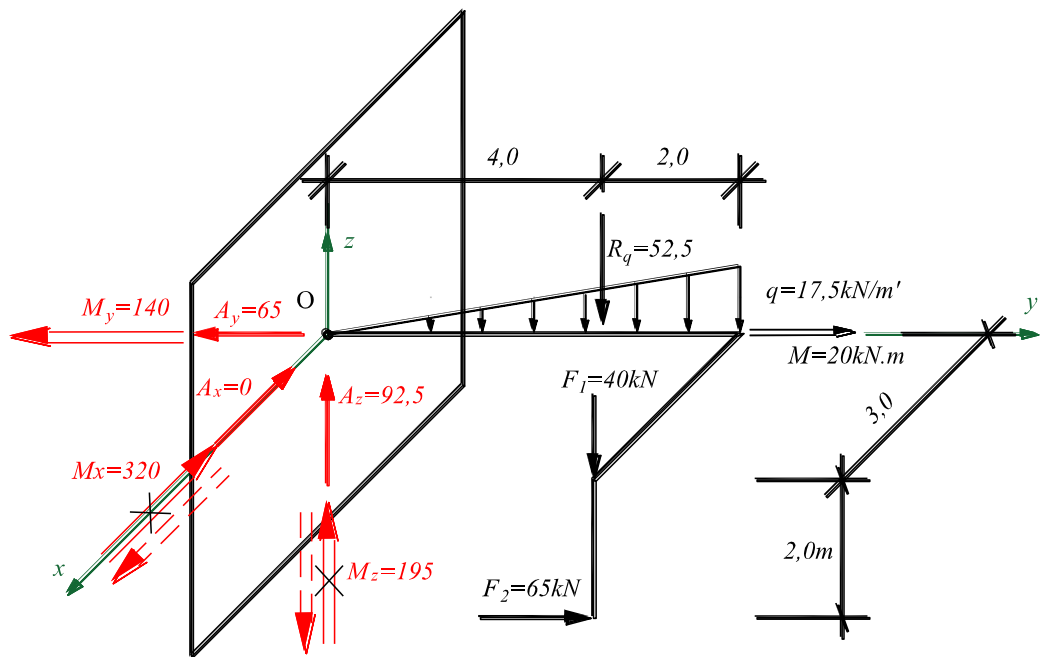
Прилага се принципа на освобождаването и в мястото на запъване се въвеждат шест опорни реакции – три сили и три момента.



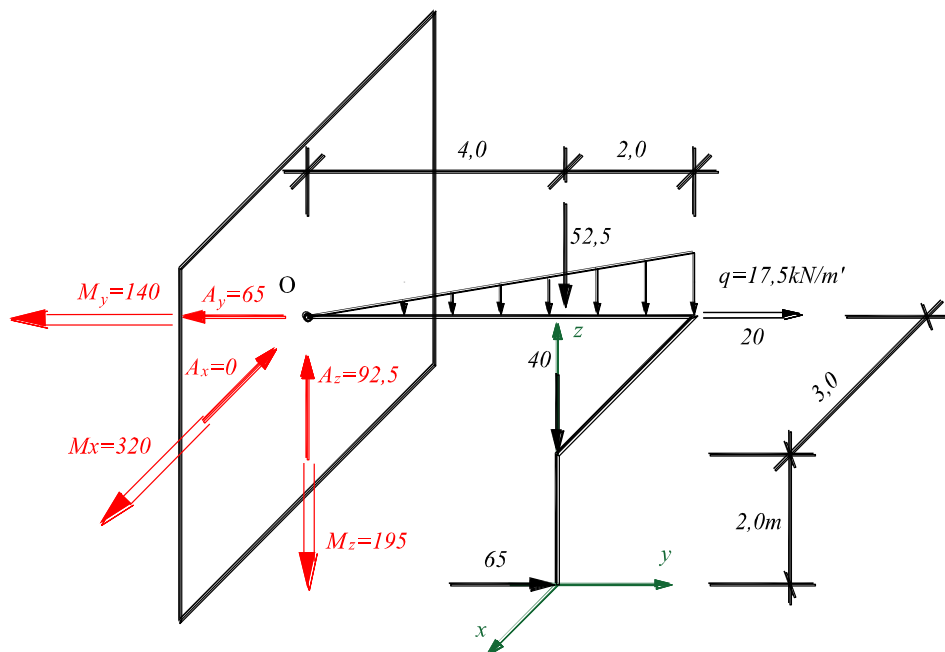
2. Уравнения за решение.

$$\begin{aligned}
 2.1 \quad \sum X &= 0; \rightarrow -A_x = 0 && \rightarrow A_x = 0 \text{ kN} \\
 2.2 \quad \sum Y &= 0; \rightarrow -A_y + 65 = 0 && \rightarrow A_y = 65 \text{ kN} \\
 2.3 \quad \sum Z &= 0; \rightarrow A_z - 52,5 - 40 = 0 && \rightarrow A_z = 92,5 \text{ kN} \\
 2.4 \quad \sum M_x &= 0; \rightarrow -M_x - 52,5 \cdot 4 - 40 \cdot 6 + 65 \cdot 2 = 0 && \rightarrow M_x = -320 \text{ kN} (\swarrow) \\
 2.5 \quad \sum M_y &= 0; \rightarrow -M_y + 20 + 40 \cdot 3 = 0 && \rightarrow M_y = 140 \text{ kN} \\
 2.6 \quad \sum M_z &= 0; \rightarrow M_z + 65 \cdot 3 = 0 && \rightarrow M_z = -195 \text{ kN} (\downarrow)
 \end{aligned}$$

Нанасяме получените резултати на чертежа.



3. Проверка.



Въвеждаме нова координатна система.

$$3.1 \sum M_x = 0; \rightarrow 320 - 92,5 \cdot 6 + 52,5 \cdot 2 + 65 \cdot 2 = 0 \quad \rightarrow 555 - 555 = 0$$

$$3.2 \sum M_y = 0; \rightarrow -140 + 92,5 \cdot 3 - 52,5 \cdot 3 + 20 = 0 \quad \rightarrow 297,5 - 297,5 = 0$$

$$3.3 \sum M_z = 0; \rightarrow -195 + 65 \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow 195 - 195 = 0$$

Коментар:

1. Векторите сили и моменти не се нанасят мащабно. Те са такива каквито ги виждате на няколкото чертежа в решените примери. Може просто да са съразмерни. Т.е. векторите на по-големите сили да са по-големи от по-малките по големина сили и т.н.
2. В показаните решения са използвани обръщения към теоретичните бележки в началото на материала. За целта се маркира текстът, който следва подканата виж:.....

В обясненията са изобразени множество схеми, които показват последователността на решение и разсъждения. В курсовата задача се изчертават само чертежите дадени в книжката със заданията. За яснота следете решения пример в ръководството.

Това е материалът за Курсова задача 6 (по номерация от ръководството), за Вас това е пета задача, която правите като курсова. Моля, прегледайте и решете примера в ръководството за тренировка, както и примерите решени тук. При несигурност, можете да снимате и да ми изпратите снимката с въпроси.

Желая Ви успех в подготовката на подадената информация.

При въпроси, моля пишете на: doicheva_fhe@abv.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева