# Равновесие на тяло натоварено с равнинна система сили

1. Основни понятия.

Едно тяло в равнината има **три** степени на свобода. Това са двете възможности за преместване по двете оси $(x, y)$ и ротация спрямо третата ос $z$. За да бъде гарантирано равновесието на тялото, то трябва да бъде ограничено в своето движение от **три** опорни реакции, които възникват в съответните опорни устройства. Системата сили съставена от външни сили и опорни реакции трябва да бъде равновесна. Като се отчете факта, че една равнинна система сили се свежда до равнодействаща, следва че силовите проекционни уравнения трябва да бъдат равни на нула. Моментите уравнения за произволни точки от равнината също трябва да се нулират. Т.е.

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_z = 0$$

Уравненията $\sum Z = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0$ са изпълнени по подразбиране, тъй като проекции на силите върху ос $z$ няма, а всички сили пресичат оси $x, y$ и няма да дават момент за тях.

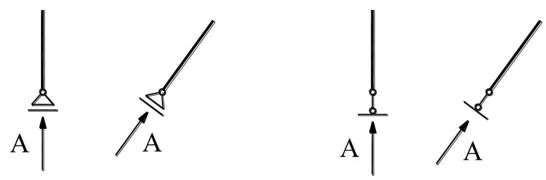
Като знаем връзката на момент на сила спрямо точка и момент на сила спрямо ос, то големината на момента на равнинната система сили спрямо център на моментите $A$ не е нищо друго освен моментът на силите спрямо ос $z$, минаваща през този център. Тогава в последното уравнение индексът $z$ може да отпадне и ще записваме уравнението само като:

$$\sum M_A = 0$$

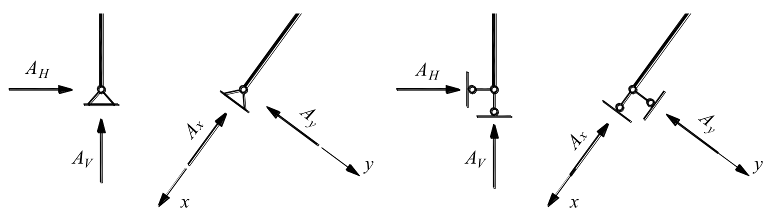
2. Подпиране.

Трите степени на свобода се отнемат от три връзки, които могат да бъдат:

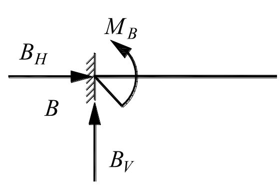
- прости връзки (опори) отнемащи по една степен на свобода;




- неподвижна опора отнемаща две степени на свобода;




- запъване, което отнема трите степени на свобода.

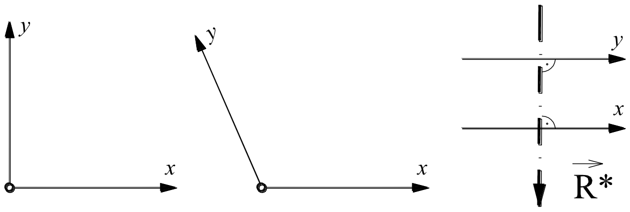



Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

3. Решение.

Да се реши една греда означава да се определят опорните и реакции и да се извършат проверки. Уравненията, които се бъдат записани могат да бъдат:

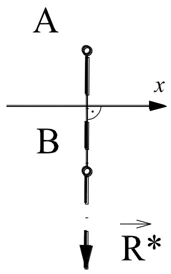
3.1. Две проекционни за произволни оси, които не е задължително да бъдат ортогонални. Задължително е обаче те **да не са успоредни помежду си**, защото ако системата сили има равнодействащата с направление перпендикулярно на осите и директриса минаваща през центъра на моментите, то. условията за равновесие ще бъдат изпълнени, но равновесие няма да има.




3.2. Едно проекционно и две моментови за произволни две точки от равнината на силите.

$$\sum X = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0$$

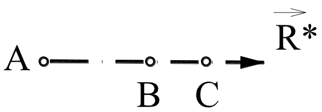
Оста $x$ обаче не трябва да бъде перпендикулярна на направлението $AB$, защото, ако системата сили има равнодействаща и тя има за директриса правата $AB$, то условията за равновесие ще бъдат изпълнени, но системата сили няма да е в равновесие.




3.3. Три моментови уравнения за три произволни точки.

$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum M_C = 0$$

Трите точки не трябва да лежат на една права. Ако системата сили има равнодействаща и нейната директриса е правата $ABC$, то условията ще бъдат изпълнени, без да има равновесие.



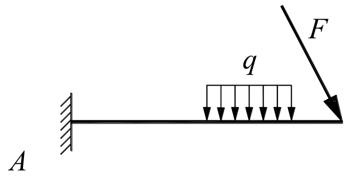

4. Решение на трите групи греди.

При съставяне на уравненията за решение използваме „независими“ уравнения, в които участват по една от търсените неизвестни. Така се избягва опасността от грешка и нейното натрупване в процеса на решение.

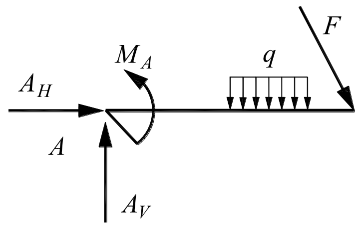
Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

„Независими“ моментови уравнения се записват за така наречените „Ритерови точки“. Това са пресечните точки на две от опорните реакции. С моментово уравнение за такава точка се определя третата опорна реакция.

4.1. Конзолна (запъната) греда.



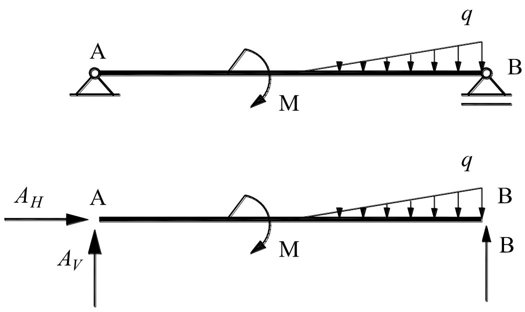

За определяне на опорните реакции прилагаме мислено принципа на освобождаването (премахваме опорните устройства и на тяхно въвеждаме съответните им опорни реакции).




Независимите уравнения ще бъдат:

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_A = 0$$

4.2. Проста греда (една неподвижна и една подвижна опора).




$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum X = 0$$

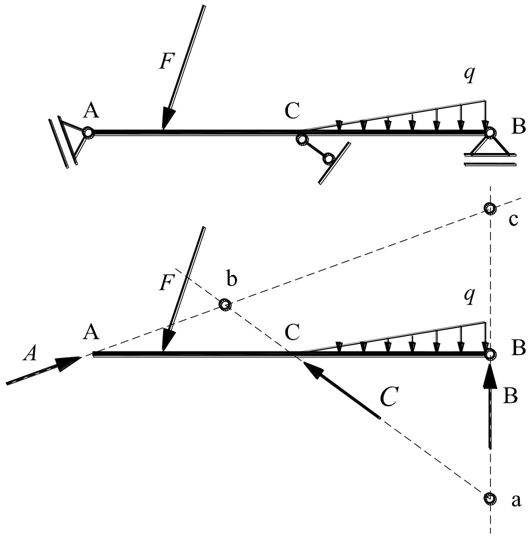
Две моментови уравнения за пресечните точки:

$A = A_H \cap A_V \quad \Rightarrow \quad \sum M_A = 0$ и

$B = A_H \cap B \quad \Rightarrow \quad \sum M_B = 0$

Опорни реакции $A_V \cap B = \infty \quad \Rightarrow \quad \sum X = 0$, моментовото уравнение се изражда в силово, перпендикулярно на $A_V$ и $B$.

4.3. Греда на три подвижни („прости“) опори.




$$\sum M_a = 0; \quad \sum M_b = 0; \quad \sum M_c = 0$$

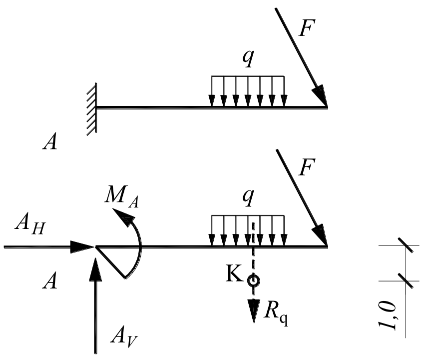
Три моментови уравнения за трите точки получени от пресичането на опорните реакции две по две.

5. Проверка.

Задължителна част от решението е проверката на получените резултати.

При проверката се търсят уравнения, в които участват колкото е възможно повече от определените неизвестни опорни реакции, като стремежът е да се елиминират външните товари.

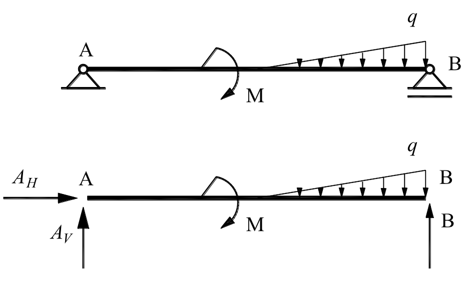
5.1. Конзолна (запъната) греда.




