ИНТЕГРАЛИ НА MAXWELL-MOHR.
ПРАВИЛО НА ВЕРЕШЧАГИН

1. Потенциална енергия на деформацията.

Нека имаме греда с дължини l_i на отделните участъци, като всеки от тях е с напречно сечение $A_i = const$ и коравини на опън/натиск - EA_i, на огъване EI_{yi}; EI_{zi}, на усукване EI_{ci} и на срязване GA_i.

Потенциалната енергия на деформацията за гредата с n на брой участъци ще бъде:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{l_i} \frac{N_i^2(x)}{2EA_i} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}^{\,2}(x)}{2EI_{yi}} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{zi}^{\,2}(x)}{2EI_{zi}} dx + k_z \int_0^{l_i} \frac{Q_{zi}^{\,2}(x)}{2GA_i} dx + k_y \int_0^{l_i} \frac{Q_{yi}^{\,2}(x)}{2GA_i} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{ti}^{\,2}(x)}{2EI_{ci}} dx \right\},$$

където k_z и k_y са безразмерни коефициенти отчитащи неравномерния характер на тангенциалните напрежения и ъгловите деформации на сечението.

Обикновено приносът на събираемите $k_z \int_0^{l_i} \frac{Q_{zi}^{\,2}(x)}{2GA_i} dx$ и $k_y \int_0^{l_i} \frac{Q_{yi}^{\,2}(x)}{2GA_i} dx$ е малък и често се пренебрегва.

Когато имаме прътови участъци или цели ставно прътови системи тогава приносът към потенциалната енергия на деформация за тези участъци ще бъде:

$$U_i = \int_0^{l_i} \frac{S_i^2(x)}{2EA_i} dx,$$

или решен интегралът дава: $$U_i = \int_0^{l_i} \frac{S_i^2(x)}{2EA_i} dx = \frac{S_i^2(x)}{2EA_i} \int_0^{l_i} dx = \frac{S_i^2(x) l_i}{2EA_i}.$$

При пълностенни елементи работещи приоритетно на огъване приносът на N и Q_y; Q_z към U - потенциалната енергия на деформацията се пренебрегва. За тях се отчита само влиянието на огъващите моменти, докато N е значимо за пръти.

2. *Частната производна на потенциалната енергия на деформацията по една от силите е равна на проектираното преместване на приложната точка на същата тази сила.*

$$\frac{\partial U}{\partial F_n} = \delta_n$$

Последното твърдение е **Теорема на Кастиляно** за определяна на премествания и завъртания.

Теоремата се прилага по отношение на търсено преместване или завъртане на конкретни сечения.

3. Интеграли на Maxwell-Mohr

Нека имаме греда подложена на специално огъване. Тогава:

$$\delta_n = \frac{\partial U_n}{\partial F_n} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \frac{2M_{yi}(x)}{2EI_y} . \frac{\partial M_{yi}(x)}{\partial F_n} dx$$

След преобразования се достига до:

$$\delta_n = \frac{\partial U_n}{\partial F_n} = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}(x)}{EI_y} .M_{1_i} dx \,,$$

където M_1 ще се разбира момент в сечение на гредата когато върху нея действат само или единична сила в точката, в която търсим преместване, или единичен момент в изследваното сечение, когато се търси завъртане.

- Ако се търси **хоризонтално преместване** се въвежда **хоризонтална единична сила.**
- Ако се търси **вертикално преместване** се въвежда **вертикална единична сила**.
- Ако се търси **завъртане** се въвежда **единичен огъващ момент**.

Посоките на единичните натоварвания са произволни. *Ако търсеното преместване δ или търсеното завъртане α бъдат получени със знак $+$, следователно преместването и завъртането са по посока на въведените единични товари*.

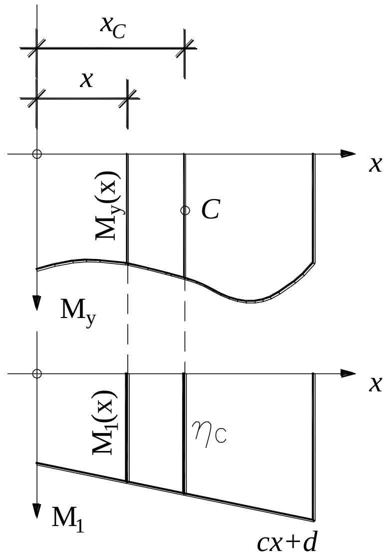
В общия случай преместването се определя по:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_0^{l_i} \frac{N_i(x) N_{1i}(x)}{EA_i} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{yi}(x) M_{1i}(x)}{EI_{yi}} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{zi}(x) M_{1i}(x)}{EI_{zi}} dx + \right.$$
$$\left. + \int_0^{l_i} \frac{k_{zi} Q_{zi}(x) Q_{1i}(x)}{GA_i} dx + \int_0^{l_i} \frac{k_{yi} Q_{yi}(x) Q_{1i}(x)}{GA_i} dx + \int_0^{l_i} \frac{M_{ti}(x) M_{1i}(x)}{EI_{ci}} dx \right\}$$

В пръти при ставно прътови конструкции или при пръти в конструкции.

