Университет по архитектура
строителство и геодезия

Михаил Константинов

ЕЛЕМЕНТИ НА АНАЛИТИЧНАТА ГЕОМЕТРИЯ: КРИВИ И ПОВЪРХНИНИ ОТ ВТОРА СТЕПЕН

София, 2000

Анотация. Изложени са основни факти относно класификацията и инвариантите на фигурите от втора степен: криви от втора степен в равнината, повърхнини от втора степен в пространството и повърхнини от втора степен в многомерното пространство. Не са разгледани в подробности прави и равнини, тъй като това е направено в записките „Линейна алгебра".

Записките са предназначени за студентите от УАСГ, изучаващи дисциплината „Линейна алгебра и аналитична геометрия", както и за студенти от техническите и икономическите университети.

Елементи на аналитичната геометрия: криви и повърхнини от втора степен

Съдържание

1 Увод

В тези записки се разглеждат кривите и повърхнините от втора степен. Основно внимание е обърнато на класификацията на тези фигури когато те са зададени с общо алгебрично уравнение от втора степен. Сравнително по-слабо са застъпени фигурите от първа степен – правите и равнините, тъй като те се разглеждат в записките по линейна алгебра.

Аналитичната геометрия води началото си от работите на френските математици Р. Декарт (1596–1650) и П. Ферма (1601–1665). Почти едновременно, през 1636 г. двамата публикуват фундаментални работи, в които формулират предмета и методите на аналитичната геометрия при използване на правоъгълна координатна система (известна още като декартова координатна система). По същество аналитичната геометрия представлява синтез на алгебрата и геометрията:

– геометрични обекти (криви, повърхнини и т.н.) се изучават с методите на алгебрата, и

– алгебрични факти се интерпретират на геометричен език и с апел към геометричната интуиция.

Този синтез на двата най-мощни дяла на математиката се оказва изключително плодотворен. През 19 и 20 век се създава и алгебричната геометрия – отново синтетична дисциплина подобно на аналитичната геометрия, която е една от основните области на съвременната математика.

Настоящите записки са организирани както следва. В следващата глава са разгледани алгебричните плоски криви и в частност кривите от втора степен. Класификацията на тези криви е дадена в глава 3. Оказва се, че има 9 вида криви от втора степен. В глава 4 се изучават алгебричните повърхнини и по-специално повърхнините от втора степен. В глава 5 се прави класификация на повърхнините от втора степен, които са цели 17 вида. Глава 6 е сравнително абстрактна – в нея се разглеждат повърхнините от втора степен в n–мерното реално пространство. При $n > 3$ не е възможно да си представим тези повърхнини. Разбира се, винаги е възможно да разгледаме проекции на тези фигури върху някое дву- или тримерно подпространство, които вече подлежат на визуализация. Оказва се, че повърхнините от втора степен в n–мерното пространство са $n^2 + 3n - 1$ вида. Впрочем, тази формула работи и за $n = 1, 2, 3$.

В изложението съзнателно е избягван формалният силно математизиран стил предвид на ясното съзнание за кого са предназначени тези записки.

Авторът се надява, че неизбежните печатни грешки за всяка работа, по-дълга от 10 страници, са все пак в умерено количество. Всякакви критични бележки по тези записки ще бъдат приети с благодарност на адрес mmk_fte@uacg.bg.

София, декември 2000.

2 Алгебрични плоски криви. Криви от втора степен

В тази глава са изложени основните факти, свързани с алгебричните плоски криви и в частност с кривите от втора степен.

2.1 Означения

С $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ се означават множествата на реалните и на комплексните числа съответно, а с $\mathbb{R}^{n\times m}$ - множеството на $n \times m$ матриците с реални елементи. Имагинерната единица се означава с $\imath = \sqrt{-1}$. Прието е $\mathbb{R}^{n\times 1}$ да се означава съкратено като $\mathbb{R}^n$. За $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ с $A^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$ означаваме транспонираната матрица на матрицата A. Множеството $\mathbb{R}^n$ е линейно (или векторно) пространство над $\mathbb{R}$, но то може да се разглежда и като множество от точки с реални координати. В този смисъл, ако

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

то с $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ще означаваме както вектора x, така и точката с координати $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Диагонална $n \times n$ матрица с елементи $a_1, a_2, \ldots, a_n$ по диагонала се означава с $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Единичната $n \times n$ матрица се означава с I_n. Така $I_n = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1)$.

Ако A е квадратна матрица, с $\mathrm{tr}(A)$ и $\det(A)$ ще означаваме следата и детерминантата на A съответно.

Собствените стойности на матрицата $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ са корените на нейното характеристично уравнение

$$\det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n = 0$$

където c_k е сумата от главните минори от ред k на A. Тези собствени стойности се означават с $\lambda_k = \lambda_k(A)$, $k = 1, \ldots, k$. Собствените стойности на симетричната матрица $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ ($A^\top = A$) са реални и могат да се наредят по правилото $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

Симетричната матрица $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ е положително определена, ако $x^\top Ax > 0$ при $0 \neq x \in \mathcal{R}^n$. Необходимото и достатъчно условие за това е $\lambda_1 > 0$. Аналогично, матрицата A е отрицателно определена, когато $\lambda_n < 0$. И накрая, матрицата A е (знако) неопределена, когато $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_n > 0$.

Символът „:=" означава „равно по определение".

2.2 Полиноми на две променливи

Предполагаме, че читателят е запознат с полиномите на една променлива, макар че това не е абсолютно необходимо за работата с тези записки. Ще припомним, че реален полином на една променлива x е израз от вида

$$\varphi(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

където $a_i \in \mathbb{R}$.

Реален полином (или *многочлен*) *на две променливи* ще наричаме израз от вида

$$\begin{aligned} f(x,y) &:= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij} x^i y^j \qquad (1) \\ &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \cdots \end{aligned}$$

където a_{ij} са реални коефициенти, а x и y са реални променливи. Разбира се, в (1) някои от коефициентите могат да са нулеви.

Съгласно това определение полиномът е сума от *мономи* (или *едночлени*) $a_{ij}x^iy^j$.

Аналогично се дефинира комплексен полином на две променливи, както и полином на две променливи над произволно поле.

Полиномът

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &:= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} i a_{ij}x^{i-1}y^j \\ &= a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + \cdots \end{aligned}$$

се нарича частна производна на $f(x,y)$ по x. Аналогично се дефинира частната производна на $f(x,y)$ по y, а именно

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &:= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{n} j a_{ij}x^{i}y^{j-1} \\ &= a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + \cdots . \end{aligned}$$

Полиномът f може да се разглежда и като функция $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, която на всяка наредена двойка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ съпоставя числото $f(x,y) \in \mathbb{R}$. Разбира се, в този случай дефинираните по-горе частни производни са и частните производни на функцията f по съответните аргументи,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}, \\ f_y(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}. \end{aligned}$$

Степен на полинома (1) ще наричаме числото

$$\deg(f) := \max\{i+j : a_{ij} \neq 0\}.$$

Ако всички коефициенти a_{ij} са нулеви, полиномът се нарича *нулев*, означава се с 0 и му се приписва степен $-\infty$. Тази конвенция може да изглежда малко странна, но скоро ще стане ясно защо е необходимо на нулевия полином да се приписва такава степен.

Пример 1 Полиномът

$$x - 2y + 3x^2y - \pi x^3y^2$$

е от пета степен поради наличието на монома $-\pi x^3y^2$.

Пример 2

1) Полиноми от нулева степен са ненулевите константи

$$a_{00} \in \mathbb{R}.$$

2) Полиноми от първа степен са изразите от вида

$$a_{10}x + a_{01}y + a_{00}$$

където поне един от коефициентите a_{10}, a_{01} е ненулев, т.е.,

$$a_{10}^2 + a_{01}^2 > 0.$$

3) Полиноми от втора степен са изразите

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2p_1x + 2p_2y + q \qquad (2)$$

където поне един от коефициентите a_{ij} е ненулев, т.е.,

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 > 0$$

(тук сме приели означения, различни от използваните в (1), което не би трябвало да води до недоразумения). Изразът (2) може да се запише във векторно-матрична компактна форма като

$$r^\top Ar + 2p^\top r + q$$

където

$$r := \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right],\ p := \left[\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array} \right],\ A := \left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right],\ a_{21} = a_{12}.$$

Полиномите f от степен $\deg(f) \geq 1$ се наричат *нетривиални*. Така тривиални са полиномите, които се свеждат до константа.

Полиномът (1) се нарича *приводим* (над $\mathbb{R}$), ако съществуват два нетривиални полинома g, h, такива че

$$f(x,y) = g(x,y)h(x,y).$$

Полином, който не е приводим, се нарича *неприводим*. В частност полиномите от нулева и първа степен са неприводими.

Важно е да се знае, че даден реален полином f, който не е приводим над $\mathbb{R}$, може да се окаже приводим над $\mathbb{C}$ в смисъл, че $f = gh$, където f и g са нетривиални полиноми с комплексни коефициенти. Така например полиномът

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

е неприводим над $\mathbb{R}$, но се разлага на комплексни множители както следва

$$x^2 + y^2 = (x - \imath y)(x + \imath y).$$

Следователно полиномът f от степен ≥ 2 е приводим, ако се разлага в произведение от нетривиални множители. Ще отбележим, че ако даден полином f се представя като произведение на множителите g и h (тривиални или не), то

$$\deg(f) = \deg(g) + \deg(h).$$

Сега се вижда защо беше необходима конвенцията

$$\deg(0) = -\infty$$

за нулевия полином 0. Наистина, другата възможност беше да приемем, че $\deg(0) = l$, където $l \in \mathbb{R}$. Но тогава за всеки нетривиален полином f от равенството $0 = f.0$ щяхме да имаме $\deg(0) = \deg(f) + \deg(0)$ и $\deg(f) = 0$, което противоречи на факта, че полиномът f е нетривиален.

Всеки нетривиален f полином може да се представи като произведение от степени на неприводими полиноми

$$f(x,y) = f_1^{k_1}(x,y) f_2^{k_2}(x,y) \cdots f_m^{k_m}(x,y). \tag{3}$$

Тук $k_i \geq 1$ са кратностите, с които участват в произведението f неприводимите полиноми f_i, такива че $f_i \neq c f_j$ при $i \neq j$, където c е реална ненулева константа. Това представяне е единствено, ако се условим да не различаваме два полинома в случай, че единият се получава от другия чрез умножаване с ненулева константа.

2.3 Алгебрични криви

Двойката $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ се нарича *нула* на полинома f, ако

$$f(x_0, y_0) = 0.$$

Така нулите на един полином на две променливи са точки в равнината $\mathbb{R}^2$.

Множеството от нули

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

на полинома f се нарича *плоска алгебрична крива*, асоциирана, или свързана с f. В този случай зависимостта

$$f(x, y) = 0$$

се нарича *уравнение на кривата.* Понякога за краткост самото уравнение $f(x, y) = 0$ (записвано и като $f(x, y) = c$, където c е реална константа) се нарича алгебрична крива. Степента на полинома f по определение е и *степен на алгебричната крива* $\Gamma(f)$.

Ясно е, че $\Gamma(0) = \mathbb{R}^2$ и $\Gamma(c) = \emptyset$ когато $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Тези случаи са тривиални и поради това по-нататък ще разглеждаме само криви, асоциирани с нетривиални полиноми (т.е., с полиноми от първа и по-висока степен).

Кривите от първа степен са всъщност правите линии. Общото уравнение на всяка права $\ell \subset \mathbb{R}^2$ може да се запише във вида

$$ax + by + c = 0$$

където a и b не са едновременно нули. Следователно можем да приемем, че

$$a^2 + b^2 = 1.$$

Общото уравнение на правата може да се запише и като

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \delta \tag{4}$$

където $0 \leq \varphi < 2\pi$ и $\delta \geq 0$. Виждаме, че правата се определя от два параметъра. В случая това са φ и δ.

Когато правата не е успоредна на ординатната ос Oy (това е случаят когато $b \neq 0$, което е еквивалентно на $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$), уравнението на правата може да се запише като

$$y = kx + m := -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Аналогично, когато $a \neq 0$, което е еквивалентно на $\varphi \neq \pi/2$ и $\varphi \neq 3\pi/2$, имаме

$$x = ly + n := -\frac{b}{a} - \frac{c}{a}.$$

Нека (x_0, y_0) е точка от правата ℓ, т.е.,

$$ax_0 + by_0 + c = 0.$$

Тогава уравнението на правата може да се запише като

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

или

$$(x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi = 0.$$

Ако се въведе векторът $v := (a, b) = [a, b]^\top$, то имаме

$$v^\top(r - r_0) = 0$$

където

$$r := (x, y), \ r_0 := (x_0, y_0).$$

И накрая, уравнението на правата ℓ може да се запише в параметрична форма

$$\begin{aligned} x &= x(t) = -bt + x_0, \\ y &= y(t) = at + y_0, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

или

$$r = r(t) = ct + r_0,\ r := (x, y),\ r_0 := (x_0, y_0)$$

където $c = [-b, a]^\top$ е *направляващият вектор* на правата.

Променливата t се нарича параметър на правата, който е удобно да се интерпретира като „време”. На всяка стойност на времето съответства определено положение на т. нар. *изобразяваща точка* с координати $x(t), y(t)$. Така в момента $t = 0$ изобразяващата точка се намира в началното положение (x_0, y_0). Изобразяващата точка се движи по правата със скорост $\sqrt{a^2 + b^2}$, или с единична скорост, ако $a^2 + b^2 = 1$. Тази кинематична интерпретация на правата линия е много удобна при решаване на задачи, понеже апелира директно към нашата физико-геометрична интуиция.

Две алгебрични криви се наричат *еквивалентни*, ако едната може да се получи от другата чрез транслация и ротация. Така например всички прави в равнината са еквивалентни, всички окръжности с даден радиус са еквивалентни, и т.н.