Решение:
$$\sum H = 0; \quad \sum V = 0; \quad \sum M_A = 0$$

Проверка:
$$\sum M_K = 0$$

5.2. Проста греда.

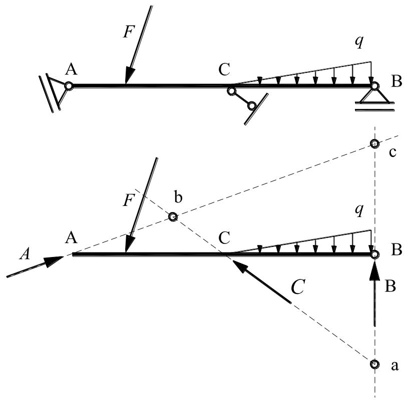



Решение:
$$\sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0; \quad \sum H = 0$$

Проверка:
$$\sum V = 0$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

5.3. Греда на три подвижни („прости“) опори.




Решение:

$\sum M_a = 0; \quad \sum M_b = 0; \quad \sum M_c = 0$

Проверка:

$\sum H = 0; \quad \sum V = 0$

При решението е удобно всички сили да се разложат на две компоненти, а разпределените товари да бъдат подменени с техните равнодействащи.

При определянето на опорните реакции мястото на приложение на концентрирания момент, ако има такъв в условието на задачата, не играе роля, защото може да се разгледа като момент на двоица, а такъв момент е свободен вектор и е приложен върху идеално твърдо тяло на произволно място. Той участва само в моментовите уравнения със своя знак.

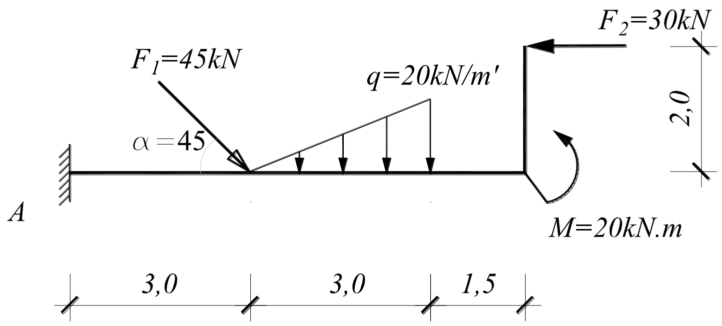
# К У Р С О В А   З А Д А Ч А   № 6

## РАВНОВЕСИЕ НА РАВНИННА СИСТЕМА СИЛИ

### I. ЗАДАЧА

За показаното на схемата тяло в равнината да се определят опорните реакции.

Да се направят необходимите проверки.




1. Разлагане на силите и определяне на равнодействащите.

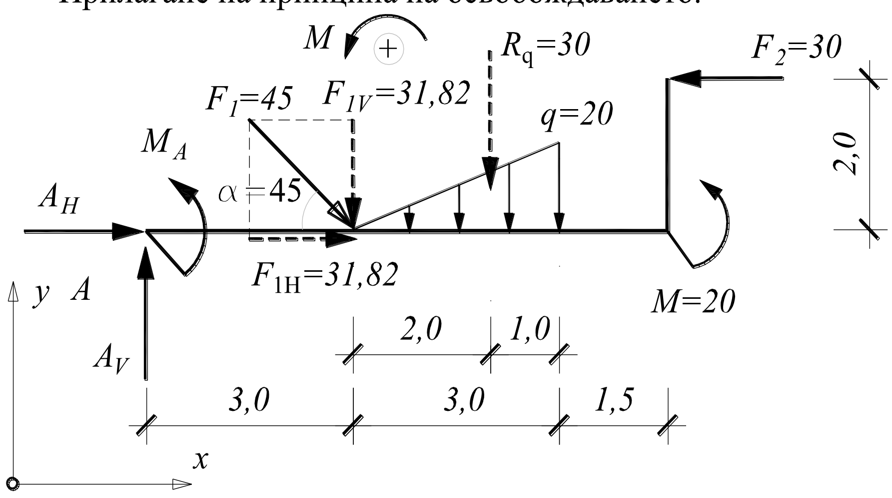
1.1 Разлагане на сила $\vec{F}_1$.

$$\vec{F}_1 \left| \begin{array}{l} F_{1H} = F_1.\cos 45 = 45.\cos 45 = 31,82kN \\ F_{1V} = -F_1.\sin 45 = -45.\sin 45 = -31,82kN \end{array} \right.$$

1.2 Разпределен товар.

Разпределен товар по линия: $R_q = \dfrac{q.L}{2} = \dfrac{20.3}{2} = 30kN$

Прилагане на принципа на освобождаването.