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i S_{1i} l_i}{EA_i}$$

4. Решаване на интегралите на Maxwell-Mohr с правилото на Верешчагин.



В общия случай $M_y\left(x\right)$ е криволинейна.

Единичната диаграма M_1 от единична сила или единичен момент е винаги линейна функция, чието уравнение може да се запише

$$M_1\left(x\right) = cx + d$$

Тогава при един участък преместването може да се определи:

$$EI_y\delta_n = \int_0^l M_y\left(x\right)M_1 dx = \int_0^l M_y\left(x\right)(cx+d)dx = c\underbrace{\int_0^l M_y\left(x\right)xdx}_{S_M x_c} + d\underbrace{\int_0^l M_y\left(x\right)dx}_{S_M}$$

$$\boxed{EI_y\delta_n = S_M(cx_C + d) = S_M.\eta_c}$$ *- правило на Верешчагин*

Правилото на Верешчагин е известно още като правилото за умножение на диаграмите.

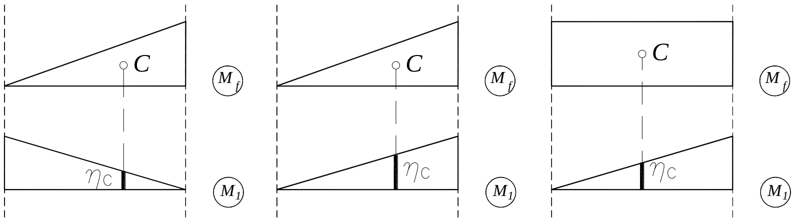
Интегралите се съставят за **всеки участък поотделно**.

Когато участъците са с различна коравина се въвежда **основен инерционен момент**, такъв че да е удобно да се правят изчисленията. Тогава за всеки участък имаме множител:

$\dfrac{I_0}{I_{участък}}$ за участъци подложени на огъване или $\dfrac{I_0}{A_{участък}}$ за участъци с отчитане на разрезно усилие N

В случаите на специално огъване с различни коравини в участъците преместването ще се определя по:

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



$$EI_0\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{I_0}{I_i} S_{M_i}.\eta_{c_i}$$

S_{Mi} **- лице на моментовата диаграма от външен товар за съответен участък**.

η_{Ci} **- ордината на единична диаграма от съответен единичен товар под центъра на тежестта на диаграмата от външен товар**.

Всяка от изброените величини се отчита **със съответния знак**.

Когато и двете диаграми за съответния участък са линейни функции, то няма значение лицето на коя ще бъде взето, като съответно от другата ще бъде отчетена ординатата съответстваща на центъра на тежестта на първата диаграма.

При наличие на пръти или в прътови конструкции участието на нормалното разрезно усилие се задава с:

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i N_{1i} l_i}{EA_i}$$

$$EI_0\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{I_0}{A_i} S_{N_i}.\eta_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{I_0}{A_i} N_i.N_1.l_i$$

N_i **- стойност на диаграма на нормалната сила от външен товар за съответния участък със съответния знак**.

N_1 **- стойност на диаграма на нормалната сила от единичен товар за съответния участък със съответния знак**.

l_i **- дължина на участъка**

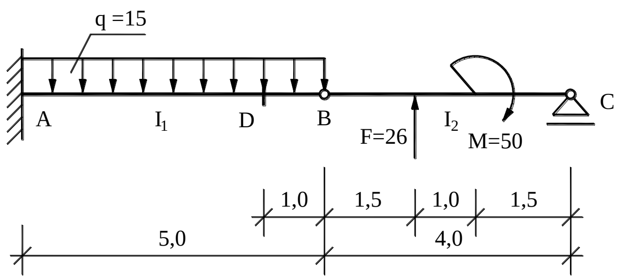
Курсова задача №. 13:

Интеграли на Максвел-Мор. Правило на Верешчагин

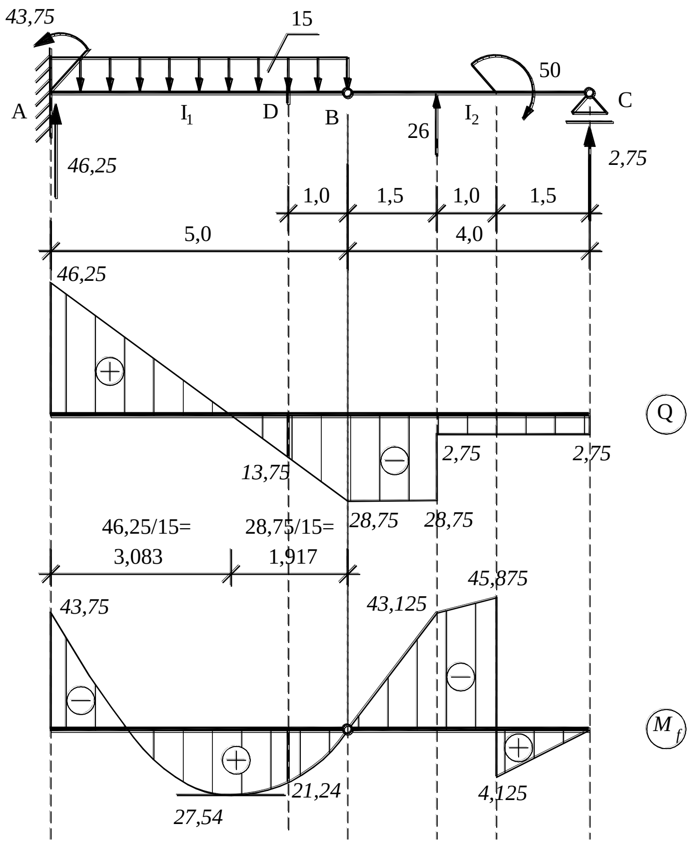
1. Задача 1

Да се определи с интегралите на Максвел-Мор, решени с правилото на Верешчагин, вертикалното преместване на сечение B и сечение D и ъгъла на завъртане на сечение C ако:

$E = 2.10^4 kN/m^2$; $I_1 = 15,5.10^3 cm^4$; $\dfrac{I_1}{I_2} = 1,5$.



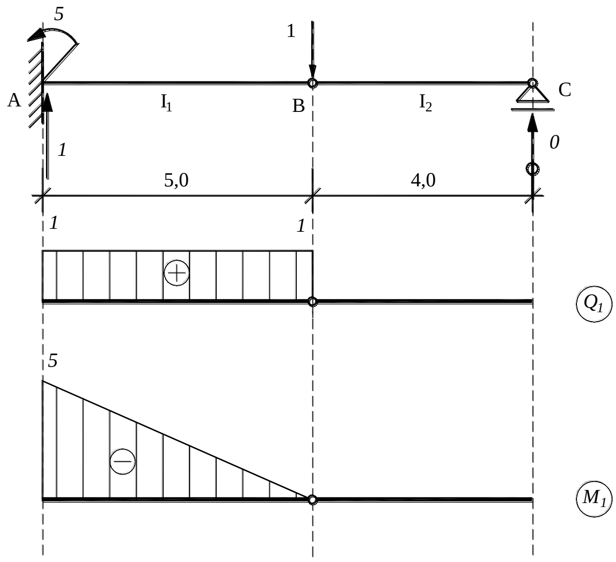
Построяват се диаграмите на разрезните усилия от външен товар.



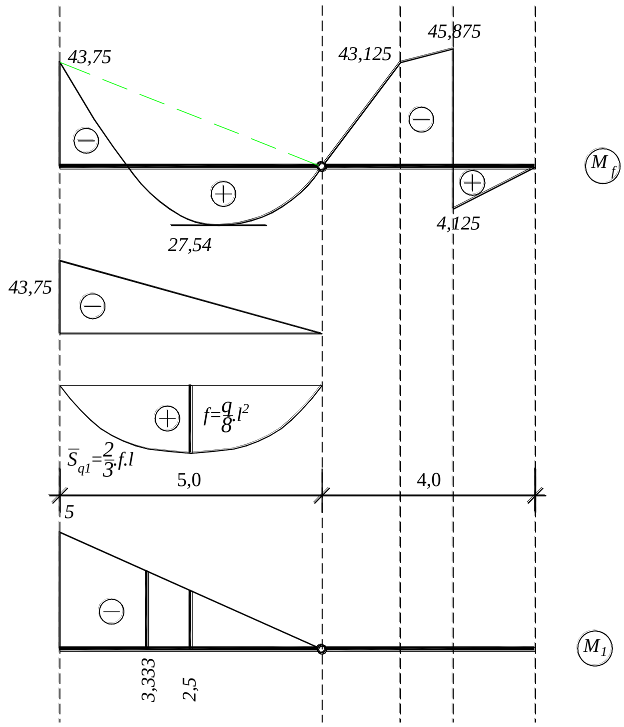
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

1. Вертикално преместване на сечение B.

Поставяме вертикална сила с големина 1 в сечение B и построяваме диаграмите на разрезните усилия.



Натоварването е специално огъване. Отчитат се само огъващите моменти.