Да означим $r = (x, y)$ и нека $R \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ е ротацията

$$R = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Тогава алгебричните криви $\Gamma(f)$ и $\Gamma(g)$ са еквивалентни, ако съществуват ненулева константа κ, ротация R и вектор $r_0 \in \mathbb{R}^2$, такива че

$$f(r) = \kappa g(Rr + r_0).$$

Към всяка алгебрична крива $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ можем да отнесем едно множество $[\Gamma] \subset \mathbb{R}^2$, наречено *класа на еквивалентност*, състоящо се от всички криви, еквивалентни на Γ. Уравненията на някои представители на този клас са в особено опростена (или *канонична*) форма, зависеща от минимален брой параметри. Такова е например уравнението (4).

Алгебричните криви могат да представляват сложни геометрични обекти и са предмет на изучаване в *алгебричната геометрия.* Кривите от втора степен, обаче, са сравнително прости фигури и се изучават с апарата на аналитичната геометрия. В примера по-долу са дадени някои алгебрични криви от втора степен.

Пример 3 Кривата:

1. $x^2 + y^2 = 1$ е единичната окръжност, т.е., окръжността с център в точката $(0,0)$ и с радиус 1;

2. $x^2 + y^2 = 0$ е точката $(0,0)$;

3. $x^2 + y^2 = -1$ е празното множество $\emptyset$;

4. $xy + 2x - y - 2 = 0$ се разпада на две перпендикулярни прави $x = 1$ $y = -2$;

5. $x^2 - y^2 = 0$ се разпада на бисектрисите $y = x$ на I, III квадрант и $y = -x$ на II, IV квадрант.

Кривата $\Gamma(f)$ се нарича *приводима* (респ. *неприводима*), ако полиномът f е приводим (респ. неприводим).

Според една знаменита *теорема на Безу* две неприводими алгебрични криви в $\mathbb{R}^2$ от степени съответно m и n или съвпадат, или се пресичат в не повече от mn точки (в $\mathbb{C}^2$ те или съвпадат, или имат точно mn общи точки; при това в общите точки се отчита кратността на контакт).

Пример 4 Да разгледаме взаимното положение на окръжността

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta^2, \ \delta > 0$$

с център (x_0, y_0) и радиус δ и правата

$$ax + by + c = 0,\ a^2 + b^2 > 0$$

като ще считаме, че $a^2 + b^2 = 1$ (ако последното равенство не е изпълнено първоначално, можем да разделим с $\sqrt{a^2 + b^2}$ двете страни на уравнението на правата). За целта параметризираме правата както следва:

$$x = -bt - ac,\ y = at - bc,\ t \in \mathbb{R}$$

и заместваме тези зависимости в уравнението на окръжността. Получаваме квадратно уравнение за t:

$$t^2 - 2(a\eta - b\xi)t + \xi^2 + \eta^2 - \delta^2 = 0$$

където

$$\xi := ac + x_0,\ \eta := ac + y_0.$$

Корените на уравнението са

$$t_{1,2} = a\eta - b\xi \pm \sqrt{\delta^2 - (a\xi + b\eta)^2}.$$

Следователно:

– при $\delta > |a\xi + b\eta|$ правата пресича окръжността в две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), където

$$x_i = -bt_i - ac,\ y_i = at_i - bc$$

– при $\delta = |a\xi + b\eta|$ правата се допира до окръжността в точката (x_1, y_1), където

$$x_1 = -bt_1 - ac,\ y_1 = at_1 - bc,\ t_1 = a\eta - b\xi$$

– при $\delta < |a\xi + b\eta|$ правата не пресича окръжността.

Приводимата крива $\Gamma(f)$, съответстваща на полинома $f = gh$, се разпада на две компоненти $\Gamma(g)$ и $\Gamma(h)$:

$$\Gamma(f) = \Gamma(g) \cup \Gamma(h).$$

Така всяка крива $\Gamma(f)$ може да се разложи на неприводими компоненти

$$\Gamma(f) = \Gamma(f_1) \cup \Gamma(f_2) \cup \cdots \cup \Gamma(f_m)$$

съответно с разлагането (3) на полинома f на степени на неприводимите множители $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Когато някой от неприводимите полиноми f_i участва в разложението на f в степен $k_i > 0$, компонентата $\Gamma(f_i) \subset \Gamma(f)$ се нарича *k_i-кратна крива.* Така например уравненията $x = 0$ и $x^2 = 0$ определят едно и също множество (ординатната ос) в $\mathbb{R}^2$, но за правата $x^2 = 0$ казваме, че е *двойна.*

Пример 5 Кривите 1, 2 и 3 от пример 3 са неприводими, а кривите 4 и 5 – приводими.

Пример 6 Кривата Γ с уравнение

$$x^5 + xy^2 = x(x^4 + y^2) = 0$$

е приводима и се разпада на неприводимите си компоненти Δ и Ψ, където Δ е точката $(0, 0)$, а Ψ е ординатната ос с уравнение $x = 0$. В този случай $\Delta \subset \Psi$.

Възможно е една крива да е неприводима, но да се разпада на отделни клонове, представляващи непресичащи се множества в $\mathbb{R}^2$. Такава е например хиперболата, разгледана в следващата глава.

Кривата $\Gamma(f)$ се нарича *рационална*, ако съществуват две рационални функции φ, ψ на един аргумент, поне една от които не е постоянна, и такива че

$$f(\varphi(t), \psi(t)) = 0,\ t \in \mathbb{R} \backslash \Omega$$

където Ω е множеството от нули на знаменателите на φ и ψ. Ще напомним, че една функция е рационална, ако тя може да се престави като отношение на два полинома.

Ако кривата $\Gamma(f)$ е рационална, то зависимостите

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \mathbb{R} \backslash \Omega$$

представляват *рационална параметризация* на кривата $\Gamma(f)$. Когато една крива е рационална, съществуват безбройно много нейни рационални параметризации.

Въпросът за рационалност на дадена крива $f(x, y) = 0$ е много труден в общия случай. Също така много труден е въпросът дали дадена крива $f(x, y) = 0$ съдържа *рационални точки* (ξ, η), т.е., точки, чиито координати ξ и η са рационални числа. Знаменитата и доскоро недоказана Велика хипотеза на Ферма гласи, че уравнението

$$a^n + b^n = c^n$$

няма решение в цели положителни числа a, b, c и n при $n > 2$. Ако положим $x = a/c$, $y = b/c$, то Великата хипотеза на Ферма (от 1993 вече е теорема!) е еквивалентна на твърдението, че кривата

$$x^n + y^n = 1$$

не съдържа рационални точки при n цяло и по-голямо от 2.

Пример 7 Кубичната крива $y^2 = x^2 + x^3$ съдържа точката $(0,0)$ и се рационализира чрез полагането $y = vx$. След заместване в уравнението на кривата получаваме $v^2 = x + 1$, откъдето следва рационалната параметризация

$$x = v^2 - 1, \ y = v(v^2 - 1).$$

Очевидно кривите от първа степен (правите) са рационални. Лесно се вижда, че и окръжностите са рационални.

Пример 8 Окръжността $x^2 + y^2 = 1$ е рационална крива с параметризация

$$x = \frac{2u}{1+u^2}, \ y = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \ u \in \mathbb{R}.$$

2.4 Пресичане на линии

Да разгледаме въпроса за пресичане на произволна крива Γ от n-та степен $(n \geq 2)$

$$f(r) = f(x,y) = 0, \ r = (x,y)$$

с правата ℓ

$$r = ct + r_0, \ t \in \mathbb{R}$$

минаваща през точката r_0 и с направляващ вектор $c \in \mathbb{R}^2$. След заместване на параметризацията на правата в уравнението на кривата получаваме уравнение от n-та степен за t с коефициенти A_i, зависещи от c и r_0

$$A_n(c)t^n + A_{n-1}(c,r_0)t^{n-1} + \cdots + A_1(c,r_0)t + A_0(r_0) = 0.$$

Ще отбележим, че старшият коефициент A_n зависи само от c, а свободният член $A_0 = f(r_0)$ – само от r_0.

Когато $A_n(c) \neq 0$ имаме n корена $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (между тях може да има кратни и/или комплексни), зависещи от c и r_0,

$$t_i = t_i(c, r_0), \ i = 1, \ldots, n.$$

На всеки реален корен t_i отговаря пресечна точка

$$r_i = ct_i + r_0$$

на Γ и ℓ.

Когато t_i е k–кратен корен казваме, че в точката r_i има *пресичане от ред* $k \geq 1$. Пресичането от първи ред е типичният случай. Пресичането от втори ред се нарича още *допиране*, или допиране от първи ред. Изобщо, пресичането от k–ти ред се нарича допиране от $(k-1)$–ви ред.

Когато кривата и правата се допират в точката

$$(x_0, y_0) \in \Gamma \cap \ell$$

казваме, че правата е допирателна към кривата в съответната точка. Допирателната към кривата Γ в точката $(x_0, y_0) \in \Gamma$ може да се определи и като граничното положение на секущата през точките (x_0, y_0) и $(\xi, \eta) \in \Gamma$ когато $\xi \to x_0$ и $\eta \to y_0$. С използване на тази дефиниция може да се покаже, че уравнението на допирателната към алгебричната крива с уравнение

$$f(x, y) = 0$$

в точката (x_0, y_0) е

$$(x - x_0) f_x(x_0, y_0) + (y - y_0) f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{5}$$

Векторите c, за които $A_n(c) \neq 0$, определят т.нар. *неасимптотични направления* на кривата.

Когато t_i е комплексен корен казваме, че Γ и ℓ се пресичат в мнимата точка $ct_i + r_0$.

Когато $A_n(c) = 0$ казваме, че направлението, определено от вектора c, е *асимптотично.*

В случай на асимптотично направление са възможни три основни подслучая, а именно:

1. Съществува цяло число r $(1 \leq r \leq n-1)$, такова че

$$A_n(c) = A_{n-1}(c, r_0) = \cdots = A_{r+1}(c, r_0) = 0, \ A_r(c, r_0) \neq 0.$$

Тук имаме уравнението

$$A_r(c, r_0)t^r + A_{r-1}(c, r_0)t^{r-1} + \cdots + A_1(c, r_0)t + A_0(r_0) = 0$$

което има r корена $t_1, t_2, \ldots, t_r$. В този случай казваме, че Γ и ℓ имат допиране от $(n-r)$-ти ред в безкрайност, и се пресичат в r точки $x_j = ct_j + r_0$ (последните на свой ред могат да са реални или комплексни).

2. Изпълнено е условието

$$A_n(c) = A_{n-1}(c, r_0) = \cdots = A_1(c, r_0) = 0, \ A_0(r_0) \neq 0.$$

Тук уравнението за t се свежда до противоречивото равенство $A_0(r_0) = 0$. Тук казваме, че Γ и ℓ имат допиране от n-ти ред в безкрайност.

3. Изпълнено е условието

$$A_n(c) = A_{n-1}(c, r_0) = \cdots = A_1(c, r_0) = A_0(r_0) = 0.$$

Тук уравнението за t се свежда до тъждеството $0 = 0$ и следователно правата ℓ лежи изцяло в Γ.

2.5 Криви от втора степен

Нека $r_0 = (x_0, y_0)$ и $r_1 = (x_1, y_1)$ са точки (или вектори) от $\mathbb{R}^2$. *Разстояние* между тези точки е величината

$$d(r_0, r_1) := |r_0 - r_1| := \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}.$$

Нека Γ_0 и Γ_1 са множества от точки в равнината $\mathbb{R}^2$. *Разстояние* между тези множества е точната долна граница на множеството на разстоянията между точки от Γ_0 и Γ_1. Това е величината

$$d(\Gamma_0, \Gamma_1) = \inf\{|r_0 - r_1| : r_0 \in \Gamma_0,\, r_1 \in \Gamma_1\}.$$

Означенията за тези разстояния се съгласуват, ако едноточковото множество $\{r_0\}$ се означи просто като r_0.

Да разгледаме сега по-подробно кривите от втора степен, описвани от уравнението

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2p_1x + 2p_2y + q = 0$$

съответстващо на полинома (2) от пример 2. Тези криви се наричат още *конични сечения*, или съкратено *коники*. Наименованието се дължи на факта, че трите същински коники – елипса, хипербола и парабола, могат да се получат като сечения на прав кръгов конус с равнини, сключващи различни ъгли с оста на конуса. Това е било известно още на древните гръцки математици.

Според една друга дефиниция същинската коника е геометрично място на точки r от равнината, такива че

$$\frac{d(r, r_0)}{d(r, \ell)} = \varepsilon$$

където $r_0 \in \mathbb{R}^2$ е зададена точка, $\ell \subset \mathbb{R}^2$ е зададена права и $\varepsilon > 0$ е константа. В зависимост от стойността на ε имаме елипса ($\varepsilon < 1$), парабола ($\varepsilon = 1$) и хипербола ($\varepsilon > 1$). Точката r_0 се нарича *фокус*, правата ℓ – *директриса*, а числото ε – *ексцентриситет* на кониката.

Уравнението на кониката в полярни координати ρ, θ се получава както следва. Нека полярният лъч е перпендикулярен на ℓ и с начало във фокуса r_0. Ако означим $\delta := d(r_0, \ell)$, то за точките r от кониката, които са от страната на ℓ, където е точката r_0, имаме $\rho = d(r, r_0)$ и $d(r, \ell) = \delta - \rho \cos \theta$. Оттук

$$\frac{\rho}{\delta - \rho \cos \theta} = \varepsilon.$$

Следователно уравнението на кониката в полярни координати е

$$\rho = \frac{\varepsilon \delta}{1 + \varepsilon \cos \theta}.$$

Да въведем векторната променлива

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

и да положим

$$p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Тогава уравнението на кониката $\Gamma(f)$ може да се запише във вида

$$f(x, y) = r^\top A r + 2p^\top r + q = 0.$$

Ако положим

$$M := \begin{bmatrix} A & p \\ p^\top & q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \ \widehat{r} := \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \qquad (6)$$

уравнението на кониката може да се запише и като

$$\widehat{r}^\top M\widehat{r} = 0.$$

Ще напомним, че с (x, y) означаваме както точка от равнината с координати x, y, така и вектора $r = [x, y]^\top$ предвид взаимно-еднозначното съответствие между точките в равнината с избрана координатна система Oxy и векторите с начало в точката O.