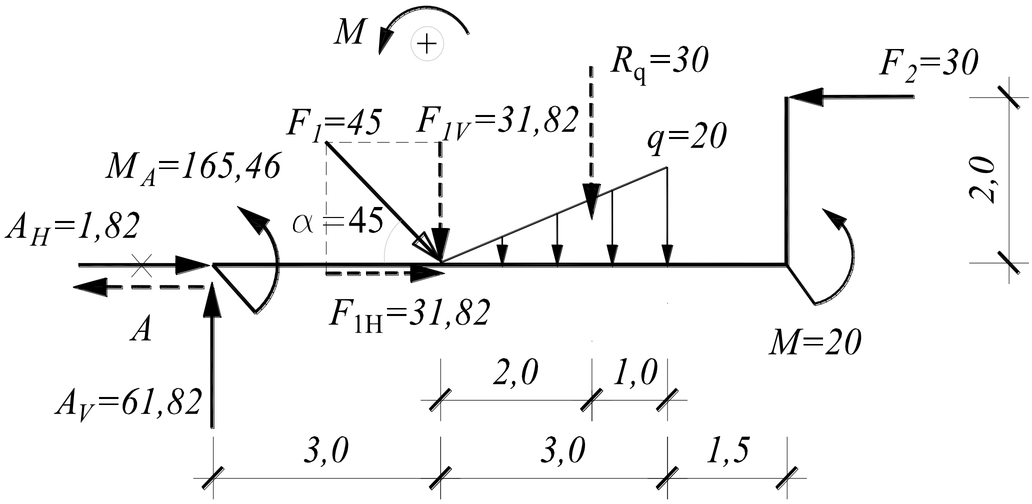

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

2. Определяне на опорните реакции.

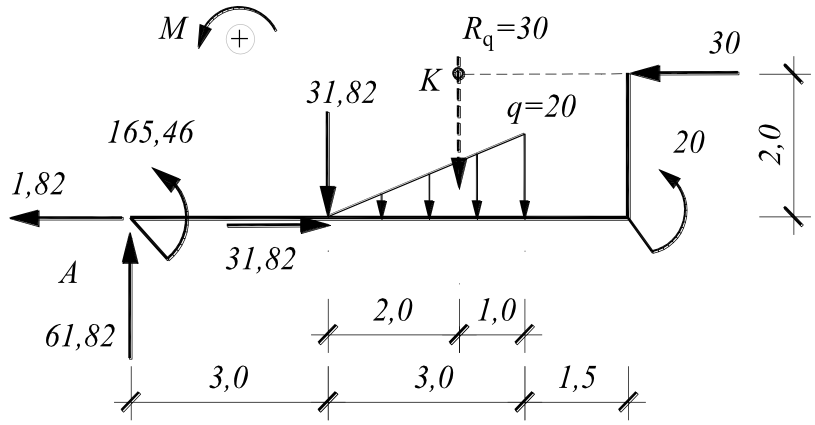
1. $\sum H = 0: \quad A_H + 31,82 - 30 = 0 \quad \rightarrow \quad A_H = -1,82kN\,(\leftarrow)$ *посоката се обръща*

2. $\sum V = 0: \quad A_V - 31,82 - 30 = 0 \quad \rightarrow \quad A_V = 61,82kN$

3. $\sum M_A = 0: \quad M_A - 31,82.3 - 30.5 + 20 + 30.2 = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = 165,46kN.m$




3. Проверка.




$$\sum M_K \overset{?}{=} 0: \quad 165,46 - 61,82.5 - 1,82.2 + 31,82.2 + 31,82.2 + 20 \overset{?}{=} 0$$
$$312,74 - 312,74 = 0$$

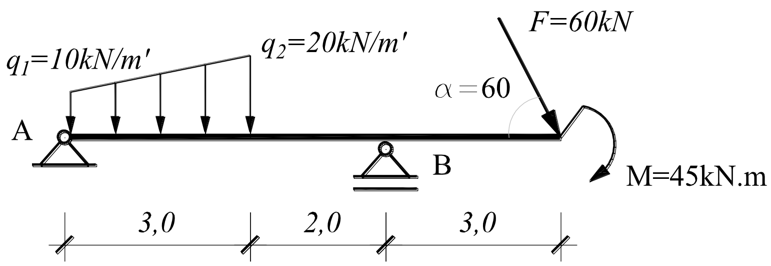

Гл. ас д-р Албена Дойчева

Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

II. ЗАДАЧА

За показаното на схемата тяло в равнината да се определят опорните реакции.

Да се направят необходимите проверки.




1. Разлагане на силите и определяне на равнодействащите.

1.1 Разлагане на сила $\vec{F}$ .