Приет за основен е инерционен момент I_1 на първи участък.

$$EI_1\delta_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{I_1}{I_i} S_{M_i}.\eta_{c_i}$$

$$EI_1\delta_B = \frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-43,75.5}{2}.(-3,333) + \frac{2}{3}\frac{15.5^2}{8}.5.(-2,5)\right] = 1\left[364,55 - 390,625\right] = -26,075kN.m^3$$

$$EI_1\delta_B = -26,075kN.m^3.10^6 = -26,075.10^6\,kN.cm^3$$

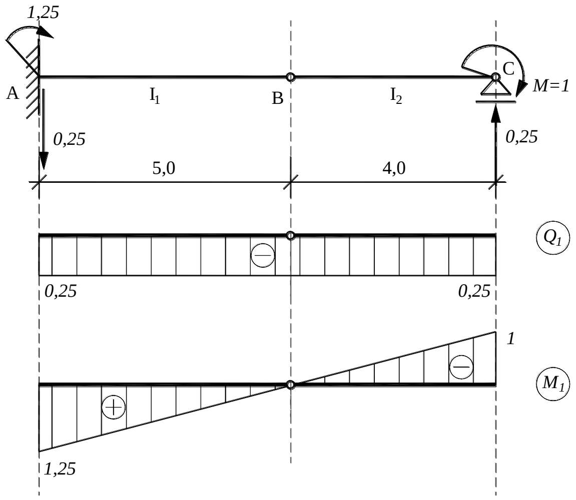
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

$$\delta_B = \frac{-26,075.10^6}{2.10^4.15,5.10^3} = -0,084cm$$

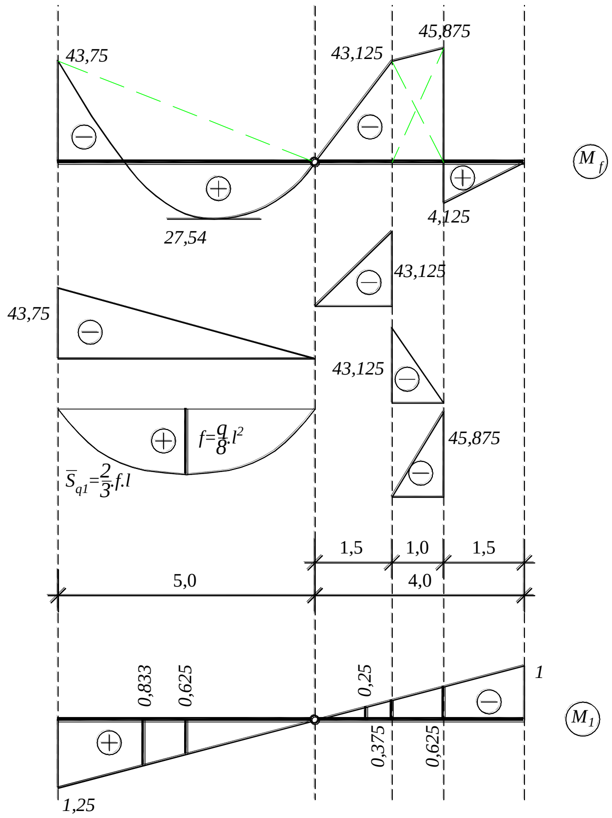
Знакът − показва, че преместването на точка B ще бъде обратно на приетата посока на единичната сила, т.е. нагоре.

2. Завъртане в сечение C.

Поставяме момент с големина 1 в сечение C и построяваме диаграмите на разрезните усилия.



Умножение на диаграми.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика" – УАСГ, София

$$EI_1\alpha_C = \frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-43,75.5}{2}.0,833+\frac{2}{3}\frac{15.5^2}{8}.5.0,625\right]+$$

$$+\frac{I_1}{I_2}\left[\frac{-43,125.1,5}{2}\left(-0,25\right)\right]+$$

$$+\frac{I_1}{I_2}\left[\frac{-43,125.1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(-0,375\right)+\frac{1}{3}\left(-0,625\right)\right)+\frac{-45,875.1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(-0,625\right)+\frac{1}{3}\left(-0,375\right)\right)\right]+$$

$$+\frac{I_1}{I_2}\left[\frac{4,125.1,5}{2}\left(\frac{2}{3}\left(-0,625\right)+\frac{1}{3}\left(-1\right)\right)\right]=$$

$$=1.\left[6,51\right]+1,5\left[8,086+22,307-2,32\right]=48,62kN.m^2$$

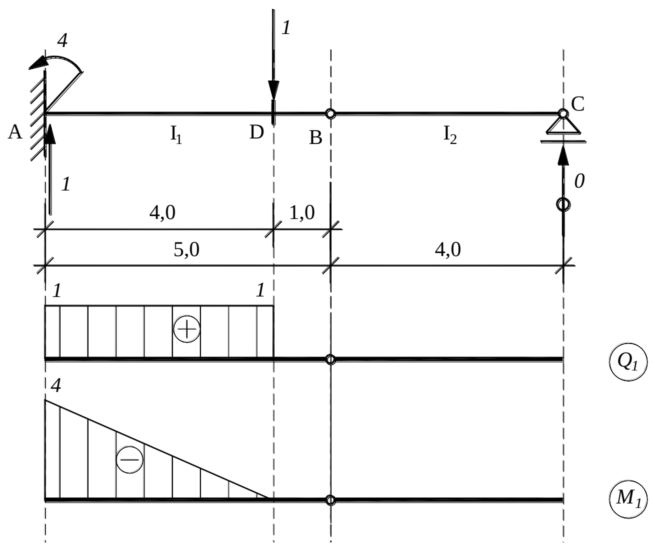
$$EI_1\alpha_C = 48,62kN.m^2.10^4 = 48,62.10^4\,kN.cm^2$$

$$\alpha_c = \frac{EI_1\alpha_c}{EI_1} = \frac{48,62.10^4}{2.10^4.15,5.10^3} = 0,0015687rad$$