Ще покажем как кониката може да се рационализира. Нека $\Gamma(f) \neq \emptyset$ и $r_0 = (x_0, y_0)$ е точка от $\Gamma(f)$, т.е., $f(x_0, y_0) = 0$. Да прекараме през r_0 права ℓ с параметрично уравнение $r = r_0 + ct$, където $t \in \mathbb{R}$ е текущ параметър и $c \in \mathbb{R}^2$ е произволен вектор, такъв че $c^\top Ac \neq 0$, т.е., искаме c да не определя асимптотично направление.

Избирайки различни направляващи вектори c получаваме семейство от прави ℓ_c през r_0, всяка от които (евентуално) пресича $\Gamma(f)$ в още една точка $r = (x, y)$. За да намерим стойността на t, при която ℓ_c пресича кониката $\Gamma(f)$ в точка (x, y), заместваме r с $r_0 + ct$ в уравнението $f(r) = 0$, т.е.,

$$f(r_0 + ct) = 0.$$

Получаваме квадратно уравнение

$$(c^\top Ac)t^2 + 2(r_0^\top A + p^\top)ct = 0$$

за t с коефициенти, зависещи от r_0 и c и с нулев свободен член $f(r_0) = 0$. Корените на уравнението са $t_1 = 0$ (съответстващ на точката r_0) и

$$t_2 := -\frac{2(r_0^\top A + p^\top)c}{c^\top Ac}$$

(съответстващ на точката r). Оттук

$$r = (x, y) = r_0 - \frac{2(r_0^\top A + p^\top)c}{c^\top Ac}c.$$

Да изберем $c = [1, v]^\top$ или $c = [u, 1]^\top$ и нека w е някой от параметрите u или v. Тогава координатите x, y на точката от $\Gamma(f)$ са рационални функции на w от вида $P(w)/Q(w)$, където P и Q са полиноми от втора степен.

2.6 Упражнения

2.1 Разложете на множители g, h полинома

$$f(x, y) := 3xy^2 - y^3 - 3x^2 - y^2 + xy + x$$

и постройте приводимата крива

$$\Gamma(f) = \Gamma(g) \cup \Gamma(h).$$

2.2 Намерете пресечните точки на кривите

$$x^2 + 2y^2 = 1$$

и

$$y = x^2 - x + 0.25.$$

2.3 Изследвайте взаимното разположение на окръжността

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

и правата $y = kx$ в зависимост от стойностите на параметъра k.

2.4 Намерете рационална параметризация на кривата

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + 4y = 0.$$

2.5 Намерете рационална параметризация на кривата

$$x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y + x^2 + y^2 + xy = 0.$$

2.6 Покажете, че кривата $\Gamma(f)$ се рационализира, ако полиномът f е сума на мономи само от n-та и $(n-1)$-ва степен.

2.7 Ако полярният лъч е неотрицателната абсцисна полуос, покажете, че уравнението на правата

$$ax + by + c = 0$$

може да се запише в полярни координати ρ, θ като

$$\rho \cos(\varphi - \theta) = \rho_0.$$

Изразете φ и ρ_0 чрез a, b и c.

2.8 Покажете, че кониката с фокус (x_0, y_0) и директриса

$$ax + by + c = 0$$

има уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + k(ax + by + c)^2 = 0$$

където k е параметър. Определете при какви стойности на k кониката е елипса, парабола или хипербола.

3 Класификация и канонизация на кривите от втора степен

3.1 Уводни бележки

В тази глава ще разгледаме въпросите за класификация на кривите от втора степен

$$f(x,y) = f(r) := r^\top Ar + 2p^\top r + q = 0 \tag{7}$$

където

$$r := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \ p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \ A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

и за опростяване (канонизиране) на уравненията им. Това опростяване се прави чрез подходяща смяна на променливите, включваща транслации и ротации:

$$r = U\rho + r_0$$

където $\rho := [\xi, \eta]^\top$ е нова векторна променлива, $r_0 := [x_0, y_0]^\top$ е постоянен вектор и $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ е ортогонална матрица, т.е.

$$U^\top U = I_2.$$

Ще напомним, че ортогоналните 2×2 матрици се свеждат до един от следните два типа:

– чисти ротации (на ъгъл φ)

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

– отражения

$$U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

С помощта на транслацията

$$r = r_1 + r_0,\ r_1 = [x_1, y_1]^\top$$

където r_1 е нова векторна променлива, се анулират (доколкото това е възможно) линейните членове $2p^\top r_1$ в уравнението $f(x_1, y_1) = 0$ на кониката, а с ротацията $r_1 = U\rho$ се анулира смесеното произведение $2a_{12}x_1y_1$ в случай, че $a_{12} \neq 0$.

Кривите от втора степен се разделят на три класа (или вида): *елиптичен, хиперболичен* и *параболичен*. Видът на кривата се определя от квадратичните членове $r^\top Ar$, т.е., от матрицата A и по-точно от нейните собствени стойности

$$\lambda := \lambda_1(A),\ \mu := \lambda_2(A).$$

3.2 Елиптичен клас

Елиптичният клас, или клас E, се характеризира с условието, че собствените стойности λ, μ на A са ненулеви и с еднакъв знак, т.е.,

$$\lambda\mu > 0.$$

Като вземем предвид уравнението за собствените стойности на A виждаме, че условието за елиптичност е

$$\lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

което е еквивалентно на неравенството

$$a_{11}a_{22} > a_{12}^2.$$

По-нататък без ограничаване на общността ще приемем, че

$$\lambda, \mu > 0$$

тъй като при $\lambda, \mu < 0$ след умножаване на уравнението с -1 стигаме до случая с положителни собствени стойности.

Да извършим смяната

$$r = U\rho + r_0.$$

След заместване в уравнението на кониката (7) получаваме

$$f(U\rho + r_0) = \rho^\top U^\top A U \rho + 2(Ar_0 + p)^\top U\rho + q_1 = 0 \qquad (8)$$

където

$$q_1 := f(r_0) = r_0^\top A r_0 + 2p^\top r_0 + q = q - p^\top A^{-1} p.$$

Интересно е да се отбележи, че при тази смяна матрицата M, определена в (6), се трансформира в

$$N = \begin{bmatrix} A & p + Ar_0 \\ p^\top + r_0^\top A & f(r_0) \end{bmatrix}.$$

Непосредствено се проверява, че

$$N = V^\top M V$$

където

$$V = V(U, r_0) := \begin{bmatrix} U & r_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Имаме

$$\det(V) = \det(U).1 = 1$$

и в частност V е обратима матрица. Следователно величината

$$J_3 := \det(M) = \det(N)$$

която не е тъждествено постоянна, не се променя при направената смяна, включваща транслации и ротации в $\mathbb{R}^2$. Такива величини се наричат *инварианти* на уравнението на кривата, съответно на матрицата M.

Тъй като при смяната матрицата A се преобразува в $U^\top AU$, то и собствените стойности λ_1 и λ_2 на A също са инварианти (поради симетрията на A нейните собствени стойности са реални). На практика се работи с други две инварианти, а именно

$$\begin{aligned} J_1 &:= \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A), \\ J_2 &:= \lambda_1 \lambda_2 = \det(A). \end{aligned}$$

Това са коефициентите на характеристичния полином на матрицата A,

$$\det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 - J_1 \lambda + J_2 = 0.$$

Ще отбележим, че величините J_1, J_2 и J_3 не са инварианти на кривата, а само на нейното уравнение. Действително, ако умножим уравнението $f(r) = 0$ с ненулевата константа κ, то новото уравнение $\kappa f(r) = 0$ описва същата крива, но инвариантите му вече са κJ_1, $\kappa^2 J_2$ и $\kappa^3 J_3$ съответно.

Да преминем сега към опростяване на уравнението на кониката. За да елиминираме линейния член

$$2(Ar_0 + p)^\top U \rho$$

в уравнението (8) при всяко ρ е необходимо и достатъчно да анулираме вектора $Ar_0 + p$ чрез подходящ избор на транслационния вектор r_0. Това дава

$$r_0 = -A^{-1} p.$$

Ще отбележим, че тук матрицата A е обратима, тъй като собствените й стойности са ненулеви.

Нека освен това изберем ортогоналната матрица U така, че $U^\top AU$ да бъде Шур-формата на A, която в случая (поради симетричността на A) е диагонална матрица S с елементи λ, μ по главния диагонал. В резултат стигаме до уравнението

$$\rho^\top S\rho + q_1 = \lambda\xi^2 + \mu\eta^2 + q_1 = 0.$$

Оттук впрочем следва, че $N = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, q_1)$ и

$$J_3 = \det(N) = \lambda\mu q_1.$$

Оттук

$$q_1 = \frac{J_3}{\lambda\mu} = \frac{J_3}{J_2}.$$

За удобство на читателя ще укажем как най-лесно може да се построи ротацията U в случай, че $a_{12} \neq 0$. За целта е необходимо да се намери собствената структура на A, тъй като стълбовете на U са нормираните собствени вектори на A. Пресмятаме собствените стойности на A от характеристичното уравнение

$$z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

и получаваме

$$\lambda, \mu = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Пресмятаме първия стълб $u = [c, s]^\top$ на ротацията U като нормиран собствен вектор ($c^2 + s^2 = 1$) на матрицата A, съответстващ на собствената стойност λ, т.е., $Au = \lambda u$. Получаваме

$$c = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda - a_{11})^2}}, \ s = \frac{\lambda - a_{11}}{\sqrt{a_{12}^2 + (\lambda - a_{11})^2}}.$$

Вторият стълб на U може да се определи аналогично като нормиран собствен вектор, съответстващ на μ, но по-просто е направо да напишем

$$U = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}.$$

Вижда се, че ако ρ удовлетворява уравнението на кривата, то и $-\rho$ също го удовлетворява. Така получената крива е симетрична относно началото O_1 на новата координатна система $O_1\xi\eta$. Такава крива се нарича *централна* с център началото O_1.

По-нататък за удобство вместо ξ, η ще използваме отново старите означения x, y. Така кривата се записва като

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + q_1 = 0.$$

В зависимост от числото q_1 са възможни три случая.

Случай Е1 (същинска елипса) Този случай се характеризира с условието $q_1 < 0$. След разделяне на двете страни на уравнението с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

където

$$a = \sqrt{\frac{|q_1|}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{|q_1|}{\mu}}.$$

Получената фигура се нарича *елипса* с полуоси a и b и център $(0,0)$. Тук величините a и b са инварианти не само на уравнението, но и на кривата.

При $a = b$ фигурата е окръжност с радиус $a > 0$.

Елипсата се параметризира чрез зависимостите

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$$

където $\varphi \in [0, 2\pi)$ е параметър на кривата. Една рационална параметризация на елипсата се дава от

$$x = a\frac{2u}{1+u^2},\ y = b\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

където $u \in \mathbb{R}$ е параметър на кривата.

Случай E2 (точка) Този случай се определя от условието $q_1 = 0$, при което

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 0.$$

Тъй като по предположение $\lambda, \mu > 0$, то в $\mathbb{R}^2$ имаме единствено решение $x = y = 0$. Така кривата се свежда то точката $(0, 0)$.

В комплексната равнина $\mathbb{C}^2$ този случай отговаря на двойка мними прави

$$x\sqrt{\lambda} = \pm\imath y\sqrt{\mu}$$

които се пресичат в реалната точка $(0, 0)$.

Случай E3 (празно множество) Този случай се характеризира с неравенството $q_1 > 0$. Разделяме двете страни на уравнението с q_1 и получаваме уравнение от вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Тук няма реални двойки (x, y), които да удовлетворяват уравнението на кривата, т.е., тя е празното множество в $\mathbb{R}^2$.

В $\mathbb{C}^2$ фигурата е мнима елипса. Действително, в този случай имаме

$$x = \imath\xi,\ y = \imath\eta$$

където (ξ, η) е точка от реалната елипса

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

3.3 Хиперболичен клас

Хиперболичният клас, или клас X, се характеризира с условието, че собствените стойности λ, μ на A са ненулеви и с различни знаци, т.е., $\lambda\mu < 0$. Предвид уравнението за собствените стойности на A условието за хиперболичност добива вида

$$\lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$$

което е еквивалентно на неравенството

$$a_{11}a_{22} < a_{12}^2.$$

Без ограничаване на общността ще приемем, че

$$\lambda > 0,\ \mu < 0$$

тъй като в противен случай след умножаване на уравнението с -1 стигаме до описания случай.

Тъй като и тук матрицата A е неособена, можем да извършим същите преобразувания, както и при елиптичния клас, при което добиваме уравнението

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + q_1 = 0.$$

В зависимост от числото q_1 са възможни два случая.

Случай X1 (същинска хипербола) Този случай се характеризира с условието $q_1 \neq 0$. Нека например $q_1 < 0$. След разделяне на двете страни на уравнението с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

където

$$a = \sqrt{\frac{|q_1|}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{q_1}{\mu}}.$$

Получената фигура се нарича *хипербола* с център $(0,0)$. Хиперболата се състои от два клона и има асимптоти с уравнения $bx = \pm ay$.