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l} F_H = F.\cos 60 = 60.\cos 60 = 30kN \\ F_V = -F.\sin 60 = -60.\sin 60 = -51,96kN \end{array}\right.$$

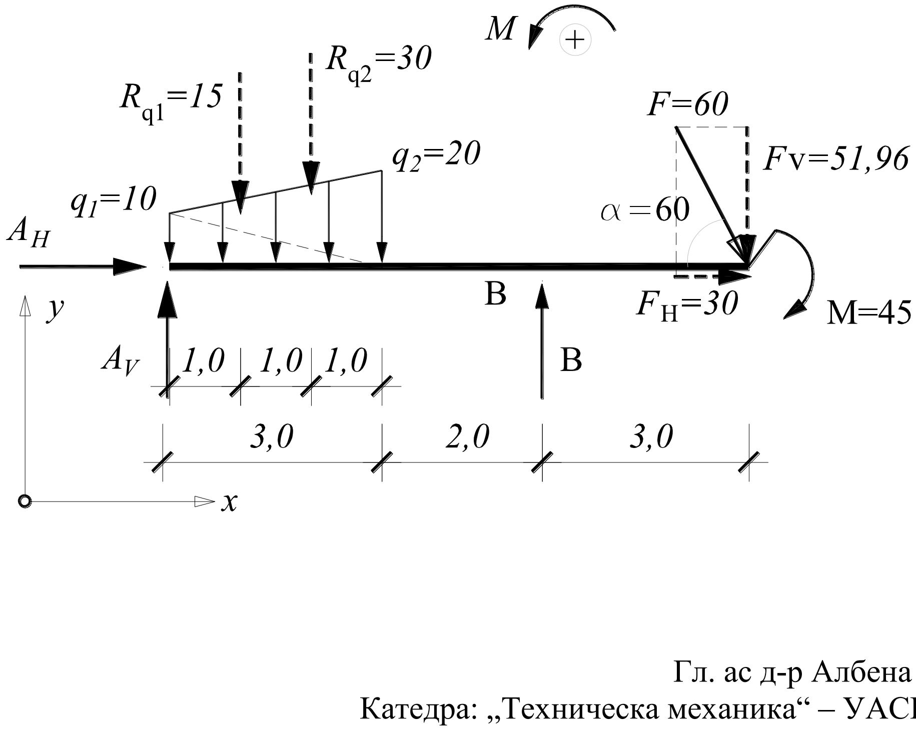
1.2 Разпределен товар.

Разпределен товар по линия (трапецовиден):

$$R_{q1} = \frac{q_1.L}{2} = \frac{10.3}{2} = 15kN$$

$$R_{q2} = \frac{q_2.L}{2} = \frac{20.3}{2} = 30kN$$

Прилагане на принципа на освобождаването.





Гл. ас д-р Албена Дойчева

Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

2. Определяне на опорните реакции.

Пресичаме неизвестните две по две и записваме моментовите уравнения.

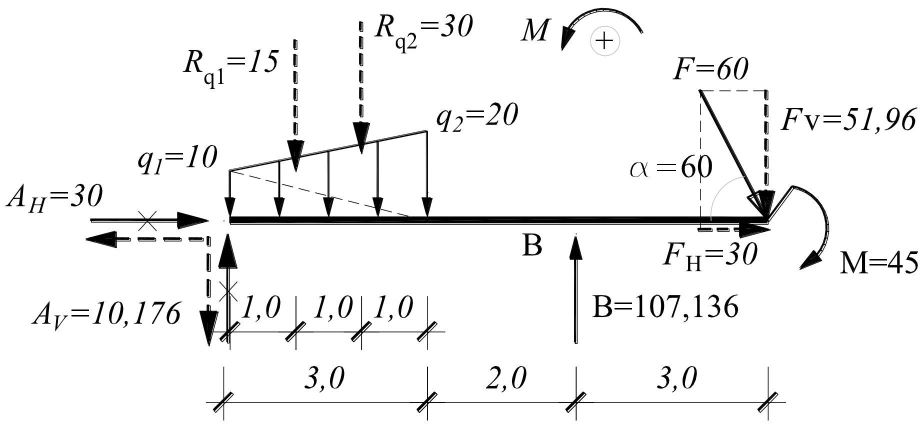
1. $\sum M_A = 0: \quad -15.1 - 30.2 + B.5 - 51{,}96.8 - 45 = 0 \quad \rightarrow \quad B_V = 107{,}136kN$