$\alpha_c = 0,0015687rad.\dfrac{180}{\pi} = 0,08988^\circ$ - завъртането е по посока на въведения единичен момент в сечение C.

3. Вертикално преместване на сечение D.

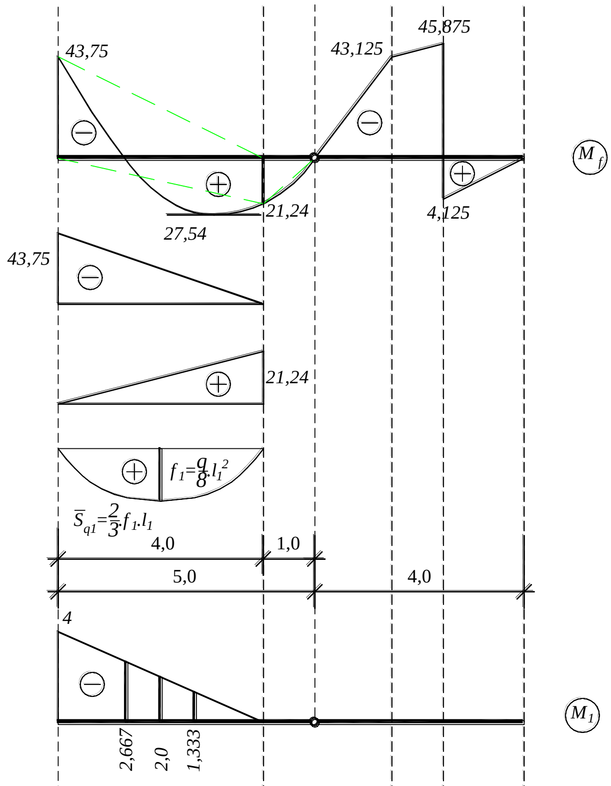
Поставяме вертикална сила с големина 1 в сечение D и построяваме диаграмите на разрезните усилия.



Умножение на диаграми.

Появява се още един участък, поради сила в точка D. Изчислява се стойността на момента от външен товар под точка D – 21,24кN.m.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София



$$EI_1\delta_B=\frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-43,75.4}{2}.(-2,667)+\frac{21,24.4}{2}(-1,333)+\frac{2}{3}\frac{15.4^2}{8}.4.(-2)\right]=$$

$$=1\left[233,36-56,64-160\right]=16,72kN.m^3$$

$$EI_1\delta_B=16,72kN.m^3.10^6=16,72.10^6\,kN.cm^3$$

$$\delta_B=\frac{16,72.10^6}{2.10^4.15,5.10^3}=0,054cm$$

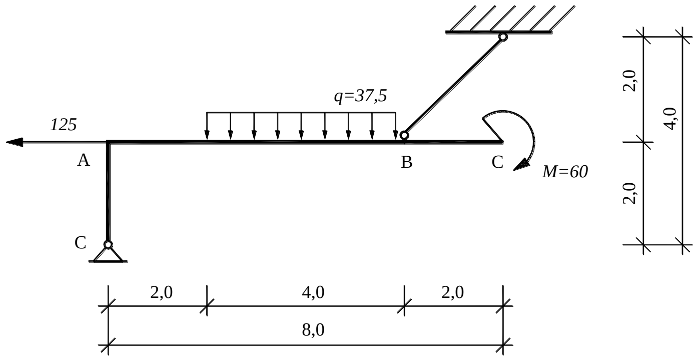
Знакът − показва, че преместването на точка В ще бъде по посока на приетата посока на единичната сила, т.е. надолу.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