Случаят $q_1 > 0$ се свежда до разгледания като разменим местата на x и y:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Хиперболата се параметризира чрез зависимостите

$$x = a\cosh\varphi,\ y = b\sinh\varphi$$

където $\varphi \in \mathbb{R}$ е параметър на кривата. Една рационална параметризация на хиперболата е

$$x = a\frac{u^2+1}{u^2-1},\ y = b\frac{2u}{u^2-1},\ u \neq \pm 1.$$

Случай X2 (двойка пресичащи се прави) Този случай се получава при $q_1 = 0$, т.е.,

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = 0.$$

Тъй като сме приели, че $\lambda > 0$ и $\mu < 0$, получаваме

$$(x\sqrt{\lambda} + y\sqrt{-\mu})(x\sqrt{\lambda} - y\sqrt{-\mu}) = 0.$$

Следователно кривата е приводима и се разпада на две пресичащи се прави

$$x\sqrt{\lambda} = \pm y\sqrt{-\mu}.$$

3.4 Параболичен клас

Параболичният клас, или клас П, се характеризира с условието, че поне една от собствените стойности λ, μ на A е нулева. Тъй като сме приели, че матрицата A е ненулева, то не е възможно и двете й собствени стойност да са равни на нула. Така без ограничаване на общността ще приемем, че $\lambda \neq 0$ и $\mu = 0$. Предвид уравнението за собствените стойности на A условието за параболичност е

$$\lambda\mu = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

което е еквивалентно на равенството

$$a_{11}a_{22} = a_{12}^2.$$

Така параболичният клас „разделя" елиптичния клас от хиперболичния. Ако отъждествим симетричната матрица A с вектора $[a_{11}, a_{22}, a_{12}]^\top = [u, v, w]^\top \in \mathbb{R}^3$, то параболичният клас отговаря на повърхнината от втора степен $uv = w^2$, която се оказва конус с връх в началото и ос правата $u = v,\ w = 0$ (вж. следващата глава). Конусът на параболичния клас разделя пространството $\mathbb{R}^3$ на две части: вътрешна $uv > w^2$ (отговаряща на елиптичния клас) и външна $uv < w^2$ (отговаряща на хиперболичния клас).

Тъй като тук матрицата A е особена, не можем в общия случай да елиминираме линейния член в уравнението на кониката. Затова първо извършваме ротация

$$r = Ur_1,\ r_1 = [x_1, y_1]^\top$$

с матрица U, която привежда матрицата A в диагонална форма на Шур

$$U^\top AU = \mathrm{diag}(\lambda, 0).$$

Получаваме уравнението

$$\lambda x_1^2 + 2s_1x_1 + 2s_2y_1 + q = 0$$

където $[s_1, s_2] := p^\top U$. Наличието на квадратичен член относно x_1 позволява да анулираме линейния относно x_1 член чрез допълване до точен квадрат. За целта записваме уравнението като

$$\lambda\left(x_1^2 + \frac{2s_1}{\lambda}x_1 + \frac{s_1^2}{\lambda^2} - \frac{s_1^2}{\lambda^2}\right) + 2s_2y_1 + q = 0$$

и правим смяната

$$x_2 = x_1 + \frac{s_1}{\lambda}.$$

Получаваме

$$\lambda x_2^2 + 2s_2y_1 + q_2 = 0,\ q_2 = q - \frac{s_1^2}{\lambda}.$$

Тук

$$N = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \\ 0 & s_2 & q_2 \end{bmatrix}$$

откъдето

$$J_3 = \det(N) = -\lambda s_2^2.$$

Тъй като в този случай $J_1 = \lambda$, то имаме

$$s_2 = \pm\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}.$$

Тук са възможни няколко случая (по-точно, четири). Изобщо, параболичният клас съдържа повече подслучаи в сравнение с елиптичния и хиперболичния.

Случай П1 (същинска парабола) Този случай е налице при $s_2 \neq 0$. Тук с транслация по y_1 можем да анулираме свободния член в уравнението. Полагаме

$$y_2 = y_1 + \frac{q_2}{2s_2}$$

и получаваме

$$\lambda x_2^2 + 2s_2y_2 = 0.$$

Делим двете страни на уравнението с λ и стигаме до

$$x^2 + 2sy = 0,\ s = \frac{2s_2}{\lambda}$$

където вместо x_2, y_2 отново използваме старите означения x, y.

Останалите три случая на параболичния клас се получават при $s_2 = 0$, т.е., при $J_3 = 0$. Ако означим $d = -q_2\lambda$, то при $s_2 = 0$ имаме

$$x^2 = d$$

където сме използвали старото означение x вместо x_2.

Случай П2 (две успоредни прави) Този случай се характеризира с условието $d > 0$. Тук имаме две успоредни прави

$$x = \pm\sqrt{d}.$$

Случай П3 (двойна права) Този случай се получава при $d = 0$. Геометрически кониката тук се редуцира до една права $x = 0$, която обаче е двойна, тъй като уравнението й е

$$x^2 = 0.$$

С други думи кониката тук е приводима със съвпадащи неприводими компоненти. Двойната права може да се разглежда и като гранично положение на правите от случай П2 при $d \to +0$.

Случай П4 (празно множество) Тук имаме $d < 0$ и в реалната равнина $\mathbb{R}^2$ кониката е празното множество. В комплексната равнина този случай съответства на две успоредни мними прави

$$x = \pm\imath\sqrt{-d}.$$

3.5 Упражнения

3.1 Начертайте фигурите от класове Е1, Е2, Х1, Х2, П1, П2 и П3.

3.2 Покажете, че всяка права се пресича с дадена същинска коника в не повече от две точки. Като използвате този резултат покажете, че ако права пресича коника в три точки, то кониката се разпада на двойка прави.

3.3 Покажете, че всеки пет точки в равнината определят единствена коника, която ги съдържа. Еквивалентното твърдение е, че ако две коники имат пет общи точки, то те съвпадат.

3.4 Покажете, че ако крива от трета степен Γ_3 с уравнение

$$f_3(x, y) = 0$$

и коника Γ_2 с уравнение

$$f_2(x, y) = 0$$

имат седем общи точки, то кривата Γ_3 е приводима като се разпада на (поне) две компоненти: кониката Γ_2 и някаква права, т.е.,

$$f_3(x,y) = (ax+by+c)f_2(x,y).$$

3.5 Нека е дадена елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с $a \geq b$. Покажете, че

– ексцентриситетът на елипсата е

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

– за точка r от елипсата е изпълнено

$$|r - r_1| + |r - r_2| = 2a$$

където

$$r_1 = (-c, 0),\ r_2 = (c, 0),\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

– допирателната към елипсата в точката (x_0, y_0) има уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

– елипсата може да се параметризира като

$$x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ 0 \leq \theta < 2\pi.$$

3.6 Нека е дадена хиперболата

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

с $a \geq b$. Покажете, че

– ексцентриситетът на хиперболата е

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

– за точка r от хиперболата е изпълнено

$$|r - r_1| - |r - r_2| = \pm 2a$$

където

$$r_1 = (-c, 0),\ r_2 = (c, 0),\ c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

– допирателната към хиперболата в точката (x_0, y_0) има уравнение

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

– хиперболата може да се параметризира като

$$x = a\cosh t,\ y = b\sinh t,\ t \in \mathbb{R}.$$

3.7 Канонизирайте линиите

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0,$$

$$225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 12y - 5 = 0,$$

$$15x^2 - 16xy - 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0,$$

$$45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0.$$

4 Алгебрични повърхнини. Повърхнини от втора степен

В тази глава се раргледждат някои въпроси от теорията на алгебричните повърхнини и в частност на повърхнините от втора степен.

4.1 Полиноми на три променливи

Реален полином (или *многочлен*) *на три променливи* ще наричаме израз от вида

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &:= \sum_{i,j,k=0}^{m,n,p} a_{ijk} x^i y^j z^k \qquad (9) \\ &= a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{200}x^2 + a_{110}xy \\ &\quad + a_{101}xz + a_{020}y^2 + a_{011}yz + a_{002}z^2 + \cdots \end{aligned}$$

където a_{ijk} са реални коефициенти, а x, y и z са реални променливи. Разбира се, в (9) някои от коефициентите могат да са нулеви. Съгласно това определение полиномът е сума от *мономи* (или *едночлени*) $a_{ijk}x^i y^j z^k$.

Аналогично се дефинира комплексен полином на три променливи, както и полином на три променливи над произволно поле.

Полиномът f може да се разглежда и като функция $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, която на всяка наредена тройка $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ съпоставя числото $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

Степен на полинома (9) ще наричаме числото

$$\deg(f) := \max\{i + j + k : a_{ijk} \neq 0\}.$$

Ако всички коефициенти a_{ijk} са нулеви, полиномът се нарича *нулев*, означава се с 0 и му се приписва степен $-\infty$.

Пример 9 Всеки полином на три променливи от втора степен може да се запише във вида

$$q+2p_1x+2p_2y+2p_3z+a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2$$

или с използване на векторно-матрични означения

$$q + 2p^\top r + r^\top Ar,\ \ A \neq 0$$

където $q \in \mathbb{R}$, $p = [p_i] \in \mathbb{R}^3$ и $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $a_{ij} = a_{ji}$, а $r = [x, y, z]^\top \in \mathbb{R}^3$ е векторът на променливите.

Полиномите f от степен $\deg(f) \geq 1$ се наричат *нетривиални*.

Полиномът (1) се нарича *приводим* (над $\mathbb{R}$), ако съществуват два нетривиални полинома g, h, такива че

$$f(x, y, z) = g(x, y, z)h(x, y, z).$$

Полином, който не е приводим, се нарича *неприводим*. В частност полиномите от нулева и първа степен са неприводими.

Следователно полиномът f от степен $\deg(f) \geq 2$ е приводим, ако се разлага в произведение от нетривиални множители. Когато даден полином f се представя като произведение на множителите g и h, то

$$\deg(f) = \deg(g) + \deg(h).$$

Всеки нетривиален f полином може да се представи като произведение от степени на неприводими полиноми:

$$f(x, y, z) = f_1^{k_1}(x, y, z)f_2^{k_2}(x, y, z)\cdots f_m^{k_m}(x, y, z).$$

Тук $k_i \geq 1$ са кратностите, с които участват в произведението неприводимите полиноми f_i, такива че $f_i \neq cf_j$ при $i \neq j$, където c е реална ненулева константа. Това представяне е единствено, ако се условим да не различаваме два полинома в случай, че единият се получава от другия чрез умножаване с ненулева константа.

4.2 Алгебрични повърхнини

Тройката $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ се нарича *нула* на полинома f, ако

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Така нулите на един полином на три променливи са точки в пространството $\mathbb{R}^3$.

Множеството от нули

$$\Gamma(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

на полинома f се нарича *алгебрична повърхнина*, асоциирана, или свързана с f. В този случай зависимостта

$$f(x, y, z) = 0$$

се нарича *уравнение на повърхнината.* Понякога за краткост самото уравнение $f(x, y, z) = 0$ (записвано и като $f(x, y, z) = c$, където c е реална константа) се нарича алгебрична повърхнина. Степента на полинома f е също *степен на алгебричната повърхнина* $\Gamma(f)$.

Алгебричната повърхнина $\Gamma(f)$ се нарича *приводима* (респ. *неприводима*), ако полиномът f е приводим (респ. неприводим).

Имаме $\Gamma(0) = \mathbb{R}^3$ и $\Gamma(c) = \emptyset \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}$. Тези случаи не са интересни и поради това по-нататък ще разглеждаме само повърхнини, асоциирани с нетривиални полиноми.

Повърхнините от първа степен са равнините. Общото уравнение на всяка равнина $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ може да се запише като

$$ax + by + cz + d = 0$$

където a, b и c не са едновременно нули. Следователно можем да приемем, че

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Когато равнината не е успоредна на апликатната ос Oz (това е случаят когато $c \neq 0$), уравнението й може да се запише като

$$z = kx + ly + m := -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c}.$$

Нека (x_0, y_0, z_0) е точка от равнината γ, т.е.,

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0.$$

Тогава уравнението на равнината може да се запише като

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Ако се въведе векторът $v := [a, b, c]^\top \in \mathbb{R}^3$, то имаме

$$v^\top (r - r_0) = 0$$

където

$$r := (x, y, z), \;\; r_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Векторът v се нарича *нормален* вектор на равнината защото той е перпендикулярен на всеки вектор $r - r_0$, лежащ в равнината.

И накрая, уравнението на равнината може да се запише в параметрична форма

$$r = r(t) = r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_0 = Rt + r_0$$

където $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$ са ненулеви вектори, перпендикулярни на нормалния вектор v, и

$$R := [r_1, r_2] \in \mathbb{R}^{3\times 2}, \;\; t = [t_1, t_2]^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Векторната променлива t е *параметър* на равнината. На всяка стойност на t съответства определено положение на *изобразяващата точка* $r(t)$. Така при $t = 0$ изобразяващата точка се намира в положение r_0.

Права линия, или съкратено *права* в $\mathbb{R}^3$ се дефинира като пресечницата на две неуспоредни равнини, например

$$v_i^\top (r - r_i), \ i = 1, 2$$

където

$$\mathrm{rank}[v_1, v_2] = 2.$$

Удобно е правата да се определи и параметрично, например

$$r = r(t) = ct + r_0, \ t \in \mathbb{R}$$

където $0 \neq c \in \mathbb{R}^3$ е *направляващ вектор*, а t е параметър на правата, който се интерпретира като „време”.

Две алгебрични повърхнини се наричат *еквивалентни*, ако едната може да се получи от другата чрез транслация и ротация, т.е., чрез трансформацията

$$r = U\rho + r_0$$

където

$$r := [x, y, z]^\top, \ \rho := [\xi, \eta, \zeta]^\top.$$

Тук $r_0 = [x_0, y_0, z_0]^\top$ е транслационният вектор, а $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ е ортогонална матрица ($U^\top U = I_3$). Така например всички прави в пространството са еквивалентни, всички равнини са еквивалентни, всички сфери с даден радиус са еквивалентни, и т.н.

С всяка алгебрична повърхнина $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ можем да асоциираме едно множество $[\Gamma] \subset \mathbb{R}^3$, което се състои от всички повърхнини, еквивалентни на Γ. Това множество се нарича класа на еквивалентност (асоциирана с Γ). Всяка клас на еквивалентност се характеризира с минимален брой параметри, с помощта на които уравнението на повърхнината се записва в опростен (или каноничен) вид.

Пресечницата (или сечението)

$$\Delta := \Gamma_1 \cap \Gamma_2$$

на две алгебрични повърхнини $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^3$ в общо положение е по принцип едномерен геометричен обект (положението на произволна точка от Δ се определя с помощта на един скаларен параметър), който се нарича *алгебрична линия* (в пространството).