2. $\sum M_B = 0: \quad -A_V.5 + 15.4 + 30.3 - 51{,}96.3 - 45 = 0$

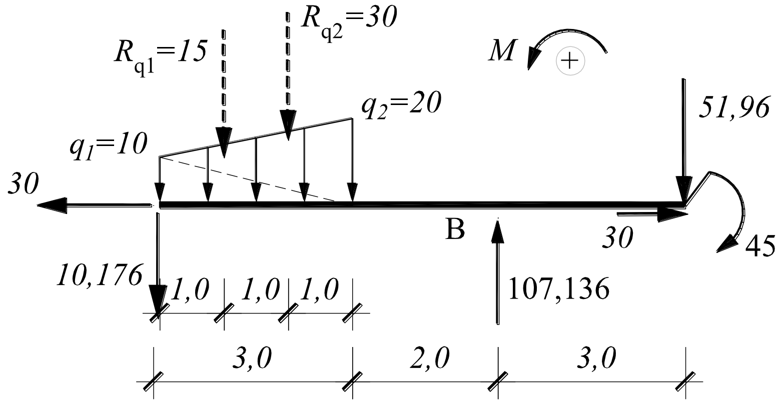
$\rightarrow \quad A_V = -10{,}176kN(\downarrow)$ *посоката се обръща*

Опорните реакции $A_V$ и $B$ са успоредни и следователно се пресичат в безкрайността. Тогава моментовото уравнение се изражда в силово, перпендикулярно на тях.

3. $\sum H = 0: \quad A_H + 30 = 0 \quad \rightarrow \quad A_H = -30kN(\leftarrow)$ *посоката се обръща*




3. Проверка:




$$\sum V \stackrel{?}{=} 0: \quad -10{,}176 - 15 - 30 - 51{,}96 + 107{,}136 \stackrel{?}{=} 0$$

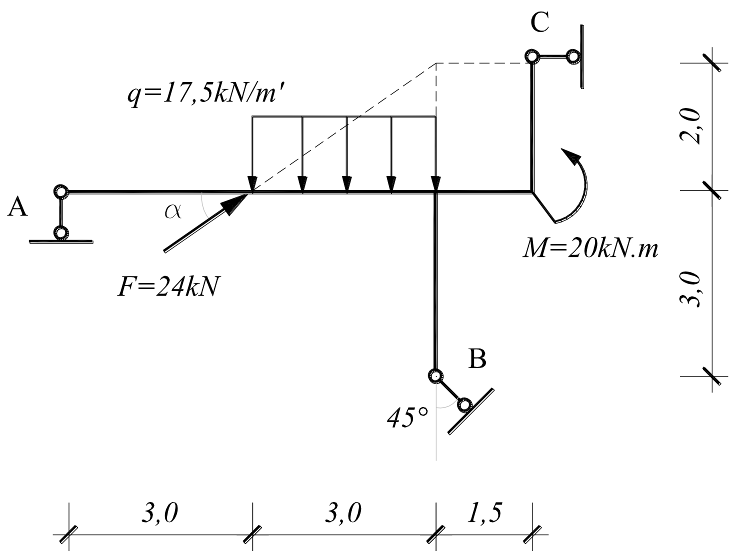
$$107{,}136 - 107{,}136 = 0$$


Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

III. ЗАДАЧА

За показаното на схемата тяло в равнината да се определят опорните реакции.

Да се направят необходимите проверки.




1. Разлагане на силите и определяне на равнодействащите.

1.1 Разлагане на сила $\vec{F}$ .

Ъгъл $\alpha$ се определя от геометрията.

$$tg\alpha = \frac{2}{3} = 0,66667 \quad \rightarrow \alpha = arctg0,66667 = 33,69^\circ \quad \left| \begin{array}{l} \cos\alpha = 0,8321 \\ \sin\alpha = 0,5547 \end{array} \right.$$

$$\vec{F} \left| \begin{array}{l} F_H = F.\cos\alpha = 24.0,8321 = 19,97kN \\ F_V = F.\sin\alpha = 24.0,5547 = 13,31kN \end{array} \right.$$

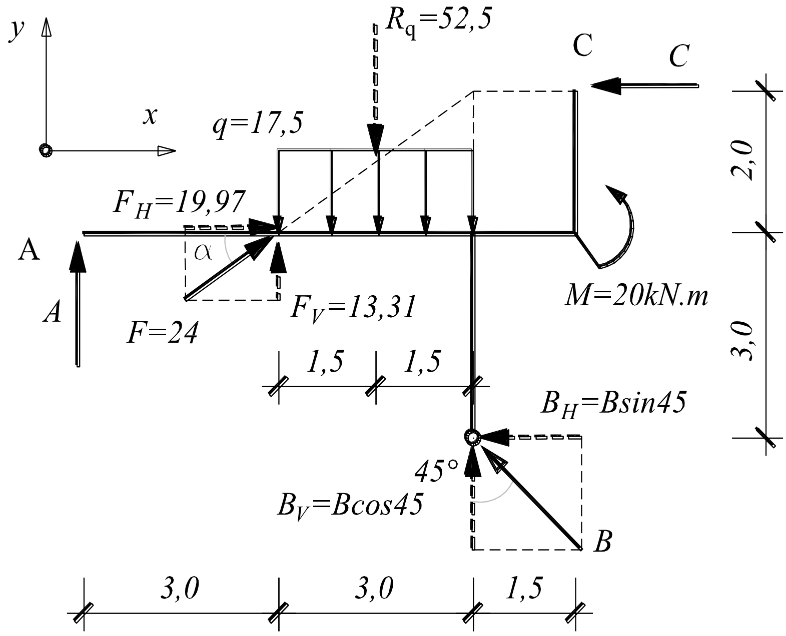
2.2 Разпределен товар.