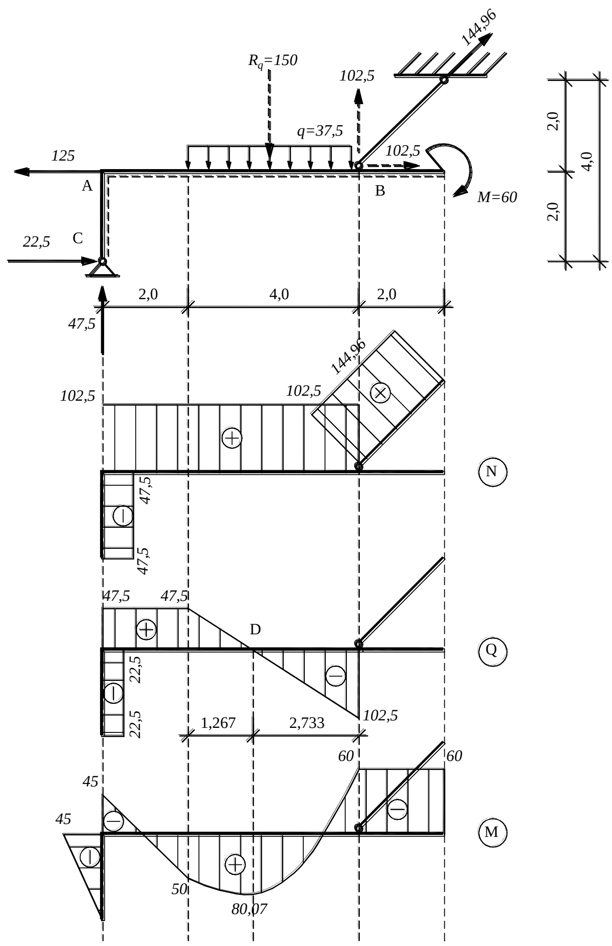
2. Задача 2

Да се определи с интегралите на Максвел-Мор, решени с правилото на Верещагин, вертикалното преместване и завъртане на сечение С ако:

$$E = 2.10^4 kN / cm^2 ; \; I_y = 9840cm^4 ; \; \frac{I_y}{A} = 0,2m^2$$

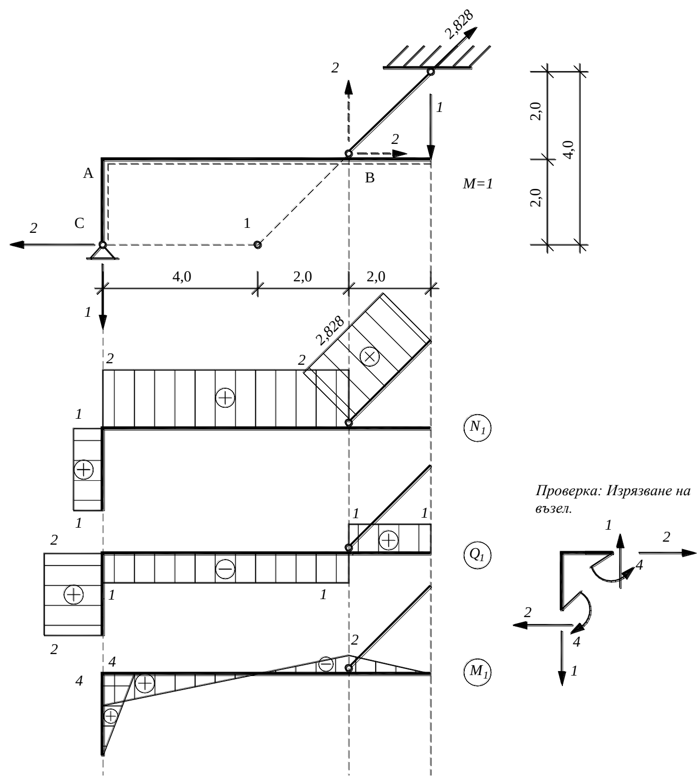


Построяват се диаграмите на разрезните усилия от външен товар.

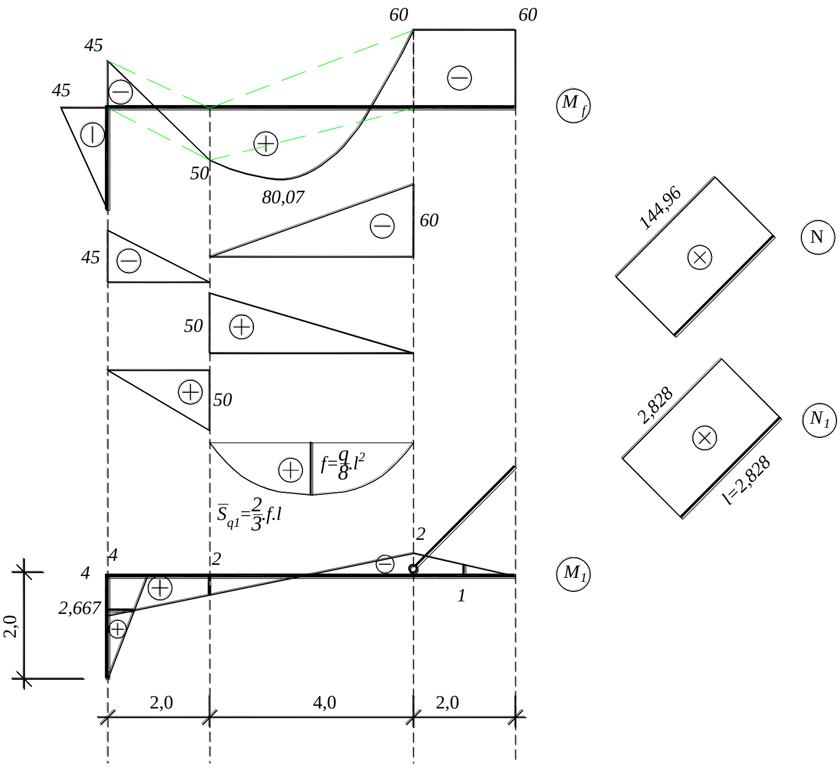


1. Вертикално преместване на сечение С.