Пример 10 Повърхнината:

1. $x^2+y^2+z^2=1$ е единичната сфера, т.е., сферата с център в точката $(0,0,0)$ и с радиус 1;

2. $x^2+y^2+z^2=0$ е точката $(0,0,0)$;

3. $x^2+y^2+z^2=-1$ е празното множество $\emptyset$;

4. $xy+2x-y-2=0$ се разпада на две перпендикулярни равнини $x=1$ и $y=-2$.

Пример 11 Да разгледаме взаимното положение на сферата

$$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2+(z-z_c)^2=\delta^2,\ \ \delta>0$$

с център $r_c := (x_c, y_c, z_c)$ и радиус δ и правата

$$x=at+x_0,\ \ y=bt+y_0,\ \ z=ct+z_0,\ \ t\in\mathbb{R}$$

като ще считаме, че $a^2+b^2+c^2=1$. Ще отбележим, че уравнението на сферата може да се запише компактно като

$$|r-r_c|=\delta.$$

След заместване на параметричните зависимости на правата в уравнението на сферата получаваме квадратно уравнение за t:

$$t^2 + 2\alpha t + \beta^2 - \delta^2 = 0$$

където

$$\begin{aligned} \alpha &:= a(x_0 - x_c) + b(y_0 - y_c) + c(z_0 - z_c), \\ \beta^2 &:= (x_0 - x_c)^2 + (y_0 - y_c)^2 + (z_0 - z_c)^2. \end{aligned}$$

Корените на уравнението са

$$t_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2}.$$

Следователно:

– при $\alpha^2 + \delta^2 > \beta^2$ правата пресича сферата в две точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), където

$$x_i = at_i + x_0,\ y_i = bt_i + y_0,\ z_i = ct_i + z_0$$

– при $\alpha^2 + \delta^2 = \beta^2$ правата се допира до сферата в точката (x_1, y_1, z_1), където

$$x_1 = at_1 + x_0,\ y_1 = bt_1 + y_0,\ z_1 = ct_1 + z_0,\ t_1 = -\alpha$$

– при $\alpha^2 + \delta^2 < \beta^2$ правата не пресича сферата.

Приводимата повърхнина $\Gamma(f)$, съответстваща на полинома $f = gh$, се разпада на две компоненти $\Gamma(g)$ и $\Gamma(h)$:

$$\Gamma(f) = \Gamma(g) \cup \Gamma(h).$$

Така всяка повърхнина $\Gamma(f)$ може да се разложи на неприводими компоненти

$$\Gamma(f) = \Gamma(f_1) \cup \Gamma(f_2) \cup \cdots \cup \Gamma(f_m)$$

съответно с разлагането на полинома

$$f = f_1^{k_1} f_2^{k_2} \cdots f_m^{k_m}$$

на степени на неприводимите множители $f_1, f_2, \ldots, f_m$.

Възможно е една повърхнина да е неприводима, но да се разпада на отделни клонове, представляващи непресичащи се множества в $\mathbb{R}^3$. Такава повърхнина е например двулистният хиперболоид, разгледан в следващата глава.

Повърхнината $\Gamma(f)$ се нарича *рационална*, ако съществуват три рационални функции φ, ψ, ω на два аргумента, поне една от които не е постоянна, и такива че

$$f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \omega(u,v)) = 0,\ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$$

където Ω е множеството от нули на знаменателите на φ, ψ или ω. Ще напомним, че една функция е рационална, ако тя може да се представи като отношение на два полинома.

Ако повърхнината $\Gamma(f)$ е рационална, то зависимостите

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \omega(u,v),\ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \backslash \Omega$$

представляват *рационална параметризация* на повърхнината $\Gamma(f)$.

Пример 12 Кубичната повърхнина $z^2 = x^2 + y^3$ съдържа точката $(0,0,0)$ и се рационализира чрез полагането $x = uy$, $z = vy$. След заместване на тези две зависимости в уравнението на повърхнината получаваме $v^2 = u^2 + y$, откъдето следва рационалната параметризация

$$x = u(v^2 - u^2),\ y = v^2 - u^2,\ z = v(v^2 - u^2).$$

Очевидно равнините са рационални повърхнини. Лесно се вижда, че и сферите са рационални.

Пример 13 Сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

се рационализира чрез полагането

$$x = ut, \; y = vt, \; z = t - 1.$$

Оттук получаваме

$$t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}$$

и търсената рационална параметризация добива вида

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \; y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \; z = \frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Може да се покаже, че изобщо повърхнините от втора степен са рационални. Доказателството е аналогично на случая на криви от втора степен.

Да разгледаме сега по-подробно повърхнините от втора степен, описвани от уравнението

$$f(x, y, z) = 0,$$

където f е полином от втора степен. Тези повърхнини се наричат още *квадрики*.

Да въведем векторната променлива

$$r = [x, y, z]^\top \in \mathbb{R}^3$$

и да положим

$$p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \ A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Тогава уравнението на квадриката $\Gamma(f)$ може да се запише във вида

$$f(x,y,z) = r^\top Ar + 2p^\top r + q = 0.$$

Ще напомним, че с (x,y,z) означаваме както точка от пространството с координати x,y,z, така и вектора $r = [x,y,z]^\top$ предвид взаимно-еднозначното съответствие между точките в равнината с избрана декартова координатна система $Oxyz$ и векторите с начало в точката O.

4.3 Упражнения

4.1 Разложете на множители g, h полинома

$$f(x,y,z) := x^3 + x^2y - x^2z - y^2 + x + y - z$$

и постройте приводимата повърхнина $\Gamma(f) = \Gamma(g) \cup \Gamma(h)$.

4.2 Изследвайте взаимното разположение на сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$$

и правата

$$y = kx, \ z = mx$$

в зависимост от стойностите на параметрите k и m.

4.3 Намерете рационална параметризация на повърхнината

$$x^2 - 2xy + 3y^2 + yz - 4y + 1 = 0.$$

4.4 Намерете рационална параметризация на повърхнината

$$x^3 + xy^2 - xy + z^3 + x^2 + y^2 + xy - z^2 = 0.$$

4.5 Докажете, че квадриките са рационални повърхнини.

4.6 Намерете уравнението на права, минаваща през зададена точка и перпендикулярна на зададена равнина.

4.7 Намерете уравнението на равнина, минаваща през зададена точка и перпендикулярна на зададена права.

4.8 Намерете уравнението на равнина, минаваща през зададена точка и успоредна на две зададени (неуспоредни) прави.

4.9 Напишете алгоритъм за намиране на пресечната точка на равнината $v^\top(r - r_0) = 0$ и правата $r = ct + r_1$ и опишете възможните изходи от този алгоритъм.

4.10 Дадена е равнина γ и две точки r_0 и r_1, нележащи в γ и разположени от едната й страна. Светлинен лъч от r_0 се отразява от γ и минава през r_1. Намерете уравненията на падащия и отразения лъч. (Упътване: приема се, че ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение, и че светлината се движи по най-краткия път).

4.11 Намерете уравнението на равнина, равноотдалечена от две кръстосани прави.

5 Класификация и канонизация на повърхнините от втора степен

В тази глава ще разгледаме въпросите за класификация на повърхнините от втора степен

$$f(x, y, z) = f(r) := r^\top A r + 2p^\top r + q = 0$$

където

$$r := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \; p := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \; A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

и за опростяване (канонизиране) на уравненията им. Това опростяване се прави чрез подходяща смяна на променливите, включваща транслация и ротация:

$$r = U\rho + r_0$$

където $\rho := [\xi, \eta, \zeta]^\top$ е нова векторна променлива, $r_0 := [x_0, y_0, z_0]^\top$ е постоянен вектор и $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ е ортогонална матрица, т.е., $U^\top U = I_3$. Ще отбележим, че всяка ортогонална 3×3 матрица се свежда до един от следните два типа:

– чиста ротация

$$U = U(\varphi, \psi, \omega) = U_1(\varphi) U_2(\psi) U_3(\omega)$$

където

$$U_1(\varphi) := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$U_2(\psi) := \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$U_3(\omega) := \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– отражение

$$R = R(\varphi, \psi, \omega) = U_1(\varphi)U_2(\psi)U_3(\omega)\mathrm{diag}(0, 0, -1).$$

Тук φ, ψ, ω са параметри, изменящи се в интервала $[0, 2\pi)$.

В общия случай една ортогонална $n \times n$ матрица зависи от $l := n(n-1)/2$ параметъра $\varphi_1, \ldots, \varphi_l \in [0, 2\pi)$ по указания по-горе начин.

Както и при кривите от втора степен, можем да въведем симетричната матрица

$$\mathcal{M} := \begin{bmatrix} A & p \\ p^\top & q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

и вектора $\widehat{r} = [x, y, z, 1]^\top$, при което уравнението на повърхнината се записва във вида

$$\widehat{r}^\top \mathcal{M} \widehat{r} = 0.$$

При смяна на променливите, състояща се в транслация с вектор $r_0 \in \mathbb{R}^3$ и ротация с матрица $U \in \mathbb{R}^{3/ti3}$, матрицата $\mathcal{M}$ се трансформира в

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} A & p + Ar_0 \\ p^\top + r_0^\top A & f(r_0) \end{bmatrix}.$$

Както и в случая на алгебрични криви е в сила

$$\mathcal{N} = \mathcal{V}^\top \mathcal{M} \mathcal{V}$$

където

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(U, r_0) := \begin{bmatrix} U & r_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Имаме

$$\det(\mathcal{V}) = \det(U) = 1$$

и матрицата $\mathcal{V}$ е обратима.

Величината

$$\mathcal{J}_4 := \det(\mathcal{M}) = \det(\mathcal{N})$$

която не е тъждествено постоянна, не се променя при направената смяна, т.е., тя е *инварианта* на уравнението на повърхнината, съответно на матрицата $\mathcal{M}$.

При ротацията с матрица U матрицата A се преобразува в $U^\top AU$, и следователно собствените стойности λ_1, λ_2 и λ_3 на A също са инварианти. Обикновено се работи с други три инварианти, а именно

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &:= \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A) \\ \mathcal{J}_2 &:= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 \\ \mathcal{J}_3 &:= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(A). \end{aligned}$$

Те са коефициентите на характеристичния полином на матрицата A,

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - \mathcal{J}_1\lambda^2 + \mathcal{J}_2\lambda - \mathcal{J}_3.$$

Ще отбележим, че величините $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3$ и $\mathcal{J}_4$ не са инварианти на кривата, а само на нейното уравнение.

Да се върнем към въпроса за смяна на променливите с цел канонизиране на уравнението на повърхнината. С помощта на транслацията

$$r = r_1 + r_0, \ r_1 = [x_1, y_1, z_1]^\top$$

се анулират (когато това е възможно) линейните членове $2p^\top r_1$ в уравнението $f(x_1, y_1, z_1) = 0$ на кониката, а с ротацията

$$r_1 = U\rho$$

– смесените произведения $2a_{12}x_1y_1$, $2a_{13}x_1z_1$, $2a_{23}y_1z_1$.

Повърхнините от втора степен се разделят на три класа (или вида): *елиптичен, хиперболичен и параболичен.* Видът на повърхнината се определя от квадратичните членове $r^\top Ar$, т.е., от матрицата A и по-точно от нейните собствени стойности

$$\lambda := \lambda_1(A), \ \mu := \lambda_2(A), \ \nu := \lambda_3(A).$$

5.1 Елиптичен клас

Елиптичният клас, или клас Е, се характеризира с условието, че собствените стойности λ, μ, ν на A са ненулеви и с еднакъв знак. Другояче казано, в този случай или матрицата A, или матрицата $-A$ е положително определена.

Необходимото и достатъчно условие за положителна определеност на матрицата A се дава от критерия на Силвестър

$$a_{11} > 0, \ \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \ \det(A) > 0.$$

По-нататък без ограничаване на общността ще приемем, че

$$\lambda, \mu, \nu > 0$$

тъй като при $\lambda, \mu, \nu < 0$ след умножаване на уравнението с -1 стигаме до случая с положителни собствени стойности.

Да извършим смяната

$$r = U\rho + r_0.$$

След заместване в уравнението на квадриката $f(r) = 0$ получаваме

$$f(U\rho + r_0) = \rho^\top U^\top AU\rho + 2(Ar_0 + p)^\top U\rho + q_1 = 0$$

където

$$q_1 := f(r_0) = r_0^\top Ar_0 + 2p^\top r_0 + q = q - p^\top A^{-1}p.$$

За да елиминираме линейния член $2(Ar_0 + p)^\top U\rho$ при всяко ρ е необходимо и достатъчно да анулираме вектора $Ar_0 + p$ чрез избор на транслационния вектор r_0, т.е.,

$$r_0 = -A^{-1}p$$

(тук матрицата A е обратима, тъй като собствените й стойности са ненулеви).

Нека изберем ортогоналната матрица U така, че $U^\top AU$ да бъде Шур формата на A, която в случая (поради симетричността на A) е диагонална матрица S с елементи λ, μ, ν по главния диагонал. В резултат стигаме до уравнението

$$\rho^\top S\rho + q_1 = \lambda\xi^2 + \mu\eta^2 + \nu\zeta^2 + q_1 = 0.$$

Тъй като тук

$$\mathcal{N} = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, \nu, q_1)$$

и

$$\mathcal{J}_4 = \det(\mathcal{N}) = \lambda\mu\nu q_1$$

то

$$q_1 = \frac{\mathcal{J}_4}{\mathcal{J}_3}.$$

За разлика от случая на плоски алгебрични криви, тук не съществува толкова удобен израз за ротацията U, която диагонализира матрицата A. За намиране на U е необходимо да се реши кубичното характеристично уравнение

$$\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - \mathcal{J}_1 \lambda^2 + \mathcal{J}_2 \lambda - \mathcal{J}_3 = 0$$

на матрицата A. Когато матрицата A е зададена числено, диагонализирането й може да стане с някоя от функциите на диалоговите системи MATLAB или SYSLAB, вж. М. Константинов, П. Петков, Н. Христов: *Матрични пресмятания с диалоговата система SYSLAB.* Изд. на ВИАС, София 1992.