Равномерно разпределен товар:

$$R_q = q.L = 17,5.3 = 52,5kN$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Прилагане на принципа на освобождаването.

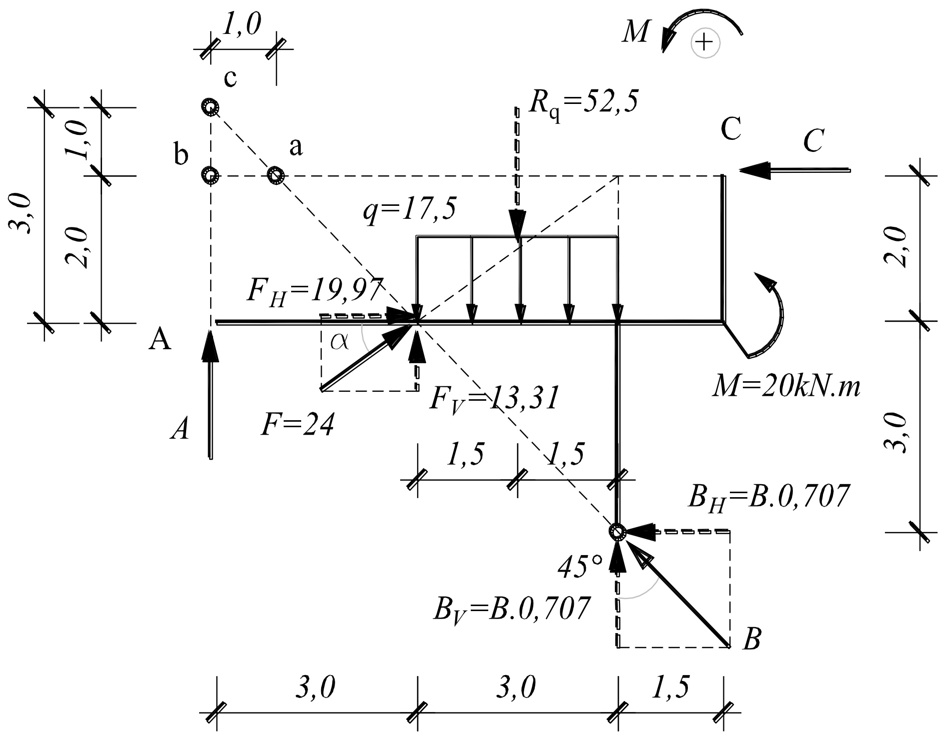



$\alpha = 33{,}69°$

$\cos\alpha = 0{,}8321$
$\sin\alpha = 0{,}5547$

2. Определяне на опорните реакции.

Пресичаме неизвестните две по две и изчертаваме „Ритеровите точки“, за които записваме моментовите уравнения.




Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

1. $\sum M_a = 0: \quad -A.1 + 19,97.2 + 13,31.2 - 52,5.3,5 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad A = -97,19kN$

Посоката на $A$ се обръща надолу $(\downarrow)$.