Поставяме вертикална сила с големина 1 в сечение С и построяваме диаграмите на разрезните усилия.



Натоварването е специално огъване с опън/натиск. Отчитат се само огъващите моменти в гредата и нормалното разрезно усилие в пръта.



Приет за основен е инерционен момент I_1. Всички гредови участъци ще имат множител I_1 / I_1, а прътът съответно I_1 / A.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

$$EI_1\delta_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{I_1}{I_i}S_{M_i}.\eta_{c_i} + \frac{I_1}{A}N.N_1.l$$

$$EI_1\delta_C = \frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-45.2}{2}.2,667\right] + \frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-45.2}{2}\left(\frac{2}{3}4+\frac{1}{3}2\right)+\frac{50.2}{2}\left(\frac{2}{3}2+\frac{1}{3}4\right)\right]+$$

$$+\frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-60.4}{2}\left(\frac{2}{3}(-2)+\frac{1}{3}2\right)+\frac{50.4}{2}\left(\frac{2}{3}(2)+\frac{1}{3}(-2)\right)+\frac{2}{3}\frac{37,5.4^2}{8}.4.0\right]+$$

$$+\frac{I_1}{I_1}\left[-60.2.(-1)\right]+\frac{I_1}{A}\left[144,96.2,828.2,828\right]=$$

$$=1\left[-120-16,667+146,667+120\right]+0,2.1159,33=361,866kN.m^3$$

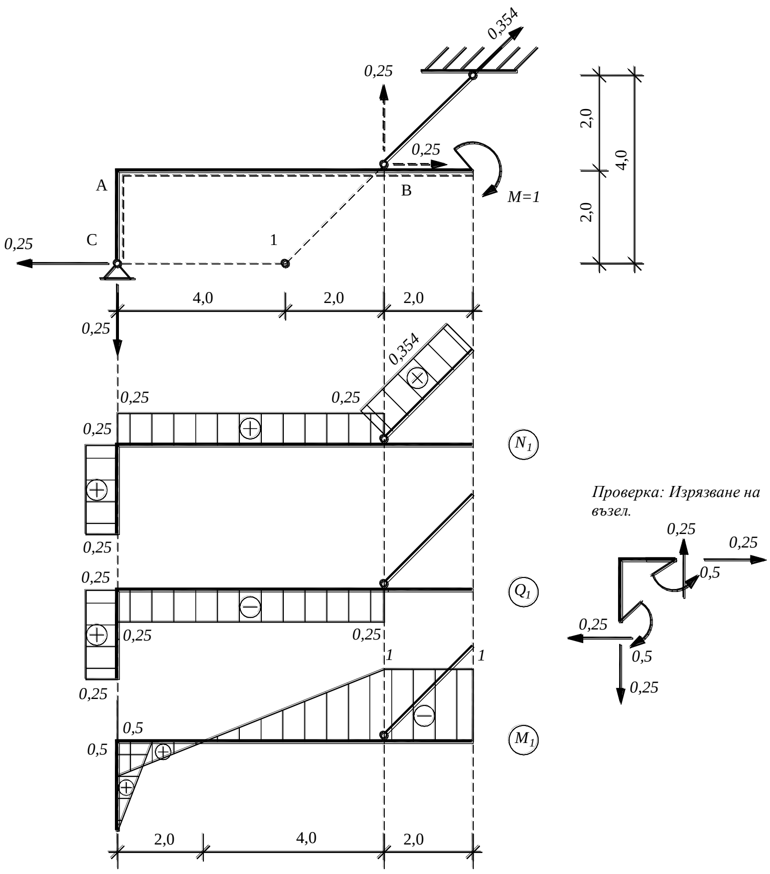
$$EI_1\delta_C = 361,866kN.m^3.10^6 = 361,866.10^6\,kN.cm^3$$

$$\delta_C = \frac{361,866.10^6}{2.10^4.9840} = 1,839cm$$

Знакът − показва, че преместването на точка C ще бъде по посока на приетата единичната сила, т.е. надолу.