Вижда се, че ако ρ удовлетворява уравнението на повърхнината, то и $-\rho$ също го удовлетворява. Така изследваната повърхнина е симетрична относно началото O_1 на новата координатна система $O_1\xi\eta\zeta$. Такава повърхнина се нарича *централна* с център началото O_1.

По-нататък за удобство вместо ξ, η, ζ ще използваме отново старите означения x, y, z. Така кривата се записва като

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + q_1 = 0.$$

В зависимост от вида на числото q_1 са възможни три случая.

Случай E1 (същински елипсоид) Този случай се характеризира с неравенството $q_1 < 0$. След разделяне на двете страни на уравнението с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

където

$$a = \sqrt{\frac{|q_1|}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{|q_1|}{\mu}},\ c = \sqrt{\frac{|q_1|}{\nu}}.$$

Получената фигура се нарича *елипсоид* с полуоси a, b, c и център $(0, 0, 0)$.

При $a = b > c$ фигурата е *ротационен елипсоид*, получен от въртенето на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0$$

около остта Oz. Този елипсоид се нарича още *свит*.

При $a > b = c$ фигурата също е *ротационен елипсоид*, получен от въртенето на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$$

около остта Ox. Този елипсоид се нарича още *разтеглен*.

При $a = b = c$ фигурата е *сфера* с радиус $a > 0$.

Елипсоидът се параметризира чрез рационалните зависимости

$$x = a\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1},\ y = b\frac{2v}{u^2 + v^2 + 1},\ z = c\frac{1 - u^2 - v^2}{u^2 + v^2 + 1}$$

където $u, v \in \mathbb{R}$ са текущи параметри на точка от повърхнината. Една друга параметризация на елипсоида е

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= b\sin\varphi\cos\theta, \\ z &= c\sin\theta. \end{aligned}$$

Случай Е2 (точка) Този случай се определя от условието $q_1 = 0$, т.е.,

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 0.$$

Тъй като по предположение $\lambda, \mu, \nu > 0$, то в $\mathbb{R}^3$ имаме единствено решение $x = y = z = 0$. Така повърхнината се свежда то точката $(0, 0, 0)$.

В комплексното пространство $\mathbb{C}^3$ този случай отговаря на мним конус (фигура, съставена от мними прави), които се пресичат в реалната точка $(0, 0, 0)$. Такава е например правата

$$x\sqrt{\lambda} = \imath y\sqrt{\mu},\ z = 0.$$

Случай Е3 (празно множество) Този случай се характеризира с неравенството $q_1 > 0$. Разделяме двете страни на уравнението с q_1 и получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Виждаме, че няма реални тройки (x, y, z), които да удовлетворяват уравнението на повърхнината, т.е., тя е празното множество в $\mathbb{R}^3$.

В $\mathbb{C}^3$ фигурата е *мним елипсоид.*

5.2 Хиперболичен клас

Хиперболичният клас, или клас Х, се характеризира с условието, че собствените стойности λ, μ, ν на A са ненулеви и две от тях (например λ и ν) са с различни знаци. Тук матрицата A е знаконеопределена.

Тъй като матрицата A е неособена, можем да извършим същите преобразувания, както и при елиптичния клас, при което стигаме до уравнението

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + q_1 = 0$$

(запазени са означенията от предишния раздел).

В зависимост от вида на числото q_1 и знаците на собствените стойности на A са възможни три случая.

Случай X1 (двулистен хиперболоид) Този случай се характеризира с условието $q_1 \neq 0$, като една собствена стойност (например λ) е със знак, противоположен на q_1, а другите две (μ и ν) имат знака на q_1. След разделяне на двете страни на уравнението с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

където

$$a = \sqrt{\frac{-q_1}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{q_1}{\mu}},\ c = \sqrt{\frac{q_1}{\nu}}.$$

Получената фигура се нарича *двулистен хиперболоид* с център $(0, 0, 0)$. Фигурата се състои от две отделни симетрично разположени части с уравнения

$$x = \pm\, a\sqrt{\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1}.$$

За точките от фигурата очевидно имаме $|x| \geq a$. Точките $(\pm a, 0, 0)$ са върхове на фигурата. Сеченията на хиперболоида с равнини

$$x = d,\ |d| > a,$$

са елипси. Сеченията с равнини $y = d$ или $z = d$ са хиперболи.

Двулистният хиперболоид се параметризира рационално чрез зависимостите

$$x = a\frac{u^2 + v^2 + 1}{u^2 + v^2 - 1},\ y = b\frac{2u}{u^2 + v^2 - 1},\ z = c\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1},\ u^2+v^2 \neq 1.$$

В сила е и параметризацията

$$\begin{aligned} x &= a\cosh u, \\ y &= b\sinh u\cos\varphi, \\ z &= c\sinh u\sin\varphi. \end{aligned}$$

.

Случай X2 (еднолистен хиперболоид) Този случай се характеризира с условието $q_1 \neq 0$, като две собствени стойности (например λ и μ) е със знак, противоположен на q_1, а другата (в случая ν) има знака на q_1. След разделяне на двете страни на уравнението с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

където

$$a = \sqrt{\frac{-q_1}{\lambda}},\ b = \sqrt{\frac{-q_1}{\mu}},\ c = \sqrt{\frac{q_1}{\nu}}.$$

При $a = b = c$ еднолистният хиперболоид се нарича *правилен.*

Сеченията на фигурата с равнини $z = d$ са елипси. Най-малката елипса се получава при $z = 0$. Сеченията с равнините $x = d$ и $y = d$ са хиперболи.

Еднолистният хиперболоид има *праволинейни образуващи*. За да намерим тези образуващи записваме уравнението на фигурата като

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

откъдето

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right).$$

В частност получаваме две семейства l_ω и m_τ от образуващи като пресечници съответно на двете двойки равнини

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \omega\left(1 + \frac{y}{b}\right),\ \omega\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

и

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \tau\left(1 - \frac{y}{b}\right),\ \tau\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Случай X3 (конус) Този случай се характеризира с условието $q_1 = 0$, при което

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 = 0.$$

Нека $\lambda, \mu > 0$ и $\nu < 0$. Тогава уравнението може да се запише като

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

където предварително сме разделили двете страни с $\lambda + \mu - \nu$, т.е.,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1.$$

Частен случай е *кръговият конус*, образуван от въртене около апликатната ос Oz на права (образуваща), която пресича тази ос. Полученият конус има уравнение

$$x^2 + y^2 - \omega^2 z^2 = 0$$

където $\omega = \tan\alpha$ и α е ъгълът между образуващата и равнината $z = 0$.

Ще покажем как кониките могат да се получат от сечения на този кръгов конус с равнини.

Сечението на конуса с равнината $z = d$ е окръжност с радиус $\omega|d|$. Ако леко наклоним тази равнина, получаваме елипса. На свой ред хиперболи се получават при пресичане на конуса с равнини $x = d$ или $y = d$.

Ще покажем как се получава парабола. Нека за простота $\omega = 1$, при което

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Да разгледаме сечението на конуса с равнината $x - z + 1 = 0$ и да извършим смяната

$$x = \frac{x_1 - z_1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2},\ y = y_1,\ z = \frac{x_1 + z_1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}.$$

В новите координати x_1, y_1, z_1 получаваме

$$y_1^2 - 2x_1 z_1 - x_1\sqrt{2} = 0$$

и сечението с равнината $z_1 = 0$ е параболата $y_1^2 = x_1\sqrt{2}$.

Още древните гърци са разполагали с чисто геометрично доказателство на този забележителен факт.

5.3 Параболичен клас

Параболичният клас, или клас П, се характеризира с условието, че поне една от собствените стойности λ, μ, ν на A е нулева. Тъй като сме приели, че матрицата A е ненулева, то не може и трите й собствени стойности да са равни на нула. Така без ограничаване на общността ще приемем, че $\nu = 0$. Предвид уравнението за собствените стойности на A условието за параболичност е еквивалентно на условията

$$\det(A) = 0,\ A \neq 0$$

или

$$\mathcal{J}_3 = 0,\ \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 > 0.$$

Така параболичният клас клас „разделя” елиптичния клас от хиперболичния. Ако отъждествим симетричната матрица A с вектора

$$[a_{11}, a_{21}, a_{32}, a_{22}, a_{32}, a_{33}]^\top \in \mathbb{R}^6$$

то параболичният клас отговаря на повърхнина от втора степен в $\mathbb{R}^6$, която е конус с връх в началото. Конусът на параболичния клас разделя пространството $\mathbb{R}^6$ на две части: вътрешна (отговаряща на елиптичния клас) и външна (отговаряща на хиперболичния клас).

Да разгледаме първо случая

$$\lambda\mu \neq 0.$$

Тъй като тук матрицата A е особена, не можем в общия случай да елиминираме линейния член в уравнението на повърхнината. Затова първо извършваме ротация

$$r = Ur_1,\ r_1 = [x_1, y_1, z_1]^\top$$

с матрица U, която привежда матрицата A в диагонална Шур форма

$$U^\top AU = \mathrm{diag}(\lambda, \mu, 0).$$

Получаваме уравнението

$$\lambda x_1^2 + \mu y_1^2 + 2b_1 x_1 + 2b_2 y_1 + 2b_3 z_1 + q = 0$$

където

$$[b_1, b_2, b_3] := p^\top U.$$

Наличието на квадратични членове относно x_1 и y_1 позволява да анулираме линейните относно x_1, y_1 членове чрез допълване до точен квадрат. За целта записваме уравнението като

$$\lambda \left(x_1^2 + \frac{2b_1}{\lambda} x_1 + \frac{b_1^2}{\lambda^2} - \frac{b_1^2}{\lambda^2} \right)$$

$$+ \mu \left(y_1^2 + \frac{2b_2}{\mu} y_1 + \frac{b_2^2}{\mu^2} - \frac{b_2^2}{\mu^2} \right) + 2b_3 z_1 + q = 0$$

и правим смяната

$$x_2 = x_1 + \frac{b_1}{\lambda}, \ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{\mu}.$$

Получаваме

$$\lambda x_2^2 + \mu y_2^2 + 2b_3 z_1 + q_2 = 0, \ q_2 = q - \frac{b_1^2}{\lambda} - \frac{b_2^2}{\mu}.$$

Тъй като тук

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & q_2 \end{bmatrix}$$

то
$$\mathcal{J}_4 = \det(\mathcal{N}) = -\lambda\mu b_3^2.$$
Като отчетем, че $\lambda\mu = \mathcal{J}_2$, получаваме
$$b_3 = \pm\sqrt{-\frac{\mathcal{J}_4}{\mathcal{J}_2}}.$$

По-нататък са възможни няколко случая (по-точно, цели 11(!)). Както и при кривите от втора степен, параболичният клас съдържа повече подслучаи в сравнение с елиптичния и хиперболичния.

Случай П1 (елиптичен параболоид) Този случай е налице при
$$\lambda\mu > 0,\ \ b_3 \neq 0.$$
Тук с транслация по z_1 можем да анулираме свободния член в уравнението. Полагаме
$$z_2 = z_1 + \frac{q_2}{2b_3}$$
и получаваме
$$\lambda x_2^2 + \mu y_2^2 + 2b_3 z_2 = 0.$$
Делим двете страни на уравнението с $2b_3$ и стигаме до
$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = z,\ \ \alpha = -\frac{2b_3}{\lambda},\ \ \beta = -\frac{2b_3}{\mu}$$
където вместо x_2, y_2, z_2 отново използваме старите означения x, y, z. Важното в случая е, че числата α и β тук са с еднакви знаци. Така сеченията на фигурата с равнини $z = d$ са елипси, а с равнини $x = d$ и $y = d$ – параболи. При $\alpha = \beta$ (т.е. при $\lambda = \mu$) фигурата е *ротационен параболоид.*

Случай П2 (хиперболичен параболоид) Това е най- интересната повърхнина. Получава се при същите условия както в случай П1 (и има формално същото уравнение), но с тази разлика, че тук числата λ и μ са с различни знаци. Така можем да напишем

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Фигурата наподобява седло, или планински превал[1]. Има праволинейни образуващи, които пресичат равнината $z = 0$ или лежат в нея. За построяването им нека запишем уравнението на хиперболичния параболоид като

$$z.1 = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Оттук получаваме първо семейство образуващи l_ω, определени от

$$z = \omega\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right),\ 1 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

както и второ семейство образуващи k_ω, определени от

$$z = \omega\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),\ 1 = \frac{1}{\omega}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right).$$

Равнините $z = d \neq 0$ пресичат фигурата по хиперболи, а равнината $z = 0$ – по двойка пресичащи се прави. Равнините $x = d$ и $y = c$ пресичат хиперболичния параболоид по параболи. Равнините $x = 0$ и $y = 0$ са равнини на симетрия на фигурата.

Останалите девет случая на параболичния клас са *цилиндри* (в уравнението не участват всичките три променливи).

[1]Прочутите пирински „порти", през които минават пътеките между циркусите, дават идея за това какво е хиперболичен параболоид.

Да разгледаме първо случая $\lambda\mu \neq 0$ и $b_3 = 0$. Имаме уравнението

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + q_1 = 0$$

където сме използвали старите означения x, y вместо x_2, y_2.

Случай П3 (елиптичен цилиндър) Този случай (отговарящ на същинска елипса в равнината) се характеризира с условието, че λ и μ са с еднакъв знак, а $q_1 \neq 0$ е с противоположен знак. След разделяне с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фигурата е цилиндър с основа елипса и ос, съвпадаща с апликатната ос Oz.

Случай П4 (права) Този случай се определя от условията $\lambda\mu > 0$ и $q_1 = 0$. Единственото решение на уравнението тук е $x = y = 0$. Тъй като върху z няма ограничения, фигурата съвпада с апликатната ос. В комплексния случай фигурата е мним конус.

Случай П5 (празно множество) Тук числата λ, μ, q_1 са ненулеви и с еднакъв знак. Уравнението няма реални решения, т.е., фигурата е празното множество в $\mathbb{R}^3$. В $\mathbb{C}^3$ фигурата е мним цилиндър.

Случай П6 (хиперболичен цилиндър) Характеризира се условията $\lambda\mu < 0$ и $q_1 \neq 0$, например

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Фигурата се състои от две хиперболични стени, съответстващи на двата клона на хиперболата.

Случай П7 (двойка пресичащи се равнини) Тук имаме $\lambda\mu < 0$ и $q_1 = 0$. Уравнението (при $\lambda > 0$ и $\mu < 0$)

$$\lambda x^2 + \mu y^2 = (x\sqrt{\lambda}) - y\sqrt{-\mu})(x\sqrt{\lambda}) + y\sqrt{-\mu}) = 0$$

описва две пресичащи се равнини, успоредни на апликатната ос.

Последните четири случая се получават когато A има две нулеви собствени стойности, например $\lambda \neq 0$ и $\mu = \nu = 0$. Тук след ротация получаваме уравнението

$$\lambda x_1^2 + 2b_1x_1 + 2b_2y_1 + 2b_3z_1 + q = 0.$$

След транслация по x_1 анулираме линейния член по x_1:

$$\lambda x_2^2 + 2b_2y_1 + 2b_3z_1 + q_3 = 0.$$

Случай П8 (параболичен цилиндър) Фигурата се характеризира с условието

$$b^2 := b_2^2 + b_3^2 > 0.$$

Правим ротация в равнината Oy_1z_1 от вида

$$\begin{aligned} y_2 &= \frac{b_2}{b}y_1 + \frac{b_3}{b}z_1 \\ z_2 &= \frac{b_2}{b}y_1 - \frac{b_3}{b}z_1 \end{aligned}$$

и получаваме

$$\lambda x_2^2 + 2by_2 + q_3 = 0.$$

След транслация по y_2 за анулиране на свободния член q_3 и разделяне с λ получаваме (в старите променливи) каноничното уравнение

$$x^2 + 2py = 0.$$

Фигурата се състои от една параболична стена, перпендикулярна на равнината Oxy.

Случай П9 (двойка успоредни равнини) Тук фигурата се определя от условията $b = 0$ и $\lambda q_1 < 0$. След разделяне с λ получаваме

$$x^2 = -\frac{q_1}{\lambda} > 0$$

и

$$x = \pm\sqrt{-\frac{q_1}{\lambda}}.$$

Това са уравненията на две равнини, перпендикулярни на абсцисната ос.

Случай П10 (двойна равнина) Този случай отговаря на $b = 0$ и $q_1 = 0$. Имаме

$$x^2 = 0$$

което е уравнението на два съвпадащи екземпляра на равнината Oyz. В $\mathbb{C}^3$ фигурата е мним конус.

Случай П11 (празно множество) Тук имаме $b = 0$ и $\lambda q_1 > 0$. Така фигурата е празното множество в $\mathbb{R}^3$. В $\mathbb{C}^3$ имаме двойка успоредни мними равнини.

5.4 Упражнения

5.1 Начертайте фигурите от класове Е1, Е2, Х1, Х2, Х3, П1, П2, П3, П4, П6, П7, П8, П9 и П10.

5.2 Определете вида на повърнината

$$(u^\top r)^2 + (v^\top r)^2 + (w^\top r)^2 = 1$$

където $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, в зависимост това дали детерминантата $\det[u, v, w]$ е равна на нула или различна от нула.

5.3 Докажете, че равнина не може да пресича елиптичен параболоид по хиперболи, а хиперболичен параболоид – по елипси.

5.4 Реални праволинейни образуващи имат конусите, цилиндрите, еднолистните хиперболоиди и хиперболичните параболоиди. Обаче праволинейни, но имагинерни образуващи могат да имат и други повърхнини от втори ред. Намерете имагинерните образуващи на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

5.5 Определете вида и намерете образуващите на повърхнината $z = xy$.

5.6 Намерете уравнението на повърхнина, образувана от правите, успоредни на дадена равнина и пресичащи две зададени кръстосани прави.

5.7 Намерете уравнението на повърхнина, образувана от правите, пресичащи три зададени неуспоредни и непресичащи се прави.

5.8 Нека са дадени две повърхнини от втора степен с уравнения

$$f(r) = 0, \; g(r) = 0, \; r = (x, y, z)$$

и точка $r_0 \in \mathbb{R}^3$. Намерете уравнението на повърхнина от втора степен, съдържаща точката r_0 и пресечницата на двете повърхнини. Кога тази повърхнина се разпада на двойка равнини?

5.9 Дефинирайте частни производни f_x, f_y, f_z на полином f на три променливи x, y, z.

5.10 Нека $f(x_0, y_0, z_0) = 0$, където f е полином на три променливи. Равнината с уравнение

$$(x-x_0)f_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)f_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)f_z(x_0,y_0,z_0) = 0$$

се нарича допирателна към повърхнината с уравнение $f(x, y, z) = 0$ в точката (x_0, y_0, z_0). Намерете допирателните равнини към елипшсоида, хиперболоидите и параболоидите, описани в тази глава.

5.11 Канонизирайте повърхнините

$$16x^2 + 9y^2 - z^2 - 24xy - 9x - 12y + 4z + 71 = 0,$$

$$-x^2 - 9y^2 + 6xy + 50x - 50y - 15z - 100 = 0,$$

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy + 2x + 44y - 36z + 65 = 0,$$

$$(x + y + z)(x - y + z) - (2x - y + 2z)^2 = 1.$$

6 Повърхнини в многомерното пространство. Повърхнини от втора степен

6.1 Уводни бележки

В тази глава са разгледани повърхнините (и в частност повърхнините от втора степен) в n-мерното пространство $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$. Те се определят чрез уравнение от вида

$$f(x) = 0$$

където

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

е полином относно

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top.$$

За такива геометрични обекти (или фигури) казваме, че са с размерност $n-1$, или, еквивалентно, с коразмерност 1. Те се наричат още *хиперповърхнини*, или накратко *повърхнини*. Пресичането на два такива обекта в общо положение дава обект с коразмерност 2 и т.н. Обектите с размерност 1 (или с коразмерност $n-1$) се наричат *линии* в $\mathbb{R}^n$. Например в $\mathbb{R}^3$ обектите с коразмерност 1 и 2 са познатите ни от класическата геометрия повърхнини и линии. При $n = 2$ фигурите с размерност 1 са и с коразмерност 1, т.е., тук понятията „линия" и „повърхнина" съвпадат.

Повърхнините от 2 степен в n-мерното пространство се описват с уравнение от вида

$$f(x) := x^\top Ax + 2p^\top x + q = 0$$

където $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$ е текущ вектор (или точка) от повърхнината, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ е симетрична ненулева матрица, $p \in \mathbb{R}^n$ и $q \in \mathbb{R}$. Така първоначално повърхнината се определя чрез

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

параметъра (числата, определящи A, p и q; отчита се фактът, че матрицата A е симетрична). Това е твърде голямо число и затова се налага уравнението да се опрости или канонизира. След канонизиране на уравнението то се привежда в опростена форма, зависеща от не повече от n числови константи.

Както в случаите $n = 2, 3$ и тук е удобно да се въведат симетричната матрица

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} A & p \\ p^\top & q \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$$

и вектора

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

при което уравнението на повърхнината добива вида

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} = 0.$$

Както и преди може да се покаже, че n–те собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на A, както и величината

$$\mathbf{J}_{n+1} := \det(\mathbf{M})$$

са инварианти на уравнението $f(x) = 0$ при ротации и транслации, например

$$x = U\xi + x_0.$$

Вместо собствените стойности е по-удобно да се използват съответните елементарни симетрични функции $\mathbf{J}_k$ на λ_i. Ще напомним, че $\mathbf{J}_k(\lambda)$ е сумата от всевъзможните произведения

$$\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_k}$$

на k екземпляра от набора $\lambda := \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Алтернативно, $\mathbf{J}_k$ е сумата от главните минори от ред k на матрицата A. В частност $\mathbf{J}_1 = \mathrm{tr}(A)$ и $\mathbf{J}_n = \det(A)$.

Случаите $n = 2$ и $n = 3$ вече бяха подробно разгледани. Що се отнася до случая $n = 1$, то от съдържателна гледна точка той не е интересен, защото геометрията на едномерното пространство е твърде „бедна". Нека все пак от съображения за пълнота разгледаме и случая $n = 1$. Тук уравнението на „кривата" $\Gamma \subset \mathbb{R}$ е

$$Ax^2 + 2px + q = 0, \ A \neq 0.$$

Имаме само елиптичен клас с три подслучая:

E1. Изпълнено е неравенството

$$q_1 = q - \frac{p^2}{A} < 0$$

и уравнението има два различни реални корена

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - qA}}{A}.$$

Следователно Γ е двуточково множество с елементи x_1, x_2. Така „едномерната елипса" се свежда до две точки.

E2. Изпълнено е равенството $q_1 = 0$, уравнението има двоен реален корен $x_1 = x_2 = -p/A$ и Γ съдържа единствен елемент x_1. Фигурата е двойна точка.

E3. Изпълнено е неравенството $q_1 > 0$, уравнението няма реални корени и Γ е празното множество в $\mathbb{R}$. В комплексния случай $\Gamma \subset \mathbb{C}$ е двуелементното множество $\{x_1, x_2\}$.

Ако означим със Σ_n броя на различните повърхнини от втора степен в n-мерното пространство, то имаме

$$\Sigma_1 = 3,\ \Sigma_2 = 9,\ \Sigma_3 = 17.$$

Интересно би било да се получи формула за Σ_n в общия случай. Лесно се проверява, че примерно изразът

$$\Sigma_n = n^2 + 3n - 1$$

„работи" за $n = 1, 2, 3$. Колкото и да е странно, това е наистина общата формула за Σ_n, както ще покажем след малко.

Както в случаите $n = 1, 2, 3$, така и при $n > 3$ повърхнините от втора степен се делят на три класа: елиптичен, хиперболичен и параболичен в зависимост от вида на собствените стойности на матрицата A. Ще напомним, че вследствие на симетрията си матрицата A има реални собствени стойности λ_i и в частност може да бъде приведена в диагонална форма на Шур с едно ортогонално преобразувание на подобие:

$$U^\top A U = S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

където $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ е ортогонална матрица, т.е., $U^\top U = I_n$.

6.2 Елиптичен клас

Елиптичният клас (или клас E) се характеризира с условието, че всички собствени стойности на A са с еднакъв знак, т.е., те са или всичките положителни, или всичките отрицателни. Това означава, че матрицата A е или положително, или отрицателно определена. Без ограничаване на общността ще приемем, че A е положително определена, т.е., че има само положителни собствени стойности. Съгласно критерия на Силвестър необходимото и достатъчно условие симетричната матрица $A = [a_{ij}]$ да е положително определена е главните й минори $A_1, A_2, \dots, A_n$ да са положителни, а именно

$$A_1 = a_{11} > 0, \ A_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \ \dots,$$

$$A_n = (-1)^n \det(A) > 0.$$

Да извършим смяната

$$x = U\xi + x_0$$

където $\xi \in \mathbb{R}^n$ е векторът на новите променливи. Тук транслационният вектор $x_0 = -A^{-1}p$ се избира така, че да се анулират линейните членове относно ξ, а ортогоналната матрица U привежда A в диагонална форма на Шур. Тези преобразувания са съвършено аналогични на направените вече в случаите $n = 2$ и $n = 3$. В резултат получаваме

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \cdots + \lambda_n\xi_n^2 + q_1 = 0$$

където

$$q_1 = q + x_0^\top Ax_0 + 2p^\top x_0 = q - p^\top A^{-1}p.$$

Вижда се, че фигурата е централна, тъй като наред с точката ξ тя съдържа и точката $-\xi$.

Тук са възможни три случая в зависимост от знака на числото

$$q_1 = \frac{\mathbf{J}_{n+1}}{\mathbf{J}_n}$$

(ще напомним, че $\lambda_i > 0$ по предположение).

Случай E1 (същински елипсоид) Този случай се характеризира с условието $q_1 < 0$. След разделяне с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

където

$$a_i := \sqrt{\frac{|q_1|}{\lambda_i}}$$

(тук за удобство се върнахме към старото означение x вместо ξ). При

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a > 0$$

имаме сфера с радиус a. Ако само $n-1$ от числата a_i са равни помежду си, например $a_2 = a_3 = \cdots = a_n$, имаме *ротационен елипсоид* с ос Ox_1.

Случай E2 (точка) В този случай имаме $q_1 = 0$, или

$$\lambda_1\xi_1^2 + \lambda_2\xi_2^2 + \cdots + \lambda_n\xi_n^2 = 0.$$

Предвид на положителността на числата λ_i, единственото решение на горното уравнение е $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, т.е., $x = 0$.

В комплексния случай фигурата е пресечница на различни комбинации от равнини в $\mathbb{C}^n$, минаващи през началото.

Случай E3 (празно множество) Този случай се характеризира с условието $q_1 > 0$. Няма реални координати, които да удовлетворяват уравнението и в $\mathbb{R}^n$ фигурата е празно множество. В $\mathbb{C}^n$ фигурата се нарича *мним елипсоид*.

6.3 Хиперболичен клас

Хиперболичният клас (или клас X) се характеризира с условието, че собствените стойности на A са ненулеви,

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$$

но има поне две с противоположни знаци. Това означава, че матрицата A е знаконеопределена.

След извършване на същите преобразувания, както при елиптичния клас, стигаме до уравнението

$$\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \cdots + \lambda_n \xi_n^2 + q_1 = 0.$$

Виждаме, че фигурите от хиперболичния клас също са централни.

В зависимост от вида на числото q_1 са възможни два основни случая.

Случай X1 (същински хиперболоиди) Този случай се характеризира с неравенството $q_1 \neq 0$. Да предположим освен това, че матрицата A има m на брой собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ със знак, противоположен на знака на q_1, и $n - m$ на брой собствени стойности $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ със знака на q_1. След разделяне на двете страни на уравнението с $-q_1$ получаваме

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_m^2}{a_m^2} - \frac{x_{m+1}^2}{a_{m+1}^2} - \cdots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

където

$$a_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{-q_1}},\ 1 \leq i \leq m;\ a_j = \sqrt{\frac{\lambda_j}{q_1}},\ m+1 \leq j \leq n.$$

Очевидно хиперболоидите от този тип са точно $n-1$ на брой, колкото са възможните стойности $1, 2, \ldots, n-1$ за m. Ще казваме, че всеки от горните хиперболоиди е от тип (m). При това са възможни следните подслучаи.

1. При $n \geq 2$ и $m = 1$ имаме двулистен хиперболоид Γ, състоящ се от две части, разположени в полупространствата $x_1 \leq -a_1$ и $x_1 \geq a_1$. Равнините $x_1 = d$ ($|d| > a_1$) пресичат Γ по $(n-2)$-мерни елипсоиди, а равнините $x_i = d$ ($i = 2, \ldots, n$) пресичат Γ по $(n-1)$-мерни двулистни хиперболоиди.

2. При $n \geq 4$ и $2 \leq m \leq n-2$ имаме хиперболоид, който пресича всяка от равнините $x_i = d$ ($i = 1, \ldots, n$) или по $(n-2)$-мерни хиперболоиди, или по $(n-2)$-мерни конуси.

3. При $n \geq 3$ и $m = n-1$ имаме хиперболоид Γ, аналогичен на еднолистния. Равнините $x_n = d$ пресичат Γ по $(n-2)$-мерни елипсоиди, чиито полуоси растат заедно с $|d|$. Равнините $x_i = d$ ($i = 1, \ldots, n-1$) пресичат Γ по $(n-2)$-мерни хиперболоиди или конуси.

Може да се докаже, че всички хиперболоиди с изключение на двулистните съдържат линейни образуващи.

Да се върнем към общия случай. Всяко m-мерно линейно многообразие

$$x_{m+1} = d_{m+1}, \ldots, x_n = d_n$$

пресича хиперболоида от тип (m) по $(m-1)$-мерен елипсоид. Сред $(n-m)$-мерните линейни многообразия от вида

$$x_1 = d_1, \ldots, x_m = d_m$$

има такива, които пресичат хиперболоида по $(n-m-1)$-мерни елипсоиди. Изобщо, в хиперболоида се съдържат r-мерни елипсоиди за всички размерности до

$$r = \max\{m-1, n-m-1\}$$

включително, но няма елипсоиди с по-висока размерност.

Случай X2 (конуси) Този случай съответства на равенството $q_1 = 0$ или $\mathbf{J}_{n+1} = 0$. Да предположим освен това, че матрицата A има m на брой положителни собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $n-m$ на брой отрицателни собствени стойности $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$. Получаваме

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_m^2}{a_m^2} - \frac{x_{m+1}^2}{a_{m+1}^2} - \cdots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 0$$

където

$$a_i = \sqrt{\frac{1}{\lambda_i}},\ 1 \leq i \leq m;\ a_j = \sqrt{-\frac{1}{\lambda_j}},\ m+1 \leq j \leq n.$$

Очевидно можем да считаме, че $m \geq n/2$, тъй като в противен случай след умножаване на уравнението с -1 стигаме до уравнение с $m \geq n/2$. Така броят K_n на $(n-1)$-мерните конуси е $n/2$ при четно n и $(n-1)/2$ при нечетно n. Ще казваме, че всеки такъв конус е от тип (m).

Равнината $x_n = d \neq 0$ пресича конуса от тип (m) по $(n-2)$-мерен елипсоид при $m = n-1$, и по $(n-2)$-мерни хиперболоиди при $n \geq 4$ и $m < n-1$.

Конусът се състои от всевъзможните прави през началото и през точки от пресечницата на конуса с дадена равнина $x_n = d \neq 0$.

6.4 Параболичен клас

Параболичният клас (или клас П) се характеризира с условието, че поне една от собствените стойности на A е нулева,

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det(A) = 0.$$

Тъй като по условие матрицата A е ненулева, то не може всички собствени стойности на A да са равни на нула. Така при параболичния клас матрицата A може да има от 1 до $n-1$ нулеви собствени стойности включително.

При параболичния клас матрицата A е особена и не е възможно в общия случай да се анулират чрез транслация всички линейни членове в уравнението.

Нека матрицата A има r $(1 \le r \le n-1)$ на брой ненулеви собствени стойности (ще отбележим, че предвид симетричността на матрицата A рангът ѝ $\mathrm{rank}(A)$ е равен на броя на ненулевите ѝ собствени стойности), като $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ е ортогоналната матрица, която привежда A в диагонална Шур форма:

$$U^\top A U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0, \ldots, 0).$$

Тогава след ротацията $x = Ux'$ (ще отбележим, че тук и по-нататък знаците $'$ (чете се „прим") и $''$ (чете се „секонд") не означават диференциране) уравнението на повърхнината се записва като

$$\lambda_1 x_1' + \cdots + \lambda_r x_r' + 2b_1 x_1' + \cdots + 2b_n x_n' + q = 0 \qquad (10)$$

където

$$[b_1, b_2, \ldots, b_n] := p^\top U.$$

С помощта на транслациите

$$x_i'' = x_i' + \frac{b_i}{\lambda_i}, \ 1 \le i \le r$$

анулираме линейните по $x'_1, \dots, x'_r$ членове:

$$\lambda_1 x''^2_1 + \cdots + \lambda_r x''^2_r + 2b_{r+1}x'_{r+1} + \cdots + 2b_n x'_n + q' = 0$$

където

$$q' := q - \frac{b_1^2}{\lambda_1} - \cdots - \frac{b_r^2}{\lambda_r}.$$

Ще започнем анализа на параболичния клас с уравнението (10). Видът на получените фигури зависи изключително от числата r и

$$b := \sqrt{b_{r+1}^2 + \cdots + b_n^2} \geq 0.$$

Ще разделим повърхнините от параболичния клас на три групи.

В първите две групи се съдържат същински параболоиди. Те се характеризират с условията

$$r = n - 1, \; b = |b_n| > 0. \tag{11}$$

Тук уравнението на повърхнината е от вида

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 + 2b_n x_n + q' = 0$$

където

$$q' = \pm\sqrt{-\frac{\mathbf{J}_{n+1}}{\mathbf{J}_{n-1}}}.$$

В третата група, която обхваща най-много случаи, се съдържат всевъзможните параболични цилиндри (т.е., фигурите, в чиито уравнения отсъства поне една от променливите). Те се получават при $r < n - 1$ и/или $b = 0$. Всяка фигура от третата група може да се разглежда като получена от някоя повърхнина в $\mathbb{R}^{n-1}$ чрез успоредно пренасяне по всевъзможните направления на някакво подпространство $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ с размерност $1 \leq \dim(\Pi) \leq n-1$.

Случай П1 (елиптичен параболоид) При този случай са в сила условията (11) и всички собствени стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ са с еднакъв знак. Правим транслацията

$$x''_n = x'_n + \frac{q'}{2b_n}$$

и делим двете страни на уравнението с $-b_n$. Получаваме уравнението

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}} = 2x_n$$

в което всички параметри $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ са с еднакъв знак (тук отново използваме означението x вместо x''). Получената фигура се нарича (същински) елиптичен параболоид. Фигурата има връх в точката $x = 0$ и се намира в едно от полупространствата $x_n \leq 0$ (ако параметрите α_i са отрицателни) или $x_n \geq 0$ (ако параметрите α_i са положителни). Нека за определеност тези параметри са положителни. Тогава сеченията на фигурата с равнини $x_n = d >$ са $(n-2)$-мерни елипсоиди, а сеченията ѝ с всяка равнина $x_i = d_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ са $(n-2)$-мерни елиптични параболоиди.

Случай П2 (същински хиперболични параболоиди) Този случай се характеризира с условията (11), като поне две от собствените стойности $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ на A са с различни знаци. Това са най-сложните повърхнини от втора степен. Очевидно съществуват толкова вида хиперболични параболоиди, колкото вида са конусите в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Случай П3 (цилиндри) В този случай имаме $r < n-1$ и/или $b = 0$. Да разгледаме първо случая $r < n-1$ и $b > 0$. Да извършим ротация в $(n-r)$-мерното подпространство

$$x_1'' = \cdots = x_r'' = 0$$

като положим

$$x_{r+1}'' := \frac{1}{b}\left(b_{r+1}x_{r+1}' + \cdots + b_n x_n'\right).$$

Останалите нови променливи $x_{r+2}'', \ldots, x_n''$ определяме по следния начин. Нека

$$W \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$$

е ортогонална матрица, чиито първи ред е

$$\left[\frac{b_{r+1}}{b}, \ldots, \frac{b_n}{b}\right].$$

Тогава полагаме

$$\begin{bmatrix} x_{r+1}'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} x_{r+1}' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}.$$

Така получаваме уравнението

$$\lambda_1 x_1''^2 + \cdots + \lambda_r x_r''^2 + 2b x_{r+1}'' + q' = 0.$$

След транслация по x_{r+1}'' с цел анулиране на свободния член и разделяне с $-b$ получаваме

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1} + \cdots + \frac{x_r^2}{\alpha_r} = 2x_{r+1}$$

(използваме отново старите променливи x вместо x''). Получихме параболичен цилиндър.

Нека накрая $r < n-1$ и $b = 0$. Тогава имаме уравнението

$$\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + q' = 0$$

което описва цилиндър, който е или елиптичен (ако числата $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ са с еднакви знаци; тук се включват $(n-r)$-мерното подпространство $x_1 = \cdots = x_r = 0$ и празното множество), или от хиперболичен тип (ако сред числата $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ има с различни знаци; тук се включват и цилиндрите с основа конус).

6.5 Брой на видовете повърхнини

Да разгледаме въпроса за пресмятане на броя Σ_n на различните видове повърхнини от втора степен в $\mathbb{R}^n$. Нека E_n, H_n и P_n е броят съответно на фигурите в елиптичния, хиперболичния и параболичния клас в $\mathbb{R}^n$. Тогава

$$\Sigma_n = E_n + H_n + P_n.$$

По-нататък за отделните събираеми в Σ_n получаваме следното.

1. В елиптичния клас винаги имаме три случая и

$$E_n = 3.$$

2. В хиперболичния клас имаме $n-1$ същински хиперболоида (случай X1) и K_n конуса (случай X2). Така

$$H_n = n - 1 + K_n.$$

3. В параболичния клас имаме един елиптичен параболоид (случай П1), K_{n-1} хипрболични параболоида (случай П2) и Σ_{n-1} цилиндъра (случай П3). Следователно

$$P_n = 1 + K_{n-1} + \Sigma_{n-1}.$$

Ще отчетем и обстоятелството, че

$$K_n + K_{n-1} = n - 1.$$

От горните разсъждения получаваме

$$\begin{aligned} \Sigma_n &= 3 + n - 1 + K_n + 1 + K_{n-1} + \Sigma_{n-1} \\ &= \Sigma_{n-1} + 2n + 2, \ n \geq 2. \end{aligned}$$

Към това рекурентно уравнение за Σ_n трябва да прибавим условието $\Sigma_1 = 3$. Може да се докаже, че решението на получената рекурентна задача има вида

$$\Sigma_n = An^2 + Bn + C.$$

След заместване в уравнението получаваме

$$2(1 - A)n + A - B + 2 = 0$$

за всяко $n \geq 2$. За да бъде изпълнено последното равенство за всяко n е необходимо и достатъчно $1 - A = 0$ и $A - B + 2 = 0$. Следователно $A = 1$, $B = 3$ и

$$\Sigma_n = n^2 + 3n + C.$$

Константата C определяме от условието $\Sigma_1 = 3$, което дава $C = -1$. Окончателно имаме

$$\Sigma_n = n^2 + 3n - 1.$$

Така определихме броя на различните класове повърхнини от втора степен в реално пространство с произволна размерност.

7 Литературна справка

Има разнообразна литература по аналитична геометрия и в частност по криви и повърхнини от втора степен. От различните учебници и сборници ще спomенем следните:

1. П.С. Александров: *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* Наука, Москва 1979.

2. С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко: *Сборник задач по аналитической геометрии.* Наука, Москва 1964.

3. Д.В. Беклемишев: *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* Наука, Москва 1985.

4. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров: *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.* Наука, Москва 1987.

5. Я.С. Бугров, С.М. Никольский: *Задачник.* Наука, Москва 1982.

6. Я.С. Бугров, С.М. Никольский: *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.* Наука, Москва 1988.

7. Т. Гичев: *Висша математика I част. Линейна алгебра и аналитична геометрия.* Наука и изкуство, София 1988.

8. Ал. Гьонов, Н. Стоев: *Сборник от задачи по аналитична геометрия и линейна алгебра.* Наука и изкуство, София 1988.

9. Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн: *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* Наука, Москва 1974.

10. Д.В. Клетеник: *Сборник задач по аналитической геометрии.* Наука, Москва 1986.

11. П.С. Моденов: *Аналитическая геометрия.* Изд. МГУ, Москва 1955.

12. П.С. Моденов, А.С. Пархоменко: *Сборник задач по аналитической геометрии.* Наука, Москва 1976.

13. Н.И. Мусхелишвили: *Курс аналитической геометрии.* ГТТИ, Москва 1947.

14. А.Д. Мышкис: *Лекции по высшей математике.* Наука, Москва 1969.

15. А.В. Погорелов: *Аналитическая геометрия.* Наука, Москва 1968.

16. М.М. Постников: *Аналитическая геометрия.* Наука, Москва 1986.

17. О.Н. Цубербиллер: *Задачи и упражнения по аналитической геометрии.* Наука, Москва 1970.