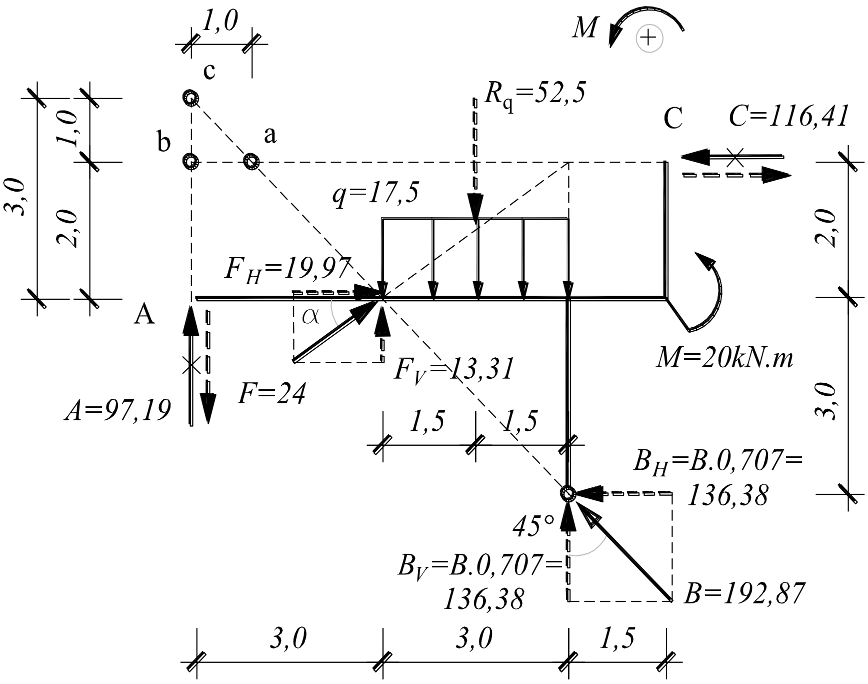
2. $\sum M_b = 0: \quad B_V.1 + 19,97.2 + 13,31.3 - 52,5.4,5 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad B_V = 136,38kN$

$$B = \frac{B_V}{\cos 45} = \frac{136,38}{\cos 45} = 192,87kN$$

$$B_H = B.\sin 45 = B_V = 136,38kN$$

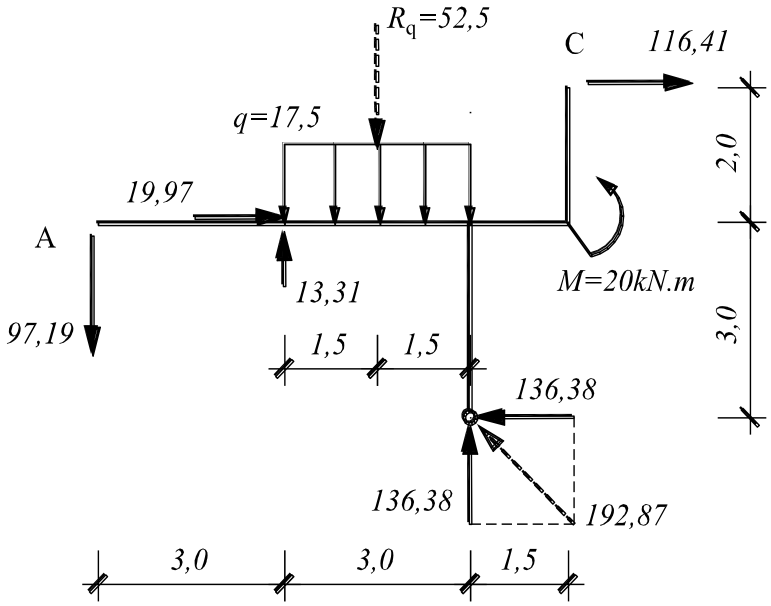
3. $\sum M_c = 0: \quad -C.1 + 19,97.3 + 13,31.3 - 52,5.4,5 + 20 = 0 \quad \rightarrow \quad C = -116,41kN$

Посоката на $C$ се обръща надясно $(\rightarrow)$.




3. Проверка:

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика" – УАСГ, София




1. $\sum V \overset{?}{=} 0: \quad -97,19 + 13,31 - 52,5 + 136,38 \overset{?}{=} 0$

$$149,69 - 149,69 = 0$$

2. $\sum H \overset{?}{=} 0: \quad 19,97 - 136,38 + 116,41 \overset{?}{=} 0$

$$136,38 - 136,38 = 0$$

Гл. ас д-р Албена Дойчева
Катедра: „Техническа механика“ – УАСГ, София

Коментар:

1. Векторите сили и моменти не се нанасят мащабно. Те са такива каквито ги виждате на няколкото чертежа в решените примери. Може просто да са съразмерни. Т.е. векторите на по-големите сили да са по-големи от по-малките по големина сили и т.н.

2. В показаните решения са използвани обръщения към теоретичните бележки в началото на материала. За целта се маркира текстът, който следва подканата виж:…...

3. В обясненията са изобразени множество схеми, които показват последователността на решение и разсъждения. В курсовата задача се изчертават само чертежите дадени в книжката със заданията. За яснота следете решения пример в ръководството.

   Това е материалът за Курсова задача 7 (по номерация от ръководството), за Вас това е шеста задача, която правите като курсова. Моля, прегледайте и решете примерите в ръководството за тренировка, както и примерите решени тук. При несигурност, можете да снимате и да ми изпратите снимката с въпроси.

Желая Ви успех в подготовката на подадената информация.

При въпроси, моля пишете на: doicheva_fhe@abv.bg.

Гл. ас д-р Албена Дойчева