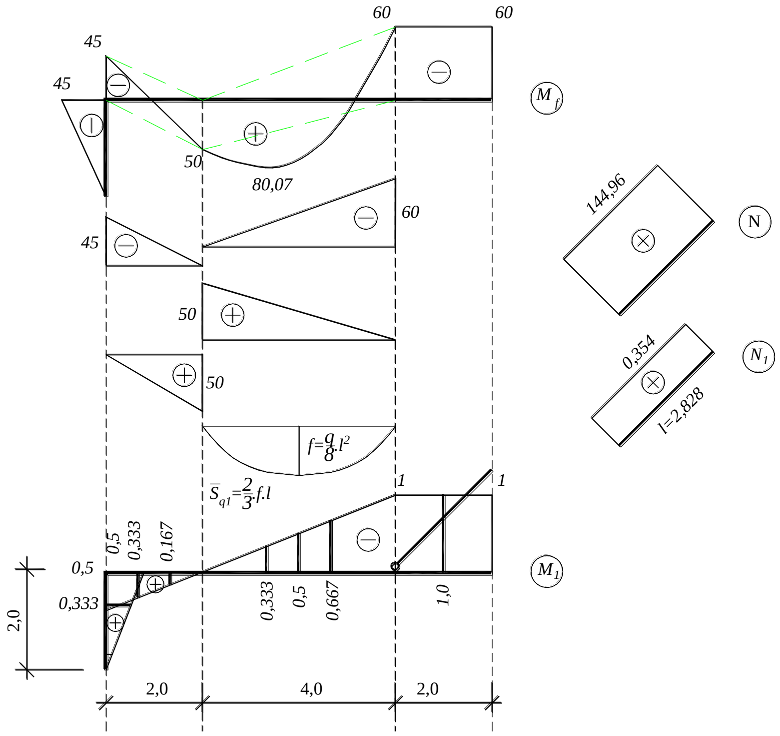
2. Завъртане в сечение C.

Поставяме момент с големина 1 в сечение C и построяваме диаграмите на разрезните усилия.



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Умножение на диаграми.



$$EI_1\alpha_C = \frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-45.2}{2}.0,333\right] + \frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-45.2}{2}0,333 + \frac{50.2}{2}0,167\right] +$$

$$+\frac{I_1}{I_1}\left[\frac{-60.4}{2}(-0,667) + \frac{50.4}{2}(-0,333) + \frac{2}{3}\frac{37,5.4^2}{8}.4.(-0,5)\right] +$$

$$+\frac{I_1}{I_1}\left[-60.2.(-1)\right] + \frac{I_1}{A}\left[144,96.0,354.2,828\right] =$$

$$= 1\left[-15 - 6,667 + -53,333 + 120\right] + 0,2.145,121 = 74,02kN.m^2$$

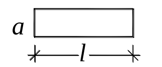
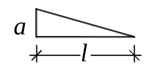
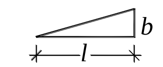
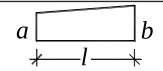
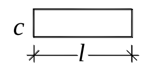
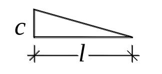
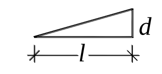
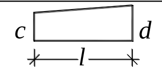
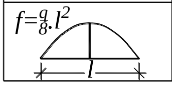
$$EI_1\alpha_C = 74,02kN.m^2.10^4 = 74,02.10^4 kN.cm^2$$

$$\alpha_c = \frac{EI_1\alpha_C}{EI_1} = \frac{74,02.10^4}{2.10^4.9840} = 0,0037614rad$$

$\alpha_c = 0,0037614rad.\dfrac{180}{\pi} = 0,2155^{\circ}$ - завъртането е по посока на въведения единичен момент в сечение C.

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Таблица за умножаване на диаграмите:

				
	$cl.a$	$cl.\frac{1}{2}a$	$cl.\frac{1}{2}b$	$cl.\frac{1}{2}(a+b)$
	$\frac{1}{2}cl.a$	$\frac{1}{2}cl.\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{2}cl.\frac{1}{3}b$	$\frac{1}{2}cl.(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}b)$
	$\frac{1}{2}dl.a$	$\frac{1}{2}dl.\frac{1}{3}a$	$\frac{1}{2}dl.\frac{2}{3}b$	$\frac{1}{2}dl.(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b)$
	$\frac{1}{2}(c+d)l.a$	$\frac{1}{2}al.(\frac{2}{3}c+\frac{1}{3}d)$	$\frac{1}{2}bl.(\frac{1}{3}c+\frac{2}{3}d)$	$\frac{1}{6}[ac+(a+b)(c+d)+bd)]l$
	$\frac{2}{3}fl.a$	$\frac{2}{3}fl.\frac{1}{2}a$	$\frac{2}{3}fl.\frac{1}{2}b$	$\frac{2}{3}fl.\frac{1}{2}(a+b)$

Коментари:

1. Всички обяснения в скоби са за разясняване на решението. Те не се преписват в курсовата задачата, а просто се следват.
2. Диаграмите на разрезните усилия заедно с товаровата диаграма се изчертават на една страница (без разделяне.)

Желая Ви успех в изготвянето на седма курсова задача.

При въпроси, моля пишете ми на: doicheva_fhe@abv.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева