УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА,
СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ

Михаил Константинов

ЕЛЕМЕНТИ НА ЛИНЕЙНАТА АЛГЕБРА: ВЕКТОРИ И МАТРИЦИ

София
2000

Съдържание

Ако математиката е царица на науките,
то алгебрата е перлата в нейната корона.

$\varkappa$

Анотация Разгледани са основните елементи на линейната алгебра: векторите и матриците.

Книгата е предназначена за студенти от техническите и икономическите университети, както и за специалистите в областта на техническите и природните науки. Тя може да се използва като учебник по съответните раздели от дисциплината „Линейна алгебра и аналитична геометрия” (или „Математика I част”) от курса по математика на техническите и икономическите университети.

Възприет е съвременният стил при излагане на материала по матрици с оглед и на числените му аспекти. Тук следва да се напомни, че матричното смятане, заедно с апарата на диференциалните уравнения, спада към основния инструментариум на съвремената инженерна наука.

За четене на книгата не се изискват знания, надхвърлящи училищния курс по математика. В частност се предполага, че читателят е запознат с понятията комплексно число и полином.

София

Глава 1

УВОД

1.1 Общи бележки

В настоящия учебник са разгледани някои основни въпроси на линейната алгебра, включени в курса по математика за студентите от Строителния факултет, Хидротехническия факултет, Факултета по транспортно строителство и Геодезическия факултет на Университета по архитектура, строителство и геодезия. Книгата може да се използва от студенти от другите университети в страната, както и от специалисти в областта на природните, техническите и икономическите науки.

Предмет на линейната алгебра са крайномерните линейни (или векторни) пространства и линейните операции в тях, т.е., *векторите* и *матриците*. Пример за такива пространства са множествата на векторите в равнината и пространството. Опитите за обобщаване на класическото понятие за вектор са довели до абстрактната концепция за линейно пространство, която е една от най-плодотворните в математиката. Основите на линейната алгебра са поставени в XIX в. в трудовете на редица видни математици.

Матричното смятане (или матричната алгебра) намира приложение във всички инженерни дисциплини. Може определено да се твърди, че матричната алгебра, заедно с методите на теорията на диференциалните уравнения, са основните средства за решаване на инженерни задачи, включително в областта на високото строителство, хидростроителството и транспортното строителство. Разбира се, за да бъдат успешно приложени в практиката, горните методи следва да са разработени като изчислителни алгоритми, пригодени за компютърна реализация.

При първоначално запознаване с факти от линейната алгебра затруднения могат да възникнат от високата размерност n на изучаваните пространства (случаите $n = 100$, $n = 1000$ и дори $n = 10\,000$ не са рядкост дори в инженерната практика!), тъй като човек трудно може да си представи обекти извън тримерното пространство, в което живее. Всъщност, едва ли има и няколко души на този свят, които да могат да мислят „четиримерно”, т.е., при $n = 4$. Поради това препоръчваме на читателите да си представят нещата в пространството ($n = 3$) и дори в равнината ($n = 2$). Впрочем, почти няма съществени факти в линейната алгебра, които да нямат съдържателна двумерна интерпретация, вж. напр. [5]. Също така както терминологията, така и идеологията в линейната алгебра са наследени в голяма степен от класическата геометрия на равнината и пространството.

При изграждане на дисциплината по линейна алгебра в предложения учебник се предполага, че студентите са запознати с курса по елементарна геометрия, както и с основните свойства на реалните и комплексните числа и полиномите.

В книгата е направен опит за съчетаване на противоречивите изисквания за достатъчно ниво на строгост, за достъпност и за минимална скучност при излагане на материала. Естествено, отчетено е и обстоятелството, че книгата е предназначена за бъдещи и настоящи инженери, а не за професионални математици.

Включени са многобройни примери и упражнения, илюстриращи основния материал. В някои от упражненията са изложени допълнителни теоретични факти, така че на тях трябва да се гледа като на важно допълнение към основния материал.

Наред с теоретичните факти и сведения, в книгата са изложени и елементи на *числената линейна алгебра*. Повече сведения за една диалогова компютърна система, наречена SYSLAB и предназначена за матрични пресмятания, са дадени в [10].

Допълнителни сведения и факти по изложения материал читателят може да намери в книгите [15, 1, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 23, 9].

В книгата е приета двойна номерация, отговаряща на главите. Например, (2.3) е третата релация от глава 2. Определяните термини са дадени в *курсив*.

1.2 Числени аспекти

В съвременната линейна алгебра могат да се изтъкнат два аспекта. От една страна това са теоретичните факти, резултати и методи. От друга страна това са проблемите на числената реализация на теоретичните методи. За какво всъщност става дума?

Възникващите в практиката задачи от областта на линейната алгебра (например решаване на системи линейни алгебрични уравнения, намиране на собствената структура на матрица и т.н.), особено при по-висока размерност, се решават с помощта на компютър. В паметта на компютъра, обаче, могат да се запишат не всички реални числа. Например числата $\sqrt{2}$ и π се записват само приближено след закръгляне, а числото 10^{400} и по-големите от него изобщо не могат да се запишат в паметта на повечето компютри. Освен това в компютрите често се реализират не точните аритметични операции, например сумиране и умножение, а някакви техни приближения. В аритметиката на компютъра не са изпълнени също асоциативното правило (както при сумирането, така и при умножението) и дистрибутивното правило, свързващо сумирането с умножението. Така пресметнатото с помощта на компютър числено решение обикновено е приближено в резултат на грешките от закръгляне. В много случаи тези грешки могат да се пренебрегнат в рамките на разумната инженерна точност. Понякога, обаче, грешките от закръгляне водят до **изчислителна катастрофа**, при която в изчисленото решение няма нито една вярна значеща цифра. Причините за това обикновено са две – лош числен метод или силно чуствителна задача (разбира се, възможна е и комбинация от двете неприятности).

Една задача е *чуствителна*, ако малки изменения в данните водят до голямо изменение в резултата. Чуствителността е свойство на самата задача и не зависи както от метода за решаването й, така и от използвания компютър.[1] Ясно е, че при решаване на силно чуствителни задачи могат да се очакват и големи грешки от закръгляне. На свой ред изчислителният алгоритъм може да влоши допълнително нещата като внесе големи, неприсъщи на първоначалната задача, грешки от закръгляне. Такива алгоритми се наричат *неустойчиви*. За разлика от тях *устойчивите* алгоритми не внасят големи допълнителни грешки в решението.

Трябва да се знае, че „праволинейното” прилагане на много от теоретичните методи на алгебрата и на линейната алгебра като изчислителни процедури води именно до числено неустойчиви, ненадеждни или даже нереализуеми алгоритми. Така например известната формула

$$x_{1,2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \ a \neq 0,$$

за корените на квадратното уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

е вероятно най-лошият начин за решаване на уравнението с помощта на компютър. Обстоятелството, че именно тази формула обикновено се предлага на учениците като упражнение в часовете по информатика в средното училище, само е засилило заблуждението, че именно така се решават числено квадратни уравнения.

Друг пример за разпространено заблуждение сред хората, изучавали „класическата” линейна алгебра, е че решаването на системи линейни алгебрични уравнения може да стане с формулите на Крамер. Използването на тези формули на практика не само може да доведе до катастрофални грешки в изчисленото решение още при съвсем умерен размер на системата, но е и просто невъзможно поради липса на време независимо от производителността на използувания компютър.

Понякога дори и сред специалисти съществува погрешното мнение, че собствените стойности на една матрица се пресмятат числено като корени на характеристичния й полином. Тъкмо обратното: ако по някаква причина е необходим характеристичният полином, той се пресмята чрез собствените стойности, които предварително се намират чрез някой разумен матричен изчислителен алгоритъм. Също така корените на дадено алгебрично уравнение обикновено се намират (поне в първо приближение) като собствените стойности на една асоциирана с това уравнение матрица.

[1] Понякога оценките за чуствителността се формулират в зависимост от конкретната изчислителна среда.

Списъкът със ширещите се заблуди и митове, свързани с числената реализация на методите на линейната алгебра, може да бъде продължен (вж. например [10, 20, 8]), но тук поради липса на място ще трябва да изоставим тази поучителна тема.

В крайна сметка точността на пресметнатото с помощта на компютър решение на дадена изчислителна задача (не само в областта на линейната алгебра!) зависи от три фактора:

– *чуствителността на задачата*;

– *устойчивостта на изчислителния алгоритъм*;

– *използваната изчислителна среда.*

Отчитането на всички тези фактори позволява да се оцени грешката в изчисленото решение. Без наличието на такава оценка достоверността на всеки числен резултат в линейната алгебра остава съмнителна.

Важна характеристика на изчислителните алгоритми е тяхната *ефективност*. Мярка за ефективността на даден алгоритъм е броят на необходимите елементарни аритметични операции – умножение (деление) и събиране (изваждане) на две числа, както и извличането на квадратен корен от число, необходими за изпълнението му върху даден клас задачи. При това обикновено се отчитат само умноженията (деленията). В линейната алгебра изчислителните алгоритми изискват брой операции, който се оказва полиномиална функция от степен 1 до 4 от реда n на обработваните матрици. Така например пресмятането на произведението на матрица от n–ти ред по вектор включва n^2 умножения, докато стандартното произведение на две матрици от същия ред изисква n^3 умножения. [2]

Изучаването на числените аспекти на линейната алгебра е предмет на *числената линейна алгебра.* През последните 40 години в тази област бяха постигнати забележителни резултати и днес за повечето задачи на линейната алгебра съществуват висококачествени методи, алгоритми и програмно осигуряване. Числени проблеми на линейната алгебра се разглеждат в книгите [15, 9, 2, 10, 12, 17, 19, 23, 20].

1.3 Основни означения

Навсякъде в учебника ще използуваме следните означения за някои числови множества:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – множеството на натуралните числа;

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множеството на целите числа и нулата;

$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ – множеството на рационалните числа;

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ – множеството на реалните числа;

$\mathbb{C} = \{\alpha + \beta\imath : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ – множеството на комплексните числа, $\imath = \sqrt{-1}$.

Между горните множества съществуват следните включвания:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

[2] Известни са и по-бързи алгоритми за умножаване на матрици, вж. например [22, 20].

Когато представените резултати са в сила за вектори и матрици както с реални, така и с комплексни елементи, ще използуваме означението $\mathbb{F}$ за което и да е от множествата $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Използвани са и следните специални означения:

$\mathbb{F}^{m\times n}$ – пространството на матриците с размер $m \times n$ и с елементи от множеството $\mathbb{F}$, $\mathbb{F}^m = \mathbb{F}^{m\times 1}$;

I_n – единичната $n \times n$ матрица;

$\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагонална матрица с елементи λ_i по диагонала;

$e_1, e_2, \dots$ – стълбовете на единичната матрица;

$A^\top$ – транспонираната матрица на матрицата A;

$\overline{A}$ – комплексно спрегнатата матрица на матрицата A;

$A^{\mathrm{H}} = \overline{A}^\top$ – ермитово спрегнатата матрица на матрицата A;

$A^* = A^\top$ когато матрицата A е реална;

$A^* = A^{\mathrm{H}}$ когато матрицата A е комплексна;

A^{-1} – обратната матрица на неособената матрица A;

$A^\dagger$ – псевдообратната матрица на матрицата A;

$\det(A)$ – детерминантата на квадратната матрица A;

$\mathrm{per}(A)$ – перманентата на матрицата A;

$\mathrm{tr}(A)$ – следата на матрицата A;

$\mathrm{rank}(A)$ – рангът на матрицата A;

$\mathrm{spect}(A)$ – спектърът на квадратната матрица A, т.е., наборът от собствените ѝ стойности $\lambda_i(A)$ с отчитане на алгебричните им кратности;

$\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$ – най–голямата и най–малката собствени стойности на комплексната ермитова (или реалната симетрична) матрица A;

$\sigma_1(A) \geq \cdots \geq \sigma_r(A) > 0$ – сингулярните стойности на матрицата A от ранг $r \geq 1$;

$\sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A)$ и $\sigma_{\min}(A) = \sigma_r(A)$ – най–голямата и най–малката положителни сингулярни стойности на матрицата A от ранг $r \geq 1$;

$\chi_A(\lambda)$ – характеристичният полином на квадратната матрица A;

$\mu_A(\lambda)$ – минималният полином на квадратната матрица A;

$\|\cdot\|$ – норма в линейно (векторно) пространство;

$c_A = \|A\|\,\|A^\dagger\|$ – числото на обусловеност на матрицата от пълен ранг A;

$\mathrm{Rg}(A)$ – образът на матрицата A;

$\mathrm{Ker}(A)$ – ядрото на матрицата A;

$\mathrm{vec}(A)$ – стълбовата векторизация на матрицата A;

$L^\perp$ – ортогоналното допълнение на подпространството L;

$\dim(L)$ – размерността на (под)пространството L;

$L \cap M$ – сечението на подпространствата L и M;

$L + M$ – сумата на подпространствата L и M;

$L \oplus M$ – пряката сума на подпространствата L и M;

$A \otimes B$ – кронекеровото (тензорното) произведение на матриците A и B;

$A \oplus B$ – кронекеровата сума на матриците A и B;

$\mathcal{GL}(n, \mathbb{F})$ – групата на неособените $n \times n$ матрици над полето $\mathbb{F}$;

$\mathcal{U}(n)$ – групата на комплексните $n \times n$ унитарни матрици;

$\mathcal{O}(n, \mathbb{F})$ – групата на ортогоналните $n \times n$ матрици над полето $\mathbb{F}$;

eps – мярката на закръгляне на използваната машинна (крайна) аритметика, в която са реализирани съответните матрични алгоритми. При някои допълнителни ограничения скаларните операции в такава аритметика се извършват с относителна грешка, ненадвишаваща eps.

Символът := означава „равно по определение”. Определяемите термини са дадени в *курсив*.

1.4 Благодарности

Обикновено в края на всеки увод авторът благодари на някого за нещо. Най–често това е машинописката, която така прекрасно е напечатала ръкописа. В този случай аз няма да благодаря на машинописката, защото сам съм набирал ръкописа с помощта на компютърната система LaTeX, предназначена за математически текстове. Така за съжаление отговорността за евентуалните печатни грешки [3] е лично моя.

Всякакви критични бележки по книгата ще бъдат приети с благодарност на адрес: М. Константинов, УАСГ, бул. „Хр. Смирненски” 1, 1046 София, както и на електронния ми адрес mmk_fte@acad.bg.

[3]Надявам се, че в книгата грешки по същество няма

Глава 2

ВЕКТОРИ

2.1 Основни определения

Понятията *вектор* и *линейно* (или *векторно*) *пространство* са фундаментални в линейната алгебра. Те са възникнали като обобщение на съответните понятия в класическата геометрия на равнината и пространството. При това в качеството на основни са приети операциите

(а) умножаване на вектор с число, и

(б) сума на два вектора.

Резултатът от тези операции отново е вектор от същия вид.

Множество от елементи, наречени *вектори*, за които резултатът от горните две операции е отново вектор от същото множество, се нарича *линейно*, или *векторно пространство*. При това се предполага, че са в сила някои допълнителни условия, свързващи умножението и сумирането на числа с операциите (а) и (б) (формални определения и примери са дадени в упражнения 2.1 – 2.3). За едно линейно векторно пространство се употребява и терминът *линеал*.

В категорията на линейните пространства попадат и обекти, които обикновено не се разглеждат в линейната алгебра, например множеството на всички числови функции, определени в даден интервал. В тази книга се интересуваме главно от вектори и операции в т.нар. *крайномерни* векторни пространства, които са и основният предмет на дисциплината „Линейна алгебра" (безкрайномерните пространства обикновено се разглеждат в анализа). Векторите в такива пространства се представят чрез наредени крайни съвкупности от числа (елементи на вектора), при което умножението на вектор с число и сумирането на два вектора се извършват поелементно. За удобство елементите на вектора се разполагат графично във вид на стълб или на ред. [1]

[1] Съществуват безкрайномерни пространства, в които векторите също се представят чрез наредени крайни съвкупности от числа, вж. упражнение 2.12.

Нека $n \in \mathbb{N}$ е зададено число. Да означим с $\mathbb{R}^n$ множеството на стълбовете от вида

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

където $a_i \in \mathbb{R}$. Обектът a се нарича *n–мерен реален вектор–стълб* (или *вектор–колона*) с *елементи* (или *компоненти*) a_i. Аналогично се дефинират *n–мерни комплексни вектор–стълбове*, при които елементите a_i са комплексни числа.

Множеството $\mathbb{R}^n$ се нарича *n–мерно реално координатно пространство*. Аналогично се определя *n–мерното комплексно координатно пространство $\mathbb{C}^n$*.

Наредената n–орка

$$b = [b_1, b_2, \ldots, b_n],$$

където b_i са реални или комплексни числа, се нарича *n–мерен вектор–ред.*

Видът на вектора (стълб или ред) и броят на елементите му определят неговия *размер*. Така например два вектора имат еднакъв размер, ако и двата са стълбове (или и двата са редове) и имат еднакъв брой елементи. Казва се още, че векторът–стълб с n елемента има размер $n \times 1$, а векторът–ред с n елемента има размер $1 \times n$.

Вектор, всичките елементи на който са равни на нула, се нарича *нулев вектор* и се бележи с 0. Ако е необходимо, нулевият n–мерен вектор–стълб се означава с 0_n.

Пример 2.1 При $n = 1$ имаме $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, т.е., едномерните реални вектори са просто реалните числа. При $n = 2$ пространството $\mathbb{R}^2$ е познатата ни равнина, а при $n = 3$ пространството $\mathbb{R}^3$ е тримерното пространство, в което живеем. При $n > 3$ говорим за *многомерно пространство.*

Векторите обикновено се означават с малки латински букви, а елементите им – със същата буква и долен индекс, показващ номера на елемента. За краткост при векторите ще използваме и означенията $a = [a_i]_{i=1}^n$ и даже $a = [a_i]$ когато размерът на a е ясен от контекста или пък е без значение. Елементът x_i на вектора x се означава още и като $(x)_i$.

2.2 Операции с вектори

Ако $a = [a_i]$ е n–мерен вектор–стълб от вида (2.1), то *транспонираният вектор* на вектора a е векторът–ред

$$a^\top = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

Аналогично, *ермитово спрегнатият вектор*[2] на вектора a е векторът–ред

$$a^{\mathrm{H}} = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n],$$

[2] Ш. Ермит, френски математик, 1822-1901.

където $\overline{\lambda}$ е комплексно спрегнатото число на числото λ. Очевидно, ако векторът a е реален, операциите транспониране и спрягане съвпадат.

Операциите транспониране и ермитово спрягане са *инволюции*, т.е., двукратното им прилагане не променя обекта:

$$(a^\top)^\top = a, \ (a^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = a.$$

Ако $a = [a_i]$ е вектор и λ е число, то *произведение* на a и λ ще наричаме вектора $\lambda a = a\lambda = [\lambda a_i]$. Следователно вектор се умножава с число като всичките му елементи се умножат с числото.

Пример 2.2 Ако a е реален вектор в равнината или пространството и $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, то векторът λa има направлението на a (същата посока при $\lambda > 0$ и противоположна посока при $\lambda < 0$) и е по–дълъг, по–къс или еднакъв по дължина с a съответно при $|\lambda| > 1$, $|\lambda| < 1$ или $|\lambda| = 1$. Нека например

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогава

$$3a = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

като дължината на a е $\sqrt{5}$, а тази на $3a$ е $3\sqrt{5}$.

Нека $a = [a_i]$ и $b = [b_i]$ са два вектора с еднакви размери. Тогава *сума* на векторите a и b ще наричаме вектора

$$a + b = [a_i + b_i].$$

Така при сумиране на два вектора се сумират съответните им елементи. По индукция се дефинира сума повече от два вектора $a, b, \ldots, c$, а именно

$$a + b + \cdots + c = [a_i + b_i + \cdots + c_i].$$

Операцията умножаване на вектор с число, при което полученият резултат е отново вектор от същия вид, е пример за т.нар. *линейна операция*.

По-общо, нека за всеки вектор $a \in \mathbb{F}^n$ по някакво правило f е определен векторът $f(a) \in \mathbb{F}^m$. Ще казваме, че операцията (или функцията) f, съпоставяща на всеки вектор a вектора $f(a)$, е *линейна*, ако за всеки два вектора $a, b \in \mathbb{F}^n$ и за всеки две числа $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ е изпълнено

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b). \tag{2.2}$$

2.3 Скаларно произведение. Норма

Нека $a, b \in \mathbb{R}^n$. Тогава числото

$$\langle a, b\rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

се нарича *скаларно* (или *вътрешно*) *произведение* на векторите a и b. Скаларното произведение (2.3) в $\mathbb{R}^n$ е *комутативно*, т.е.,

$$\langle b, a\rangle = \langle a, b\rangle.$$

Това произведение е линейно по всеки от аргументите си, например

$$\langle a, \lambda b + \mu c\rangle = \lambda\langle a, b\rangle + \mu\langle a, c\rangle,$$

където $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Такава функция на два аргумента, която е линейна по всеки от тях, се нарича *билинейна*. В общия случай функция на повече аргументи, която е линейна по всеки от тях, се нарича *полилинейна*.

Пространството $\mathbb{R}^n$, в което е определено скаларното произведение (2.3), се нарича *n–мерно реално евклидово пространство* (Евклид, древногръцки математик, IV в. пр. н.е.).

За комплексните вектори $a, b \in \mathbb{C}^n$ също може да се дефинира скаларно произведение

$$\langle a, b\rangle := a_1 \overline{b}_1 + a_2 \overline{b}_2 + \cdots + a_n \overline{b}_n \in \mathbb{C}. \tag{2.4}$$

То в общия случай не е комутативно, а удовлетворява условието

$$\langle b, a\rangle = \overline{\langle a, b\rangle}$$

(докажете!).

Пространството $\mathbb{C}^n$, в което е определено скаларното произведение (2.4), се нарича *n–мерно ермитово пространство.*

От курса по елементарна геометрия е известно понятието дължина на вектор в равнината или пространството. Това понятие може да се обобщи както за вектори $a \in \mathbb{R}^n$ с по-висока размерност $n > 3$, така и за комплексни вектори $a \in \mathbb{C}^n$.

Евклидова дължина (или *норма*) на вектора $a \in \mathbb{F}^n$ ще наричаме числото

$$\|a\| := \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2} = \sqrt{\langle a, a\rangle}\,.$$

Ако векторът a е реален имаме

$$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}\,.$$

Последното равенство е един от многомерните варианти на Питагоровата теорема (Питагор, древногръцки математик, VI в. пр. н.е.).

В $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ нормата $\|a\|$ е обичайната дължина на вектора a в евклидовата геометрия.

Очевидно за всеки вектор a имаме $\|a\| \geq 0$ като $\|a\| = 0$ точно когато $a = 0$. Освен това

$$\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$$

за всички $\lambda \in \mathbb{F}$ и $a \in \mathbb{F}^n$.

В $\mathbb{F}^n$ се използват и други норми, например

$$\|a\|_1 := |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

и

$$\|a\|_\infty := \max\{|a_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

По–общо, може да се въведе нормата

$$\|a\|_p := (|a_1|^p + |a_2|^p + \cdots + |a_n|^p)^{1/p}, \tag{2.5}$$

където $p \geq 1$. При тези означения евклидовата векторна норма $\|\cdot\|$ отговаря на $p = 2$. Нормата (2.5) е известна още като *хьолдерова p–норма.*

Понятието норма на вектор (или векторна норма) може да се въведе и аксиоматично по следния начин.

Функцията $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}$ се нарича *норма* в $\mathbb{F}^n$, ако за всички $a, b \in \mathbb{F}^n$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ са изпълнени условията

1. Ако $\|a\| = 0$, то $a = 0_n$.

2. $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$.

3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$.

При това може да се покаже, че $\|a\| \geq 0$, като $\|a\| = 0$ точно когато $a = 0_n$. Действително, от 2 следва

$$\|0_n\| = \|0a\| = 0\|a\| = 0.$$

На свой ред за $b = -a$ от 3 и 2 получаваме

$$\|a + b\| = \|0_n\| = 0 \leq \|a\| + \|-a\| = 2\|a\|$$

и $\|a\| \geq 0$.

Скаларното произведение (2.3) или (2.4) на два вектора е свързано с техните норми посредством знаменитото *неравенство на Коши–Шварц* (О. Коши, френски математик, 1789-1857; К. Шварц, немски математик, 1843-1921):

$$|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \, \|b\|. \tag{2.6}$$

За да докажем (2.6) в реалния случай, нека $a \neq 0$ (при $a = 0$ неравенството се свежда до $0 \leq 0$ и е тривиално изпълнено) и $\lambda \in \mathbb{R}$ е произволно число. Като използваме свойствата билинейност и комутативност на скаларното произведение получаваме

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|\lambda a + b\|^2 = \langle \lambda a + b, \lambda a + b\rangle^2 \\ &= \langle \lambda a, \lambda a\rangle + \langle \lambda a, b\rangle + \langle b, \lambda a\rangle + \langle b, b\rangle \\ &= \|a\|^2\lambda^2 + 2\langle a, b\rangle\lambda + \|b\|^2 =: h(\lambda). \end{aligned}$$

Полученото неравенство $h(\lambda) \geq 0$ за квадратния тричлен h е изпълнено за всяка стойност на реалния параметър λ точно когато дискриминантата на h е неположителна, т.е.,

$$\langle a, b\rangle^2 - \|a\|^2\|b\|^2 \leq 0,$$

което е равносилно на неравенството (2.6).

Съществува и доказателство „в един ред":

$$0 \leq \left\| \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|} a - \|a\| b \right\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2.$$

В елементарната геометрия ъгълът $\gamma = \angle(a, b)$ между два ненулеви вектора $a = CB$ и $b = CA$, които са страни в триъгълника ABC, се определя с помощта на косинусовата теорема:

$$|AB|^2 = |CB|^2 + |CA|^2 - 2|CB|\,|CA| \cos\gamma.$$

Тъй като $|AB| = \|b - a\|$, получаваме

$$\cos\gamma = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2 - \|b - a\|^2}{2\|a\|\,\|b\|} = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|}. \tag{2.7}$$

Предвид на неравенството на Коши–Шварц (2.6) имаме

$$-1 \leq \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|} \leq 1;\ a \neq 0,\ b \neq 0.$$

Така равенството (2.7) може да се използва като дефиниция за ъгъл $\gamma = \angle(a, b)$ между два ненулеви вектора $a, b \in \mathbb{R}^n$ при произволно $n \in \mathbb{N}$:

$$\cos\gamma := \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|};\ a, b \in \mathbb{R}^n.$$

За определеност се приема, че за ъгъла γ, чиито косинус е даден от горния израз, е в сила $0 \leq \gamma \leq \pi$.

За да включим в обхвата на тази дефиниция и случая на нулеви вектори, полагаме $\angle(a, b) = \pi/2$ когато $a = 0$ и/или $b = 0$.

Векторите a и b се наричат *ортогонални* когато $\langle a, b\rangle = 0$, т.е., когато $\angle(a, b) = \pi/2$. Така нулевият вектор е ортогонален на всички останали вектори.

Ако векторите a и b са ортогонални, то

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a,b\rangle = \|a\|^2 + \|b\|^2,$$

което също е многомерен вариант на Питагоровата теорема.

Аналогично се дефинира отношението ортогоналност и в $\mathbb{C}^n$ с помощта на скаларното произведение (2.4): два вектора $a, b \in \mathbb{C}^n$ са *ортогонални* когато $\langle a,b\rangle = 0$. Естествено, при комплексни вектори отсъства пряката аналогия с модели от класическата геометрия.

2.4 Афинно пространство

Елементи на линейното пространство $\mathbb{F}^n$ са n–мерните вектори стълбове с компоненти от $\mathbb{F}$ (вж. също упражнение 2.6). Те се характеризират със свойството, че сумата на два вектора и произведението на вектор с число от $\mathbb{F}$ отново са вектори от $\mathbb{F}^n$. Това характеристично свойство на едно линейно пространство L над полето $\mathbb{K}$ може да се формулира кратко като

$$\lambda x + \mu y \in L \tag{2.8}$$

за всички $x, y \in L$ и $\mu, \nu \in \mathbb{K}$. Така описаните вектори са полезен инструмент при формулиране и изучаване на редица въпроси в математиката и нейните приложения.

Същевременно в редица задачи се налага изучаването на геометрични факти относно различни фигури (или подмножества) в някакво многомерно пространство и в частност на взаимното разположение на тези фигури. При това характеристичното свойство (2.8) на L (почти) не се използва. Така се стига до идеята за т.нар. афинно, или точково пространство. Точките, или елементите на афинното пространство по определен начин се свързват с векторите от едно линейно пространство, вж. например [7].

Нека е дадено едно множество $\mathcal{A}$, чиито елементи ще наричаме *точки* и ще бележим с главни латински букви, например A, B, C. Нека освен това L е линейно пространство, чиито елементи ще наричаме *вектори* и ще означаваме с малки латински букви. Да предположим, че на всяка наредена двойка $(A,B) \in \mathcal{A}\times\mathcal{A}$ от точки $A, B \in \mathcal{A}$ е поставен в съответствие вектор $x \in L$, който ще означаваме като $x = \overline{AB}$. При този запис точката A е *начало*, а точката B – *край* на вектора $\overline{AB}$.

Множеството $\mathcal{A}$, на което по указания по–горе начин е съпоставено линейното пространство L, се нарича *афинно* (или *точково*) *пространство*, ако са изпълнени следните две условия:

– за всяка точка $A \in \mathcal{A}$ и за всеки вектор $x \in L$ съществува единствена точка $B \in \mathcal{A}$, такава че $\overline{AB} = x$;

– ако $\overline{AB} = x \in L$ и $\overline{BC} = y \in L$, то $\overline{AC} = x + y \in L$.

Някои автори означават накратко с $(\mathcal{A}, L)$ афинното пространство $\mathcal{A}$, свързано с линейното пространство L.

Лесно се вижда, че $\overline{AA}$ е нулевият вектор в L и $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

Афинното пространство $\mathcal{A}$ е *реално* (*комплексно*) точно когато е реално (комплексно) свързаното с него линейно пространство L.

Съществува тясна връзка между линейните и афинните пространства, като те даже могат да се смятат за еквивалентни в смисъла на изложените по–долу факти.

Всяко линейно пространство L може да се разглежда като афинно пространство $\mathcal{A}$, свързано с L. За целта можем да наречем векторите от L *точки*, като на всеки две точки $a, b \in \mathcal{A} = L$, взети в указания ред, съпоставяме вектора $b - a \in L$.

Обратно, всяко афинно пространство $\mathcal{A}$, свързано с линейното пространство L, самото може да се разглежда като линейно пространство. За целта фиксираме дадена точка $O \in \mathcal{A}$, а на произволна точка $A \in \mathcal{A}$ съпоставяме т.нар. *радиус–вектор* $\overline{OA} \in L$. Множеството на всички радиус–вектори е въпросното линейно пространство, съвпадащо в случая с L.

Така пространството $\mathbb{F}^n$ може да се интерпретира едновременно като линейно пространство, и като афинно пространство (свързано със себе си). За избягване на недоразумения обикновено се указва кой именно случай се разглежда. Когато $\mathbb{F}^n$ се разглежда като афинно пространство е удобно в качеството на фиксирана точка O да се вземе $0_n = [0, \ldots, 0]^\top$.

2.5 Упражнения

Упражнение 2.1 Ще казваме, че в множеството V е определена *алгебрична операция* $*$, ако на всеки два елемента $a, b \in V$ е съпоставен елемент $c = a * b \in V$. Операцията $*$ може да се нарече *сумиране* и тогава c се нарича *сума* на a и b и се означава като $c = a + b$. Ако операцията $*$ се нарече *умножение*, то c се нарича *произведение* на a и b и се означава като $c = a \times b$, или $c = a \cdot b$, или $c = ab$ (използват се и други означения). Операцията $*$ е *комутативна*, ако

$$a * b = b * a$$

и *асоциативна*, ако

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

за всички $a, b, c \in V$. По-нататък ще предполагаме, че сумирането винаги е комутативно.

Елементът $e \in V$ се нарича *неутрален* относно сумирането (или *нулев елемент*, или *нула*), ако за всяко $a \in V$ имаме

$$a + e = a.$$

Нулевият елемент в множеството V се означава и като 0_V.

Елементът $i \in V$ се нарича *десен неутрален* относно умножението (или *десен единичен елемент*, или *дясна единица*), ако

$$ai = a$$

за всяко $a \in V$. Аналогично се дефинира лявата единица.

Множеството V с една асоциативна операция $*$ се нарича *полугрупа*. Полугрупата V се нарича *група*, ако съществува дясна единица i и всеки елемент $a \in V$ има *десен обратен елемент* a^{-1}, такъв че $aa^{-1} = i$. Групата V е *комутативна*, или *абелева* (Н. Абел, норвежки математик, 1802-1829), ако груповата операция $*$ е комутативна.

Покажете, че:

– ако V е група, то съществува лява единица, съвпадаща с дясната единица i, а за всеки елемент $a \in V$ съществува ляв обратен елемент $a^{(-1)}$ ($a^{(-1)}a = i$), съвпадащ с десния обратен елемент a^{-1};

– множеството $\mathbb{F}^n$ с въведената в него операция на поелементно сумиране е абелева група;

– множеството $\mathbb{N}^n$ (т.е., множеството на n–векторите с целочислени елементи) също е абелева група относно поелементното сумиране.

Упражнение 2.2 Нека в множеството $\mathbb{F}^2$ е дефинирана операцията plus по формулата

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ plus } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 \end{bmatrix}.$$

Изследвайте комутативността и асоциативността на тази операция и определете неутралните относно нея елементи. Има ли операцията plus ляв неутрален елемент? Направете същото за операцията, която на стълбовете $a = [a_1, a_2]^\top$, $b = [b_1, b_2]^\top$, взети в указания ред, съпоставя стълба $[a_1 + b_1, a_2]^\top$.

Упражнение 2.3 Нека в множеството $\mathbb{K}$ с нулев елемент θ са въведени две операции сумиране $(+)$ и умножение $(\cdot)$. Ще казваме, че те се подчиняват на *дистрибутивното правило*, ако за всеки три елемента λ, μ, ν от $\mathbb{K}$ са в сила равенствата

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \cdot \nu &= \lambda \cdot \nu + \mu \cdot \nu, \\ \nu \cdot (\lambda + \mu) &= \nu \cdot \lambda + \nu \cdot \mu. \end{aligned}$$

Множеството $\mathbb{K}$ с горните две операции се нарича *поле*, ако тези операции са асоциативни, комутативни, свързани са с дистрибутивното правило и всеки ненулев елемент $\lambda \in \mathbb{K}$ има обратен $\lambda^{-1} \in \mathbb{K}$ (т.е., $\mathbb{K}\backslash\{\theta\}$ е абелева група по умножение).

Покажете, че множествата $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ са полета. Покажете същото за множеството на всички числа от вида $\lambda + \mu\sqrt{2}$, където $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$.

Упражнение 2.4 Нека $\mathbb{K}$ съдържа само два елемента 0 и 1. Да определим операциите сумиране и умножение от

$$0+0=0,\ 0+1=1,\ 1+1=0;\quad 0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0,\ 1\cdot 1=1.$$

Покажете, че $\mathbb{K}$ е поле. Може ли да построите поле с три различни елемента? А с n елемента?

Упражнение 2.5 Нека $\mathbb{K}$ е поле с нула θ. Покажете, че при $\lambda \neq \theta$ уравнението $\lambda\cdot\xi = \mu$ има единствено решение $\xi = \mu\cdot\lambda^{-1}$.

Ако за всяко ненулево λ означим $\mu/\lambda = \mu\cdot\lambda^{-1}$, докажете, че са в сила зависимостите

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\delta+\beta\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}$$

и

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\cdot\gamma}{\beta\cdot\delta}.$$

Упражнение 2.6 Нека $\mathbb{K}$ е поле. Да въведем в $\mathbb{K}^n$ (множеството на всички n–вектори $a=[a_i]$ с компоненти $a_i\in\mathbb{K}$) събиране и умножение по формулите

$$a+b=[a_i+b_i],\ a\cdot b=[a_i\cdot b_i].$$

Поле ли е $\mathbb{K}^n$? Намерете нулата и единицата в $\mathbb{K}^n$.

Упражнение 2.7 Нека V е множество и $\mathbb{K}$ е някое от числовите множества $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. [3] Елементите на V ще означаваме с малки латински букви $a,b,\ldots,c$, а елементите на $\mathbb{K}$ – с малки гръцки букви $\lambda,\mu,\ldots,\nu$. В представените по–нататък формули се предполага, че съответните релации са в сила за всеки набор от вектори и числа.

Двойката $(V,\mathbb{K})$ се нарича *линейно пространство* (или *линеал*) над $\mathbb{K}$, ако:

А) Определена е операцията *сумиране* $(+)$ на два вектора, която на $a,b\in V$ съпоставя сумата $a+b\in V$ (казваме също, че множеството V е затворено относно сумирането). При това:

А1. Сумирането е комутативно,

$$a+b=b+a.$$

А2. Сумирането е асоциативно,

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

А3. Съществува неутрален елемент $0_V\in V$ относно сумирането (наричан *нулев вектор*), такъв че

$$a+0_V=a.$$

[3] Дадената по-долу дефиниция за линейно пространство е в сила и когато $\mathbb{K}$ е произволно поле.

А4. За всеки вектор a съществува *противоположен вектор* $-a$, такъв че

$$a + (-a) = 0_V.$$

Б) Определена е операцията *умножение* $(\cdot)$ на вектор с число, която на $a \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ съпоставя произведението

$$\lambda \cdot a = a \cdot \lambda \in V$$

(казваме също, че множеството V е затворено относно умножаването с число). При това:

Б1) умножението е асоциативно,

$$\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda\mu) \cdot a.$$

Б2) Изпълнено е

$$1_{\mathbb{K}} \cdot a = a,$$

където $1_{\mathbb{K}}$ е единицата в $\mathbb{K}$.

В) Операциите сумиране на два вектора и умножаване на вектор с число удовлетворяват дистрибутивните правила:

В1) $\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$.

В2) $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$.

Покажете, че $0_{\mathbb{K}} \cdot a = 0_V$, където $0_{\mathbb{K}}$ е нулата в $\mathbb{K}$.

Постройте множества в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, които са затворени относно умножаването с реално число (такива множества се наричат *конуси*), но не и относно сумирането на два вектора.

Упражнение 2.8 Постройте множества в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, които са затворени относно сумирането, но не и относно умножаването с число.

Упражнение 2.9 Постройте множества в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, които са затворени относно сумирането и изваждането (т.е., $a+b$ и $a-b$ принадлежат на съответното множество заедно с a, b), но не и относно умножаването с число.

Упражнение 2.10 Постройте операции от типа $(+)$ и $(\cdot)$ за вектори от $\mathbb{R}^2$, за които са в сила всички условия А) – В) с изключение: само на В1); само на В2). Направете същото (изключване на по едно условие) за групите от условия А и Б.

Упражнение 2.11 Двойката $(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ (вж. упражнение 2.7) е линейно пространство, ако приемем, че сумирането на два вектора (в случая числа) е сумирането в $\mathbb{K}$, а умножението на вектор с число е умножението в $\mathbb{K}$.

Линейни пространства ли са двойките $(V, \mathbb{K})$, ако:

– $\mathbb{K} = \{\lambda\}$ и $V = \{a\}$ са едноелементни множества, като $\lambda + \lambda = \lambda$, $\lambda \cdot \lambda = \lambda$ и $a + a = a$, $\lambda \cdot a = a$;

– $V = \mathbb{C}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

– $V = \mathbb{R}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;

– $V = \mathbb{R}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$;

– $V = \mathbb{Q}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Упражнение 2.12 Линейното пространство V над $\mathbb{K}$ е *крайномерно*, ако съществува крайна система от вектори $a, b, \ldots, c$, такива че всеки вектор $x \in V$ може да се представи като

$$x = \lambda \cdot a + \mu \cdot b + \cdots + \nu \cdot c.$$

В противен случай пространството е *безкрайномерно*

Крайномерно ли е пространството $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$? Покажете, че линейното пространство $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ (вж. упражнение 2.11) е безкрайномерно.

Упражнение 2.13 Докажете, че условието (2.2) за линейност на f е еквивалентно на условията

$$\begin{aligned} f(\lambda a) &= \lambda f(a), \\ f(a+b) &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

за всички вектори a, b и скалари λ. Покажете, че всяко от последните две условия е съществено, като построите нелинейна функция f, която притежава само първото свойство $f(\lambda a) = \lambda f(a)$, наречено *хомогенност*, и нелинейна функция f, която притежава само второто свойство $f(a+b) = f(a) + f(b)$, наречено *адитивност*.

Упражнение 2.14 Докажете неравенството на Коши–Шварц (2.6) в комплексния случай.

Упражнение 2.15 Докажете равенството на Лагранж (френски математик, 1736-1813)

$$\|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b\rangle^2 = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)^2; \ a, b \in \mathbb{R}^n,$$

откъдето впрочем следва и неравенството на Коши–Шварц (2.6) за реални вектори.

Упражнение 2.16 Докажете, че

$$\|a + b\|_p \le \|a\|_p + \|b\|_p; \ a, b \in \mathbb{F}^n$$

и

$$|\, \|a\|_p - \|b\|_p| \le \|a - b\|_p; \ a, b \in \mathbb{F}^n.$$

Упражнение 2.17 Нека са дадени положителните числа $c_1, \dots, c_n$. Определете кога всеки от следните три израза определя норма в $\mathbb{F}^n$:

$$\begin{aligned}
\nu_1(x) &:= \sum_{i=1}^{n} c_i |x_i|, \\
\nu_2(x) &:= \left(\sum_{i=1}^{n} c_i |x_i|^2 \right)^{1/2}, \\
\nu_3(x) &:= \max\{c_i |x_i| : i = 1, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Упражнение 2.18 Нека са дадени нормите $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ в $\mathbb{F}^n$. Покажете, че функцията $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}_+$, определена от

$$\|x\| := \max\{\|x\|_p, \|x\|_q\},$$

също е норма в $\mathbb{F}^n$.

Упражнение 2.19 Нека са дадени нормите $\|\cdot\|_{p_1}, \dots, \|\cdot\|_{p_m}$ в $\mathbb{F}^n$ и нека $\|\cdot\|_q$ е норма в $\mathbb{F}^m$. Покажете, че функцията $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}_+$, определена от

$$\|x\| := \left\| [\|x\|_{p_1}, \dots, \|x\|_{p_m}] \right\|_q,$$

е норма в $\mathbb{F}^n$.

Упражнение 2.20 Нека $x \in \mathbb{F}^n$. Покажете, че

$$\begin{aligned}
\|x\|_2 &\le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2, \\
\|x\|_\infty &\le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\, \|x\|_\infty, \\
\|x\|_\infty &\le \|x\|_1 \le n \|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Глава 3

МАТРИЦИ

3.1 Основни определения

Таблицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

съдържаща mn числа $a_{i,j} \in \mathbb{F}$, се нарича *матрица с m реда и n стълба* (или *колони*). Казваме също, че A е $(m \times n)$–матрица с елементи $a_{i,j}$. Тук първият индекс i показва реда, а вторият j – стълба, в който се намира елементът $a_{i,j}$. Елементите на A се означават и като $(A)_{i,j}$.

Матрицата е *реална* (съответно *комплексна*), ако елементите ѝ са реални (съответно комплексни) числа. Аналогично се дефинират *рационални* матрици, *целочислени матрици* и т.н.

Множеството на реалните $(m \times n)$–матрици ще означаваме с $\mathbb{R}^{m\times n}$, а на комплексните $(m \times n)$–матрици съответно с $\mathbb{C}^{m\times n}$. Когато някой факт се отнася както за реалния, така и за комплексния случай, ще означаваме с $\mathbb{F}^{m\times n}$ което и да е от множествата $\mathbb{R}^{m\times n}$ или $\mathbb{C}^{m\times n}$. Ако сравним с означенията от глава 2 се вижда, че сме приели съкращението $\mathbb{F}^n$ за пространството $\mathbb{F}^{n\times 1}$.

Броят на редовете и броят на стълбовете на дадена матрица определят нейния *размер.* За матрицата (3.1) казваме още, че е матрица $m \times n$ (чете се „матрица ем на ен").

За отбелязване на матрицата (3.1) се използуват съкратените означения

$$A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{m,n}$$

или само $A = [a_{i,j}]$ когато размерът на A е ясен от контекста или е без значение.

При $m \neq n$ матрицата (3.1) е *правоъгълна*, а при $m = n$ – *квадратна.* Матрица с размер $n \times n$ се нарича матрица от n–ти ред. При $m > n$ матрицата (3.1) се нарича още *изправена*, а при $m < n$ – *легнала*. [1]

Позициите $(1,1),(2,2),\dots(p,p)$, където $p = \min\{m,n\}$, образуват *главния диагонал* на матрицата (3.1). Аналогично се дефинират под- и наддиагоналите на дадена матрица. Сумата

$$a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{p,p}$$

от елементите $a_{i,i}$ по главния диагонал е важна числова характеристика на матрицата (3.1). Тя се нарича *следа* и се бележи с $\mathrm{tr}(A)$ (използува се и означението $\mathrm{sp}(A)$). [2]

Съществуват различни видове матрици в зависимост от наличието на единици или нули в зададени позиции. Така например матрицата (3.1) се нарича:

- *Нулева*, ако всичките й елементи са равни на нула. Нулевата матрица се означава с 0 или с $0_{m\times n}$, ако е необходимо да се укаже размера й, например

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Диагонална*, ако $a_{i,j} = 0$ при $i \neq j$. Често под диагонална матрица се разбира квадратна диагонална матрица. По определение

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

  за всеки набор от n числа λ_i.

- *Единична*, ако тя е квадратна, диагонална и всичките й диагонални елементи са равни на 1. Единичната матрица се означава с I или с I_n, ако е необходимо да се укаже, че е с размер $n \times n$, например

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Горно триъгълна*, ако $a_{i,j} = 0$ при $i > j$, например

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

[1] Случаят на полегнали обекти, например Тодори, е разгледан във фолклора.

[2] Някои автори дефинират следата само за квадратни матрици.

- *Долно триъгълна*, ако $a_{i,j} = 0$ при $i < j$, например

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & \pi \end{bmatrix}.$$

Матрицата е *разредена*, ако броят на ненулевите ѝ елементи е малък в сравнение с броя на всичките ѝ елементи. Мярка за разреденост на дадена матрица е *коефициентът на запълване*, равен на отношението на броя на възможно ненулевите елементи към броя на всички елементи. За съхраняване и обработка на разредени матрици са разработени алгоритми, които запазват специалната структура с оглед на икономия на памет и намаляване на изчислителните операции. Частен случай на разредени матрици са т.нар. *лентови матрици*, при които ненулеви са само елементите по главния диагонал и по някои от съседните му под- и наддиагонали.

Пример 3.1 Тридиагоналната матрица от 7 ред има вида

$$\begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix},$$

където с $\times$ е отбелязан произволен (не непременно нулев) елемент. В общия случай една k–диагонална лентова матрица от n–ти ред има не повече от kn ненулеви елемента и коефициент на запълване k/n, който при неограничено нарастване на реда n клони към нула.

В редица случаи е удобно матриците да се представят в т.нар. *блочен* вид чрез разделяне на *подматрици*, например

$$A = \begin{bmatrix} B & C & D \\ E & F & G \end{bmatrix},$$

където подматриците B, C, D имат еднакъв брой редове, подматриците B, E имат еднакъв брой стълбове и т.н. По-общо, матрицата $A^0 \in \mathbb{F}^{p\times q}$ е *подматрица* на матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, където $p \le m$, $q \le n$, ако тя е образувана от елементите на A, разположени на пресичането на дадени p реда (например редовете с номера $i_1, i_2, \ldots, i_p$) и q стълба (например стълбовете с номера $j_1, j_2, \ldots, j_q$).

Често матриците се представят в блочна форма по стълбове или по редове, например

$$A = [a, b, \ldots, c]$$

или

$$A = \begin{bmatrix} f \\ g \\ \vdots \\ h \end{bmatrix}$$

където $a, b, \dots, c$ са вектори–стълбове, а $f, g, \dots, h$ са вектори–редове.

За j–тия стълб на матрицата (3.1) се използува означението $a_{\bullet j} \in \mathbb{F}^m$, а за i–тия ред съответно $a_{i\bullet} \in \mathbb{F}^{1\times n}$.

Нека $x, y, \dots, z$ са k на брой вектори с еднакви размери с елементи от $\mathbb{F}$. Тези вектори се наричат *линейно независими* (вж. също глава 5), ако за всеки набор от k числа $\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \mathbb{F}$, поне едно от които не е нула, имаме

$$\alpha x + \beta y + \cdots + \gamma z \neq 0.$$

Максималният брой линейно независими стълбове на $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ се нарича *ранг* на матрицата A и се бележи с $\mathrm{rank}(A)$. Може да се покаже, че максималният брой линейно независими редове в A също е равен на r. Така

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^\top) = r \leq \min\{m, n\}.$$

3.2 Операции с матрици

Операциите транспониране и ермитово спрягане се обобщават за матрици както следва.

Матрицата

$$A^\top = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

е *транспонирана* на матрицата (3.1), а матрицата

$$A^{\mathrm{H}} = \overline{A}^\top = \begin{bmatrix} \overline{a}_{1,1} & \overline{a}_{2,1} & \cdots & \overline{a}_{m,1} \\ \overline{a}_{1,2} & \overline{a}_{2,2} & \cdots & \overline{a}_{m,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a}_{1,n} & \overline{a}_{2,n} & \cdots & \overline{a}_{m,n} \end{bmatrix}$$

е *ермитово спрегната* на матрицата (3.1). Така при транспониране редовете преминават в стълбове и обратно. Както и при векторите, операциите транспониране и спрягане са инволюции:

$$(A^\top)^\top = A,\ (A^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} = A.$$

Ако $A = [a_{i,j}]$ е матрица и λ е число, то *произведение* на матрицата A с числото λ е матрицата

$$\lambda A = A\lambda = [\lambda a_{i,j}].$$

Така при умножаване на матрица с число всички елементи на матрицата се умножават с това число.

Нека $A = [a_{i,j}]$ са $B = [b_{i,j}]$ са матрици с еднакви размери. *Сума* на матриците A и B ще наричаме матрицата

$$A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}].$$

Така матриците се сумират поелементно.

В сила са зависимостите

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top,\ (A+B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}}.$$

Умножаването на матрица с число и сумирането на матрици са естествени обобщения на съответните операции с вектори. Нещо повече, множеството $\mathbb{F}^{m\times n}$ е линейно пространство в смисъл, че за всички $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ имаме $\lambda A + \mu B \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

Впрочем, всяка матрица може да се запише и като вектор. Така например за матрицата

$$A = [a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, \ldots, a_{\bullet n}] \in \mathbb{F}^{m\times n},$$

където $a_{\bullet j} \in \mathbb{F}^m$ са стълбовете на A, векторът

$$\mathrm{vec}(A) := \begin{bmatrix} a_{\bullet 1} \\ a_{\bullet 2} \\ \vdots \\ a_{\bullet n} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{mn}$$

се нарича *стълбово векторно представяне* на A.

Аналогично, ако $a_{i\bullet} \in \mathbb{F}^{1\times n}$ са редовете на $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, то можем да дефинираме и *редовото векторно представяне*

$$\mathrm{row}(A) := [a_{1\bullet}, \ldots, a_{m\bullet}] \in \mathbb{F}^{1\times mn}$$

на A.

При матриците е възможно да се въведат различни операции, които да се интерпретират като *умножение*. Предварително даже не е съвсем ясно какво трябва да разбираме под произведение на две матрици. Едно естествено (макар и слабо) изискване към операцията умножение на матрици е то да съвпада с обичайното умножение в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в случая, когато матриците са от първи ред, т.е., когато те са числа.

Ние тук ще приемем, че една операция $\times$, която на матриците A и B съпоставя матрицата $A \times B$, е умножение, ако е в сила дистрибутивният закон, свързващ умножението и сумирането, например $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$. Забележете, че тук не се иска матриците A, B и/или $A \times B$ да бъдат с еднакви размери. И разбира се, отнапред не е ясно дали това умножение е комутативно или асоциативно.

Дори и при тази допълнителна уговорка е възможно да се въведат различни произведения на матрици.

Нека например $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Числото

$$\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(AB^*)$$

се нарича *скаларно произведение* на матриците A и B. Действително, това е всъщност скаларното произведение на векторните представяния на A и B:

$$\langle A, B\rangle = \langle \operatorname{vec}(A), \operatorname{vec}(B)\rangle.$$

Най-широко приложение е намерило т.нар. *стандартно умножение*, което се дефинира както следва.

Нека първо разгледаме случая на умножение на вектор–ред с вектор–стълб. Ако

$$a = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathbb{F}^{1\times n}$$

и

$$b = [b_1, b_2, \dots, b_n]^\top \in \mathbb{F}^n,$$

то *произведение* на вектора–ред a и вектора–стълб b ще наричаме числото

$$ab := a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \in \mathbb{F}.$$

В реалния случай ab е равно на скаларното произведение $\langle a^\top, b\rangle$ и обратно, скаларното произведение $\langle x, y\rangle$ на векторите $x, y \in \mathbb{R}^n$ може да се запише като $x^\top y$.

Ако b е m–мерен вектор–стълб, а a е n–мерен вектор–ред, то може да се дефинира и произведението $C = ba$, което е $m \times n$ матрица с елементи $c_{i,j} = b_i a_j$.

Нека сега са дадени матриците $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times p}$ (забележете, че броят n на стълбовете на A е равен на броя на редовете на B). Тогава *стандартно произведение* (или просто *произведение*) на матриците A и B ще наричаме матрицата

$$C = AB \in \mathbb{F}^{m\times p},$$

чиито елементи $c_{i,j} = (AB)_{i,j}$ в позиции (i, j) се определят от равенствата

$$c_{i,j} := a_{i\bullet} b_{\bullet j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

Така елементът $(AB)_{i,j}$ е произведението на i–тия ред $a_{i\bullet}$ на A с j-тия стълб $b_{\bullet j}$ на B. По тази причина стандартното умножение се нарича още „умножение ред по стълб”.

Други видове произведения на матрици са описани в упражнения 3.2 – 3.4.

Стандартното умножение не е комутативно, т.е., възможно е $AB \neq BA$. Действително, дори ако произведението AB е определено, произведението BA може да не е определено (и двете произведения са определени точно когато $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$) или да има друг размер в сравнение с AB (двете произведения имат еднакъв размер точно когато $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$). И накрая, възможно е двете произведения AB и BA да са определени и да имат еднакви размери, но да са различни.

Пример 3.2 Нека

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Тогава

$$x^\top x = \|x\|^2 = 25 \in \mathbb{R},\ xx^\top = \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

и

$$XY = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 18 \end{bmatrix},\ YX = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 11 & 24 \end{bmatrix},$$

което илюстрира некомутативността на умножението.

Нека $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Матрицата

$$[A, B] := AB - BA$$

се нарича *комутанта* на матриците A и B. Матриците A и B са *комутативни* (или *комутират*), ако $[A, B] = 0$.

С непосредствена проверка се установява (вж. упражнение 3.1), че стандартното умножение е асоциативно

$$(AB)C = A(BC) = ABC \tag{3.2}$$

и удовлетворява дистрибутивните правила

$$\begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC, \\ (B + C)D &= BD + CD \end{aligned} \tag{3.3}$$

(предполага се, че размерите на участващите в (3.2) и (3.3) матрици позволяват извършване на означените действия).

Също така лесно се вижда, че ако е определено матричното произведение AB, то

$$(AB)^\top = B^\top A^\top,\ (AB)^{\mathrm{H}} = B^{\mathrm{H}} A^{\mathrm{H}}. \tag{3.4}$$

Важен частен случай е умножението на матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ по вектор–стълб $x \in \mathbb{F}^n$, както и на вектор–ред $y \in \mathbb{F}^{1\times m}$ по матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, при което $Ax \in \mathbb{F}^m$ и $yA \in \mathbb{F}^{1\times n}$.

За квадратни матрици A по индукция се определя повдигането на цяла положителна степен $d > 1$:

$$\begin{aligned} A^1 &= A, \\ A^d &= AA^{d-1} = A^{d-1}A. \end{aligned}$$

Умножаването на две общи матрици (т.е., на матрици, за които не се предполага някаква специална структура), както и повдигането на матрица на цяла степен $d > 1$, е тривиално в теоретично отношение, но е много опасно при използване на компютърна аритметика с плаваща точка поради възможния катастрофален ефект на взаимното унищожение и на грешките от закръгляне [23, 2, 20, 9, 8]. Поради това в изчислителните алгоритми на съвременната линейна алгебра умножаване на матрици обикновено се допуска само при някои допълнителни изисквания към поне единия от двата матрични множителя. Така например желателно е поне единият от тях да е ортогонална матрица в реалния случай или ермитова матрица в комплексния случай.

За матрици, записани в блочна форма, например

$$A = [A_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n},\ A_{i,j} \in \mathbb{F}^{m_i\times n_j}$$

и

$$B = [B_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times p},\ B_{i,j} \in \mathbb{F}^{n_i\times p_j},$$

произведението $C = AB$ също може да се запише в блочна форма

$$C = [C_{i,j}],\ C_{i,j} \in \mathbb{F}^{m_i\times p_j},$$

където

$$C_{i,j} := A_{i,1}B_{1,j} + A_{i,2}B_{2,j} + \cdots + A_{i,r}B_{r,j}$$

и r е броят на блочните стълбове на A, равен на броя на блочните редове на B. В частност,

$$A[B_1, B_2, \ldots, B_s] = [AB_1, AB_2, \ldots, AB_s]$$

и

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_t \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \\ \vdots \\ A_tB \end{bmatrix}.$$

Единичната матрица играе роля както на десен, така и на ляв *неутрален елемент* при стандартното умножение. Така за $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ е в сила

$$AI_n = I_mA = A$$

(докажете!).

Нека $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ е зададена матрица. Матрицата $X \in \mathbb{F}^{n\times m}$ се нарича *дясна обратна* на матрицата A, ако $AX = I_m$. Аналогично, $Y \in \mathbb{F}^{n\times m}$ е *лява обратна* на A, ако $YA = I_n$. Тук случаите $m = 1$ и/или $n = 1$ не се изключват.

Може да се покаже, че ако матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ има дясна обратна X, то по необходимост $m \le n$, а матриците $X^\top$ и X^{H} са леви обратни на матриците $A^\top$ и A^{H} съответно. Аналогично, ако матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ има лява обратна Y, то по необходимост $m \ge n$, а матриците $Y^\top$ и Y^{H} са десни обратни на матриците $A^\top$ и A^{H} съответно.

Пример 3.3 Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

няма дясна обратна. Същевременно тя има безкрайно много леви обратни матрици

$$Y = [y_1, y_2],$$

където

$$y_1 = \frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2} + a_2 t, \ y_2 = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} - a_1 t$$

и $t \in \mathbb{F}$ е произволен параметър.

Лесно се вижда, че ако дадена матрица A има както дясна обратна X, така и лява обратна Y, то тя е квадратна, а двете обратни матрици X и Y съвпадат. Действително, в този случай имаме

$$YAX = Y(AX) = YI = Y$$

и

$$YAX = (YA)X = IX = X,$$

откъдето $X = Y$. Поради това за квадратната A матрица казваме, че тя има *обратна* матрица X, ако $AX = I$. Обратната матрица на матрицата A се означава с A^{-1}.

Не всяка квадратна матрица има обратна. Например нулевата матрица очевидно няма обратна, тъй като $0X = 0 \neq I$. Матриците, които имат обратна матрица, се наричат *обратими*, или *неособени*, или *неизродени*. На свой ред матриците, които нямат обратна матрица, се наричат *необратими*, или *особени*, или *изродени*.

Пример 3.4 Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}, \ a_1 a_2 \neq 0,$$

е обратима, като

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a_1 & 0 \\ 0 & 1/a_2 \end{bmatrix}.$$

Непосредствено се проверява, че ако матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ са неособени, то и тяхното произведение $AB \in \mathbb{F}^{n\times n}$ също е неособена матрица, като

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Действително, имаме

$$ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Ако матрицата A е неособена, то може да се определят цели отрицателни степени

$$A^{-d} := (A^d)^{-1},$$

където d е натурално число.

За някои класове матрици A може да се дефинира и произволна степен A^d, където $d \in \mathbb{R}$ или даже $d \in \mathbb{C}$.

Нека е дадена диагоналната матрица

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

с реални или комплексни диагонални елементи λ_i. Да предположим, че са коректно определени всички степени $\lambda_1^d, \ldots, \lambda_n^d$ (за целта може да се използват главните разклонения на функцията $z \mapsto z^d$). Тогава можем да определим

$$\Lambda^d := \mathrm{diag}(\lambda_1^d, \ldots, \lambda_n^d).$$

Ако Λ е неособена матрица (т.е., $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$), то формулата за Λ^d е в сила за всяко $d \in \mathbb{Q}$.

Нека сега $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е матрица, за която съществува друга неособена матрица $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че

$$A = B\Lambda B^{-1}, \ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

(такава матрица се нарича *диагонализируема*). Тогава можем да положим

$$A^d := B\Lambda^d B^{-1}$$

при условие, че степените λ_i^d могат да се определят коректно. В случай, че $d \in \mathbb{Q}$ това може да стане по краен брой начини. При $d \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ или $d \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ така определената функция $A \mapsto A^d$ е безкрайнозначна.

3.3 Норма на матрица

Често се налага да се въведе някаква числова мярка за големината на дадена матрица, така както нормата на вектор е мярка за неговата големина. Във връзка с това в линейната алгебра е дефинирано важното понятие норма на матрица. За разлика от нормата на вектор обаче, нормата на матрица може да се въведе по различни начини и това е свързано с факта, че матриците имат по–сложна структура в сравнение с векторите.

Първо, при дефиниране на норма матриците могат да се разглеждат като вектори доколкото множеството $\mathbb{F}^{m\times n}$ на $m \times n$ матриците над $\mathbb{F}$ е линейно (векторно) пространство. А и ние вече знаем, че на всяка матрица A може да се постави в съответствие векторът $\mathrm{vec}(A)$, който съдържа всичките й елементи, взети стълб по стълб. При този подход не се отчита структурата на матрицата.

Второ, при дефинирането на норма може да се вземе предвид фактът, че матриците могат да се умножават, като резултатът от това умножение е отново матрица. Получените по този начин норми се наричат *матрични*.

И трето, нормата на матрица може да се дефинира въз основа на обстоятелството, че всяка матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ определя линейна операция (или функция) $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ по формулата $x \mapsto Ax$. Така дефинираната норма се нарича *операторна.*

Функцията $\|\cdot\| : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ се нарича *норма* в $\mathbb{F}^{m\times n}$, ако за всички $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ са изпълнени условията

1. Ако $\|A\| = 0$, то $A = 0_{m\times n}$.
2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$.
3. $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$.

От аксиомите 1 – 3 следват две важни свойства, които понякога се приемат като част от самите тези аксиоми. От 2 получаваме

$$\|0_{m\times n}\| = \|0A\| = 0\|A\| = 0,$$

което заедно с 1 ни учи, че $\|A\| = 0$ точно когато $A = 0_{m\times n}$.

Ще покажем освен това, че $\|A\| > 0$ точно когато $A \ne 0_{m\times n}$, което в частност означава, че $\|A\| \ge 0$ за всяка матрица A. Действително, имаме

$$0 = \|0_{m\times n}\| = \|A + (-A)\| \le \|A\| + \|-A\| = 2\|A\|$$

и следователно $\|A\| \ge 0$.

Пример 3.5 За всяко реално $p \ge 1$ функцията

$$A \mapsto \nu_p(A) := \|\mathrm{vec}(A)\|_p, \tag{3.5}$$

където $\|\cdot\|_p$ е векторната норма (2.5), е норма в $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Нормата $\|\cdot\|$ се нарича *матрична норма*, ако

$$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$$

за всички матрици A и B, за които произведението AB е определено. Забележете, че трите норми в последното неравенство могат да се окажат дефинирани в три различни матрични пространства.

Пример 3.6 В общия случай нормата ν_p, вж. пример 3.5 и (3.5), не е матрична норма при $p \ne 2$. Нормата ν_2, обаче, винаги е матрична норма.

Сега ще определим операторната норма на матрица.

Нека $\|\cdot\|$ е векторна норма в $\mathbb{F}^m$ или в $\mathbb{F}^n$. *Операторна норма* на матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ се нарича числото

$$\|A\| := \max\left\{\|Ax\| : x \in \mathbb{F}^n,\ \|x\| = 1\right\} = \max_{0\ne x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,.$$

Когато векторната норма е евклидовата норма, тази операторна норма се нарича още *спектрална*, или 2–*норма*. В този случай тя е равна на корен квадратен от най–голямата собствена стойност на матрицата $A^{\mathrm{H}}A$ (за дефиниция на собствена стойност вж. глава 10).

На p–нормата в (2.5) съответства операторната норма

$$\|A\|_p := \max\{\|Ax\|_p : x \in \mathbb{F}^n,\ \|x\|_p = 1\} = \max_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}\,.$$

Така спектралната норма $\|\cdot\|$ на матрица отговаря на случая $p = 2$.

По–общо, може да се определи и операторната норма

$$\|A\|_{p,q} := \max\{\|Ax\|_p : x \in \mathbb{F}^n,\ \|x\|_q = 1\} = \max_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q}\,.$$

При това очевидно $\|A\|_p = \|A\|_{p,p}$.

Интересно е да се проследи връзката между трите вида норми на матрици: обикновената (или векторна) норма, матричната норма и операторната норма.

Ние вече знаем, че всяка матрична норма е по необходимост и обикновена норма. Не всяка обикновена норма обаче е матрична. Например обикновената норма

$$\nu_\infty(A) := \|\mathrm{vec}(A)\|_\infty = \max\{|a_{i,j}| : i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\}$$

в общия случай не е матрична норма на матрицата $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Не е матрична норма и обикновената норма

$$\nu_1(A) := \|\mathrm{vec}(A)\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

Нормата

$$\|A\| = mn\max\{|a_{i,j}| : i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\}$$

обаче е матрична норма.

Пресмятането на спектралната норма не винаги е лесно в изчислително отношение. По тази, а и поради други причини, в линейната алгебра се използува и *нормата на Фробениус* (Ф. Фробениус, немски математик, 1849-1917), наричана още *евклидова норма*, или *норма на Шур* (И. Шур, немски математик, 1875-1941): [3]

$$\|A\|_{\mathrm{F}} = \nu_2(A) = \|\mathrm{vec}(A)\|_2 = \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}.$$

Други лесно изчислими операторни норми са $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$, вж. упражнение 3.20.

[3] Читателят не трябва да се разстройва от факта, че за едно и също нещо в математиката понякога се използват различни термини и/или означения.

3.4 Упражнения

Упражнение 3.1 Докажете релациите (3.2), (3.3) и (3.4).

Упражнение 3.2 *Произведение по Адамар* (Ж. Адамар, френски математик, 1865-1963) на матриците

$$A = [a_{i,j}],\ \ B = [b_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

се нарича матрицата

$$A \circ B \in \mathbb{F}^{m\times n},$$

чиито (i, j)–ти елемент се определя от

$$(A \circ B)_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$$

Така умножението по Адамар е поелементно.

Проверете аритметичните правила (комутативно, асоциативно и дистрибутивно) за умножението по Адамар. Коя е матрицата E, която играе роля на неутрален елемент при това умножение (т.е., $A \circ E = A$)? Кои матрици A са обратими по Адамар в смисъл, че съществува матрица X, такава че $A \circ X = E$?

Упражнение 3.3 *Симетрично произведение* на матриците

$$A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$$

се нарича матрицата

$$A \bullet B := \frac{AB + BA}{2}.$$

Симетричното произведение очевидно е комутативно, т.е.,

$$A \bullet B = B \bullet A.$$

В сила ли е, обаче, асоциативното правило? А дистрибутивното? Намерете неутралния елемент при симетричното умножение. Кои матрици са обратими относно симетричното умножение?

Упражнение 3.4 *Произведение по Кронекер* (Л. Кронекер, немски математик, 1823-1891), или *тензорно произведение* на матриците $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{F}^{p\times q}$ се нарича матрицата

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \cdots & a_{m,n}B \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{mp\times nq}.$$

Проверете валидността на трите аритметични правила (комутативно, асоциативно и дистрибутивно) за произведението по Кронекер. Съставете си матрица A от втори ред и намерете матриците $A \otimes I_3$ и $I_3 \otimes A$. Кой е неутралният елемент при това умножение?

Упражнение 3.5 Нека

$$C = AXB \in \mathbb{F}^{k\times p},$$

където

$$A \in \mathbb{F}^{k\times m},\ X \in \mathbb{F}^{m\times n},\ B \in \mathbb{F}^{n\times p}.$$

Покажете, че

$$\mathrm{vec}(C) = (B^\top \otimes A)\mathrm{vec}(X)$$

и в частност

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(AX) &= (I_n \otimes A)\mathrm{vec}(X), \\ \mathrm{vec}(XB) &= (B^\top \otimes I_m)\mathrm{vec}(X). \end{aligned}$$

Упражнение 3.6 Нека A и B са произволни матрици. Блочната матрица

$$A \diamond B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

се нарича *пряка сума* на A и B.

Проверете комутативността и асоциативността на прякото сумиране.

Упражнение 3.7 Покажете, че множеството $\mathbb{F}^{n\times n}$ е полугрупа относно стандартното умножение (вж. упражнение 2.1). Вярно ли е това за подмножеството $T_n \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ на квадратните горни триъгълни матрици от ред n?

Упражнение 3.8 Покажете, че множеството $\mathbb{F}^{m\times n}$ е група относно сумирането.

Упражнение 3.9 Нека $\mathbb{F}(m,n)$ е множеството на всички матрици с не по–малко от m реда и не по–малко от n стълба (това множество съдържа матрици с различни размери!). Полугрупа ли е $\mathbb{F}(m,n)$ относно операцията пряка сума (вж. упражнение 3.6)?

Упражнение 3.10 Покажете, че множеството $\mathcal{GL}(n,\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ на неособените матрици е група относно стандартното умножение с неутрален елемент матрицата I_n. Вярно ли е това за подмножеството $S_n \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ на горните триъгълни матрици с единици по главния диагонал?

Упражнение 3.11 Покажете, че матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е неособена точно когато е неособена и матрицата A^{H}, като при това

$$(A^{\mathrm{H}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{H}}.$$

Това дава основание да се използва означението $A^{-\mathrm{H}} := (A^{\mathrm{H}})^{-1}$ за неособената матрица A.

Упражнение 3.12 Множеството $G \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ се нарича *матрична група*, ако то е група относно стандартното матрично умножение. Възможно ли е множеството G да съдържа особени матрици? Как изглежда единичният елемент на група G от особени матрици?

Упражнение 3.13 Нека са дадени блочните матрици

$$A = \begin{bmatrix} I_m & S \\ 0 & I_n \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} I_m & T \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+n)\times(m+n)},$$

където $S, T \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Пресметнете $A^\top$, A^{H}, A^{-1}, AB и BA.

Упражнение 3.14 Намерете обратната матрица A^{-1} на блочната матрица

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

където B и D са (квадратни) неособени матрици.

Упражнение 3.15 Нека матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ са неособени. Покажете, че

$$A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1}.$$

Упражнение 3.16 Нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ и $C \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Покажете, че

$$(A + BC)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(I_m + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

(предполага се, че съответните матрици са обратими).

Упражнение 3.17 Обобщете резултата от упражнение 3.16 както следва. Нека A е неособена матрица и

$$B = A + XCY,$$

където матрицата C е неособена. Покажете, че ако матрицата B е неособена, то

$$B^{-1} = A^{-1} - A^{-1}X(C^{-1} + YA^{-1}X)^{-1}YA^{-1}.$$

Упражнение 3.18 Нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е неособена матрица и $\|\cdot\|$ е матрична норма. Покажете, че функцията

$$x \mapsto \|Ax\|$$

е (векторна) норма в $\mathbb{F}^n$.

Упражнение 3.19 Нека неособената матрица A е разбита на блокове както следва

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix},$$

където матрицата $A_{1,1}$ е квадратна. Покажете, че

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{bmatrix},$$

където

$$\begin{aligned}
B_{1,1} &:= \left(A_{1,1} - A_{1,2}A_{2,2}^{-1}A_{2,1}\right)^{-1}, \\
B_{2,1} &:= \left(A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2} - A_{2,2}\right)^{-1} A_{2,1}A_{1,1}^{-1}, \\
B_{1,2} &:= A_{1,1}^{-1}A_{1,2}\left(A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2} - A_{2,2}\right)^{-1}, \\
B_{2,2} &:= \left(A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

(предполага се, че всички обратни матрици съществуват).

Упражнение 3.20 Нека $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Покажете, че

$$\|A\|_1 = \|A^\top\|_\infty$$

и

$$\begin{aligned}
\|A\|_1 &= \max_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max\left\{\sum_{i=1}^m |a_{i,j}| : j = 1,\ldots,n\right\} \\
\|A\|_\infty &= \max_{0\neq x\in\mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max\left\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i = 1,\ldots,m\right\}.
\end{aligned}$$

Упражнение 3.21 Нека матрицата A е както в упражнение 3.20 и е от ранг r (вж. секция 4.3 и глава 13) и

$$a := \max\{|a_{i,j}| : i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n\}.$$

Докажете неравенствата

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &\leq \|A\|_{\mathrm{F}} \leq \sqrt{r}\,\|A\|_2, \\
a &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn}\,a, \\
\frac{\|A\|_infty}{\sqrt{n}} &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|A\|_\infty, \\
\frac{\|A\|_1}{\sqrt{m}} &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_1.
\end{aligned}$$

Упражнение 3.22 Да разгледаме уравнението

$$Xa = a, \tag{3.6}$$

където $a \in \mathbb{F}^n$ и $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е неизвестната матрица. Докажете, че $X = I_n$ е единствената матрица, която е решение на (3.6) за всяко a.

Упражнение 3.23 Нека $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Покажете, че

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

точно когато $AB = BA$.

Упражнение 3.24 Нека $n \geq 2$ и $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Покажете, че ако $AB = BA$, то

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3. \tag{3.7}$$

Вярно ли е, че ако (3.7) е изпълнено, то $AB = BA$? Разгледайте случая когато

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Глава 4

ДЕТЕРМИНАНТА

4.1 Основни определения и свойства

Една от важните числови характеристики на всяка квадратна матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е нейната детерминанта $\det(A) \in \mathbb{F}$. Разглеждана като функция, детерминантата изобразява множеството на квадратните матрици $\mathbb{F}^{n\times n}$ в числовото множество[1] $\mathbb{F}$ и притежава редица интересни свойства. Например, с помощта на детерминанти се получава компактен израз за обратната матрица A^{-1} при $\det(A) \neq 0$, макар че този израз не е пригоден за практически изчисления в общия случай. Също така с помощта на детерминанта се дефинира т.нар. *характеристично уравнение* на дадена квадратна матрица, корените на което са собствените ѝ стойности (вж. глава 10). Чрез детерминанти може да се изрази решението на квадратна неособена система от линейни алгебрични уравнения, макар че това не се препоръчва от изчислителна гледна точка. Изобщо детерминантите намират широко теоретично (и по-рядко практическо) приложение. Геометрически детерминантата на $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ се интерпретира като ориентирания обем на паралелопипеда в n–мерното пространство, построен на стълбовете (или редовете) на A.

Друга важна характеристика на всяка (не непременно квадратна) матрица е нейната перманента, която по-долу се разглежда съвсем накратко. По-подробни сведения по теория и приложение на перманентите са изложени в [14].

Възможни са различни подходи при излагане на теорията на детерминантите. При класическия подход първоначално детерминантата се определя като функция на елементите на матрицата чрез един, общо взето, сложен израз (до който ние също ще стигнем). За така въведения израз се доказва, че са изпълнени редица свойства – от шест до десет в зависимост от вкуса на автора. В действителност само три от тези свойства се оказват основни, като останалите се извеждат непосредствено от тях. Поради това е възможен и един друг, аксиоматичен подход при въвеждане на детерминантите, при който тези три свойства се приемат като аксиоми за дефиниране на

[1] Случаят, когато $\mathbb{F}$ е произволно поле (вж. упражнение 2.1), се разглежда аналогично.

функцията детерминанта. Впоследствие се доказва, че такава функция съществува (определена от упоменатия по–горе израз) и е единствена. В литературата са известни и други подходи, например детерминантата може да се въведе индуктивно по размера n на матрицата. В настоящата книга е възприет аксиоматичният подход.

Ще отбележим преди всичко, че една функция f на матрицата

$$A = [a, b, c, \ldots, d]$$

е функция и на стълбовете $a, b, c, \ldots, d$ (а също и на редовете) на същата тази матрица, което ще записваме като

$$f(A) = f(a, b, c, \ldots, d)$$

(навсякъде по–долу думата „стълб” може да бъде заменена с „ред”).

Да разгледаме сега функцията

$$f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F},$$

удовлетворяваща следните три условия (или, според нашата интерпретация, *аксиоми*):

1 *Полилинейност*: Функцията f е линейна по всеки стълб, например по първия

$$f(\lambda x + \mu y, b, c, \ldots, d) = \lambda f(x, b, c, \ldots, d) + \mu f(y, b, c, \ldots, d),$$

където $x, y \in \mathbb{F}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$.

2 *Антисиметричност*: Изразът $f(a, b, c, \ldots, d)$ си сменя знака при размяната на всеки два стълба, например на първите два

$$f(a, b, c, \ldots, d) = -f(b, a, c, \ldots, d).$$

3 *Нормировка*: Изпълнено е равенството

$$f(I_n) = 1.$$

Функцията f, удовлетворяваща горните три условия, се нарича *детерминанта*, и се означава с det. В това означение за детерминантата не се отбелязва размерът на аргумента, в случая n. Понякога обаче такова отбелязване е необходимо за по–голяма яснота и тогава за детерминантата $\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ ще пишем $\det_n$.

В литературата е прието да се казва, че функция, удовлетворяваща условията 1 – 3, притежава т.нар. *детерминантно свойство*, или накратко, че е *детерминантна функция*. Самите условия 1 – 3 се наричат също *условия на Вайерщрас* (немски математик, 1815–1897).

Ако в системата от условия 1 – 3 вместо условието 2 поискаме изразът $f(a, b, c, \ldots, d)$ да не се променя при размяна на два стълба, например

$$f(a, b, c, \ldots, d) = f(b, a, c, \ldots, d),$$

то съответната функция f се нарича *перманента* и се означава с per.[2]

Условието 3 изключва например постоянната функция $A \mapsto f(A) = 0$, за която тривиално са изпълнени условията 1 и 2.

Да видим какво дава горният аксиоматичен подход за дефиниране на функцията детерминанта при $n = 1$. Съгласно свойство 1 функцията f е линейна, т.е.,

$$f(a) = \nu a,$$

където ν е фиксирано число. От условие 3 имаме

$$f(1) = \nu = 1.$$

Следователно и детерминантата и перманентата на едномерната матрица $A = a_{1,1}$ (т.е., на числото $a_{1,1} \in \mathbb{F}$) са равни на самото число $a_{1,1}$.

При $n = 2$ непосредствено се проверява, че за матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

функциите, определени от

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}, \tag{4.1}$$

$$\mathrm{per}(A) = a_{1,1}a_{2,2} + a_{1,2}a_{2,1} \tag{4.2}$$

удовлетворяват аксиомите за детерминанта и перманента съответно.

Може да се покаже, че ако функцията $f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ е *адитивна* по всеки стълб, например по първия,

$$f(x + y, b, c, \dots, d) = f(x, b, c, \dots, d) + f(y, b, c, \dots, d),$$

то условието 2 е еквивалентно на условието

2а Ако матрицата A има два еднакви стълба, то $f(A) = 0$, например

$$f(a, a, c, \dots, d) = 0.$$

Действително, от свойство 2 следва (за първите два стълба)

$$f(a, a, c, \dots, d) = -f(a, a, c, \dots, d),$$

откъдето

$$f(a, a, c, \dots, d) = 0.$$

[2] Перманента може да се дефинира и за правоъгълна матрица.

Така показахме, че от свойство 2 следва свойство 2а. Ще покажем, че на свой ред от свойство 2а предвид на свойство 1 следва свойство 2. Нека е в сила 2а. Тогава имаме (отново за първите два стълба)

$$\begin{aligned} 0 &= f(x+y, x+y, c, \ldots, d) \\ &= f(x, x+y, c, \ldots, d) + f(y, x+y, c, \ldots, d) \\ &= f(x, x, c, \ldots, d) + f(x, y, c, \ldots, d) \\ &\quad + f(y, x, c, \ldots, d) + f(y, y, c, \ldots, d) \\ &= 0 + f(x, y, c, \ldots, d) + f(y, x, c, \ldots, d) + 0 \\ &= f(x, y, c, \ldots, d) + f(y, x, c, \ldots, d), \end{aligned}$$

което е еквивалентно на свойство 2.

Пример 4.1 Ние вече видяхме, че функцията, определена от (4.1), е детерминанта при $n = 2$. Сега ще покажем, че в този случай детерминантата е еднозначно определена. Действително, нека e_1 и e_2 са стълбовете на единичната матрица I_2. Тогава матрицата $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ може да се представи във вида

$$A = [a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2].$$

Оттук, като използваме свойствата 1, 2, 2а и 3 и факта, че

$$\det(e_2, e_1) = -\det(e_1, e_2) = -\det(I_2) = -1,$$

за детерминантата $\det(A)$ получаваме

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(a_{1,1}e_1 + a_{2,1}e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\ &= a_{1,1}\det(e_1, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\ &\quad + a_{2,1}\det(e_2, a_{1,2}e_1 + a_{2,2}e_2) \\ &= a_{1,1}a_{1,2}\det(e_1, e_1) + a_{1,1}a_{2,2}\det(e_1, e_2) \\ &\quad + a_{2,1}a_{1,2}\det(e_2, e_1) + a_{2,1}a_{2,2}\det(e_2, e_2) \\ &= 0 + a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} + 0 \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

От условията 1 – 3 директно се извеждат следните свойства на детерминантите:

4 Ако матрицата A има два еднакви стълба, то $\det(A) = 0$ (това всъщност е вече разгледаното свойство 2а). Действително, да разменим еднаквите стълбове, при което и матрицата и детерминантата не се променят. Но съгласно свойство 2 детерминантата си сменя знака. Единственото число, което не се променя при смяна на знака му, е нулата.

5 Ако стълб, умножен с число, се прибави към друг стълб, детерминантата не се променя. Действително, да умножим първия стълб a на A по $\lambda \in \mathbb{F}$ и да го прибавим към втория. Съгласно свойство 1 и току–що установеното свойство 4 имаме

$$\begin{aligned}&\det(a, b+\lambda a, c, \dots, d) = \det(a, b, c, \dots, d)\\&+ \lambda \det(a, a, c, \dots, d)\\&= \det(a, b, c, \dots, d) + 0 = \det(a, b, c, \dots, d).\end{aligned}$$

6 Ако някой стълб в матрицата A се изразява линейно чрез останалите, например

$$a = \lambda b + \mu c + \cdots + \nu d,$$

то $\det(A) = 0$. Действително, в този случай съгласно свойства 1 и 4 имаме

$$\begin{aligned}&\det(a, b, c, \dots, d) = \lambda \det(b, b, c, \dots, d) + \mu \det(c, b, c, \dots, d)\\&+ \cdots + \nu \det(d, b, c, \dots, d) = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0.\end{aligned}$$

7 Ако матрицата A има нулев стълб, то $\det(A) = 0$. Действително, да прибавим към нулевия стълб който и да е от другите стълбове. По свойство 5 детерминантата се запазва, но в матрицата се появиха два еднакви стълба и съгласно свойство 4 новата матрица е с нулева детерминанта. Друго доказателство следва непосредствено от свойство 1. Действително, при $\mu = 0$ свойство 1 ни учи, че при умножаване на стълб с число детерминантата се умножава със същото число. Но нулевият стълб е равен на който и да е стълб, умножен с нула.

8 Ако матрицата $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е диагонална, т.е.,

$$A = \operatorname{diag}(a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}),$$

то

$$\det(A) = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}.$$

Действително, в този случай i–тият стълб на A е равен на i–тия стълб на I_n, умножен с $a_{i,i}$. Прилагайки n пъти свойство 1 получаваме, че детерминантата е равна на произведението от диагоналните елементи на A по детерминантата на единичната матрица I_n. По свойство 3 $\det(I_n) = 1$, откъдето за детерминантата на матрицата A получаваме, че е равна на произведението на диагоналните ѝ елементи.

9 Ако матрицата $A = [A_{i,j}]$ е блочно диагонална,

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{r,r} \end{bmatrix}, \ A_{i,i} \in \mathbb{F}^{n_i\times n_i},$$

то

$$\det(A) = \det(A_{1,1})\det(A_{2,2})\cdots\det(A_{r,r}). \tag{4.4}$$

Действително, свойства 1 и 3 са очевидно в сила за функцията det, определена от (4.4). За да докажем, че и свойство 2 е в сила, ще отбележим, че са допустими само такива размествания на два стълба в матрицата A, които запазват нейната блок–диагонална структура. Допустимите размествания могат да се разделят на две групи. Първо, това са размествания, които разместват два стълба вътре в някой от блоковете $A_{i,i}$. Така например първият стълб в A можем да го разместваме само с някой от стълбовете с номера от 2 до n_1, при което блоковете от $A_{2,2}$ до $A_{r,r}$ не се променят. Но при такова разместване множителят $\det(A_{i,i})$ си сменя знака, а останалите множители – не. Така, определеното по–горе произведение от r детерминанти също си сменя знака, т.е., функцията det, определена от (4.4), е антисиметрична и условието 2 е изпълнено. Във втората група влизат размествания, които са възможни само ако два диагонални блока $A_{i,i}$, $A_{j,j}$ имат нулеви стълбове. Тогава блок–диагоналната структура на A се запазва и при разместване на нейни стълбове, включващи упоменатите нулеви стълбове. Но в този случай имаме както

$$\det(A_{i,i}) = \det(A_{j,j}) = 0,$$

така и $\det(A) = 0$ поради наличие на нулеви стълбове според свойсто 7. Така формулата (4.4) за детерминанта на блок–диагонална матрица е вярна и в този случай.

Ние вече показахме, че при $n = 1$ и $n = 2$ функцията детерминанта съществува. Сега ще покажем, че това е така и за произволно $n > 2$. Да означим с $A_{i,j} \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ подматрицата на матрицата A, която се получава като от A се премахнат i–тият ред и j–тият стълб.

Ще покажем, че за всяко n съществува детерминантно изображение $\det_n$, удовлетворяващо условията 1 – 3. За $n = 1$ и $n = 2$ това вече беше показано. За фиксирано $1 \le i \le n$ да разгледаме изображението $f_i : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$, определено от

$$f_i(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det\nolimits_{n-1}(A_{i,j}),$$

където $\det_{n-1} : \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)} \to \mathbb{F}$ е детерминантно изображение.

За всяко $1 \le j \le n$ изразът $\det_{n-1}(A_{i,j})$ не зависи от j–тия стълб на A. Следователно изразът $a_{i,j}\det_{n-1}(A_{i,j})$ зависи линейно от j–тия стълб на A чрез елемента $a_{i,j}$. Ще покажем сега, че функцията f_i удовлетворява и условието 2а. Да предположим, че матрицата A има два еднакви стълба, например тези с номера r и s, където $r < s$. За $j \ne r$ и $j \ne s$ матрицата $A_{i,j}$ също има два еднакви стълба и следователно

$\det_{n-1}(A_{i,j}) = 0$. Следователно изразът за $f_i(A)$ се свежда до

$$f_i(A) = (-1)^{i+r} a_{i,r} \det_{n-1}(A_{i,r}) + (-1)^{i+s} a_{i,s} \det_{n-1}(A_{i,s}).$$

Матрицата $A_{i,s}$ може да се трансформира в $A_{i,r}$ посредством разместване на $s-r-1$ стълба (напомняме, че стълбовете с номера r и s на матрицата $A_{i,j}$ са еднакви). Следователно според свойство 2 имаме

$$\det_{n-1}(A_{i,s}) = (-1)^{s-r-1} \det_{n-1}(A_{i,r}).$$

Тъй като $a_{i,r} = a_{i,s}$, то

$$f_i(A) = \left((-1)^{i+r} + (-1)^{i+s}(-1)^{s-r-1}\right) a_{i,r} \det_{n-1}(A_{i,r}).$$

Лесно се вижда, че

$$\begin{aligned} &(-1)^{i+r} + (-1)^{i+s}(-1)^{s-r-1} = (-1)^{i+r}\left(1 + (-1)^{2s-2p-1}\right) \\ &= (-1)^{i+r}(1 + (-1)) = 0. \end{aligned}$$

Оттук $f_i(A) = 0$ поради наличието на два еднакви стълба в A и следователно функцията f_i удовлетворява условието 2а.

Ще покажем накрая, че f_i удовлетворява и свойството 3. Действително, когато $A = I_n$ имаме $a_{i,j} = 0$ при $i \neq j$ и $a_{i,i} = 1$. Следователно

$$f_i(I_n) = (-1)^{i+i} a_{i,i} \det_{n-1}(I_{n-1)} = (-1)^{2i} \det_{n-1}(I_{n-1}) = 1.$$

На този етап не е ясно дали изразът f_i зависи ефективно от i. По–долу ще покажем, че детерминантата е единствена, т.е., имаме

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = \det.$$

4.2 Явни изрази за детерминанта и перманента

За да получим явен израз за детерминантата $\det(A)$ на матрица $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ като функция на елементите $a_{i,j}$ на матрицата, ще използваме някои понятия от комбинаториката.

Нека е дадено едно множество от n елемента, например множеството от първите n натурални числа

$$P_n := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Всяко изображение $\pi : P_n \to P_n$, такова че $\pi(r) \neq \pi(s)$ при $r \neq s$, се нарича *пермутация*, или *разместване*. Композицията на две пермутации π и ρ се означава с $\pi \circ \rho$, а обратната пермутация на пермутацията π – с π^{-1}.

За да определеми една пермутация $\pi : P_n \to P_n$ очевидно е достатъчно да зададем наредената съвкупност от n числа $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$. Поради това се използва и следното определение.

Наредената съвкупност

$$\mathbf{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

получена от наредената съвкупност $(1, 2, \ldots, n)$ чрез разместване на елементите $1, 2, \ldots, n$, също се нарича *пермутация*. Неразместената съвкупност $(1, 2, \ldots, n)$ се нарича *основна пермутация*. Множеството на всички наредени съвкупности от n различни елемента се означава с Π_n.

Горните две определения не си противоречат. Наистина, всяка пермутация π като функция $P_n \to P_n$ поражда пермутация $\mathbf{i} := (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ като наредена n–орка и обратно, по формулата

$$i_k = \pi(k),\ \ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Все пак за да различаваме пермутациите–функции от пермутациите–наредени съвкупности, за първите ще използваме малки гръцки букви $(\pi, \rho, \sigma, \ldots)$, а за вторите – малки латински удебелени букви $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \ldots)$.

Броят p_n на различните пермутации на n елемента е

$$p_n = n! := n(n-1)\cdots 2 \cdot 1, \tag{4.5}$$

което лесно се доказва по индукция. Действително, за $n = 1$ формулата за броя на пермутациите е вярна, тъй като има само една пермутация. Да приемем, че формулата е вярна за някое n и да разгледаме броя p_{n+1} на пермутациите от $n+1$ елемента. Всяка пермутация с $n+1$ елемента се получава като в някоя пермутация $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ от n елемента елементът $n+1$ се постави или преди първия елемент i_1 (по един начин), или между два съседни елемента (по $n-1$ начина), или след последния елемент i_n (по един начин). Така на всяка пермутация от n елемента съответстват $1 + (n-1) + 1 = n+1$ на брой пермутации от $n+1$ елемента. Следователно

$$p_{n+1} = (n+1)n! = (n+1)!,$$

с което формулата (4.5) е доказана.

Пример 4.2 При $n = 3$ имаме 6 пермутации:

$$(1, 2, 3),\ (1, 3, 2),\ (2, 1, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2),\ (3, 2, 1).$$

При $n \geq 2$ двойката (i_p, i_q) от елементи в пермутацията

$$(i_1, \ldots, i_p, \ldots, i_q, \ldots, i_n)$$

се нарича *инверсия*, ако $i_p > i_q$. Така два елемента в дадена пермутация образуват инверсия когато по–големият е разположен преди по–малкия.

Една пермутация е *четна*, ако съдържа четен брой инверсии, и *нечетна* в противен случай. Така на всяка пермутация $\mathbf{i}$ може да се предпише знак $\mathrm{sgn}(\mathbf{i})$ както следва: $\mathrm{sgn}(\mathbf{i}) = 1$ когато пермутацията е четна, и $\mathrm{sgn}(\mathbf{i}) = -1$ когато пермутацията е нечетна. При $n = 1$ четността не се дефинира или пък се приема, че пермутацията е четна. По–нататък ще считаме, че е налице нетривиалният случай $n \geq 2$.

Пример 4.3 Най–много инверсии съдържа пермутацията

$$(n, n-1, \ldots, 2, 1),$$

а именно

$$(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Разместването на два елемента a и b в дадена пермутация се нарича *транспозиция* и се означава с $a \leftrightarrow b$. Разместването на два съседни елемента се нарича *елементарна транспозиция.*

Всяка елементарна транспозиция променя четността на пермутацията. Действително, при транспозиция $a \leftrightarrow b$ на два съседни елемента се запазват всички инверсии на a с останалите елементи на пермутацията (без елемента b), както и всички инверсии на b с останалите елементи на пермутацията (без елемента a). Същевременно, ако двойката (a, b) е инверсия, то след разместването двойката (b, a) вече не не е инверсия, и обратно. Следователно всяка елементарна транспозиция променя (намалява или увеличава) с единица броя на инверсиите.

Всяка транспозиция също променя четността на пермутацията. Действително, ще покажем, че всяка транспозиция се получава чрез нечетен брой елементарни транспозиции. Да разгледаме транспозицията $a \leftrightarrow b$ в дадена пермутация

$$\mathbf{i} = (\ldots, a, \ldots, b, \ldots),$$

при което се получава пермутацията

$$\mathbf{j} = (\ldots, b, \ldots, a, \ldots).$$

Ако елементите a и b са съседни, то с една елементарна транспозиция от $\mathbf{i} = (\ldots, a, b, \ldots)$ получаваме пермутацията $\mathbf{j} = (\ldots, b, a, \ldots)$, при което пермутациите $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ имат различна четност. Ако между елементите a и b има $m \geq 1$ други елементи $c_1, \ldots, c_m$, т.е.,

$$\mathbf{i} = (\ldots, a, c_1, \ldots, c_m, b, \ldots),$$

то с $m + 1$ елементарни транспозиции $a \leftrightarrow c_1, \ldots, a \leftrightarrow c_m$ и $a \leftrightarrow b$ получаваме пермутацията $(\ldots, c_1, \ldots, c_m, b, a, \ldots)$. Сега с нови m елементарни транспозиции $b \leftrightarrow c_m, \ldots, b \leftrightarrow c_1$ получаваме пермутацията $\mathbf{j}$. Всичко бяха извършени нечетен брой $(2m + 1)$ елементарни транспозиции, при което четността на първоначалната пермутация се сменя.

Има и по–елегантен начин да се установят горните резултати. За целта е достатъчно да се използва фактът, че за всяка пермутация $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ имаме

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{i}) = \prod_{r>s} \frac{i_r - i_s}{r - s}$$

(докажете!). При това очевидно всяка транспозиция $i_r \leftrightarrow i_s$ сменя знака $\operatorname{sgn}(\mathbf{i})$ на пермутацията $\mathbf{i}$.

Ако една пермутация е четна (съответно нечетна), тя може с помощта на четен (съответно нечетен) брой транспозиции да се приведе в основната пермутация. Действително, за целта е достатъчно да извършим транспозиция за всяка инверсия. Разбира се, една пермутация може да се приведе в основната и с по–малко транспозиции, отколкото е броят на инверсиите. Така например в пермутацията $(3, 2, 1)$ има три инверсии, но тя може да се приведе в основната пермутация $(1, 2, 3)$ само с една транспозиция $1 \leftrightarrow 3$.

Пример 4.4 Пермутацията $\mathbf{i} = (4, 1, 3, 2)$ е четна, тъй като съдържа четири инверсии $(4, 1)$, $(4, 3)$, $(4, 2)$, $(3, 2)$. Същевременно $\mathbf{i}$ се привежда в основната пермутация $(1, 2, 3, 4)$ с помощта само на две транспозиции, например

$$(4, 1, 3, 2) \mapsto (2, 1, 3, 4) \mapsto (1, 2, 3, 4).$$

Да разгледаме сумата по всички възможни пермутации

$$\mathbf{j} = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

от вида

$$f(A) = \sum_{\mathbf{j} \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\mathbf{j}) a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}, \tag{4.6}$$

съдържаща $n!$ члена, всеки от които е произведение на n елемента на A, взети по един от всеки ред и всеки стълб. Напомняме, че $\operatorname{sgn}(\mathbf{j}) = 1$ когато пермутацията $\mathbf{j}$ е четна и $\operatorname{sgn}(\mathbf{j}) = -1$ когато пермутацията $\mathbf{j}$ е нечетна.

Ще покажем, че $f(A)$ може да се запише и като сума по всички пермутации $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ от вида

$$f^0(A) = \sum_{\mathbf{i} \in \Pi_n} \operatorname{sgn}(\mathbf{i}) a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n}. \tag{4.7}$$

Действително, да наредим множителите в произведението

$$a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n}$$

по нарастване на номерата на стълбовете, т.е., по нарастване на втория индекс:

$$a_{1,j_1} a_{2,j_2} \cdots a_{n,j_n} = a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n}.$$

При това пермутацията $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ очевидно е обратна на пермутацията $\mathbf{j} = (j_1, j_2, \cdots, j_n)$. Тъй като пермутациите $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ имат еднаква четност (докажете!), то на всеки член и знак в сумата $f^0(A)$ отговаря същият член и знак в сумата $f(A)$, откъдето следва $f^0(A) = f(A)$.

Може да се провери, че за определената чрез (4.6) или (4.7) функция са в сила свойствата 1 – 3, т.е., имаме

$$f(A) = f^0(A) = \det(A).$$

Така например в сумата $f(I_n)$ единственият ненулев член съответства на основната четна пермутация с $j_s = s$, и е равен на 1 (свойство 3). Също така, при разместване на два стълба четността на всички пермутации се сменя, откъдето $f(A)$ също сменя знака си (свойство 2). Свойство 1 също се проверява непосредствено.

Така доказахме, че функцията det, определена с аксиомите 1 – 3, наистина съществува, и дадохме явен израз (4.6) за пресмятането й. Тази функция е и единствена. Действително, аналогично на случая $n = 2$, нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ са стълбовете на единичната $n \times n$ матрица I_n,

$$I_n = [e_1, e_2, \dots, e_n].$$

Тогава j–тият стълб $a_{\bullet j} \in \mathbb{F}^n$ на матрицата $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ може да се запише като

$$a_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Като използваме свойство 1 получаваме, че $f(A)$ е сума на всевъзможните членове от вида

$$f(a_{i_1,1}e_{i_1}, a_{i_2,2}e_{i_2}, \dots, a_{i_n,n}e_{i_n}) = a_{i_1,1}a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}),$$

където пермутацията $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробягва множеството Π_n.

С помощта на известен брой инверсии пермутацията $\mathbf{i}$ може да се приведе в основната пермутация $(1, 2, \dots, n)$, като детерминантата

$$f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$$

е равна на знака на пермутацията $\mathbf{i}$. Така доказахме, че детерминантата се определя от израза (4.7).

Тъй като $f^0(A) = f(A^\top)$, то следва, че стойността на детерминантата се запазва при транспониране на съответната матрица:

$$\det(A) = \det(A^\top).$$

Аналогично,

$$\det(A^{\mathrm{H}}) = \overline{\det(A)}.$$

Да разгледаме накрая сумата

$$p(A) = \sum_{\mathbf{i} \in \Pi_n} a_{i_1,1} a_{i_2,2} \cdots a_{i_n,n},$$

която се отличава от $f(A)$ по това, че не се отчита четността на пермутациите. Лесно се вижда, че така определената функция p отговаря на условията, определящи перманентата, откъдето $p(A) = \mathrm{per}(A)$.

От зависимостите (4.6) или (4.7) следва, че детерминантата на триъгълна матрица е равна на произведението от диагоналните ѝ елементи, например

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \times & \cdots & \times \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = a_{1,1} a_{2,2} \cdots a_{n,n}. \tag{4.8}$$

Действително, в този случай в сумата (4.7) ненулеви ще бъдат само членовете с $i_1 \le 1$, откъдето $i_1 = 1$ и

$$\det(A) = a_{1,1} \sum_{\mathbf{i}' \in \Pi_{n-1}} \mathrm{sgn}(\mathbf{i}') a_{i_2,2} a_{i_3,3} \cdots a_{i_n,n},$$

където $\mathbf{i}' = (i_2, \ldots, i_n)$. По-нататък от неравенствата $i_2 \le 2$ и $i_2 \ne i_1 = 1$ получаваме $i_2 = 2$. Аналогично, $i_k = k$ за $k \ge 3$, откъдето следва и (4.8).

Зависимостта (4.7) се обобщава и за блочно триъгълни матрици:

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} & \times & \cdots & \times \\ 0 & A_{2,2} & \cdots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{r,r} \end{bmatrix} = \det(A_{1,1}) \det(A_{2,2}) \cdots \det(A_{r,r}).$$

Друго важно свойство на детерминантата е нейната *мултипликативност* в смисъл, че

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \tag{4.9}$$

Действително, да означим $C = AB$. Тогава от израза

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

за (i,j)–тия елемент $c_{i,j}$ на матрицата C получаваме, че j–тият стълб $c_{\bullet j}$ на C има вида

$$c_{\bullet j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} a_{\bullet k},$$

където $a_{\bullet k}$ е k–тият стълб на матрицата A. Оттук последователно получаваме

$$\begin{aligned}\det(C) &= \sum_{\mathbf{i}\in\Pi_n} \det(b_{i_1,1}a_{\bullet i_1}, b_{i_2,1}a_{\bullet i_2}, \ldots, b_{i_n,n}a_{\bullet i_n}) \\ &= \sum_{\mathbf{i}\in\Pi_n} b_{i_1,1}b_{i_2,2}\cdots b_{i_n,n}\det(a_{\bullet i_1}, a_{\bullet i_2}, \ldots, a_{\bullet i_n}) \\ &= \sum_{\mathbf{i}\in\Pi_n} b_{i_1,1}b_{i_2,2}\cdots b_{i_n,n}\mathrm{sgn}(\mathbf{i})\det(a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, \ldots, a_{\bullet n}) \\ &= \det(A)\sum_{\mathbf{i}\in\Pi_n} \mathrm{sgn}(\mathbf{i}) b_{i_1,1}b_{i_2,2}\cdots b_{i_n,n} \\ &= \det(A)\det(B).\end{aligned}$$

Едно алтернативно доказателство на (4.9) е както следва. Да разгледаме последователно случаите, когато детерминантата на B е нулева и ненулева. Ако $\det(B) = 0$, то дясната страна на (4.9) е нула. Но в този случай с преобразувания от тип 1 (прибавяне на стълб, умножен с число, към друг стълб) и 2 (разместване на два стълба) матрицата B може да се приведе до матрица B' с нулев стълб. Така AB' също ще има нулев стълб на същото място. Тъй като AB' е получена от AB със същите преобразувания тип 1 и 2, както B' от B, то детерминантата на AB' се различава най-много по знак от детерминантата на AB. Следователно по свойство 7 $\det(AB) = 0$ и формулата (4.9) е вярна за случая $\det(B) = 0$.

При $\det(B) \neq 0$ да разгледаме функцията f, определена от израза

$$f(A) = \frac{\det(AB)}{\det(B)}.$$

Лесно се вижда, че за f са изпълнени условията 1, 2 и 3 (докажете!). Така $f(A) = \det(A)$ и зависимостта (4.9) е доказана.

4.3 Минори

Детерминантите на квадратните подматрици на матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ се наричат *минори* на A. Когато матрицата A е квадратна и съответната матрица е получена чрез премахването на редове и стълбове на A с еднакви номера, съответният минор се нарича *главен*. Нека A_0 е квадратна подматрица от ред k на матрицата A. Тогава числото k се нарича *ред* на минора $\det(A_0)$.

За всяка матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ съществува (единствено) неотрицателно цяло число $r \leq \min\{m, n\}$, такова че:

– съществува ненулев минор на A от ред r;

– когато $r < \min\{m, n\}$ всеки минор на A от ред, по–голям от r, е нулев.

Всеки минор от ред, равен на ранга на матрицата, се нарича *базисен минор*. Аналогично, всяка подматрица, чиято детерминанта е базисен минор, се нарича *базисна* *подматрица.* Стълбовете и редовете на дадена матрица, на чието пресичане се намира базисна подматрица, се наричат *базисни.*

Числото r се нарича *ранг* на матрицата A и се бележи с $\mathrm{rank}(A)$. Както ще видим по–нататък, съществуват много други еквивалентни дефиниции на понятието ранг.

Ясно е, че една матрица е от нулев ранг точно когато тя е нулевата матрица.

Матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ е от *пълен ранг*, ако $\mathrm{rank}(A) = \min\{m, n\}$. Тъй като по определение рангът на матрица с размери $m \times n$ не може да надхвърля по–малкото от числата m или n, то матрицата от пълен ранг е всъщност матрица с максимално висок ранг.

Матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ е от *пълен редови ранг*, ако $\mathrm{rank}(A) = m$. В този случай по необходимост $m \le n$. Матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ е от *пълен стълбов ранг*, ако $\mathrm{rank}(A) = n$. Тук по необходимост $m \ge n$.

4.4 Упражнения

Упражнение 4.1 Напишете израза за детерминантата на матрица $A = [a_{i,j}]$ от трети ред.

Упражнение 4.2 Да означим с $\alpha_{i,j}$ детерминантата на подматрицата, която се получава след премахване на на i–тия ред и j–тия стълб на матрицата $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Числото $\alpha_{i,j}$ се нарича *адюнгирано количество*, съответстващо на позицията (i, j) (или на елемента $a_{i,j}$) на A. Ние вече знаем, че

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\alpha_{i,j}$$

за всяко фиксирано i. Това е формула за пресмятане на детерминанта чрез разлагане по елементите на i–тия ред. Напишете аналогична формула за пресмятане на детерминантата чрез разлагане по елементите на зададен стълб.

Упражнение 4.3 Нека е дадена матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ и адюнгираните количества $\alpha_{i,j}$ както в упражнение 4.2. Матрицата $A^\square = [a^\square_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times n}$ с елементи

$$a^\square_{i,j} := (-1)^{i+j}\alpha_{j,i}$$

се нарича *присъединена* или *адюнгирана* матрица на матрицата A. Покажете, че

$$AA^\square = A^\square A = \det(A)I_n.$$

Когато $\det(A) \ne 0$ оттук следва

$$A^{-1} = \frac{A^\square}{\det(A)}.$$

Последната формула има предимно теоретично значение, вж. упражнение 4.4.

Упражнение 4.4 Демонстрирайте практическата несъстоятелност на формулата (4.6) (също и на формулите от упражнение 4.2) за пресмятане на детерминанти дори и с помощта на компютър по следния начин.

За пресмятане на един член в сумата (4.6) са необходими $n-1$ умножения, а за пресмятането на всичките $n!$ члена са нужни $n!(n-1)$ умножения (събиранията, които са $n!-1$, великодушно ги пренебрегваме, тъй като те изискват по-малко машинно време в сравнение с умноженията). Ако разполагате със сравнително бърз компютър, извършващ един милиард (1 000 000 000) умножения в секунда (такъв компютър за гражданска употреба в България към днешна дата, октомври 2000 г., още няма!), при какъв ред n на детерминантата за пресмятането ѝ ще са Ви необходими 20 милиарда години, колкото е предполагаемата възраст на Вселената?

При изчисленията използвайте приближената формула

$$n! \approx \sqrt{6.28n}\left(\frac{n}{2.72}\right)^n.$$

Коментирайте получения резултат като имате предвид, че пресмятането на детерминанта дори от ред $n = 10\,000$ днес е рутинна, макар и не лека задача (естествено, при използване на друг метод).

Упражнение 4.5 Докажете, че ако A е ненулева матрица, то

$$\operatorname{rank}(A - a_{i,j} a_{\bullet j} a_{i\bullet}) = \operatorname{rank}(A) - 1.$$

Глава 5

ПОДПРОСТРАНСТВА

5.1 Основни определения и свойства

Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. За простота читателят може да си мисли, че това е $\mathbb{R}^n$ и даже $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.

Непразното подмножество $L \subset V$ се нарича *подпространство* на V, ако то самото е линейно пространство над $\mathbb{F}$, т.е., ако за всички $x, y \in L$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ е изпълнено

$$\lambda x + \mu y \in L.$$

Множеството $\{0_V\}$, което съдържа само нулевия вектор $0_V \in V$, очевидно е подпространство на V. То се означава съкратено като 0. Това е най–малкото подпространство на V, тъй като $0_V \in L$ за всяко подпространство $L \subset V$.

На свой ред самото V е подпространство на себе си. Това е и най–голямото подпространство на V. Тези две подпространства на V се наричат *тривиални*. Нетривиалните подпространства на V (ако има такива) се наричат още *същински* подпространства.

Не всички пространства имат същински подпространства. Нека например $v \in V$ (векторът v може и да е нулев). Тогава множеството на всички вектори αv, когато α пробягва $\mathbb{F}$, е пространство, на което всички подпространства са тривиални.

Нека $L, M \subset V$ са подпространства. *Сечение* $L \cap M$ на L и M е множеството на всички вектори, които принадлежат както на L, така и на M,

$$L \cap M := \{x : x \in L,\, x \in M\}.$$

Така $L \cap M$ е стандартното теоретико–множествено сечение на множествата L и M. Аналогично се дефинира сечение на произволен брой подпространства.

Сечението $L \cap M$ на подпространствата L и M също е подпространство. Действително, нека $x, y \in L \cap M$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Тогава $x, y \in L$ и $x, y \in M$. Следователно $\lambda x + \mu y \in L$ и $\lambda x + \mu y \in M$, което означава, че $\lambda x + \mu y \in L \cap M$.

За разлика от сечението, обединението на две подпространства може да не е (и обикновено не е) подпространство. За подпространства, обаче, може да се дефинира операция сумиране така, че полученото в резултат на сумирането множество да е отново подпространство.

Сума $L+M$ на подпространствата $L, M \subset V$ на линейното пространство V над полето $\mathbb{F}$ е множеството на всички вектори от вида $x+y$ когато x пробягва L, а y пробягва M:

$$L+M := \{x+y : x \in L,\, y \in M\}.$$

Сумата на две подпространства също е подпространство. Действително, нека $x, y \in L+M$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Тогава векторите x и y могат да се представят във вида

$$x = x_L + x_M,\ y = y_L + y_M,$$

където

$$x_L, y_L \in L;\ x_M, y_M \in M.$$

От друга страна имаме

$$\lambda x + \mu y = \xi + \eta,$$

където

$$\xi = \lambda x_L + \mu y_L \in L,\ \eta = \lambda x_M + \mu y_M \in M.$$

Следователно $\lambda x + \mu y \in L+M$, което трябваше и да покажем.

Когато $L \cap M = 0$ подпространствата L и M се наричат *дизюнктивни.* В този случай сумата на L и M се нарича *пряка* и се означава с $L \oplus M$.

Подпространствата $L, M \subset \mathbb{F}^n$ се наричат *ортогонални*, ако за всички $x \in L$ и $y \in M$ е изпълнено $\langle x, y\rangle = 0$, т.е., ако всеки вектор от L е ортогонален на всеки вектор от M. Ще напомним, че тук $\langle x, y\rangle = y^* x$ е скаларното произведение на векторите $x = [x_i]$ и $y = [y_i]$, което в комплексния случай е

$$\langle x, y\rangle = y^{\mathrm{H}} x = x_1 \overline{y}_1 + \cdots + x_n \overline{y}_n.$$

В реалния случай $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ имаме

$$\langle x, y\rangle = y^\top x = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Сечението на две ортогонални подпространства е нулевото подпространство.

За всяко подпространство $L \subset \mathbb{F}^n$ може да се определи *ортогоналното допълнение* $L^\perp \subset \mathbb{F}^n$. Това е подпространството, ортогонално на L и такова, че $L \oplus L^\perp = \mathbb{F}^n$. Може да се покаже, че $L^\perp$ е множеството на векторите $y \in \mathbb{F}^n$, такива че $\langle x, y\rangle = 0$ за всяко $x \in L$.

Лесно се вижда, че

$$(\mathbb{F}^n)^\perp = 0,\ 0^\perp = \mathbb{F}^n$$

и въобще

$$(L^\perp)^\perp = L.$$

Нека x_0 е фиксиран вектор и L е дадено подпространство на линейното пространство V. Множеството

$$x_0 + L := \{x_0 + x : x \in L\}$$

се нарича *линейно многообразие* (или *хиперравнина*) в V с направляващо подпространство L. Така линейното многообразие $x_0 + L$ представлява „отместване" на съответното направляващо подпространство L на вектор x_0. Тук транслационният вектор x_0 не е еднозначно определен. Действително, ако $x_1 \in L$, то имаме $x_0 + L = (x_0 + x_1) + L$.

5.2 Линейна зависимост на вектори

Нека е дадена системата $\mathcal{A}$ от k на брой вектора

$$a, b, \ldots, c \in \mathbb{F}^n$$

и нека

$$\lambda, \mu, \ldots, \nu \in \mathbb{F}$$

са k на брой скалари. Забележете, че не се изисква векторите от $\mathcal{A}$ да са различни помежду си.

Да образуваме от тези вектори матрицата

$$A = [a, b, \ldots, c] \in \mathbb{F}^{n\times k},$$

а от скаларите да образуваме вектора

$$x = [\lambda, \mu, \ldots, \nu]^\top \in \mathbb{F}^k.$$

Векторът

$$y := Ax = \lambda a + \mu b + \cdots + \nu c \in \mathbb{F}^n$$

се нарича *линейна комбинация* на векторите $a, b, \ldots, c$ с коефициенти $\lambda, \mu, \ldots, \nu$. Възможно е да съществува повече от един набор коефициенти в представянето на даден вектор като линейна комбинация на дадена система от вектори. Така например, ако някой от векторите е нулев, то коефициентът пред него може да се избере произволно.

Линейната комбинация y е *тривиална*, ако $x = 0_k$ и *нетривиална*, ако $x \neq 0_k$. Очевидно всяка тривиална линейна комбинация е нулев вектор ($A0_k = 0_n$), докато обратното може и да не е вярно, т.е., възможно е $Ax = 0_n$ при $x \neq 0_k$. Ако например $a = 0_n$, то можем да изберем $x = [\lambda, 0, \ldots, 0]^\top \neq 0_k$, при което имаме $Ax = 0_n$.

Множеството на всички линейни комбинации на векторите $a, b, \ldots, c$ се нарича тяхна *линейна обвивка* и се означава като

$$\mathrm{span}(\mathcal{A}) = \mathrm{span}\{a, b, \ldots, c\} = \{\lambda a + \mu b + \cdots + \nu c : \lambda, \mu, \ldots, \nu \in \mathbb{F}\}.$$

Лесно се вижда, че тази линейна обвивка е подпространство на $\mathbb{F}^n$.

Системата $\mathcal{A}$ се нарича *система от генератори* за пространството $\mathbb{F}^n$, ако всеки вектор $v \in \mathbb{F}^n$ може да се представи като линейна комбинация на векторите от $\mathcal{A}$, т.е., ако $\mathrm{span}(\mathcal{A}) = \mathbb{F}^n$.

Векторите $a, b, \ldots, c$ са *линейно независими*, ако единствената им нулева линейна комбинация е тривиалната, т.е., ако от $Ax = 0$ следва $x = 0_k$. В този случай казваме още, че системата $\mathcal{A}$ е *линейно независима*. Обратно, тези вектори са *линейно зависими* (или системата $\mathcal{A}$ е *линейно зависима*), ако съществува линейна комбинация $Ax = 0$ с $x \neq 0$.

Въз основа на горните определения може да се покаже, че системата $\mathcal{A} = \{a\}$ от един вектор $a \in \mathbb{F}^n$ е линейно независима когато $a \neq 0_n$, и линейно зависима когато $a = 0_n$. С други думи системата от един вектор е линейно зависима точно когато той е нулев. Действително, от релацията $1 \cdot 0_n = 0_n$ следва, че системата $\{0_n\}$ е линейно зависима. От друга страна, ако системата $\mathcal{A} = \{a\}$ е линейно зависима, то $\lambda a = 0_n$ за някое $0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$. Оттук $a = 0_n$.

От горните разсъждения също следва, че система, която съдържа нулевия вектор, е линейно зависима.

Случаят на система от един вектор не е особено интересен и затова по–долу ще разглеждаме предимно системи от два или повече вектори.

Нека $k > 1$. Ако векторите $a, b, \ldots, c$ са линейно зависими, то някой от тях може да се изрази като линейна комбинация (възможно тривиална) на останалите. Действително, нека $Ax = 0_n$ при $x \neq 0_k$. Тогава поне една компонента на x е ненулева и нека за определеност това да е първата, т.е., $\lambda \neq 0$. Тогава от $Ax = 0_n$ следва $(1/\lambda)Ax = 0_n$ и

$$a = -\frac{\mu}{\lambda} b - \cdots - \frac{\nu}{\lambda} c.$$

В частност системата от два вектора $\{a, b\}$ е линейно зависима когато съществува $\lambda \in \mathbb{F}$, такова че $a = \lambda b$ или $b = \lambda a$.

Ако системата $\mathcal{A}$ е линейно независима, то тя не съдържа нулевия вектор. Действително, в противен случай нетривиалната линейна комбинация с коефициенти, равни на нула с изключение на коефициента пред нулевия вектор, би била нулева, което противоречи на определението за линейна независимост.

Когато системата $\mathcal{A}$ е линейно независима, то всяка нейна подсистема е също линейно независима. Дуално, ако някоя подсистема на системата $\mathcal{A}$ е линейно зависима, то и системата $\mathcal{A}$ е линейно зависима.

Системата $\mathcal{A}$ е линейно независима точно когато всеки вектор $y \in \mathrm{span}(\mathcal{A})$ може да се представи по единствен начин като линейна комбинация на векторите от $\mathcal{A}$. Другояче казано, зависимостта $y = Ax$ трябва еднозначно да определя вектора x.

Действително, да предположим, че векторът x се определя еднозначно от y. Тогава ако изберем $y = 0_n$, то единственият вектор x, удовлетворяващ $Ax = 0_n$, е $x = 0_k$. Така според определението векторите от $\mathcal{A}$ (или стълбовете на A) са линейно независими.

Да предположим сега, че векторите от $\mathcal{A}$ са линейно независими. Да разгледаме представянията $y = Ax$ и $y = A\widetilde{x}$, където $x, \widetilde{x} \in \mathbb{F}^k$. Като извадим двете страни на тези равенства получаваме $A(x - \widetilde{x}) = 0_n$, откъдето според линейната независимост на $\mathcal{A}$ имаме $x - \widetilde{x} = 0_k$ и $x = \widetilde{x}$.

Системата от вектори $\mathcal{A}$ се нарича *база* на пространството $\mathbb{F}^n$, ако тя е линейно независима система от генератори за $\mathbb{F}^n$.

Стълбовете

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

на единичната матрица I_n образуват база на $\mathbb{F}^n$, като всеки вектор $y = [y_i] \in \mathbb{F}^n$ се представя като

$$y = I_n y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i.$$

Базата $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ се нарича *канонична*.

По–общо, стълбовете $\{a_{\bullet 1}, a_{\bullet 2}, \dots, a_{\bullet n}\}$ на всяка неособена матрица $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ образуват база на $\mathbb{F}^n$. Действително, всеки вектор $y \in \mathbb{F}^n$ може да се представи като

$$y = Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{\bullet i},$$

където $x = [x_i] = A^{-1} y$.

Да се върнем към системата $\mathcal{A}$ от вектори в $\mathbb{F}^n$. Максималният брой линейно независими вектори в $\mathcal{A}$ се нарича *ранг* на системата $\mathcal{A}$ и се бележи с $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$. Ако $\mathcal{A}$ съдържа поне един ненулев вектор, то $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) \geq 1$. С други думи $\mathrm{rank}(\mathcal{A}) = 0$ точно когато всички вектори на $\mathcal{A}$ са нулеви.

Ако рангът на $\mathcal{A}$ е $r \geq 1$, то всяка линейно независима подсистема $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$, съдържаща r вектора, се нарича *базисна подсистема*, или *база* на $\mathrm{span}(\mathcal{A})$. Всеки вектор a от $\mathcal{A}$, който не е в базата $\mathcal{B}$, непременно е линейна комбинация на вектори от $\mathcal{B}$ (в противен случай r–те вектора от $\mathcal{B}$ заедно с a биха образували подсистема от ранг $r+1$, което е невъзможно). На свой ред, ако $a \in \mathcal{A}$ е ненулев вектор, то винаги съществува база $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$, съдържаща a (докажете!).

Подсистемата $\mathcal{B}$ е база на $\mathcal{A}$ точно когато

$$\mathrm{span}(\mathcal{A}) = \mathrm{span}(\mathcal{B})$$

(докажете!).

Рангът на система от вектори е важна характеристика, която се запазва при различни преобразувания над системата. Преди всичко рангът не зависи от подреждането на векторите. Освен това рангът се запазва, ако към системата се добави вектор, който е линейна комбинация на векторите на системата.

Ако към някой от векторите в системата прибавим друг вектор от същата система, умножен с число, то рангът на системата не се променя.

Рангът на $\mathcal{A}$ се нарича *стълбов ранг* на матрицата A, чиито стълбове са векторите на системата $\mathcal{A}$. Аналогично се дефинира *редови ранг* на матрицата A като броя на нейните линейно независими редове.

Стълбовият и редовият рангове са равни и затова често говорим само за ранг на матрицата. Действително, ако матрицата A е нулева, то и двата ранга са равни на нула и следователно са равни помежду си. Нека сега $A \in \mathbb{F}^{n\times k}$ е ненулева матрица, като $r \geq 1$ и $s \geq 1$ са съответно нейният редови и стълбов ранг. Без ограничаване на общността ще приемем, че първите s стълба $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet s}$ на A са линейно независими (това винаги може да се постигне с разместване на стълбовете на A, при което стълбовият ранг не се променя). Тогава за всяко $k > s$ стълбът с номер k е линейна комбинация на първите s стълба,

$$a_{\bullet k} = \sum_{j=1}^{s} t_{j,k} a_{\bullet j}.$$

Тук $t_{1,k}, \dots, t_{s,k}$ са коефициентите в линейната комбинация. Но тогава елементът $a_{l,k}$ на A се дава от

$$a_{l,k} = \sum_{j=1}^{s} t_{j,k} a_{l,j}.$$

Следователно l–тият ред $a_{l\bullet}$ на A е

$$a_{l\bullet} = \sum_{j=1}^{s} a_{l,j} t_{j\bullet}.$$

Тук $t_{j\bullet}$ е j–тият ред на матрицата T с елементи $t_{j,k}$. Така всеки ред $a_{l\bullet}$ на A може да се представи като линейна комбинация на s вектора редове $t_{j\bullet}$. Следователно $r \leq s$. Аналогично се показва, че $s \leq r$, откъдето получаваме $r = s$.

Едно от най–важните понятия в теорията на линейните пространства е размерността. Това е целочислена характеристика на съответното пространство, която се определя по следния начин.

Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Пространството $0 = \{0_V\}$ е с нулева размерност. Пространството V е *крайномерно*, ако съществуват краен брой линейно независими вектори $v_1, \dots, v_n \in V$, такива че всеки вектор от $u \in V$ може да се представи като линейна комбинация на $v_1, \dots, v_n$ с коефициенти от $\mathbb{F}$,

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \;\; \lambda_i \in \mathbb{F}.$$

Числото $n \geq 1$ се нарича *размерност* на пространството V над $\mathbb{F}$ и се бележи с $\dim(V)$ или с $\dim_{\mathbb{F}}(V)$ когато е необходимо да се укаже полето от скалари $\mathbb{F}$. В този случай векторите $v_1, \dots, v_n$ образуват *база* на V.

Подпространството $L \subset V$ е *m–мерно*, ако съществуват m линейно независими вектора $v_1, \ldots, v_m \in V$, такива че

$$L = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}.$$

В този случай казваме, че векторите $v_1, \ldots, v_m$ образуват *база* на L. Когато векторите v_i са взаимно ортогонални и с единична дължина, т.е.,

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j},$$

базата се нарича *ортонормирана*. Тук $\delta_{i,j}$ е т.нар. символ на Кронекер, който се определя от $\delta_{i,i} = 1$ и $\delta_{i,j} = 0$ и $i \neq j$.

Една важна практическа задача е намирането на ортонормирана база на дадено подпространство.

Естествено както базата, така е ортонормираната база на всяко ненулево подпространство се определят нееднозначно.

Пример 5.1 Да разгледаме двумерното подпространство $L \subset \mathbb{R}^3$, което се състои от всички вектори $x = [x_1, x_2, 0]^\top$ с нулев трети елемент. Съществуват две еднопараметрични ортонормирани бази

$$\left\{ \begin{bmatrix} c \\ s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -s \\ c \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} c \\ s \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

на L, където $c^2 + s^2 = 1$, или $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Размерността е съществено свързана с полето от скалари $\mathbb{F}$. Ако $\mathbb{E} \subset \mathbb{F}$ е собствено подполе на $\mathbb{F}$, то V е линейно пространство и над $\mathbb{E}$, но с по–голяма размерност, отколкото е размерността му над $\mathbb{F}$. Така например пространството $\mathbb{C}^n$ има размерност n над $\mathbb{C}$ и размерност $2n$ над $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Казва се още, че пространството $\mathbb{C}^n$ има комплексна размерност n и реална размерност $2n$.

Когато линейното пространство V не е крайномерно казваме, че то е *безкрайномерно*.

Понякога термините, свързани с линейни пространства, могат да доведат до недоразумения. Нека V е линейно пространство над полето $\mathbb{F}$. Когато $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ пространството V се нарича *реално*, а когато $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ то се нарича *комплексно*. Но $\mathbb{C}^n$ е линейно пространство както над $\mathbb{C}$ (с канонична база от стълбовете $e_1, \ldots, e_n$ на единичната матрица и размерност n), така и над $\mathbb{R}$ (с канонична база $\{e_1, \imath e_1, \ldots, e_n, \imath e_n\}$ и размерност $2n$). Така пространството на комплексните n–вектори е комплексно пространство над $\mathbb{C}$, но реално пространство над $\mathbb{R}$. В частност самото множество $\mathbb{C}$ на комплексните числа е комплексно линейно едномерно пространство над себе си, но реално линейно двумерно пространство над $\mathbb{R}$. Ще завършим тези поучителни наблюдения с факта, че множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ е линейно едномерно реално пространство над себе си (естествено!), но безкрайномерно линейно пространство над $\mathbb{Q}$ (не е толкова естествено, но е факт). В последния случай множеството на реалните числа не е реално линейно пространство.

Понятието за размерност се пренася естествено върху линейните многообразия като се приема, че размерността на многообразието $x_0 + L$ в линейното пространство V над полето $\mathbb{F}$ е равна на размерността на направляващото подпространство $L \subset V$.

Пример 5.2 Да разгледаме множеството Φ от функции $f : D \to \mathbb{F}$, където $D \subset \mathbb{F}$. Ако въведем операциите умножаване на функция f с число $\lambda \in \mathbb{F}$ и сума от две функции f, g от $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ и $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ съответно, то получаваме, че Φ е безкрайномерно пространство.

Има и по–изненадващи примери на безкрайномерни пространства. Например, линейното пространство $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ е безкрайномерно (докажете!).

5.3 Прави и равнини

Да разгледаме n–мерното линейно пространство V над полето $\mathbb{F}$ (например $\mathbb{F}^n$) при $n > 1$. Едномерните линейни многообразия във V се наричат *прави*, а $(n-1)$–мерните – *равнини*. Ясно е, че при $n = 2$ тези два вида геометрични обекти съвпадат. При $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ или при $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $n > 3$ е невъзможно да си представим правите и равнините като се основаваме само на вродената си геометрична интуиция. Но и в тези случаи ясният геометричен език и интуиция, наследени от класическата евклидова геометрия на равнината и пространството, се оказват особено полезни.

Пример 5.3 Подпространствата в $\mathbb{R}^2$ са 0, правите през началото с уравнение

$$a^\top x = a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,\ a \neq 0,$$

и самото $\mathbb{R}^2$.

Пример 5.4 Подпространствата в $\mathbb{R}^3$ са 0, правите през началото с параметрично уравнение

$$x = vt,\ t \in \mathbb{R},$$

където $v \in \mathbb{R}^3$ е ненулев вектор, равнините през началото с общо уравнение

$$a^\top x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,\ a \neq 0,$$

и самото $\mathbb{R}^3$.

Удобно е уравнението на дадена права ℓ в $\mathbb{F}^n$ да се запише в *параметричен вид*

$$x = x_0 + vt,\ \ t \in \mathbb{R},$$

където $x_0 \in \ell$ е фиксиран вектор (точка) от правата, $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ е *направляващият вектор* на правата и t е реален текущ параметър на *изобразяващата точка* $x \in \ell$. Ако запишем уравнението на правата във вида

$$x - x_0 = vt$$

виждаме, че ненулевите вектори $x - x_0$, лежащи върху правата ℓ, са колинеарни на вектора v.

Параметърът t може да се интерпретира като *време* и тогава изобразяващата точка се движи по правата със скорост v. Тази геометрична интерпретация е особено удобна при решаване на задачи за прави и равнини в $\mathbb{F}^n$.

Една от най–простите задачи за прави в $\mathbb{F}^n$ е да се прекара права през две различни точки $y, z \in \mathbb{F}^n$. Търсената права може се представи параметрично като

$$x = y + (z - y)t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

При това в момента $t = 0$ изобразяващата точка x съвпада с y, а при $t = 1$ тя съвпада със z.

Множеството

$$[y, z] := \{y + (z - y)t : 0 \leq t \leq 1\} \subset \mathbb{F}^n$$

се нарича *отсечка*, свързваща точките y и z.

Общото уравнение на равнина α в $\mathbb{F}^n$ е

$$a^* x = b,$$

където $0 \neq a \in \mathbb{F}^n$ и $b \in \mathbb{F}$. Нека $x_0 \in \alpha$. Тогава $a^* x_0 = b$ и

$$a^*(x - x_0) = 0.$$

Следователно всеки вектор $x - x_0$, лежащ в α, е ортогонален на вектора a. Поради това векторът a се нарича още *нормален вектор* на равнината α. Тъй като дължината на a няма значение, то често се приема, че $\|a\| = 1$.

Всяка равнина α с уравнение $a^* x = b$ разделя пространството $\mathbb{F}^n$ на две *полупространства*

$$\begin{aligned} \Pi_+ &:= \{x \in \mathbb{F}^n : a^* x > b\}, \\ \Pi_- &:= \{x \in \mathbb{F}^n : a^* x < b\}. \end{aligned}$$

Така пространството $\mathbb{F}^n$ се представя като обединение на трите непресичащи се множества Π_+, Π_- и α. В частност, ако дадена точка x се движи по непрекъсната линия, например по права, която съдържа точка $x_+ \in \Pi_+$ и точка $x_- \in \Pi_-$, то за да се придвижи x от x_+ в x_- трябва непременно да попадне върху равнината α в даден момент.

Една проста задача за прави и равнини е да се прекара права през зададена точка $x_0 \in \mathbb{F}^n$ перпендикулярно на дадена равнина в $\mathbb{F}^n$ с общо уравнение $a^*x = b$. От условието за ортогоналност на правата и равнината следва, че направляващият вектор на правата и нормалният вектор на равнината трябва да са колинеарни и в частност могат да се изберат равни. Оттук параметричното уравнение на търсената права е

$$x = x_0 + at, \ t \in \mathbb{R}.$$

Пример 5.5 Нека са дадени правата ℓ с параметрично уравнение $x = x_0 + vt$, равнината α с общо уравнение $a^*x = b$ и точки $y, z \in \mathbb{F}^n$, лежащи от едната страна на равнината. Да разгледаме следните задачи:

1. Да се намери прободът $\ell \cap \alpha$ на правата ℓ с равнината α.
2. Светлинен лъч тръгва от y, отразява се от α и попада в z. Да се намери траекторията на лъча.

За да решим задача 1 заместваме параметричното представяне на изобразяващата точка $x = x_0 + vt$ на правата в общото уравнение на равнината $a^*x = b$, в резултат на което получаваме линейното скаларно уравнение

$$a^*vt = b - a^*x_0$$

за параметъра t. Възможни са следните случаи:

– $a^*v \neq 0$, при което векторите a и v не са ортогонални. Имаме единствено решение за t,

$$t_\alpha = \frac{b - a^*x_0}{a^*v},$$

което може да се интерпретира като момента, в който изобразяващата точка достига равнината α. Прободът $\ell \cap \alpha$ се получава като в параметричното уравнение на правата положим $t = t_\alpha$,

$$\ell \cap \alpha = x_0 + vt_\alpha.$$

– $a^*v = 0$ и $b = a^*x_0$, при което векторите a и v са ортогонални. Уравнението за t е тъждествено изпълнено, което означава, че правата ℓ лежи в равнината α.

– $a^*v = 0$ и $b \neq a^*x_0$, при което векторите a и v са ортогонални, а правата и равнината са успоредни. Уравнението за t няма решение, което означава, че правата ℓ и равнината α нямат обща точка.

Задача 2 се решава на четири стъпки:

– Намираме точка y_0, симетрична на y относно равнината α.

– Прекарваме права s през точките y_0 и z.

– Намираме пробода w на правата s с равнината α.

– Определяме търсената траектория като съвкупност на отсечките $[y, w]$ и $[w, z]$.

За да намерим точката y_0 първо прекарваме права ℓ през y перпендикулярно на α. Параметричното уравнение на ℓ е

$$x = y + at, \ t \in \mathbb{R}.$$

Заместваме тази зависимост за x в общото уравнение на α за да намерим в кой момент t_1 изобразяващата точка на правата достига равнината:

$$a^*at = b - a^*b.$$

Оттук

$$t_1 = \frac{b - a^*y}{a^*a} = \frac{b - a^*y}{\|a\|^2}.$$

Едно кинематично съображение ни учи, че щом изобразяващата точка при $t = 0$ съвпада с y, а при $t = t_1$ попада върху равнината, то при $t = 2t_1$ тя ще попадне в търсената точка y_0, т.е.,

$$y_0 = y + 2at_1 = y + 2a\frac{b - a^*y}{\|a\|^2} = -y + 2b\frac{a}{\|a\|^2}.$$

Разбира се, възможно е да се окаже, че $t_1 < 0$, но в това няма нищо страшно.

Правата s през точките y_0 и z има уравнение

$$x = y_0 + (z - y_0)t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Изобразяващата точка на s попада върху α в момента

$$t_2 = \frac{b - a^*y_0}{a^*(z - y_0)},$$

откъдето

$$w = s \cap \alpha = y_0 + (z - y_0)t_2 = \frac{(a^*z)y_0 - (a^*y_0)z + b(z - y_0)}{a^*(z - y_0)}.$$

5.4 Фундаментални подпространства на матрица

С всяка матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ от ранг r се свързват четири фундаментални подпространства. Това са *образът*

$$\mathrm{Rg}(A) := \{Ax : x \in \mathbb{F}^n\} \subset \mathbb{F}^m, \ \dim(\mathrm{Rg}(A)) = r$$

и *ядрото*

$$\mathrm{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0\} \subset \mathbb{F}^n, \ \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - r$$

на матрицата A, както и техните ортогонални допълнения

$$\mathrm{Rg}^{\perp}(A) = \mathrm{Ker}(A^{\top}), \ \dim(\mathrm{Rg}^{\perp}(A)) = m - r$$

и

$$\mathrm{Ker}^{\perp}(A) = \mathrm{Rg}(A^{\top}),\ \dim(\mathrm{Ker}^{\perp}(A)) = r.$$

Всяко подпространство $L \subset \mathbb{F}^n$ с размерност r може да се представи като образ на някаква матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times r}$ от пълен стълбов ранг r, или като ядро на някаква матрица $B \in \mathbb{F}^{(n-r)\times n}$ от пълен редови ранг,

$$L = \mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Ker}(B).$$

Нека $R \in \mathbb{F}^{r\times r}$ и $S \in \mathbb{F}^{(n-r)\times(n-r)}$ са неособени матрици. Тогава имаме още

$$L = \mathrm{Rg}(AR) = \mathrm{Ker}(SB).$$

Така множеството на всички бази на r–мерното подпространство $L \subset \mathbb{F}^n$ е изоморфно на $\mathcal{GL}(r, \mathbb{F})$, съответно на $\mathbb{F}^{r^2}$.

Аналогично, нека стълбовете на A формират ортонормирана база на L, и нека $r \times r$ матрицата R е ортогонална (ако $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) или унитарна (ако $\mathbb{F} = \mathbb{C}$). Тогава стълбовете на матрицата AR също образуват ортонормирана база на L. Така множеството на всички ортонормирани бази на L е изоморфно на $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ в реалния случай и на $\mathcal{U}(n)$ в комплексния случай.

Нека $L \subset \mathbb{F}^n$ е подпространство. Матрицата $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ се нарича *ортогонален проектор върху* L, ако е изпълнено $\mathrm{Rg}(P) = L$ и $P^2 = P = P^{\mathrm{H}}$. Лесно се вижда, че за всяко $x \in \mathbb{F}^n$ имаме $Px \in L$ и $(I_n - P)x \in L^{\perp}$.

С помощта на проектори може да се дефинира аналог на понятието разстояние за подпространства. Нека $L, M \subset \mathbb{F}^n$ са подпространства с еднаква размерност, а $P \in \mathbb{F}^{n\times n}$ и $Q \in \mathbb{F}^{n\times n}$ са ортогоналните проектори върху L и M съответно. Тогава величината

$$\mathrm{gap}(L, M) := \|P - Q\|_2$$

се нарича *разтвор* между подпространствата L и M.

Пример 5.6 Нека

$$x = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

са зададени единични вектори, а $L = \mathrm{span}\{x\}$, $M = \mathrm{span}\{y\}$. Тогава имаме

$$\mathrm{gap}(L, M) = |\sin\varphi - \sin\psi|.$$

Може да се покаже, че ако $L = \mathrm{Rg}(U)$, $M = \mathrm{Rg}(V)$, където $U, V \in \mathbb{F}^{n\times m}$ са матрици с ортонормирани стълбове, то

$$\mathrm{gap}(L, M) = \sqrt{1 - \sigma^2_{\min}(U^{\mathrm{H}}V)},$$

където $\sigma_{\min}(W)$ е най–малката сингулярна стойност на матрицата W (вж. глава 13).

5.5 Упражнения

Упражнение 5.1 Нека $A_1, A_2, \ldots, A_m$ са матрици с еднакъв брой стълбове и $\|\cdot\|$ е векторна норма. Покажете, че:

– неотрицателната функция на векторен аргумент, определена от

$$\nu(x) = \sum_{i=1}^{m} \|A_i x\|$$

е полунорма;

– функцията ν е норма точно когато

$$\bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(A_i) = 0.$$

Упражнение 5.2 Нека са дадени матриците $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $B = [b_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n\times p}$. Докажете, че

$$\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}.$$

Упътване: Положете $C = [c_{i,j}] = AB$. Като използвате формулата

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

покажете, че

$$c_{i\bullet} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k\bullet}$$

и

$$c_{\bullet j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} a_{\bullet k}.$$

Така редът $c_{i\bullet}$ се оказва линейна комбинация от n–те реда на B, а стълбът $c_{\bullet j}$ – линейна комбинация от n–те стълба на A.

Упражнение 5.3 Докажете неравенствата (предполага се, че всички указани матрични произведение са коректно определени)

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) &\leq \mathrm{rank}(AB) + n,\ A \in \mathbb{F}^{m\times n},\ B \in \mathbb{F}^{n\times p}, \\
\mathrm{rank}(X + Y) &\leq \mathrm{rank}(X) + \mathrm{rank}(Y), \\
\mathrm{rank}(PQ) + \mathrm{rank}(QR) &\leq \mathrm{rank}(Q) + \mathrm{rank}(PQR).
\end{aligned}$$

Упражнение 5.4 Нека $\mathcal{A}$ е крайна система от вектори. Покажете, че

$$\dim(\mathrm{span}(\mathcal{A})) = \mathrm{rank}(\mathcal{A}).$$

Упражнение 5.5 Нека L, M и N са подпространства на n–мерното линейното пространство V. Докажете, че

– $\dim(L) \leq n$, като $\dim(L) = n$ точно когато $L = V$;

– ако $L \subset M$, то $\dim(L) \leq \dim(M)$;

– $\dim(L \cap M) \leq \min\{\dim(L), \dim(M)\}$, като равенството се достига точно когато $L \subset M$ или $M \subset L$;

– ако $L \subset N$, то

$$N \cap (L + M) = (N \cap L) + (N \cap M);$$

– ако $N \subset L$, то

$$N + (L \cap M) = (N + L) \cap (N + M);$$

– изпълнено е

$$\dim(L \cap M) + \dim(L + M) = \dim(L) + \dim(M)$$

(това равенство е известно като формула на Грасман[1]).

[1] Г. Грасман, немски математик, 1809-1877.

Глава 6

ЕЛЕМЕНТАРНИ ТРАНСФОРМАЦИИ

6.1 Уводни бележки

Съществуват различни видове трансформации, чрез които дадена матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ може да се приведе в специална форма, например във форма, характеризираща се с наличието на нули в определени позиции. В практиката често се използват т.нар. *елементарни трансформации* (ЕТ), които биват два вида: *леви* (действащи по редове) и *десни* (действащи по стълбове). Една лява ЕТ, или съкратено ЛЕТ, включва следните две операции:

(P) разместване на два реда на матрицата A (например на редовете с номера i и j), при което се получава матрицата A';

(S) прибавяне към даден ред матрицата A' на друг ред на A', умножен предварително с число (например редът с номер ℓ на A' се умножава с λ и се прибавя към реда с номер k), при което се получава матрицата A''.

Трансформацията, която се състои от няколкократно прилагане на ЛЕТ, също се нарича *лява елементарна трансформация.* Аналогично се дефинират *десни елементарни трансформации.*

6.2 Матрично представяне

Трансформациите от тип (P) и (S), а следователно и ЛЕТ, могат да се получат чрез умножаване отляво на матрицата A с някаква друга матрица.

Да означим с $P_m(i,j)$ матрицата, която се получава от единичната матрица I_m

чрез разместване на стълбовете (или редовете) с номера i и j, например

$$P_4(1,3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриците $P_m(i,j)$ се наричат *елементарни пермутационни* (или *разместителни*) матрици, а произведението на такива матрици се нарича *пермутационна* матрица, или P–матрица. Всяка трансформация от тип (P) отговаря на умножаване отляво на матрицата с елементарна пермутационна матрица, например $A' = P_m(i,j)A$.

Нека $S_m(i,j;\lambda)$ е матрицата, която се отличава от единичната матрица I_m по това, че в позиция (i,j), $i \neq j$, има елемент λ. Матриците $S_m(i,j;\lambda)$ се наричат S–матрици. Всяка трансформация от тип S отговаря на умножаване отляво на матрицата с някоя S–матрица, например $A'' = S_m(k,\ell,\lambda)A'$. Така в резултат на трансформациите от тип (P) и (S) получаваме матрицата

$$A'' = S_m(k,\ell;\lambda)P_m(i,j)A.$$

Обикновено елементарните трансформации (P) и (S) се прилагат по следния начин. Първо се разместват редовете с номера i и $j \geq i$, след което новополученият ред с номер i (бивш j) ред се умножава с λ и се прибавя към реда с номер $k > i$. В този случай трансформацията съответства на умножаване отляво на A с матрицата

$$E_m(i,j,k;\lambda) := S_m(k,i;\lambda)P_m(i,j) = P_m(i,j)S_m(k,j;\lambda),$$

където $j \geq i$, $k > i$. Така

$$A'' = E_m(i,j,k;\lambda)A.$$

Матриците от вида $E_m(i,j,k;\lambda)$ ще наричаме E–матрици. Множеството на всички E–матрици от m–ти ред ще означаваме с $\mathcal{E}_m$. Множеството $\mathcal{E}_m$ включва всички долни триъгълни матрици S с единици по главния диагонал, всички пермутационни матрици P, както и произведенията SP. Така например при $m = 2$ множеството $\mathcal{E}_2$ включва матриците

$$P_2(1,1) = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_2(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2(2,1;\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_2(1,2,2;\lambda) = S_2(2,1;\lambda)P_2(1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

6.3 Привеждане на матрица

С помощта на ЛЕТ с матрица $E \in \mathcal{E}_m$ всяка матрица $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ може да се приведе в т.нар. *ешалонна форма*, или в Т–форма $T = EA$, която е частен случай на горна триъгълна матрица и може да се опише както следва.

Ако матрицата A е нулева, то формата T също е нулева. Този случай не представлява особен интерес.

Ако матрицата A е ненулева, то $r = \operatorname{rank}(A) \geq 1$. Да означим с $i_1, i_2, \ldots, i_r$, където

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq \min\{m, n\},$$

номерата на първите r линейно независими стълба в A. Така i_1 е номерът на първия ненулев стълб, i_2 е номерът на първия стълб, който заедно с i_1–я стълб образува система от ранг 2 и т.н. Тогава Т–формата може да се опише както следва:

– първите r реда на T са ненулеви, а останалите $m - r$ реда (ако има такива) са нулеви;

– първият ненулев елемент във всеки ред k е в позиция (k, i_k).

Матрицата T се нарича още *канонична форма* на A относно ЛЕТ с матрици от $\mathcal{E}_m$. Числата $i_1, i_2, \ldots, i_r$ не се променят при ЛЕТ и се наричат *аритметични инварианти* на A относно ЛЕТ.

Пример 6.1 При $m = 5$, $n = 7$ и $r = 3; i_1 = 2, i_2 = 4, i_3 = 5$ имаме

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \otimes & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \otimes & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \otimes & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

където с $\otimes$ са означени ненулеви елементи, а с $\times$ – произволни елементи.

Броят на нулевите елементи в T е поне

$$n(m - r) - r + i + 1 + i_2 + \cdots + i_r$$

(докажете!).

Възможността за привеждане на всяка ненулева матрица A в Т–форма се демонстрира по следния начин.

Нека първо $n = 1$, т.е., $A = a \in \mathbb{F}^m$ е вектор с компоненти a_i. Ако $a_1 \neq 0$, то ЛЕТ $Ea = t$, или

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sign}(a_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_3}{a_1} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_m}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

привежда a в търсената форма.

Ако се окаже, че $a_1 = 0$, то нека a_i е някой от ненулевите елементи на a. Тогава първо разместваме редовете 1 и i на a с пермутацията $P_m(1, i)$ и после прилагаме към вектора $P_m(1, i)a$ трансформация от типа (6.1).

Да разгледаме сега общия случай $n > 1$, в който е приложим следният алгоритъм.

Стъпка 1. Нека i_1 е номерът на първия ненулев стълб на A. Да означим с $E_1 \in \mathbb{F}^{m\times m}$ матрицата, която преобразува този стълб в Т–форма:

$$E_1 a_{\bullet i_1} = [\otimes, 0, 0, \ldots, 0]^\top,$$

откъдето

$$E_1 A = [0, E_1 a_{\bullet i_1}, \ldots] = \begin{bmatrix} 0 & \otimes & \times \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix},\ A_2 \in \mathbb{F}^{(m-1)\times(n-i_1)}.$$

В последната формула нулата вляво от вектора $E_1 a_{\bullet i_1}$ е с размер $(i_1 - 1) \times m$ и следователно е празна, ако $i_1 = 1$.

Стъпка 2. Нека $E_2 \in \mathbb{F}^{(m-1)\times(m-1)}$ е матрицата, която преобразува първия ненулев стълб на A_2 в Т–форма. Тогава

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \otimes & \times \\ 0 & 0 & E_2 A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \otimes & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \otimes & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

където

$$A_3 \in \mathbb{F}^{(m-2)\times(n-i_1-i_2)}.$$

След точно r стъпки матрицата се преобразува в търсената Т–форма, тъй като на r–тата стъпка подматрицата A_{r+1} в долния десен ъгъл на преобразуваната матрица по необходимост е нулева. В противен случай ще има поне още един, $(r+1)$–ви линейно независим стълб, което противречи на предположението, че A има точно r линейно независими стълба.

Да предположим сега, че матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е неособена. Тогава Т–формата на A е горна триъгълна матрица

$$T = \begin{bmatrix} t_{1,1} & \times & \ldots & \times \\ 0 & t_{2,2} & \ldots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{n,n} \end{bmatrix}$$

с ненулеви елементи $t_{i,i}$ по диагонала. С точност до знак ($+$, ако е имало четен брой размествания на редове на A по време на редукцията, и $-$, ако е имало нечетен брой такива размествания) произведението на диагоналните елементи на T е равно на детерминантата на A. Това, впрочем, е и един елегантен начин за пресмятане на детерминанта.

На практика редукцията на матрица в ешалонна форма (и в частност редукцията на неособена матрица в горна триъгълна форма) се извършва чрез т.нар. *частичен избор на водещ елемент* (на английски *partial pivoting*).

Да разгледаме случая на неособена матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. На първата стъпка, чрез разместване на редове, в позиция (1,1) се докарва елементът с най–голям модул измежду елементите на първия стълб на матрицата $A = A_1$. Този елемент се нарича *водещ*. Това се прави с цел намаляване на модулите на елементите на трансформационната матрица E_1, тъй като там водещият елемент участва като знаменател. На втората стъпка в позиция (2,2) се докарва елементът с най–голям модул измежду елементите на първия стълб на матрицата A_2 с цел намаляване на модулите на елементите на матрицата E_2. Изобщо, на k–тата стъпка в позиция (k, k) се докарва елементът с най–голям модул измежду елементите на първия стълб на матрицата A_k. На последната $n-1$ стъпка процесът на привеждане на $n \times n$ матрицата A в Т–форма приключва.

Частичният избор на $n-1$ водещи елементи леко оскъпява изчислителната процедура, но с негова помощ значително се повишава надеждността и точността на редукцията при извършване на изчисленията в машинна аритметика.

Пример 6.2 Да разгледаме матрицата

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

където $0 < |\varepsilon| \ll 1$. Привеждането на A в ешалонна форма без частичен избор на водещ елемент става по формулата

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1-1/\varepsilon \end{bmatrix}.$$

При това във формата T_1 елементът в позиция (2,2) е с голям модул от порядъка на $1/|\varepsilon| \gg 1$.

Ако използваме частичен избор на водещ елемент, на първата стъпка разместваме редовете на A за да получим матрицата $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$. Редукцията на последната матрица в ешалонна форма дава

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Във формата T_2 ненулевите елементи са от порядъка на 1.

6.4 Упражнения

Упражнение 6.1 Нека е дадена матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ от ранг r. Нека $k_1, \ldots, k_r$ са номерата на първите r линейно независими стълба на A. Покажете, че съществува матрица $X \in \mathcal{GL}(m, \mathbb{F})$, такава че матрицата

$$B := XA = [b_{i,j}] = [b_{\bullet 1}, \ldots, b_{\bullet n}]\,,\ b_{\bullet j} \in \mathbb{F}^m,$$

притежава следните свойства:

– последните $m - r$ реда на B са нулеви;

– $b_{\bullet k_j} = e_{k_j}$, $j = 1, \ldots, r$, където e_k е k–тият стълб на единичната матрица I_m;

– $b_{i,j} = 0$ когато $j < k_i$. Матрицата B е каноничната форма на A относно лявото мултипликативно действие на групата $\mathcal{GL}(m, \mathbb{F})$ в множеството $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Упражнение 6.2 Нека е дадена матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ от ранг r. Покажете, че съществуват матрици $X \in \mathcal{GL}(m, \mathbb{F})$ и $Y \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{F})$, такива че

$$B = XAY = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}.$$

Матрицата B е каноничната форма на A относно горното мултипликативно действие на групите $\mathcal{GL}(m, \mathbb{F})$ и $\mathcal{GL}(n, \mathbb{F})$ в множеството $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Като страничен резултат от това упражнение получаваме още едно доказателство на факта, че редовият и стълбовият рангове на една матрица са равни помежду си.

Упражнение 6.3 Нека е даден векторът $x = [x_1, \ldots, x_n]^\top$, където за някое $1 \le k \le n-1$ е изпълнено $x_k \neq 0$. Да построим матрицата

$$M_k = M_k(x) := \begin{bmatrix} I_k & 0_{k\times(n-k)} \\ Z_k & I_{n-k} \end{bmatrix},\ Z_k = Z_k(x),$$

където

$$\begin{aligned} Z_1 &:= -f_1(x), \\ Z_k &:= \left[0_{(n-k)\times(k-1)}, -f_k(x)\right],\ 2 \le k \le n-1 \end{aligned}$$

и

$$f_k(x) := \left[\frac{x_{k+1}}{x_k}, \ldots, \frac{x_n}{x_k}\right].$$

Така $M_k(x)$ се отличава от единичната матрица I_n единствено по k–тия си стълб, който има следния вид. Първите му $k-1$ елемента са нули, k–тият му елемент е 1, а при $i > k$ неговият i–ти елемент е x_i/x_k.

Покажете, че

$$M_k x = [x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0]^\top.$$

Глава 7

ОРТОГОНАЛНИ И УНИТАРНИ МАТРИЦИ

7.1 Определения и общи свойства

В матричната теория и особено в приложенията на матриците в инженерната и научна практика важна роля играят реалните ортогонални и комплексните унитарни матрици.

Матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ се нарича *ортогонална*[1], ако

$$A^\top A = I_n.$$

Оттук следва, че ортогоналната матрица е обратима, като

$$A^{-1} = A^\top.$$

Така обръщането на една ортогонална матрица, което в общия случай може да е трудна изчислителна задача, се свежда до транспониране на матрицата. Очевидно тази операция винаги се изпълнява точно.

Лесно се показва, че дефиниционното равенство за ортогоналната матрица A може да се запише и като $AA^\top = I_n$.

Имаме също така

$$\det(A^\top A) = \det(I_n) = 1,$$

откъдето $\det^2(A) = 1$ и

$$\det(A) = \pm 1.$$

Важно е да се отбележи, че в горното определение е в сила както за реални, така и за комплексни матрици.

Нека A, B са ортогонални $n \times n$ матрици. Тогава

$$(AB)^\top AB = B^\top A^\top AB = B^\top B = I_n,$$

[1]Този термин не е особено удачен, но така или иначе се е наложил.

т.е., произведението на две (а следователно и на всякакъв брой) ортогонални матрици е също ортогонална матрица. Също така от определението за ортогоналност се вижда, че обратната на една ортогонална матрица също е ортогонална. Така ортогоналните $n \times n$ матрици над полето $\mathbb{F}$ образуват мултипликативна матрична група, която се означава с $\mathcal{O}(n, \mathbb{F})$.

В практиката намират приложение главно реалните ортогонални матрици, т.е., елементите на $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Нека $a_i \in \mathbb{R}^n$ са стълбовете на матрицата $A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$. Лесно се вижда, че (i, j)–тият елемент $(A^\top A)_{i,j}$ на матрицата $A^\top A$ е $a_i^\top a_j$. От определението за ортогоналност следва, че $a_i^\top a_j = 0$ при $i \neq j$ и $a_i^\top a_i = \|a_i\|^2 = 1$. Така стълбовете на една реална ортогонална матрица са взаимно ортогонални и с единична дължина. Оттук впрочем идва и названието на този вид матрици.

Умножаването на реален вектор x с реална ортогонална матрица A не променя евклидовата му дължина. Действително, имаме

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{x^\top A^\top Ax} = \sqrt{x^\top x} = \|x\|_2.$$

За нормите на реалните ортогонални матрици $A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ е в сила

$$\|A\|_2 = 1, \; \|A\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{n}.$$

Групата $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ е компактно многообразие в пространството $\mathbb{R}^{n \times n}$. Елементите на една матрица $A \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, които са n^2 на брой, удовлетворяват $n(n+1)/2$ нетривиални полиномиални зависимости. Това са $n(n-1)$ условия за ортогоналност $a_{\bullet i}^\top a_{\bullet j} = 0$, $i \neq j$, на стълбовете $a_{\bullet i}$ на A и n условия $\|a_{\bullet 1}\| = \cdots = \|a_{\bullet n}\| = 1$ за нормировка на тези стълбове. Следователно $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ е $n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2$– мерно реално многообразие.

Сега ще разгледаме един друг вид квадратни матрици, които в общия случай са комплексни и в известен смисъл са близки по някои от свойствата си до реалните ортогонални матрици.

Матрицата $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ се нарича *унитарна*, ако

$$A^{\mathrm{H}} A = I_n.$$

Ще напомним, че с $A^{\mathrm{H}} = \overline{A}^\top$ означаваме ермитово спрегнатата матрица на матрицата A. Когато матрицата A е комплексна тя може да се представи във вида $A = A_0 + \imath A_1$, където матриците A_0, A_1 са реални и $\imath = \sqrt{-1}$. В този случай

$$A^{\mathrm{H}} = A_0^\top - \imath A_1^\top.$$

В частност когато матрицата A е реална имаме $A^{\mathrm{H}} = A^\top$.

От условията за унитарност на $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ следва, че

$$A_0^\top A_0 + A_1^\top A_1 = I_n$$

и

$$A_0^\top A_1 = A_1^\top A_0.$$

Реалните унитарни матрици са просто разгледаните вече реални ортогонални матрици. Поради това ще предполагаме, че разглежданите по–долу унитарни матрици са комплексни, макар че съответните резултати са верни и когато те са реални.

Унитарната матрица A е обратима, като

$$A^{-1} = A^{\mathrm{H}}.$$

Така обръщането на една унитарна матрица (което за обща матрица може да е деликатна изчислителна задача) се свежда до нейното транспониране и комплексно спрягане. Дефиниционното равенство за унитарната матрица A може да се запише и като $AA^{\mathrm{H}} = I_n$.

Имаме също така

$$\det(A^{\mathrm{H}}A) = \det(I_n) = 1,$$

откъдето $\det(A^{\mathrm{H}})\det(A) = 1$, $\det(\overline{A})\det(A) = 1$ и

$$|\det(A)| = 1.$$

Така детерминантата на една унитарна матрица A лежи върху единичния кръг в комплексната равнина,

$$\det(A) = \cos\varphi + \imath\sin\varphi,\ \ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Нека A, B са унитарни $n \times n$ матрици. Тогава

$$(AB)^{\mathrm{H}}AB = B^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}AB = B^{\mathrm{H}}B = I_n,$$

т.е., произведението на две (а следователно и на всякакъв брой) унитарни матрици е също унитарна матрица. Също така от определението за унитарност е ясно, че обратната на една унитарна матрица също е унитарна. Така унитарните $n\times n$ матрици над полето $\mathbb{C}$ образуват матрична група, която се означава с $\mathcal{U}(n)$.

Нека $a_i \in \mathbb{C}^n$ са стълбовете на матрицата $A \in \mathcal{U}(n)$. Лесно се вижда, че (i,j)–тият елемент $(A^{\mathrm{H}}A)_{i,j}$ на матрицата $A^{\mathrm{H}}A$ е $a_i^{\mathrm{H}}a_j$. Следователно $a_i^{\mathrm{H}}a_j = 0$ при $i \neq j$ и $a_i^{\mathrm{H}}a_i = \|a_i\|^2 = 1$. Така стълбовете на една унитарна матрица са взаимно ортогонални и с единична дължина.

Умножаването на вектор x с унитарна матрица A не променя евклидовата му дължина. Действително, имаме

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}Ax} = \sqrt{x^{\mathrm{H}}x} = \|x\|_2.$$

За нормите на унитарните матрици $A \in \mathcal{U}(n)$ е в сила

$$\|A\|_2 = 1,\ \ \|A\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{n}.$$

Една норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^{m\times n}$ се нарича *ортогонално инвариантна*, ако за всеки две ортогонални матрици $U \in \mathcal{O}(m,\mathbb{R})$ и $V \in \mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ е изпълнено

$$\|UAV\| = \|A\|.$$

Аналогично, нормата $\|\cdot\|$ в $\mathbb{C}^{m\times n}$ се нарича *унитарно инвариантна*, ако за всеки две унитарни матрици $U \in \mathcal{U}(m)$ и $V \in \mathcal{U}(n)$ е изпълнено $\|UAV\| = \|A\|$.

Може да се покаже, че спектралната операторна норма $\|\cdot\|_2$ и матричната норма на Фробениус $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ са ортогонално (съответно унитарно) инвариантни.

Описаното инвариантно свойство е особено важно в числената линейна алгебра, където изчислителните алгоритми се разработват с оглед на изпълнението им в машинна аритметика и в частност в крайна аритметика с плаваща точка. С малки изключения надеждните и устойчиви изчислителни алгоритми на съвременната числена линейна алгебра се основават само на ортогонални (съответно унитарни) трансформации, които запазват ортогонално инвариантните норми на преобразуваните вектори и матрици.

Допълнителни сведения за ортогоналните и унитарните матрици са дадени в глава 13.

Групата $\mathcal{U}(n)$ е компактно многообразие в пространството $\mathbb{C}^{n\times n}$. Елементите на една матрица $A \in \mathcal{U}(n)$, които са n^2 на брой комплексни числа, зависят от $2n^2$ на брой реални параметри (реалните и имагинерните части на елементите). Тези параметри удовлетворяват n^2 реални уравнения както следва. Първо имаме $n(n-1)/2$ комплексни нетривиални полиномиални зависимости, а именно условия за ортогоналност $a_{\bullet i}^{\mathrm{H}} a_{\bullet j} = 0$, $i \neq j$, на стълбовете $a_{\bullet i}$ на A. Това дава $n(n-1)$ реални уравнения. След това имаме n реални уравнения $\|a_{\bullet 1}\| = \cdots = \|a_{\bullet n}\| = 1$ за нормировка. Общо реалните уравнения са $n(n-1) + n = n^2$. Следователно $\mathcal{U}(n)$ е (изоморфно на) $2n^2 - n^2 = n^2$– мерно реално многообразие.

7.2 Упражнения

Упражнение 7.1 Опишете множеството на всички реални ортогонални 2×2 матрици с детерминанта, равна на 1.

Упражнение 7.2 Опишете множеството на всички реални ортогонални 2×2 матрици с детерминанта, равна на -1.

Упражнение 7.3 Опишете множеството на всички комплексни унитарни 2×2 матрици.

Упражнение 7.4 Покажете, че множеството на комплексните ортогонални матрици е неограничено.

Упражнение 7.5 Опишете множеството на всички реални диагонални ортогонални $n \times n$ матрици.

Упражнение 7.6 Опишете множеството на всички комплексни диагонални унитарни $n \times n$ матрици.

Упражнение 7.7 Покажете, че

$$\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) = \mathcal{U}(n) \cap \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Глава 8

ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

8.1 Линейни матрични уравнения

Уравненията от вида

$$F(X) = 0_{p\times q},$$

където $F : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{p\times q}$ е матрична функция на матричен аргумент, се наричат *матрични уравнения*. Най–общото *линейно матрично алгебрично уравнение* може да се запише във вида

$$\sum_{i=1}^{r} A_i X B_i = C, \tag{8.1}$$

където $A_i \in \mathbb{F}^{p\times m}$, $B_i \in \mathbb{F}^{n\times q}$ и $C \in \mathbb{F}^{p\times q}$ са зададени матрични коефициенти, а $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ е неизвестната матрица. Като вземем стълбова векторизация от двете страни на (8.1) получаваме векторното линейно алгебрично уравнение

$$Mx = c,$$

където

$$\begin{aligned} M &:= \sum_{i=1}^{r} B_i^\top \otimes A_i \in \mathbb{F}^{pq\times mn}, \\ c &:= \mathrm{vec}(C) \in \mathbb{F}^{pq}, \\ x &:= \mathrm{vec}(X) \in \mathbb{F}^{mn} \end{aligned}$$

и $A \otimes B$ е кронекеровото произведение на матриците A и B (вж. например глава 14).

Важни за практиката са следните класове линейни матрични уравнения:

- Уравнение на Силвестър за непрекъснати системи

  $$AX + XB = C,$$

  където $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $C, X \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Тук матрицата M има вида

  $$M = I_n \otimes A + B^\top \otimes I_m \in \mathbb{F}^{mn\times mn}.$$

Тя има собствени стойности $\lambda_i(A)+\lambda_j(B)$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$, и е неособена точно когато $\lambda_i(A)+\lambda_j(B)\neq 0$. Тук $\lambda_1(A),\ldots,\lambda_m(A)$ и $\lambda_1(B),\ldots,\lambda_n(B)$ са собствените стойности на матриците A и B съответно с отчитане на алгебричната им кратност (вж. глава 10).

- Уравнение на Силвестър за дискретни системи

$$AXB - X = C,$$

където размерите на участващите матрици са както в предходния случай. Матрицата M е

$$M = B^\top \otimes A - I_{mn}$$

и има собствени стойности $\lambda_i(A)\lambda_j(B)-1$, $i=1,\ldots,m$, $j=1,\ldots,n$. Тази матрица е неособена точно когато $\lambda_i(A)\lambda_j(B)\neq 1$.

- Уравнение на Ляпунов за непрекъснати системи

$$A^*X + XA = C,$$

където всички участващи матрици са с размер $n\times n$. Матрицата C е симетрична в ($C^\top = C$) реалния случай и ермитова ($C^{\mathrm{H}} = C$) в комплексния случай. Ще напомним, че $A^* = A^{\mathrm{H}}$ и $A^* = A^\top$ в комплексния и реалния случай съответно. Матрицата M тук е

$$M = I_n \otimes A^* + A^\top \otimes I_n \in \mathbb{F}^{n^2\times n^2}.$$

Тя има собствени стойности $\lambda_i(A)+\lambda_j(A)$ в реалния случай и $\lambda_i(A)+\overline{\lambda}_j(A)$, $i,j=1,\ldots,n$ в комплексния случай. Тази матрица е неособена точно когато $\lambda_i(A)+\overline{\lambda}_j(A)\neq 0$.

- Уравнение на Ляпунов за дискретни системи

$$A^*XA - X = C,$$

където $C = C^*$. Размерите на матриците са както в предходния случай, а матрицата M има вида

$$M = A^\top \otimes A^* - I_{n^2}.$$

Нейните собствени стойности са $\lambda_i(A)\lambda_j(A)-1$ в реалния случай и $\lambda_i(A)\overline{\lambda}_j(A)-1$, $i,j=1,\ldots,n$, в комплексния случай.

- Обобщено уравнение на Ляпунов за непрекъснати системи

$$A^*XE + E^*XA = C,$$

където $C = C^*$. Тук матрицата M е

$$M = E^\top \otimes A^* + A^\top \otimes E^*.$$

Тя е неособена точно когато матриците A и E са неособени и $\lambda_i(EA^{-1})+\lambda_j(EA^{-1}) \neq 0$ в реалния случай, или $\lambda_i(EA^{-1}) + \overline{\lambda}_j(EA^{-1}) \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, в комплексния случай.

- Обобщено уравнение на Ляпунов за дискретни системи

$$A^*XA - E^*XE = C,$$

където $C = C^*$. За това уравнение матрицата M има вида

$$A^\top \otimes A^* - E^\top \otimes E^*.$$

Тя е неособена точно когато матриците A и E са неособени и $\lambda_i(AE^{-1})+\lambda_j(AE^{-1}) \neq 1$ в реалния случай, или $\lambda_i(AE^{-1}) + \overline{\lambda}_j(AE^{-1}) \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, в комплексния случай.

8.2 Съществуване и единственост на решението

Да разгледаме векторното линейно алгебрично уравнение

$$Ax = b, \tag{8.2}$$

където матрицата $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и векторът $b = [b_i] \in \mathbb{F}^m$ формират данните на задачата, а $x = [x_j] \in \mathbb{F}^n$ е търсеното решение.

Ако $a_{\bullet 1}, \dots, a_{\bullet n} \in \mathbb{F}^m$ са стълбовете на матрицата A, то уравнението може да се запише във вида

$$x_1 a_{\bullet 1} + \cdots + x_n a_{\bullet n} = b.$$

Следователно когато съществува решение x, неговите компоненти x_i са коефициенти в линейна комбинация от стълбове на A, която е равна на свободния член b.

Уравнението (8.2) може да се запише и във вид на m скаларни уравнения относно неизвестните $x_1, \dots, x_n$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = b_i, \ i = 1, \dots, m.$$

Всеки вектор $x_0 \in \mathbb{F}^n$, такъв че $Ax_0 = b$, се нарича *частно решение* (или само решение) на уравнението (8.2). Множеството

$$\Xi := \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = b\}$$

на всички решения на (8.2) се нарича *общо решение* на това уравнение.

Както и при много други математически задачи, при решаване на уравнението (8.2) възникват следните основни проблеми:

- Съществува ли решение на уравнението, т.е., в сила ли е релацията $\Xi \neq \emptyset$?
- Колко решения съществуват?
- Как да намерим някое частно решение x_0?
- Как да намерим общото решение Ξ?

Пример 8.1 Да разгледаме скаларното уравнение $Ax = b$, където $A, b, x \in \mathbb{F}$. Тук са възможни следните три случая.

1) Когато $A \neq 0$ имаме единствено решение $x_0 = b/A$, т.е., $\Xi = \{x_0\}$.

2) Когато $A = 0$ и $b = 0$ всяко $x \in \mathbb{F}$ е решение, т.е., $\Xi = \mathbb{F}$.

3) Когато $A = 0$ и $b \neq 0$ уравнението няма решение, т.е., $\Xi = \emptyset$.

Както ще видим по–нататък, ситуацията описана в пример 8.1, е типична за всяко линейно алгебрично уравнение: то или има единствено решение, или има безбройно много решения или няма решение.

Когато уравнението (8.2) има (поне едно) решение казваме, че това уравнение е *съвместимо*. Когато съществува единствено решение, уравнението се нарича *регулярно*.

Необходимите и достатъчни условия за съществуване и за единственост на решението се формулират и доказват лесно (само условията за съвместимост са известни и като *теорема на Кронекер–Капели*[1]).

В геометрична форма условието за съвместимост на уравнението (8.2) е

$$b \in \mathrm{Rg}(A), \tag{8.3}$$

т.е., векторът b трябва да лежи в образа на матрицата A. Действително, ако условието (8.3) е изпълнено, то по дефиниция съществува вектор $x \in \mathbb{F}^n$, такъв че $Ax = b$. Обратно, ако включването (8.3) не е в сила, то не съществува вектор $x \in \mathbb{F}^n$, за който да имаме $Ax = b$.

В алгебрична форма условието за съвместимост е

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}[A, b],$$

т.е., рангът на $m \times n$ матрицата на системата A трябва да е равен на ранга на т.нар. *разширена матрица* $[A, b]$ с размер $m \times (n+1)$. Действително, ако горното рангово условие е изпълнено, то векторът b може да се представи като линейна комбинация от стълбовете на матрицата A. Тогава векторът x, чиито елементи са коефициентите на тази линейна комбинация, е решение на уравнението (8.2). Обратно, ако ранговото условие не е изпълнено, което означава, че $\mathrm{rank}[A, b] = \mathrm{rank}(A) + 1$, то векторът b не може да се представи като линейна комбинация от стълбовете на A и уравнението (8.2) няма решение.

[1] А. Капели, италиански математик, 1855–1910.

8.3 Представяне на решението

Когато уравнението (8.2) има частно решение x_0, то общото решение е линейното многообразие

$$\Xi = x_0 + \mathrm{Ker}(A)$$

с размерност $n - \mathrm{rank}(A)$. Оттук необходимото и достатъчно условие за регулярност на съвместимото уравнение (8.2) е

$$\mathrm{Ker}(A) = 0$$

или, еквивалентно,

$$\mathrm{rank}(A) = n.$$

Един важен частен случай на линейни алгебрични уравнения е този, при който матрицата A е квадратна, $m = n$. Тук уравнението е регулярно точно когато матрицата A е обратима, което е еквивалентно на условието $\mathrm{rank}(A) = n$ или $\det(A) \neq 0$. Единственото решение може да се запише във вида

$$x_0 = A^{-1}b. \tag{8.4}$$

Тази формула е един елегантен начин да запишем решението в явен вид, но тя не е удобна за практически пресмятания. Действително, обръщането на матрицата A може да се окаже трудна в изчислително отношение задача. Затова обикновено матрицата A^{-1} не се формира, а уравнението се решава непосредствено. Понякога явната формула (8.4) се използва в случай, че е необходимо да се решат голям брой уравнения с една и съща матрица A и различни десни страни b.

Съществува и един друг любопитен начин за запис на решението на уравнение (8.2) при $\det(A) \neq 0$ в явен вид с използване на детерминанти. Естествено, това не се препоръчва от изчислителна гледна точка, особено при $n > 2$. В сила са т.нар. *формули на Крамер*[2]

$$x_i = \frac{\det(A(b\colon i))}{\det(A)}, \ i = 1, \ldots, n,$$

където с $A(b\colon i)$ е означена матрицата A, в която i–ят стълб $a_{\bullet i}$ е заменен с вектора b. Действително, за всяко фиксирано $1 \leq i \leq n$ уравнението (8.2) е равносилно на матричното уравнение

$$AI_n(x\colon i) = A(b\colon i) \tag{8.5}$$

(докажете!). Това матрично уравнение се свежда до $n-1$ векторни тъждества $a_{\bullet k} = a_{\bullet k}$, $k \neq i$, и едно векторно уравнение $Ax = b$, което е уравнението (8.2). Като вземем детерминанта от двете страни на матричното уравнение (8.5) получаваме

$$\det(A)\det(I_n(x\colon i)) = \det(A(b\colon i)).$$

[2] Г. Крамер, швейцарски математик, 1704-1752.

Остава да забележим, че $\det(I_n(x\colon i)) = x_i$. Това е така защото в i–тия ред на матрицата $I_n(x\colon i)$ всички елементи са равни на нула с изключение може би на i–тия елемент, който е x_i. Оттук

$$\det(I_n(x\colon i)) = x_i \det(J),$$

където J е матрицата, получена от $I_n(x\colon i)$ след премахване на i–тия ред и i–тия стълб. Но тогава $J = I_{n-1}$ и $\det(J) = 1$. Следователно

$$x_i \det(A) = \det(A(b\colon i)),\ i = 1, \ldots, n. \tag{8.6}$$

При $\det(A) \neq 0$ зависимостите (8.6) дават формулите на Крамер. Впрочем, когато уравнението е съвместимо, формулите (8.6) са валидни във вида $0 = 0$ и при $\det(A) = 0$.

8.4 Числено решаване

Уравнението (8.2) може да се реши числено като се използва ешалонната форма (глава 6). Ще отбележим, че при численото решаване на уравнението обикновено не се прави проверка нито за съвместимост, нито за регулярност. В хода на самото решаване се установява дали уравненението има решение и дали то е единствено.

Да разгледаме за определеност случая на квадратна матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Стартира се процедура за редукция на A в ешалонна форма, като левите елементарни преобразувания (разместване на редове и прибавяне на ред, умножен с число, към друг ред) се прилагат и върху вектора b.

Да предположим първо, че матрицата A е особена. Тогава по време на редукцията матрицата A и векторът b непременно ще добият вида

$$A = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$

където матрицата $B \in \mathbb{F}^{r\times n}$ е от пълен редови ранг $r < n$, а $c = [c_i] \in \mathbb{F}^r$. В този случай уравнението е съвместимо точно когато $d = 0$. То обаче не е регулярно и общото му решение

$$\Xi = x_0 + \mathrm{Ker}(B)$$

е $(n-r)$–мерно линейно многообразие. Тук $x_0 = [x_{0,i}]$ е някое частно решение на уравнението $Bx = c$.

Тъй като матрицата $B = [b_{i,j}]$ е в ешалонна форма, такова решение се намира лесно. Нека $(1, i_1), \ldots, (r, i_r)$ са позициите на водещите (ненулеви) елементи в B. Тогава можем да изберем

$$x_{0,i_k} = \frac{c_{i_k}}{b_{k,i_k}},\ k = 1, \ldots, r$$

и

$$x_{0,j} = 0,\ j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}.$$

Нека сега предположим, че матрицата A е неособена. Тогава след редукцията тя се трансформира в горно триъгълната матрица $T = [t_{i,j}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$ с ненулеви диагонални елементи $t_{i,i}$, а векторът b се трансформира в някакъв нов вектор $h = [h_i] \in \mathbb{F}^n$. Така получаваме уравнението

$$Tx = h. \tag{8.7}$$

То се решава с с т.нар. *обратно заместване.* От последното n–то скаларно уравнение $t_{n,n}x_n = h_n$ в (8.7) получаваме

$$x_n = \frac{h_n}{t_{n,n}}.$$

Така намереното x_n се замества в предпоследното $(n-1)$–во уравнение

$$t_{n-1,n-1}x_{n-1} + t_{n-1,n}x_n = h_{n-1},$$

откъдето

$$x_{n-1} = \frac{h_{n-1} - t_{n-1,n}x_n}{t_{n-1,n-1}}.$$

Аналогично от i–тото скаларно получаваме

$$x_i = \frac{h_i - t_{i,i+1}x_{i+1} - \cdots - t_{i,n}x_n}{t_{i,i}},$$

където елементите $x_n, \ldots, x_{i+1}$ на x са вече определени на предишните $n-i+1$ стъпки (напомняме, че на k–тата стъпка се пресмята елементът x_{n-k+1}).

Описаният метод се нарича *метод на Гаус.*[3] Впрочем, подобна схема за решаване на уравнението при $n = 3$ е описана в китайски ръкопис от преди 3000 години.

Съществуват и други методи за решаване на уравнението (8.2). Нека например матрицата A е неособена и $A = QR$ е нейната Q декомпозиция (глава 13). Тук матрицата Q е ортогонална в реалния случай и унитарна в комплексния случай, а матрицата R е горно тръгълна с ненулеви диагонални елементи. Като умножим двете страни на уравнението с Q^* при отчитане на равенството $Q^*Q = I_n$ получаваме

$$Rx = g, \ g := Q^*b.$$

Тъй като матрицата R е горно триъгълна, това уравнение се решава с обратно заместване точно както и уравнението (8.7).

8.5 Задача за най–малки квадрати

Когато уравнението (8.2) няма решение, се поставя т.нар. *задача за най–малки квадрати (ЗНМК).* Тя се състои в намиране на вектор x, който минимизира евклидовата норма на *остатъчния вектор* $r := Ax - b$,

$$\|Ax - b\|_2 \to \min!$$

[3] К. Гаус, немски математик, 1777-1855.

Тази задача, означавана като

$$Ax \simeq b, \tag{8.8}$$

винаги има решение. Когато уравнението (8.2) има решение, то съвпада с решението на ЗНМК (8.8).

Наименованието на задачата идва от факта, че фактически се минимизира сумата от квадратите на елементите на остатъчния вектор r.

Решението на ЗНМК е нееднствено точно когато $\operatorname{rank}(A) < n$. В този случай общото решение на ЗНМК е $x_0 + \operatorname{Ker}(A)$, където x_0 е някое частно решение. Ако обаче поставим допълнителното условие

$$\|x\|_2 \to \min!, \tag{8.9}$$

то решението на ЗНМК е единствено. Това решение се нарича още *нормално псевдорешение* на уравнението (8.2). Нормалното псевдорешение се дава от

$$x_0 = A^\dagger b,$$

където $A^\dagger \in \mathbb{F}^{n\times m}$ е т.нар. *псевдообратна матрица* (по Мур–Пенроуз) на матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, вж. глава 13.

Решението x на ЗНМК удовлетворява уравнението

$$A^*Ax = A^*b \tag{8.10}$$

с квадратна матрица $A^*A \in \mathbb{F}^{m\times m}$. На практика формирането на матрицата A^*A се избягва поради опасност от грешки от закръгляне и взаимно унищожение при извършване на пресмятанията в крайна аритметика.

Ще докажем (8.10) от противното. Да допуснем, че (8.10) не е изпълнено. Тогава $y := A^*r \neq 0$. Оттук впрочем следва и $z := Ay \neq 0$, тъй като $r^*z = \|y\|^2 > 0$. Но тогава имаме

$$\left\| r - \frac{\|y\|^2}{\|z\|^2} z \right\|^2 = \|r\|^2 - \frac{\|y\|^4}{\|z\|^2} < \|r\|^2. \tag{8.11}$$

Последното неравенство противоречи на факта, че x е решение на ЗНМК и следователно (8.10) е изпълнено.

8.6 Упражнения

Упражнение 8.1 Нека е дадено уравнението (8.2) при $m = n$. Покажете, че уравнението има ненулево решение точно когато матрицата A е особена.

Упражнение 8.2 Разгледайте уравнението

$$(A + \lambda B)x = b + \lambda c,$$

където $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $b, c \in \mathbb{F}^n$ и $\lambda \in \mathbb{F}$ е параметър. Опишете алгоритъм за установяване на съвместимост и регулярност на това уравнение.

Упражнение 8.3 Пресметнете колко умножения (деления), събирания (изваждания) и сравнения са необходими за решаване на уравнението $Ax = b$ с неособена $n \times n$ матрица A по метода на Гаус с частичен избор на водещ елемент.

Упражнение 8.4 Докажете (8.10) и (8.11).

Упражнение 8.5 Нелинейните матрични уравнения и техните решения са сложни математически обекти с понякога доста неочаквани свойства. Покажете, че решенията на уравнението $X^2 = I_2$ в $\mathbb{F}^{2\times 2}$ са четирите матрици I_2, $-I_2$, $\mathrm{diag}(1,-1)$ и $\mathrm{diag}(-1,1)$, както и матриците $X(u,v)$ от двупараметричното семейство от вида

$$X(u,v) := \begin{bmatrix} u & v \\ (1-u^2)/v & -u \end{bmatrix},$$

където $u \in \mathbb{F}$ и $0 \neq v \in \mathbb{F}$ са произволни параметри.

Упражнение 8.6 Намерете всички решения $X \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ на нелинейните матрични уравнения $X^2 = \mathrm{diag}(a,b)$ (случаят $a = b$ и в частност $a = b = 0$ не се изключва) и $X^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Какво е общото решение на последното уравнение при $a = 0$?

Упражнение 8.7 Разгледайте ЗНМК

$$\begin{aligned} &\|CXD - B\|_{\mathrm{F}} \to \min!, \\ &\|X\|_{\mathrm{F}} \to \min!, \end{aligned}$$

където матриците $C \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $D \in \mathbb{R}^{q\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ са известни от експериментални данни, а $X \in \mathbb{R}^{p\times q}$ е търсената матрица. Като използвате резултатите от глава 14 покажете, че тази задача се свежда до ЗНМК (8.8), (8.9), където

$$x := \mathrm{vec}(X) \in \mathbb{R}^{pq}, \ b := \mathrm{vec}(B) \in \mathbb{R}^{mn}, \ A := D^\top \otimes C \in \mathbb{R}^{nm\times pq}$$

и с $\otimes$ е означено умножението по Кронекер, вж. глава 14. При задачи от този тип обикновено е изпълнено $mn > pq$.

Глава 9

ЧУСТВИТЕЛНОСТ НА ЛИНЕЙНИТЕ УРАВНЕНИЯ

В тази глава е изучена чуствителността на решението на линейните алгебрични уравнения относно смущения в данните. Интуитивно, една задача е силно чуствителна, ако малки изменения в данните водят до големи изменения в резултата (тук понятията „малко" и „голямо" са в контекста на конкретната изчислителна среда). Решаването на такава задача с помощта на компютър може да е свързано с големи грешки от закръгляне.

Изучаването на чуствителността на изчислителните задачи се извършва с техниките на т.нар. *пертурбационен анализ* (или *анализ на смущенията*).

Изобщо, изследването на чуствителността на дадена задача е важно поради поне три основни причини:

- Чуствителността е важна вътрешна характеристика на задачата и в това си качество представлява чисто теоретичен интерес.

- Математическите модели на реалните физически явления и процеси обикновено се характеризират със структурни и параметрични неточности (или неопределености), например дължащи се на грешки от измервания. Така на практика изследователят разполага не с фиксиран модел, а със семейство от модели, зависещо от неопределеностите. Познаването на чуствителността на задачата позволява да се намерят границите, в които се намира „истинското" решение, като функция на неопределеностите в данните.

- Когато задачата се решава в машинна аритметика с помощта на числено устойчив алгоритъм, изчисленото решение се оказва близко до точното решение на близка задача. В този случай на основа на чуствителността на задачата могат да се изведат оценки за грешката в изчисленото решение [2, 9, 8].

Горните разсъждения показват необходимостта от анализ на чуствителността на изчислителните задачи, възникващи в научната и инженерната практика.

9.1 Уравнения с неособена матрица

Навсякъде в този раздел с $\|\cdot\|$ е означена произволна норма в $\mathbb{F}^n$ или съответната матрична норма в $\mathbb{F}^{n\times n}$.

Да разгледаме линейното алгебрично уравнение с квадратна неособена матрица

$$Ax = b,$$

където $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ $(\det(A) \neq 0)$ и $b \in \mathbb{F}^n$ са данните и $x \in \mathbb{F}^n$ е търсеното решение. Тъй като матрицата A е неособена, решението е единствено и може да се запише във вида

$$x = A^{-1}b.$$

Ще подчертаем, че това е един формален запис, от който не следва, че сме успели да пресметнем решението. Нещо повече, обикновено при намиране на решението обратната матрица изобщо не се формира (освен ако не ни е необходима за някаква друга цел).

По-нататък ще предполагаме, че $b \neq 0$, откъдето $x \neq 0$.

Да предположим, че данните са подложени на смущения

$$A \to A + \delta A,\ \ b \to b + \delta b,$$

където смущението δA е толкова малко, че

$$\|A^{-1}\|\,\|\delta A\| < 1.$$

Последното неравенство гарантира неособеност на смутената матрица $A + \delta A$. Да означим с $x + \delta x$ решението на смутеното уравнение с данни $A + \delta A$, $b + \delta b$, т.е.,

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b.$$

Нашата цел ще бъде да намерим оценка за относителното изменение в решението

$$\delta_x := \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

като функция на относителните изменения в данните

$$\delta_A := \frac{\|\delta A\|}{\|A\|},\ \ \delta_b := \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Важна роля в тези оценки играе т.нар. *относително число на обусловеност* на матрицата A относно обръщане, което се дефинира като

$$c_A = \mathrm{cond}(A) := \|A\|\,\|A^{-1}\|.$$

Числото на обусловеност се дефинира и за произволна матрица A (не непременно квадратна, но от пълен ранг) както следва

$$c_A = \mathrm{cond}(A) := \|A\|\,\|A^\dagger\|,$$

където $A^\dagger$ е псевдообратната матрица на матрицата A (глава 13).

С отчитане на равенството $Ax = b$ от смутеното уравнение следва

$$A\delta x + \delta A x + \delta A \delta x = \delta b$$

и

$$\delta x = A^{-1}\delta b - A^{-1}\delta A x - A^{-1}\delta A \delta x.$$

Оттук

$$\begin{aligned} \|\delta x\| &\leq \|A^{-1}\delta b\| + \|A^{-1}\delta A x\| + \|A^{-1}\delta A \delta x\| \\ &\leq \|A^{-1}\|\,\|\delta b\| + \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|x\| + \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\,\|\delta x\|. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Да положим

$$\gamma = \gamma(A, b) := \frac{\|b\|}{\|A\|\,\|x\|} = \frac{\|b\|}{\|A\|\,\|A^{-1}b\|}.$$

Тъй като $\|b\| \leq \|A\|\,\|x\|$, то $\gamma \leq 1$. От друга страна

$$\gamma = \frac{\|b\|}{\|A\|\,\|A^{-1}b\|} \geq \frac{\|b\|}{\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\|b\|} = \frac{1}{c_A}.$$

Така за величината γ имаме оценките

$$\frac{1}{c_A} \leq \gamma \leq 1,$$

които са достижими.

Разделяме двете страни на неравенството (9.1) с $\|x\|$ с отчитане на направените полагания и получаваме

$$\begin{aligned} \delta_x &\leq \|A^{-1}\|\,\|A\|\gamma\,\delta_b + \|A^{-1}\|\,\|\delta A\| + \|A^{-1}\|\,\|\delta A\|\delta_x \\ &= c_A\gamma\,\delta_b + c_A\delta_A + c_A\delta_A\delta_x. \end{aligned}$$

Тъй като по предположение $c_A\delta_A < 1$, то окончателно получаваме

$$\delta_x \leq c_A\frac{\gamma\,\delta_b + \delta_A}{1 - c_A\delta_A} \leq c_A\frac{\delta_b + \delta_A}{1 - c_A\delta_A}.$$

Ако относителните смущения δ_b, δ_A в данните са ограничени от някаква достатъчно малка константа η (в практическите пресмятания η е от порядъка на мярката на закръгляне eps на машинната аритметика), то

$$\delta_x \leq (1+\gamma)c_A\eta + O(\eta^2) \leq 2c_A\eta + O(\eta^2),$$

където с $O(\eta^2)$ са означени малките от втори и по-висок ред относно η. Така величините $(1+\gamma)c_A$ или $2c_A$ могат да се приемат като относителни числа на обусловеност на задачата за решаване на линейно алгебрично уравнение с неособена матрица A.

9.2 Точност на решението

Има едно полезно евристично правило за приблизително определяне на броя на верните значещи цифри в решението на уравнението $Ax = b$ с неособена матрица A, изчислено в машинна аритметика с мярка на закръгляне eps (обикновено $\text{eps} \approx 10^{-16}$). Преди всичко необходимо е да е изпълнено неравенството

$$c_A \text{eps} < 1$$

(в противен случай в решението може да няма вярна значеща цифра), а е желателно да имаме даже

$$c_A \text{eps} \ll 1.$$

В този случай може да се очаква, че в изчисленото решение $\widehat{x}$ ще има около

$$-\log_{10}(c_A \text{eps})$$

верни значещи десетични цифри.

Практиката е показала, че за умерено голям размер n на матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ в уравнението $Ax = b$ и при използване на метода на Гаус, абсолютната грешка в изчисленото решение може да се оцени от

$$\|x - \widehat{x}\|_1 \leq \text{eps}\, n^2 c_{1,A} \|\widehat{x}\|_1,$$

където

$$c_{1,A} := \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1.$$

При използване на QR декомпозицията $A = QR$ на матрицата A за решаване на уравнението $Ax = b$ чрез обратно заместване, съответната грешка е

$$\|x - \widehat{x}\| \leq 10\, \text{eps}\, n^{1.5} c_A \|\widehat{x}\|,\ \ c_A = \|A\|\, \|A^{-1}\|.$$

Понякога е необходимо решението да се получи с много голяма точност, например търси се решение $\widetilde{x}$, приблизително равно на най–близкия до точното решение x машинен вектор. За целта се използва *итерационно уточняване* на решението $\widehat{x}$, получено по метода на Гаус или по метода на QR декомпозицията.

Да означим $x^{(1)} = \widehat{x}$. Тогава абсолютната грешка $\delta^{(1)} := x - x^{(1)}$ удовлетворява уравнението

$$A\delta^{(1)} = r^{(1)},$$

където $r^{(1)} := b - Ax^{(1)}$. Пресметнатото на свой ред решение $\widehat{\delta}^{(1)}$ се използва за уточнаване на решението по формулата

$$x^{(2)} := x^{(1)} + \widehat{\delta}^{(1)},$$

като $x^{(2)}$ е по принцип по–добро приближение към точното решение x в сравнение с $x^{(1)}$.

Този процес на построяване на последователни приближения $x^{(k)}$ към x продължава докато от някое p нататък последователните приближения започнат да осцилират в относителна eps–околност на $\widehat{x}^{(p)}$. Векторът $\widehat{x}^{(p)}$ обикновено е в относителна eps–околност на точното решение.

9.3 Задача за най-малки квадрати

В този раздел с $\|\cdot\|$ е означена 2–нормата в $\mathbb{F}^n$ или в $\mathbb{F}^{n\times n}$.

Да разгледаме задачата за най-малки квадрати (ЗНМК)

$$Ax \cong b,$$

където $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{F}^m$ са данните, образуващи един $m(n+1)$–мерен вектор, чиито елементи са елементите на A и b. Търси се решение $x \in \mathbb{F}^n$ с минимална норма $\|x\|$, което минимизира нормата $\|Ax - b\|$ на остатъчния вектор $Ax - b$. Така x е решение на оптимизационната задача

$$\begin{aligned} \|Ax - b\| &\to \min, \\ \|x\| &\to \min. \end{aligned}$$

Да означим с $r \le \min\{m, n\}$ ранга на матрицата A и нека

$$\sigma_1 \ge \cdots \ge \sigma_r$$

са положителните сингулярни стойности на A (глава 13). Ще разглеждаме само интересния случай $A \ne 0$ и $b \ne 0$, когато решението x на ЗНМК е различно от нула. Действително, ако $A = 0$ или $b = 0$, то ЗНМК има тривиално решение $x = 0$.

Ще напомним, че задачата за минимизиране само на величината $\|Ax - b\|$ има единствено решение x точно когато $r = n$. В този случай няма защо да минимизираме нормата $\|x\|$. Ако обаче $r < n$, то векторите, които минимизират $\|Ax - b\|$, образуват $(n-r)$–мерно линейно многообразие с направляващо подпространство $\mathrm{Ker}(A)$. Тогава именно допълнителното изискване $\|x\| \to \min!$ води до единственост на решенията.

Нека δA и δb са смущения в A и b и

$$\delta_A = \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}, \quad \delta_b = \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

Ще предполагаме, че за смущението δA е в сила неравенството

$$\|A^\dagger\|\,\|\delta A\| = \|A\|\,\|A^\dagger\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = c_A\delta_A = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}\delta_A < 1$$

и

$$\mathrm{rank}(A + \delta A) \le r.$$

Според последното неравенство смущението δA е структурирано така, че не се допуска нарастване на ранга на смутената матрица $A + \delta A$ в сравнение с този на A. От друга страна неравенството $c_A \delta_A < 1$ гарантира, че рангът на $A + \delta A$ не е по-малък от този на A. Така че двете неравенства за δA фактически означават, че $\mathrm{rank}(A + \delta A) = r$. Последното равенство за съжаление не може да се избегне, защото ако се окаже, че $\mathrm{rank}(A + \delta A) > r$, то смущението в решението на ЗНМК не може да се оцени разумно отгоре.

Нека $x + \delta x$ е решението на смутената ЗНМК с данни $A + \delta A$, $b + \delta b$. Тогава за относителното смущение

$$\delta_x = \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

в решението е в сила оценката

$$\delta_x \leq k_A \delta_A + k_b \delta_b,$$

където

$$\begin{aligned}
k_A &:= \frac{c_A}{1 - c_A \delta_A} \left(2 - c_A \delta_A + c_A \frac{\|Ax - b\|}{\|A\| \, \|x\|} \right) \\
&< \frac{c_A}{1 - c_A \delta_A} \left(2 + c_A \frac{\|Ax - b\|}{\|A\| \, \|x\|} \right), \\
k_b &:= \frac{c_A}{1 - c_A \delta_A} \frac{\|b\|}{\|A\| \, \|x\|}.
\end{aligned}$$

Тази оценка е в сила в общия случай, при всякакви съотношения между числата m, n и r. В този смисъл тя е и песимистична. При определени съотношения между горните три числа, например когато матрицата A е от пълен ранг $r = \min\{m, n\}$, оценката може да се подобри.

Случаят $m = n = r$ вече беше разгледан в предишния раздел.

Да разгледаме останалите два основни подслучая, когато матрицата A е правоъгълна и от пълен ранг.

В най–важния за практиката случай на ЗНМК с $r = n < m$ е достатъчно да поискаме само изпълнение на неравенството $c_A \delta_A < 1$, тъй като тогава автоматически имаме $\mathrm{rank}(A + \delta A) = r$. Тук имаме оценката

$$\delta_x \leq k_A \delta_A + k_b \delta_b,$$

където

$$\begin{aligned}
k_A &:= \frac{c_A}{1 - c_A \delta_A} \left(1 + c_A \frac{\|Ax - b\|}{\|A\| \, \|x\|} \right), \\
k_b &:= \frac{c_A}{1 - c_A \delta_A} \frac{\|b\|}{\|A\| \, \|x\|}.
\end{aligned}$$

Да разгледаме накрая случая $r = m < n$. В сила е оценката

$$\delta_x \leq k_A \delta_A + k_b \delta_b,$$

където

$$k_A := \sqrt{2}\, k_b, \quad k_b := \frac{c_A}{1 - c_A \delta_A}.$$

9.4 Упражнения

Упражнение 9.1 Формирайте множества от (псевдо)случайни квадратни и правоъгълни матрици и пресметнете числата им на обусловеност в матричната норма $\| \cdot \|_{\mathrm{F}}$ и операторните норми $\| \cdot \|_p$, $p = 1, 2, \infty$. За целта използвайте диалоговите системи SYSLAB или MATLAB, вж. [10].

Упражнение 9.2 Формирайте матрицата на Хилберт[1] $H = [h_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с елементи

$$h_{i,j} = \frac{1}{i + j - 1}.$$

Изследвайте числото на обусловеност на H като функция на реда n на матрицата.

[1] Д. Хилберт, немски математик, 1862-1943.

Глава 10

СОБСТВЕНА СТРУКТУРА НА МАТРИЦА

10.1 Определения

Нека $A = [a_{i,j}]$ е реална или комплексна $n \times n$ матрица. Числото λ се нарича *собствена стойност* (или *характеристично число*) на матрицата A когато съществува ненулев n–вектор x, такъв че

$$Ax = \lambda x. \tag{10.1}$$

В този случай векторът x се нарича *десен собствен вектор* (или накратко *собствен вектор*) на матрицата A, съответстващ на собствената стойност λ. Двойката (λ, x) се нарича *собствена двойка* на матрицата A. Множеството от всички собствени двойки се нарича *собствена структура* на матрицата A. Ще отбележим, че е възможно матрицата A да е реална, но собствената стойност λ и/или съответният собствен вектор x да са комплексни.

Като умножим двете страни на равенството (10.1) отляво с x^{H} получаваме $x^{\mathrm{H}}Ax = \lambda\|x\|^2$, откъдето следва израз за собствената стойност чрез собствения вектор:

$$\lambda = \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{\|x\|^2}.$$

Ще напомним, че тук

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$$

е евклидовата норма на вектора x.

Както ще видим след малко, собствените стойности на една матрица се определят еднозначно. Обаче собственият вектор, съответстващ на дадена собствена стойност, не е определен еднозначно. Така например когато x е собствен вектор, то и векторът ax, където a е ненулева константа, също е собствен вектор. Възможно е също една матрица да има няколко линейно независими собствени вектора, съответстващи на една и съща собствена стойност. Често се приема, че собствените вектори са нормирани в смисъл, че $\|x\| = 1$.

Пример 10.1 Да разгледаме единичната матрица I_n. Ако (λ, x) е собствена двойка на I_n, то

$$I_n x = x = \lambda x,$$

откъдето $(1 - \lambda)x = 0$. Тъй като $x \neq 0$, то по необходимост $\lambda = 1$. Така единичната матрица има единствена собствена стойност, равна на 1, и всеки ненулев вектор е неин собствен вектор. В частност матрицата I_n има n на брой линейно независими собствени вектори.

Ще напомним, че дори когато матрицата A е реална, някоя нейна собствена стойност λ може да е комплексна. В този случай съответният собствен вектор x също е комплексен. Изобщо, от всичките осем комбинации за A, λ и x в зависимост от това коя величина е реална и коя комплексна, не е възможна само комбинацията на реална матрица A, комплексна собствена стойност λ и реален собствен вектор x. Също така, ако A и λ са реални, то x е или реален, или чисто имагинерен вектор. Поради това ще се условим, че собственият вектор е реален когато и матрицата и съответната собствена стойност са реални.

Някои автори запазват термините собствена стойност и собствен вектор само за случая, когато $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ и $\lambda \in \mathbb{F}$, $x \in \mathbb{F}^n$. При тази терминология една реална матрица може да има само реални собствени стойности и спектърът на някои матрици, например $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, се оказва празно множество. Впрочем, всички тези терминологични проблеми отпадат, ако се договорим да разглеждаме реалните матрици като комплексни матрици с нулева имагинерна част[1].

От горните определения следва, че ако (λ, x) е собствена двойка на матрицата A, то

$$(\lambda I_n - A)x = 0. \tag{10.2}$$

Тъй като $x \neq 0$, то необходимо е матрицата $\lambda I_n - A$ да е особена. Действително, в противен случай уравнението (10.2) ще има единствено решение, което би трябвало да е $x = 0$, а ние знаем, че $x \neq 0$. Следователно

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda I_n - A) = 0. \tag{10.3}$$

Това уравнение се нарича *характеристично уравнение* на матрицата A. То е алгебрично уравнение от n–та степен и може да се запише във вида

$$\lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n = 0,$$

[1] Съвременните системи за компютърни пресмятания и без това работят в комплексна аритметика и процедират с реалните и комплексни матрици по един и същи начин.

където c_k е сумата на главните минори от ред k на матрицата A. В частност

$$\begin{aligned} c_1 &= \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}, \\ c_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}a_{j,i}), \\ c_n &= \det(A). \end{aligned}$$

Полиномът χ_A се нарича *характеристичен полином* на матрицата A.

Пример 10.2 За случая на 2×2 матрица $A = [a_{i,j}]$ имаме

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$$

и следователно

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{1,1} + a_{2,2} \pm \sqrt{(a_{1,1} - a_{2,2})^2 + 4a_{1,2}a_{2,1}}}{2}.$$

Тъй като $\det(M^\top) = \det(M)$ и $\det(M^{\mathrm{H}}) = \overline{\det(M)}$, то матриците A и $A^\top$ имат еднакви собствени стойности, а на всяка собствена стойност λ на матрицата A отговаря собствена стойност $\overline{\lambda}$ на ермитово спрегнатата матрица A^{H}. В частност, ако една реална матрица има комплексна собствена стойност λ, то тя има и собствена стойност $\overline{\lambda}$.

Векторът y се нарича *ляв собствен вектор* на матрицата A, ако съществува число λ, такова че

$$y^{\mathrm{H}} A = \lambda y^{\mathrm{H}}.$$

Оттук

$$A^{\mathrm{H}} y = \overline{\lambda} y.$$

Следователно y е собствен вектор на матрицата A^{H}, а λ е собствена стойност на матрицата A.

Може да се покаже, че матрицата $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ удовлетворява характеристичното си уравнение в смисъл, че

$$\chi_A(A) := A^n - c_1 A^{n-1} + \cdots + (-1)^n c_n I_n = 0.$$

Горната зависимост е известна като *теорема на Кели–Хамилтън* (А. Кели, английски математик, 1821–1895; У. Хамилтън, ирландски математик, 1805–1865).

От друга страна за дадена матрица $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ може да съществува полином от степен, по–ниска от n, който се анулира от матрицата A. Полиномът μ_A от най–ниска степен и със старши коефициент 1, такъв че

$$\mu_A(A) = 0,$$

се нарича *минимален полином* на матрицата A. Минималният полином винаги е делител на характеристичния полином.

Пример 10.3 Характеристичният полином на матрицата I_n е $(\lambda - 1)^n$, докато минималният полином на тази матрица е $\lambda - 1$.

Пример 10.4 Характеристичният полином на матрицата

$$N_n := \begin{bmatrix} 0_{(n-1)\times 1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1\times(n-1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

е λ^n и е равен на нейния минимален полином.

Кратността на собствената стойност λ на матрицата A като корен на нейния характеристичен полином се нарича *алгебрична кратност* на λ. Броят на линейно независимите собствени вектори, съответстващи на собствената стойност λ, се нарича *геометрична кратност* на λ.

Съгласно една важна теорема в алгебрата всяко алгебрично уравнение от n–та степен с реални или комплексни коефициенти има n корена (между тях може да има кратни). Следователно характеристичното уравнение (10.3) на матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ има n корена $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ с отчитане на алгебричната им кратност. Наборът $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ се нарича *спектър* на матрицата A и се бележи със $\mathrm{spect}(A)$. Ако различните помежду си собствени стойности са $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ с алгебрични кратности $k_1, \ldots, k_m$, то спектърът на A се състои от k_1 на брой екземпляра λ_1, k_2 на брой екземпляра λ_2 и т.н. до k_m на брой екземпляра λ_m. Така например спектърът на единичната матрица I_n се състои от n екземпляра на числото 1. Впрочем, под спектър на матрица някои автори разбират само множеството от различни помежду си нейни собствени стойности.

Така характеристичният полином на матрицата A може да се запише във вида

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i) = \prod_{j=1}^{m}(\lambda - \lambda_j)^{k_j}.$$

Числото

$$\mathrm{rad}(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{spect}(A)\} \geq 0$$

се нарича *спектрален радиус* на квадратната матрица A. Това е радиусът на най–малкия централен кръг в комплексната равнина, който съдържа собствените стойности на A.

Матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ се наричат *подобни*, ако съществува неособена матрица $R \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че $AR = RB$. Подобните матрици A и $B = R^{-1}AR$ имат еднакви характеристични полиноми и в частност еднакви спектри. Действително, имаме

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(R^{-1}(\lambda I_n - A)R) \\ &= \det(R^{-1})\det(\lambda I_n - A)\det(R) \\ &= \det(\lambda I_n - A) = \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Обратното може и да не е вярно, т.е., две матрици с еднакви характеристични полиноми могат и да не са подобни. Действително, нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е ненулева горно триъгълна матрица с нулев диагонал, а $B = 0_{n\times n}$. Тогава $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \lambda^n$. Но A не може да е подобна на $0_{n\times n}$, тъй като единствената подобна на нулевата матрица е тя самата.

Нека числото λ е собствена стойност на подобните матрици A и $B = R^{-1}AR$. Тогава, ако x и y са съответните собствени вектори на A и B, то можем да приемем, че $x = Ry$. Действително, нека $Ax = \lambda x$ и $By = \lambda y$. Оттук получаваме $R^{-1}ARy = \lambda y$ и $A(Ry) = \lambda(Ry)$. Следователно можем да изберем $x = Ry$.

Диагоналните матрици $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ притежават редица приятни свойства, например

- $\mathrm{spect}(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$;
- ако e_k е k–тият стълб на единичната матрица I_n, то (λ_k, e_k) е собствена двойка на матрицата A;
- рангът на A е равен на броя на ненулевите числа λ_k;
- $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Следователно интерес представлява да се определи при какви условия една квадратна матрица може да се приведе в диагонална форма чрез преобразувания на подобие.

Матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ се нарича *диагонализируема* (или *матрица с проста структура*) когато тя е подобна на диагонална матрица.

Необходимо и достатъчно условие за диагонализируемост на една матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е тя да притежава система от n линейно независими собствени вектори. Действително, да предположим, че A има n линейно независими собствени вектори $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{F}^n$. Тогава можем така да номерираме собствените стойности λ_i на A, че да е изпълнено $Ar_i = \lambda_i r_i$, $i = 1, \ldots, n$ (естествено, не е необходимо собствените стойности да са различни помежду си). Да образуваме неособената матрица $R := [r_1, \ldots, r_n] \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Имаме

$$\begin{aligned} R^{-1}AR &= R^{-1}[Ar_1, \ldots, Ar_n] = R^{-1}[\lambda_1 r_1, \ldots, \lambda_n r_n] \\ &= R^{-1}[r_1, \ldots, r_n]\Lambda = R^{-1}R\Lambda = \Lambda, \end{aligned}$$

където $\Lambda := \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Обратно, да предположим, че съществува неособена матрица

$$R = [r_1, \ldots, r_n] \in \mathbb{F}^{n\times n},$$

такава че матрицата $\Lambda := R^{-1}AR$ е диагонална, т.е., $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогава $AR = R\Lambda$, откъдето

$$[Ar_1, \ldots, Ar_n] = [\lambda_1 r_1, \ldots, \lambda_n r_n]$$

и

$$Ar_i = \lambda_i r_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Тъй като матрицата R е неособена, то нейните стълбове r_i формират система от n линейно независими вектори на матрицата A.

Горното доказателство не трябва да се схваща като практически алгоритъм за диагонализация на матрица. Действително, ключов момент тук е определянето на собствените стойности на матрицата, което на свой ред може да се окаже трудна изчислителна задача.

Достатъчно условие за диагонализируемост на матрицата A е нейните собствени стойности да са различни помежду си. По–долу ние ще докажем един по–общ резултат.

Нека $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ са различни помежду си собствени стойности на матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ $(m \leq n)$, на които съответстват собствените вектори $r_1, \ldots, r_m \in \mathbb{F}^n$. Тогава системата от вектори $\mathcal{R} := \{r_1, \ldots, r_m\}$ е линейно независима. Действително, случаят $m = 1$ е тривиален. Нека следователно $m > 1$ и да допуснем, че системата $\mathcal{R}$ е линейно зависима. Тогава съществува нетривиална и равна на нула линейна комбинация с най–малък брой $p \leq m$ ненулеви коефициенти, например

$$\alpha_1 r_1 + \cdots + \alpha_p r_p = 0. \tag{10.4}$$

Очевидно $p > 1$, тъй като в противен случай от $\alpha_1 r_1 = 0$ и $\alpha_1 \neq 0$ би следвало $r_1 = 0$, което е невъзможно. Като умножим двете страни на (10.4) с A получаваме втора линейна комбинация

$$\alpha_1 A r_1 + \cdots + \alpha_p A r_p = \alpha_1 \lambda_1 r_1 + \cdots + \alpha_p \lambda_p r_p = 0. \tag{10.5}$$

Умножаваме равенството (10.4) с λ_p и го изваждаме от (10.5), което дава

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_p) r_1 + \cdots + \alpha_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p) r_{p-1} = 0.$$

Тъй като коефициентите $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ са различни от нула и $\lambda_i \neq \lambda_p$, $i = 1, \ldots, p-1$, то последната линейна комбинация е нетривиална и е с $p-1$ на брой ненулеви коефициенти. Но това противоречи на предположението, че най–малкият брой на ненулевите коефициенти в равните на нула линейни комбинации на вектори от $\mathcal{R}$ е p. Полученото противоречие показва, че системата $\mathcal{R}$ е линейно независима.

Матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ се наричат *едновременно диагонализируеми* когато съществува неособена матрица $R \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че матриците $R^{-1}AR$ и $R^{-1}BR$ са диагонални. Матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *комутират* когато $AB = BA$.

Може да се покаже, че ако матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ са диагонализируеми, то те комутират точно когато те са едновременно диагонализируеми. Този резултат се обобщава за произволен брой матрици.

Дори когато произведенията AB и BA на две матрици A и B са определени, те в общия случай са различни. Независимо от това в сила е един забележителен факт, а именно, че ненулевите (а възможно и някои от нулевите) собствени стойности на матриците AB и BA съвпадат. По–точно, в сила е следният резултат.

Нека $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ и $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, където за определеност сме приели $m \le n$. Тогава матрицата $BA \in \mathbb{F}^{n \times n}$ има същите собствени стойности (с отчитане на алгебричните им кратности) като матрицата $AB \in \mathbb{F}^{m \times m}$, плюс още $n - m$ нулеви собствени стойности, т.е.,

$$\chi_{BA}(\lambda) = \lambda^{n-m} \chi_{AB}(\lambda).$$

В частност, ако $m = n$ и една от матриците A или B е неособена, то матриците AB и BA са подобни.

Действително, матрицата

$$R := \begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{(m+n)\times(m+n)}$$

е неособена ($\det(R) = 1$) и

$$R^{-1} := \begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

(докажете!). Освен това непосредствено се проверява, че

$$MR = RN = \begin{bmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{bmatrix},$$

където

$$M := \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix}, N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}.$$

Следователно матриците M и N от ред $m+n$ са подобни. Но собствените стойности на M са тези на AB заедно с n нули, а собствените стойности на N са тези на BA заедно с m нули. Тъй като собствените стойности на M и N съвпадат, първото твърдение е доказано.

За да докажем второто нека за определеност матрицата A е неособена. Тогава

$$AB = A(BA)A^{-1},$$

т.е., матриците AB и BA са подобни.

Нека е дадена матрицата $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Подпространството $L \subset \mathbb{F}^n$ се нарича *инвариантно относно* A (или накратко A–*инвариантно*), ако за всеки вектор $x \in L$ е изпълнено $Ax \in L$, т.е., ако $AL \subset L$, където

$$AL := \{Ax : x \in L\}.$$

Нека сега λ е собствена стойност на матрицата $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Множеството

$$L(A, \lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\} \subset \mathbb{C}^n$$

се нарича *собствено подпространство* на матрицата A, асоциирано със собствената стойност λ. Така за всеки ненулев вектор $x \in L(A, \lambda)$ двойката (λ, x) е собствена двойка на матрицата A.

От това определение следва, че

$$L(A, \lambda) = \mathrm{Ker}(\lambda I_n - A).$$

Лесно се вижда, че всяко собствено подпространство на матрицата A е A–инвариантно (обратното може и да не е вярно).

Ясно е също, че размерността на $L(A, \lambda)$ е равна на геометричната кратност на собствената стойност λ. Геометричната кратност на λ не надвишава съответната алгебрична кратност, но може да е по–малка. Ако за някое $\lambda \in \mathrm{spect}(A)$ геометричната кратност е по–малка от алгебричната, то матрицата A се нарича *дефектна.*[2] Съответно когато за всяко $\lambda \in \mathrm{spect}(A)$ геометричната кратност на λ е равна на алгебричната, матрицата A е *недефектна.* Лесно се вижда, че матрицата A е диагонализируема точно когато тя е недефектна.

Когато всяка собствена стойност на A има единична геометрична кратност (независимо от алгебричната) матрицата A се нарича *проста.* Една матрица е едновременно проста и диагонализируема когато тя има различни помежду си собствени стойности.

10.2 Форма на Шур

Когато $n \times n$ матрицата A е комплексна, или когато тя е реална, но има комплексни собствени стойности, съществува унитарна $n \times n$ матрица U, такава че матрицата $S := U^{\mathrm{H}} A U$ е горна триъгълна. Матрицата S се нарича *форма на Шур* (или накратко *Шур форма*) на матрицата A. Стълбовете на унитарната матрица U образуват *Шур база* на пространството $\mathbb{F}^n$ относно матрицата A. Диагоналните елементи $s_{i,i}$ на S са собствените стойности на матрицата A.

Когато матрицата A е реална и има само реални собствени стойности, матрицата U може да се избере реална ортогонална. В този случай и Шур формата S на A също е реална.

Когато матрицата A е реална, но някои (или всички) от собствените й стойности са комплексни, може да се построи т.нар. *реална Шур форма* $S^{\mathbb{R}} = V^{\top} A V$ на A. Тук матрицата V е реална ортогонална, а матрицата $S^{\mathbb{R}}$ е реална блочно триъгълна с 1×1 или 2×2 блокове по диагонала. Блоковете с размер 2×2 отговарят на двойките комплексно спрегнати собствени стойности на A. Съвременните методи за пресмятане на собствената структура на матрица се основават на привеждането й във форма на Шур, вж. също глава 13.

10.3 Форма на Жордан

Нека са дадени матриците $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Един важен въпрос е да се установи дали тези матрици са подобни, т.е., дали съществува матрица $R \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{F})$, такава че $AR = RB$.

[2] Да не се бърка с битовия смисъл на думата!

Отговор на този въпрос се дава от т.нар. жорданова[3] канонична форма на квадратна матрица.

Жорданов блок от ред 1 от първи тип $J_1(\lambda)$ със собствена стойност $\lambda \in \mathbb{F}$ е самото число λ,

$$J_1(\lambda) = \lambda \in \mathbb{F}.$$

Жорданов блок от ред $m > 1$ *от първи тип* $J_m(\lambda)$ със собствена стойност $\lambda \in \mathbb{F}$ е матрицата

$$J_m(\lambda) = \lambda I_m + N_m = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^m.$$

Тук елементите на матрицата

$$N_m := \begin{bmatrix} 0_{(m-1)\times 1} & I_{m-1} \\ 0 & 0_{1\times(m-1)} \end{bmatrix}$$

са равни на 1 в позиции $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, m-1$, и на нула в останалите позиции. Матрицата N_m е нилпотентна като $N_m^m = 0$.

Жордановият блок от първи тип е комплексна матрица при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ и реална матрица при $\lambda \in \mathbb{R}$.

Жорданов блок от ред 2 от втори тип $K_2(\alpha, \beta)$ с комплексни собствени стойности $\lambda = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda} = \alpha - \imath\beta \in \mathbb{C}$, където числата α и $\beta \neq 0$ са реални, е матрицата

$$K_2(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Жорданов блок от ред $2m > 2$ *от втори тип* $K_{2m}(\alpha, \beta)$ с комплексни собствени стойности $\lambda = \alpha + \imath\beta \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda} = \alpha - \imath\beta \in \mathbb{C}$, където числата α и $\beta \neq 0$ са реални, е матрицата

$$\begin{aligned} K_{2m}(\alpha, \beta) &= I_m \otimes K_2(\alpha, \beta) + N_m \otimes I_2 \\ &= \begin{bmatrix} K_2(\alpha, \beta) & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2(\alpha, \beta) & I_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_2(\alpha, \beta) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m\times 2m}. \end{aligned}$$

Жорданова матрица е всяка блок–диагонална матрица с жорданови блокове по диагонала.

[3] К. Жордан, френски математик, 1838-1922.

Блоковете на една блочно диагонална матрица могат да се разместват по диагонала с помощта на пермутационни преобразувания на подобие. Нека например

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2) \in \mathbb{F}^{n\times n},\ J_1 \in \mathbb{F}^{m\times m},\ J_m \in \mathbb{F}^{(n-m)\times(n-m)}.$$

Тогава

$$P^\top JP = \mathrm{diag}(J_2, J_1),$$

където

$$P := \begin{bmatrix} 0_{m\times(n-m)} & I_m \\ I_{n-m} & 0_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}.$$

Поради горния факт се приема, че две жорданови матрици са неразличими (или еквивалентни) когато те се отличават само по подредбата на диагоналните си блокове.

Жорданова матрица, която съдържа само блокове от първи тип, може да се дефинира и като двудиагонална матрица, която има само единици и/или нули по наддиагонала си.

Един фундаментален факт в спектралната теория на матриците е, че **всяка матрица е подобна на жорданова матрица.**

Нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Неособената матрица $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че $U^{-1}AU$ е жорданова матрица, се нарича *модална матрица* на матрицата A. Когато матрицата A има пълен набор (т.е., n на брой) собствени вектори, те формират модална матрица.

Модалната матрица не е еднозначно определена. Така например, ако матрицата A с пълен набор собствени вектори има модална матрица U, то тя има и модални матрици D_1U и UD_2, където D_1, D_2 са произволни диагонални неособени матрици. Дори ако поискаме стълбовете на U да имат единична дължина, то наред с U модална матрица ще бъде и матрицата UD, където D е диагонална унитарна матрица.

Нека е дадена комплексната матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, която има m различни помежду си собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ с алгебрични кратности $k_1, \ldots, k_m$. Нека собствената стойност λ_i участва в $p_i \geq 1$ жорданови блока от първи тип с размери съответно $k_{i,1} \leq \cdots \leq k_{i,p_i}$. Тогава имаме

$$k_{i,1} + \cdots + k_{i,p_i} = k_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

В частност, геометричната кратност на собствената стойност λ_i е p_i. Вижда се също, че минималният полином на матрицата A в този случай е

$$\mu_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{k_{j,p_j}}.$$

Числата m, $p_1, \ldots, p_m$ и $k_{i,j}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p_i$, се наричат *аритметични инварианти* на матрицата A относно действието на подобие

$$A \mapsto U^{-1}AU,\ U \in \mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$$

на общата линейна група $\mathcal{GL}(n, \mathbb{C})$. *Алгебричните инварианти* относно това действие са собствените стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ на матрицата.

В зависимост от вида на матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ (комплексна или реална) и на нейния спектър $\mathrm{spect}(A)$ (съдържащ или не комплексни елементи) са възможни следните случаи.

1. Матрицата е комплексна или реална и има (поне една) комплексна собствена стойност. Тогава тя има комплексна жорданова форма с блокове от първи тип, като модалната матрица може и да е реална.

2. Матрицата е комплексна или реална, но има само реални собствени стойности. Тогава тя има реална жорданова форма с блокове от първи тип, като модалната матрица може и да е реална.

3. Матрицата е реална, но има (поне две) комплексни собствени стойности. Тогава тя има реална жорданова форма с блокове от втори тип, като модалната матрица в този случай е реална.

10.4 Квазижорданова форма

Жордановата форма е елегантно математическо средство за описание на действието на подобие на групата на неособените матрици в множеството на квадратните матрици. Тя обаче има някои особености, които я правят неудобна от практическа гледна точка и особено при извършване на пресмятания в крайна аритметика. Работата е там, че жордановата форма J на матрицата A може да е силно чуствителна или даже прекъсната като функция на A.

Модалната матрица U (или нейната обратна матрица U^{-1}), такава че $U^{-1}AU = J$, също може да е прекъсната като функция на A. Нещо повече, дори когато е непрекъсната, модалната матрица (или нейната обратна) може да е много чуствителна като функция на A. В частност възможно е малки изменения в A да доведат до големи изменения в U или U^{-1}. Също така числото на обусловеност

$$\mathrm{cond}(U) : \|U\| \, \|U^{-1}\|$$

на матрицата на модалната матрица U може да е много голямо и това да доведе до големи грешки от закръгляне при извършване на пресмятанията в машинна аритметика.

Тези явления са илюстрирани в следващите примери за матрици $A = A(\varepsilon)$ с размер 2×2, зависещи от реалния параметър $\varepsilon \geq 0$. Във всички случаи модалната матрица $U = [u_1, u_2]$ е избрана или с единични стълбове ($\|u_1\|_2 = \|u_2\|_2 = 1$), или, когато това не е възможно, с единичен първи стълб ($\|u_1\|_2 = 1$). Когато матрицата A е жорданова, за определеност е прието $U = I_2$.

Пример 10.5 Нека е дадена матрицата

$$A(\varepsilon) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

зависеща от реалния параметър $\varepsilon \geq 0$. При $\varepsilon > 0$ жордановата форма на $A(\varepsilon)$ е

$$J(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix},$$

а модалната матрица $U(\varepsilon)$ и нейната обратна матрица $U^{-1}(\varepsilon)$ са

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{\varepsilon} & -\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}, \; U^{-1}(\varepsilon) = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1/\sqrt{\varepsilon} \\ 1 & -1/\sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}.$$

За числата на обусловеност на модалната матрица в спектралната норма и нормата на Фробениус имаме съответно

$$\mathrm{cond}_2(U(\varepsilon)) = \sqrt{\frac{2}{(1+\varepsilon)}} \max\left\{\sqrt{\varepsilon}, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right\}, \; \mathrm{cond}_{\mathrm{F}}(U(\varepsilon)) = \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Вижда се, че обратната на модалната матрица не е ограничена при $\varepsilon \to 0$, като числото на обусловеност на модалната матрица има поведението на $1/\sqrt{\varepsilon}$.

Да видим сега какво става при $\varepsilon = 0$. Тук матрицата $A(0)$ е в жорданова форма,

$$A(0) = J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Така имаме

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J(\varepsilon) = 0_{2\times 2} \neq J(0)$$

и следователно матричната функция $\varepsilon \mapsto J(\varepsilon)$ е прекъсната в точката $\varepsilon = 0$.

Модалната матрица $U(\varepsilon)$ е ограничена, непрекъсната при $\varepsilon > 0$ и с прекъсване от първи род при $\varepsilon = 0$, като

$$\lim_{\varepsilon \to 0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq U(0) = I_2.$$

Обратната матрица $U^{-1}(\varepsilon)$ е неограничена при $\varepsilon \to 0$, непрекъсната при $\varepsilon > 0$ и с прекъсване от втори род при $\varepsilon = 0$.

Пример 10.6 Нека е дадена матрицата

$$A(\varepsilon) := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \; \varepsilon \geq 0.$$

При $\varepsilon > 0$ жордановата форма на $A(\varepsilon)$ е

$$J(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix},$$

а модалната матрица $U(\varepsilon)$ и нейната обратна матрица $U^{-1}(\varepsilon)$ са

$$U(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & (1+\varepsilon^2)^{-1/2} \\ 0 & \varepsilon(1+\varepsilon^2)^{-1/2} \end{bmatrix}, \; U^{-1}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & -1/\varepsilon \\ 0 & (1+\varepsilon^2)^{1/2}/\varepsilon \end{bmatrix}.$$

За числата на обусловеност на модалната матрица в спектралната норма и нормата на Фробениус имаме

$$\mathrm{cond}_2(U(\varepsilon)) = \frac{1+(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}, \; \mathrm{cond}_{\mathrm{F}}(U(\varepsilon)) = \frac{2(1+\varepsilon^2)^{1/2}}{\varepsilon}.$$

Обратната матрица $U^{-1}(\varepsilon)$ не е ограничена при $\varepsilon \to 0$, като числото на обусловеност на $U(\varepsilon)$ има поведението на $2/\varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ матрицата $A(0)$ е в жорданова форма,

$$A(0) = J(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Така имаме

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J(\varepsilon) = 0_{2\times 2} \neq J(0)$$

и матричната функция $\varepsilon \mapsto J(\varepsilon)$ е прекъсната в $\varepsilon = 0$.

От горните два примера читателят може да остане с впечатлението, че модалната матрица $U(\varepsilon)$ винаги е ограничена при $\varepsilon \to 0$, докато нейната обратна може и да не е. Това не е така и следващият прост пример го показва.

Пример 10.7 Нека е дадена матрицата

$$A(\varepsilon) := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \; e \geq 0.$$

При $\varepsilon > 0$ жордановата форма на $A(\varepsilon)$ е

$$J(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Модалната матрица и нейната обратна съответно са

$$U(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1/\varepsilon \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; U^{-1}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Числата на обусловеност на модалната матрица в спектралната норма и нормата на Фробениус са

$$\mathrm{cond}_2(U(\varepsilon)) = \max\left\{\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right\}, \; \mathrm{cond}_{\mathrm{F}}(U(\varepsilon)) = \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}.$$

Модалната матрица $U(\varepsilon)$ не е ограничена при $\varepsilon \to 0$, като числата на обусловеност на $U(\varepsilon)$ имат поведението на $1/\varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ матрицата $A(0)$ е в жорданова форма,

$$A(0) = J(0) = 0_{2\times 2}.$$

Така имаме

$$\lim_{\varepsilon\to 0} J(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq J(0)$$

и матричната функция $\varepsilon \mapsto J(\varepsilon)$ е прекъсната в $\varepsilon = 0$.

Една от причините за високата чуствителност на жордановата матрица и на съответната модална матрица е наличието именно на единици (или на каквито и да е отнапред фиксирани ненулеви константи) по наддиагонала на жордановите блокове от първи тип, или на единици по наднаддиагонала при блоковете от втори тип. Тази именно чуствителност е довела до въвеждане на понятието квазижорданова матрица.

Квазижордановата матрица се отличава от жордановата по това, че при блоковете от първи (съответно втори) тип по наддиагонала (съответно по наднаддиагонала) ненулевите елементи са произволни[4] положителни елементи.

Пример 10.8 Матриците

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.001 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & \pi & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

са квазижорданови. В съответните жорданови матрици елементите 0.001 и π, π щяха да са равни на 1.

За разлика от жордановата форма J на матрицата A , която е определена с точност до подреждането на блоковете по диагонала на J, квазижордановата форма не е определена еднозначно при матриците, които нямат пълен набор собствени вектори.

Пример 10.9 Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 2+\imath & 4 \\ -1 & -2+\imath \end{bmatrix}$$

има жорданова форма $J = U^{-1}AU$ и модална матрица както следва:

$$J = \begin{bmatrix} \imath & 1 \\ 0 & \imath \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Същевременно A има безбройно много квазижорданови форми, параметризирани чрез параметъра ω,

$$\widetilde{J} = J = \begin{bmatrix} \imath & \omega \\ 0 & \imath \end{bmatrix}, \ 0 \neq \omega \in \mathbb{C}.$$

[4]не непременно равни на 1

Този пример показва и това, че при една комплексна матрица с комплексен спектър, която не е в жорданова форма, модалната матрица може да е реална.

Квазижордановите форми и съответните им (квази) модални матрици не са толкова чуствителни към смущения.

Пример 10.10 Матрицата $A(\varepsilon)$ от пример 10.9 се привежда в квазижорданова форма

$$\widetilde{J}(\varepsilon) = \widetilde{U}^{-1}A(\varepsilon)\widetilde{U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

за всяко $\varepsilon \geq 0$. В този случай квазижордановата форма $\widetilde{J}$ и (квази) модалната матрица U (независеща от ε) са непрекъснати функции за разлика от жордановата матрица и модалната матрица.

Пример 10.11 Матрицата

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} \lambda & \omega \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \ \omega \in \mathbb{C},$$

има жорданова форма

$$J(\omega) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \ \omega \neq 0$$

и $J(0) = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda)$ при $\omega = 0$. Модалната матрица с минимално число на обусловеност е

$$U(\omega) = \mathrm{diag}(1, 1/\omega), \ \omega \neq 0$$

и $U(0) = I_2$. Имаме

$$U^{-1}(\omega) = \mathrm{diag}(1, \omega), \ \omega \neq 0$$

и $U^{-1}(0) = I_2$. Следвателно

$$\mathrm{cond}_2(A(\omega)) = \max\left\{\omega, \frac{1}{\omega}\right\}, \ \mathrm{cond}_{\mathrm{F}}(A(\omega)) = \omega + \frac{1}{\omega}, \ \omega \neq 0$$

и

$$\mathrm{cond}_2(A(0)) = 1, \ \mathrm{cond}_{\mathrm{F}}(A(0)) = 2.$$

Виждаме, че жордановата форма $J(\omega)$ е прекъсната в точката $\omega = 0$, а числата на обусловеност на модалната матрица са неограничени при $\omega \to 0$ и $\omega \to \infty$. Същевременно квазижордановата форма е непрекъсната (самата матрица $A(\omega)$ е в квазижорданова форма), а (квази) модалната матрица винаги е I_2 и е отлично обусловена.

10.5 Обобщена собствена структура

Едно обобщение на понятието собствена структура на матрица е както следва. Нека са дадени матриците A и B с еднакъв размер над полето $\mathbb{F}$. Семейството

$$\{\lambda B - A : \lambda \in \mathbb{C}\},$$

където λ е параметър, се нарича *матричен сноп.* Така матричният сноп може да се разглежда като права в съответното линейно пространство от матрици, минаваща през матрицата $-A$ и с направляваща матрица B. Когато това не води до недоразумения, матричният сноп се означава и като $\lambda B - A$.

Матричният сноп е *квадратен* когато участващите в него матрици са квадратни. По–нататък ще разглеждаме само квадратни снопове.

Матричният сноп е *регулярен* когато съществува $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, такова че матрицата $\lambda_0 B - A$ е обратима. С други думи снопът не е регулярен точно когато е изпълнено тъждеството

$$\det(\lambda B - A) \equiv 0. \tag{10.6}$$

Ако $B = I$ полиномът $\det(\lambda B - A)$ е характеристичният полином на матрицата A и неговите корени са собствените стойности на A.

Нека $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Задачата за намиране на число λ и на ненулев вектор x, такива че

$$Ax = \lambda Bx,$$

се нарича *обобщена задача за собствена структура.* Съответно числото λ се нарича *обобщена собствена стойност*, а векторът x – *обобщен собствен вектор.*

Обобщените собствени стойности са корените на *обобщеното характеристично уравнение*

$$\det(\lambda B - A) = 0, \tag{10.7}$$

което е алгебрично уравнение от степен $r := \operatorname{rank}(B) \leq n$.

Матричните снопове $\lambda B - A$ и $\lambda D - C$ се наричат *еквивалентни*, ако съществуват неособени $n \times n$ матрици U и V, такива че

$$C = UAV,\ D = UBV.$$

Тези снопове са *унитарно* (съответно *ортогонално*) еквивалентни, ако матриците U и V са унитарни (съответно ортогонални). Еквивалентните снопове имат еднакви обобщени собствени стойности.

Когато матрицата B е неособена можем да запишем

$$B^{-1}Ax = \lambda x$$

и следователно в този случай обобщената собствена структура е собствената структура на матрицата $B^{-1}A$. В частност съществуват n на брой обобщени собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (с отчитане на алгебричната им кратност). При този подход матрицата B^{-1} не се формира, а матрицата $X := B^{-1}A$ се пресмята с помощта на n линейни алгебрични уравснения

$$Bx_{\bullet j} = a_{\bullet j}$$

за стълбовете $x_{\bullet j}$ на X, където $a_{\bullet j}$ са стълбовете на A.

Впрочем, дори когато матрицата B е неособена, пресмятането на обобщената собствена структура на снопа чрез собствената структура на матрицата $B^{-1}A$ на практика се избягва поради опасността на внасяне на неприсъщи на първоначалната задача грешки от закръгляне.

Така стандартната и обобщената задачи за собствена структура имат някои общи свойства, но са възможни и съществени различия.

Първо, възможно е да имаме *сингулярен сноп*, при който е изпълнено тъждеството (10.6). Тогава всяко число λ може да се разглежда като обобщена собствена стойност.

Второ, ако снопът е регулярен, но матрицата B е особена от ранг r, полиномът $\det(\lambda B - A)$ е от степен $r < n$. В този случай се приема, че освен корените на обобщеното характеристично уравнение (10.7), които са r на брой с отчитане на алгебричната им кратност, обобщената задача има и $n - r$ *безкрайни* собствени стойности. Действително, да запишем обобщената задача като

$$Bx = \frac{1}{\lambda} Ax$$

и нека $0 \neq x \in \mathrm{Ker}(B)$, т.е., $Bx = 0$. Имаме $Ax \neq 0$, тъй като в противен случай щеше да е изпълнено $Ax = Bx = 0$ и снопът би бил сингулярен. Тогава

$$0 = \frac{1}{\lambda} Ax$$

и следва да приемем $1/\lambda = 0$, откъдето $\lambda = \infty$.

С помощта на неособени преобразувания

$$A \mapsto UAV, \ B \mapsto UBV$$

матричният сноп може да се приведе в т.нар. *канонична форма на Кронекер* [4], която е обобщение на каноничната форма на Жордан. От каноничната форма на Кронекер непосредствено се получава и обобщената собствена структура. Тази форма, обаче, рядко се използва за практически пресмятания поради високата си чуствителност спрямо изменения в данните A, B.

Чрез унитарни преобразувания

$$A \mapsto C = [c_{i,j}] = UAV, \ B \mapsto D = [d_{i,j}] = UBV \tag{10.8}$$

където $U, V \in \mathcal{U}(n)$, матриците A и B могат да се приведат едновременно в горна триъгълна форма, наречена *обобщена форма на Шур*. Тази форма се пресмята с помощта на т.нар. *QZ алгоритъм* на Молър и Стюърт, предложен през 1973 г. При това обобщената задача за собствени стойности се свежда до

$$\det(\lambda D - C) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda d_{i,i} - c_{i,i}) = 0.$$

Оттук получаваме системата от уравнения

$$d_{i,i}\lambda = c_{i,i},\ i = 1, \ldots, n,$$

където поради регулярността на снопа са изпълнени неравенствата

$$|d_{i,i}| + |c_{i,i}| > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Следователно обобщените собствени стойности се определят от

$$\lambda_i := \begin{cases} c_{i,i}/d_{i,i}, & d_{i,i} \neq 0, \\ \infty, & d_{i,i} = 0 \end{cases},\ i = 1, \ldots, n.$$

Често се използва и следната симетрична формулировка на обобщената задача за собствени стойности. Търсят се числа λ и μ, които не са равни едновременно на нула, както и ненулев вектор x, такива че

$$\mu Ax = \lambda Bx.$$

Тук опитът да наречем съответната двойка $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ обобщена собствена стойност се натъква на проблема за неединственост. Действително, за всяко $k \neq 0$ двойката $(k\lambda, k\mu)$ също би била обобщена собствена стойност. Поради това понятието обобщена собствена стойност на двойката матрици (A, B) се дефинира като множеството на всички $(k\lambda, k\mu)$, когато k пробягва множеството $\mathbb{F}\backslash\{0\}$. Така дефинираната обобщена собствена стойност е инвариантна относно трансформации от вида (10.8).

Връзката на тази симетрична формулировка (при която се уеднаквяват ролите на матриците A и B) с първоначалната формулировка на обобщената задача за собствени стойности е както следва. Крайната собствена стойност λ при първоначалната формулировка отговаря на двойката $(\lambda, 1)$ при симетричната формулировка, а безкрайната собствена стойност – на двойката $(1, 0)$.

При симетричната формулировка говорим за двойка матрици вместо за матричен сноп. Така например двойката $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е *сингулярна* когато равенството $\det(\mu A - \lambda B) = 0$ е изпълнено за всички $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. В противен случай двойката е *регулярна.* С други думи двойката е регулярна точно когато съществуват числа $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{F}$, такива че $\det(\mu_0 A - \lambda_0 B) \neq 0$. Очевидно има смисъл да разглеждаме обобщената задача за собствени стойности само за регулярни двойки защото при сингулярните матрични двойки всяко множество $(k\lambda, k\mu)$ (когато k пробягва $\mathbb{F}$) е обобщена собствена стойност. В този случай ненулевият вектор се нарича *обобщен десен собствен вектор* (или само *обобщен собствен вектор*) на двойката (A, B).

Ненулевият вектор y, удовлетворяващ уравнението

$$\mu y^{\mathrm{H}} A = \lambda y^{\mathrm{H}} B,$$

се нарича *обобщен ляв собствен вектор* на двойката (A, B).

10.6 Чуствителност и числени аспекти

Да разгледаме първо задачата за намиране на собствената структура на матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Когато матрицата A има само прости (различни помежду си) собствени стойности

$$\lambda_i = \lambda_i(A) \neq \lambda_j = \lambda_j(A),\ i \neq j,$$

то съществуват n линейно независими десни $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n$ и леви $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}^n$ собствени вектори на A, като

$$x_i^{\mathrm{H}} y_j = y_j^{\mathrm{H}} x_i = 0,\ j \neq i. \tag{10.9}$$

Тук собствените вектори x_i, y_i съответстват на собствената стойност λ_i.

Ще приемем също, че собствените вектори са нормирани,

$$\|x_i\|_2 = \|y_i\|_2 = 1,\ i = 1, \ldots, n.$$

Нека δA е смущение в матрицата A и нека $\lambda_i + \delta\lambda_i$, $x_i + \delta x_i$ и $y_i + \delta y_i$ са съответно собствените стойности, десните собствени вектори и левите собствени вектори на смутената матрица $A + \delta A$. Тук собствените вектори на смутената матрица могат и да не са нормирани.

Анализът на чуствителността на собствената структура на матрицата A се състои в намиране на оценки за смущенията

$$|\delta\lambda_i|,\ \|\delta x_i\|_2,\ \|y_i\|_2,\ i = 1, \ldots, n,$$

като функция на смущението

$$\alpha := \|\delta A\|_2.$$

От зависимостите

$$(A + \delta A)(x_i + \delta x_i) = (\lambda_i + \delta\lambda_i)(x_i + \delta x_i),\ i = 1, \ldots, n,$$

следва

$$(A - \lambda_i I_n)\delta x_i + \delta A(x_i + \delta x_i) = \delta\lambda_i(x_i + \delta x_i),\ i = 1, \ldots, n. \tag{10.10}$$

Като умножим отляво всяко от равенствата (10.10) с y_i^{H} получаваме

$$y_i^{\mathrm{H}} \delta A(x_i + \delta x_i) = \delta\lambda_i y_i^{\mathrm{H}}(x_i + \delta x_i),\ i = 1, \ldots, n. \tag{10.11}$$

Аналогично, умножаването отляво с y_j^{H} при $j \neq i$ дава

$$y_j^{\mathrm{H}}(A - \lambda_i I_n)\delta x_i + y_j^{\mathrm{H}} \delta A(x_i + \delta x_i) = \delta\lambda_i y_j^{\mathrm{H}} \delta x_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{10.12}$$

Векторите $x_1, \ldots, x_n$ са линейно независими и следователно всяко от смущенията δx_i може да се представи като линейна комбинация

$$\delta x_i = t_{i,1} x_1 + \cdots t_{i,n} x_n. \tag{10.13}$$

Умножаваме (10.13) отляво с y_j^{H} при отчитане на (10.9) и получаваме

$$y_j^{\mathrm{H}} \delta x_i = t_{i,j} y_j^{\mathrm{H}} x_i. \tag{10.14}$$

Аналогично, след умножаване на (10.13) с A получаваме

$$A\delta x_i = t_{i,1} A x_1 + \cdots + t_{i,n} A x_n = t_{i,1} \lambda_1 x_1 + \cdots + t_{i,n} \lambda_n x_n.$$

След още едно умножение отляво на това равенство с y_j^{H} стигаме до

$$y_j^{\mathrm{H}} A \delta x_i = t_{i,j} \lambda_j y_j^{\mathrm{H}} x_j. \tag{10.15}$$

Ако означим

$$\gamma_i := \langle x_i, y_i \rangle = y_i^{\mathrm{H}} x_i \tag{10.16}$$

и заместим (10.14), (10.15) в (10.11), (10.12), получаваме

$$\gamma_i (1 + t_{i,i}) \delta \lambda_i = y_i^{\mathrm{H}} \delta A (x_i + \delta x_i), \ i = 1, \ldots, n \tag{10.17}$$

и

$$t_{i,j} \gamma_j (\lambda_i - \lambda_j + \delta \lambda_i) = y_i^{\mathrm{H}} \delta A (x_i + \delta x_i), \ j \neq i. \tag{10.18}$$

Така за всяко фиксирано i имаме системата (10.17), (10.18) от n уравнения за $n+1$ неизвестни

$$\delta \lambda_i, \ t_{i,1}, \ldots, t_{i,n}.$$

За определеност ще изберем $t_{i,i} = 0$. В резултат получаваме

$$t_{i,j} = \frac{y_j^{\mathrm{H}} \delta A (x_i + \delta x_i)}{\gamma_j (\lambda_i - \lambda_j + \delta \lambda_i)}, \ j \neq i, \tag{10.19}$$

където

$$\delta \lambda_i = \frac{y_i^{\mathrm{H}} \delta A (x_i + \delta x_i)}{\gamma_i}. \tag{10.20}$$

В първо приближение приемаме, че числото $\alpha = \|\delta A\|_2$ е малко и в (10.19), (10.20) пренебрегваме членовете от втори и по–висок ред относно α. В резултат получаваме

$$|\delta \lambda_i| \leq C_{\lambda_i} \|\delta A\|_2 \tag{10.21}$$

и

$$|t_{i,j}| \leq \frac{C_{\lambda_i}}{|\lambda_i - \lambda_j|} \|\delta A\|_2, \ j \neq i. \tag{10.22}$$

Тук

$$C_{\lambda_i} := \frac{1}{|\gamma_i|} = \frac{1}{|y_i^{\mathrm{H}} x_i|} \tag{10.23}$$

е т.нар. *абсолютно спектрално число на обусловеност* на собствената стойност λ_i.

Въз основа на (10.22) имаме още

$$\|\delta x_i\|_2 \le \|\delta A\|_2 \sum_{j\neq i} \frac{C_{\lambda_j}}{|\lambda_i - \lambda_j|}. \tag{10.24}$$

Неравенствата (10.21) и (10.24) са известните асимптотични оценки от първи ред за чуствителността на собствената структура на матрица с прост спектър. Недостатък на тези оценки е обстоятелството, че пренебрегнатите членове, макар и малки от втори ред относно $\|\delta A\|_2$, могат да се окажат от порядъка на линейните членове за конкретни задачи.

Една нелокална нелинейна оценка на чуствителността на собствената структура на матрица с прост спектър се получава както следва (вж. напр. [9]).

За фиксирано $1 \le i \le n$ да разгледаме уравнението

$$\xi = \varphi_i(\xi, \alpha),\ \ \alpha := \|\delta A\|_2, \tag{10.25}$$

където

$$\varphi_i(\xi, \alpha) := \alpha(1+\xi) \sum_{j\neq i} \frac{C_{\lambda_j}}{|\lambda_i - \lambda_j| - C_{\lambda_j}\alpha(1+\xi)}.$$

Съществува $\alpha_i > 0$, такова че за някое ξ_i^0 е изпълнено

$$\xi_i^0 = \varphi_i(\xi_i^0, \alpha_i)$$

и

$$1 = \varphi'_{i,\xi}(\xi_i^0, \alpha_i).$$

При $0 < \alpha < \alpha_i$ уравнението (10.25) има два положителни корена $\xi_{i,1}$, $\xi_{i,2}$, а при $\alpha = \alpha_i$ – един двоен положителен корен ξ_i^0. Да предположим, че $\alpha \le \alpha_i$ и нека

$$\xi_{i,1} = \rho_i(\alpha)$$

е по–малкият положителен корен на уравнението. Тогава са в сила нелинейните нелокални пертурбационни оценки

$$\begin{aligned} \|\delta x_i\| &\le \rho_i(\alpha), \\ |\delta\lambda_i| &\le C_{\lambda_i}\alpha(1+\rho_i(\alpha)),\ \ \alpha \le \alpha_i. \end{aligned} \tag{10.26}$$

Недостатък на оценките (10.26) е фактът, че величината $\rho_i(\alpha)$ се получава като решение на сложното дробно–линейно уравнение (10.25) (по отношение на търсения корен въпросното уравнение е еквивалентно на алгебрично уравнение от n–та степен). С цената на известно влошаване на оценките задачата може да се реши като дясната страна на уравнението (10.25) се мажорира от израза

$$\psi_i(\xi, \alpha) := \frac{\alpha C_i(1+\xi)}{\omega_i - \alpha C_{\lambda_i}(1+\xi)},$$

където

$$C_i := \sum_{j\neq i} C_{\lambda_j}, \ \omega_i := \min\{|\lambda_i - \lambda_j| : j \neq i\}.$$

Да разгледаме уравнението

$$\xi = \psi_i(\xi, \alpha).$$

То има положителен корен

$$\overline{\xi}_i := \frac{2C_i\alpha}{\beta_i(\alpha) + \sqrt{\beta_i^2(\alpha) - 4C_i\gamma_i\alpha^2}},$$

където

$$\beta_i(\alpha) := \omega_i - \alpha(C_i + \gamma_i),$$

когато

$$\alpha \leq \overline{\alpha}_i := \frac{\omega_i}{(\sqrt{C_{\lambda_i}} + \sqrt{C_i}}.$$

Оттук получаваме оценките

$$\begin{aligned} \|\delta x_i\| &\leq \overline{\rho}_i(\alpha), \\ |\delta\lambda_i| &\leq C_{\lambda_i}\alpha(1 + \overline{\rho}_i(\alpha)), \ \alpha \leq \overline{\alpha}_i. \end{aligned} \tag{10.27}$$

Нека сега предположим, че матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е диагонализируема, т.е., че съществува неособена матрица $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че матрицата $X^{-1}AX$ е диагонална. Тук, за разлика от предходния случай, матрицата A може да има и кратни собствени стойности. Нека δA е произволно смущение в A. Тогава за всяка собствена стойност $\lambda(A + \delta A)$ на $A + \delta A$ съществува собствена стойност $\lambda(A)$ на A, такава че

$$|\lambda(A + \delta A) - \lambda(A)| \leq \mathrm{cond}_2(X)\|\delta A\|_2,$$

където

$$\mathrm{cond}_2(X) := \|X\|_2\|X^{-1}\|_2.$$

Когато матрицата A е нормална ($A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$) и в частност комплексна ермитова ($A^{\mathrm{H}} = A$) или реална симетрична ($A^{\top} = A$), то X може да се избере като унитарна матрица, при което $\|X\|_2 = \|X^{-1}\|_2 = 1$, $\mathrm{cond}_2(X) = 1$ и

$$|\lambda(A + \delta A) - \lambda(A)| \leq \|\delta A\|_2.$$

Забележително тук е, че матрицата δA може и да не е нормална, а нейната норма може да е прозволно голяма.

Ако и двете матрици A и δA са нормални, то техните собствени стойности могат да се номерират така, че

$$|\delta\lambda_i| = |\lambda_i(A + \delta A) - \lambda_i(A)| \leq \|\delta A\|_2, \ i = 1, \ldots, n$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} |\delta\lambda_i|^2 \leq \|\delta A\|_2^2.$$

Това неравенство е известно като *теорема на Хофман и Виланд.*

Когато матрицата A има жорданов блок с размер $p > 1$ и собствена стойност λ, то смутената матрица $A + \delta A$ може да има собствена стойност $\lambda + \delta\lambda$, където

$$|\delta\lambda| = C\|\delta A\|_2^{1/p}.$$

Така спектърът на матрица с кратни собствени стойности може да е извънредно чувствителен спрямо изменение в данните.

Да разгледаме пресмятането на собствените стойности на матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ чрез привеждане в Шур форма с помощта на QR алгоритъма. Оказва се, че пресметнатата по този начин Шур форма е точна за леко смутена матрица $A + \delta A$, където

$$\|\delta A\|_{\mathrm{F}} \leq 2n^2 \|A\|_{\mathrm{F}} \mathrm{eps}.$$

Тъй като $\|\delta A\|_2 \leq \|\delta A\|_{\mathrm{F}}$, то получаваме, че в първо приближение простата собствена стойност λ на A се пресмята като $\overline{\lambda}$ с абсолютна грешка

$$|\overline{\lambda} - \lambda| \leq 2n^2 C_\lambda \|A\|_{\mathrm{F}} \mathrm{eps}.$$

Когато собствената стойност λ е p–кратна, в изчислената собствена стойност $\overline{\lambda}$ могат да се очакват грешки до порядъка на

$$|\overline{\lambda} - \lambda| \leq C \left(2n^2 \|A\|_{\mathrm{F}} \mathrm{eps}\right)^{1/p}.$$

Аналогични оценки са в сила при пресмятане на обобщените собствени стойности на двойка матрици чрез привеждането им в обобщена форма на Шур чрез QZ алгоритъма.

10.7 Упражнения

Упражнение 10.1 Покажете, че матрицата A е особена точно когато $0 \in \mathrm{spect}(A)$.

Упражнение 10.2 Нека β е полином с коефициенти от $\mathbb{F}$, а матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ има собствена двойка (λ, x). Покажете, че матрицата $\beta(A)$ има собствена двойка $(\beta(\lambda), x)$. В частност, за всяко $k \in \mathbb{N}$ матрицата A^k има собствена стойност λ^k.

Упражнение 10.3 Нека неособената матрица A има собствена стойност λ. Покажете, че матрицата A^{-1} има собствена стойност $1/\lambda$.

Упражнение 10.4 Нека сумата от елементите на всеки ред на квадратната матрица A е равна на едно и също число λ. Покажете, че матрицата A има собствена стойност λ. Упътване: разгледайте вектора $[1, \ldots, 1]^\top$ като кандидат за собствен вектор на A.

Упражнение 10.5 Квадратната матрица A се нарича:

- *идемпотентна*, ако $A^2 = A$;
- *нилпотентна*, ако съществува $k \in \mathbb{N}$, такова че $A^k = 0$.

Покажете, че спектърът на всяка идемпотентна матрица съдържа само числата 0 и/или 1, а спектърът на всяка нилпотентна матрица съдържа само числото 0.

Упражнение 10.6 Докажете, че спектърът на блочно горно триъгълната матрица

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \times & \dots & \times \\ 0 & A_2 & \dots & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_p \end{bmatrix}$$

с квадратни блокове по диагонала, е обединение (с отчитане на кратността) на спектрите на матриците $A_1, \dots, A_p$.

Упражнение 10.7 Намерете спектъра на $n \times n$ матрицата, всички елементи на която са равни на 1.

Упражнение 10.8 Като използвате резултата от упражнение 10.7 намерете спектъра на $n \times n$ матрицата, на която диагоналните елементи са равни на a, а извъндиагоналните – на b.

Упражнение 10.9 Нека са дадени квадратните матрици A, B, такива че

$$\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B) \neq 0.$$

От какъв тип е матричният сноп $\lambda B - A$?

Упражнение 10.10 Нека е дадена матрицата от 3 ред, зависеща от параметър

$$A(t) = \begin{bmatrix} 49 & 3t & -36 \\ 4t & 1 & -3t \\ 64 & 4t & -47 \end{bmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Докажете, че $\mathrm{spect}(A(t)) = \{1, 1, 1\}$ за всяка стойност на параметъра t. Намерете жордановата форма $J(t)$ на $A(t)$.

Използвайте функцията eig в някоя от диалоговите компютърни системи MATLAB или SYSLAB за да пресметнете спектъра на $A(t)$ за $t = 1, 10, 100, \dots$. Обяснете получените резултати.

Глава 11

НОРМАЛНИ МАТРИЦИ

11.1 Определения и основни свойства

Матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ се нарича *нормална* когато

$$A^*A = AA^*.$$

Ще припомним, че тук $A^* = A^{\mathrm{H}}$ когато матрицата A е комплексна и $A^* = A^\top$ когато тя е реална. Тъй като ермитовото спрягане при реалните матрици е еквивалентно на транспониране, условието за нормалност може да се запише и като $A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$. В частност, матрицата $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ е нормална когато

$$A^\top A = AA^\top.$$

Ако матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е нормална и $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е произволна унитарна матрица ($U^{\mathrm{H}}U = I_n$), то и матрицата $S = U^{\mathrm{H}}AU$ също е нормална. Действително, имаме

$$S^{\mathrm{H}}S = (U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U)(U^{\mathrm{H}}AU) = U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}AU$$

и

$$SS^{\mathrm{H}} = (U^{\mathrm{H}}AU)(U^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U) = U^{\mathrm{H}}AA^{\mathrm{H}}U$$

т.е., $S^{\mathrm{H}}S = SS^{\mathrm{H}}$.

Ще покажем, че матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е нормална точно когато нейната Шур форма е диагонална, т.е., когато съществува унитарна матрица $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че

$$S = U^{\mathrm{H}}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

където $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ са собствените стойности на матрицата A.

Действително, нека Шур формата S на A е диагонална. Тогава имаме $S^{\mathrm{H}} = \overline{S}$ и

$$\overline{S}S = S\overline{S} = \mathrm{diag}\left(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2\right).$$

От друга страна $A = USU^{\mathrm{H}}$, $A^{\mathrm{H}} = US^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}} = U\overline{S}U^{\mathrm{H}}$ и следователно

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{H}}A &= U\overline{S}U^{\mathrm{H}}USU^{\mathrm{H}} = U\overline{S}SU^{\mathrm{H}}, \\ AA^{\mathrm{H}} &= USU^{\mathrm{H}}U\overline{S}U^{\mathrm{H}} = US\overline{S}U^{\mathrm{H}}. \end{aligned}$$

Така $A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}$ и матрицата A е нормална.

Нека сега предположим, че матрицата A е нормална. Ще покажем, че в този случай нейната Шур форма $S = U^{\mathrm{H}}AU$ е диагонална. Вече показахме, че матрицата S трябва също да е нормална. Да представим S във вида

$$S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^{\mathrm{H}} \\ 0 & S_1 \end{bmatrix},$$

където $a \in \mathbb{F}^{n-1}$. Имаме

$$S^{\mathrm{H}}S = \begin{bmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 \\ a & S_1^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^{\mathrm{H}} \\ 0 & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & \overline{\lambda}_1 a^{\mathrm{H}} \\ \lambda_1 a & aa^{\mathrm{H}} + S_1^{\mathrm{H}}S_1 \end{bmatrix}$$

и

$$SS^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a^{\mathrm{H}} \\ 0 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 \\ a & S_1^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 + \|a\|^2 & a^{\mathrm{H}}S_1^{\mathrm{H}} \\ S_1 a & aa^{\mathrm{H}} + S_1 S_1^{\mathrm{H}} \end{bmatrix}.$$

От сравняване на елементите в позиция (1,1) на двете матрици $S^{\mathrm{H}}S$ и SS^{H} (които следва да са равни) получаваме $a = 0$, т.е., матрицата S има вида $\mathrm{diag}(\lambda_1, S_1)$. Но и тогава и матрицата $S_1 \in \mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ също следва да е нормална и да има вида $S_1 = \mathrm{diag}(\lambda_2, S_2)$, където $S_2 \in \mathbb{F}^{(n-2)\times(n-2)}$. По индукция получаваме

$$S = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

което трябваше и да покажем.

11.2 Някои нормални матрици

Някои важни класове нормални $n \times n$ матрици са както следва.

- Комплексните унитарни матрици, определени от

  $$A^{\mathrm{H}}A = I_n.$$

  Ако означим $A = A_0 + \imath A_1$, където матриците A_0 и A_1 са реални[1], то имаме

  $$A_0^\top A_0 + A_1^\top A_1 = I, \; A_0^\top A_1 = A_1^\top A_0.$$

  Следователно тук матрицата

  $$A^{\mathbb{R}} := \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 \\ A_1 & A_0 \end{bmatrix}$$

  е ортогонална.

[1] Матрицата A_0 е *реалната*, а матрицата A_1 – *имагинерната част* на комплексната матрица A.

- Реалните ортогонални матрици, определени от

$$A^{\top}A = I_n$$

(една комплексна ортогонална матрица може и да не е нормална!).

- Комплексните ермитови матрици, определени от

$$A^{\mathrm{H}} = A.$$

Когато $A = A_0 + \imath A_1$ имаме

$$A_0^{\top} = A_0, \ A_1^{\top} = -A_1.$$

- Реалните симетрични матрици, определени от

$$A^{\top} = A.$$

Реалните симетрични матрици могат да се разглеждат като ермитови матрици с нулева имагинерна част.

- Комплексните антиермитови матрици, определени от

$$A^{\mathrm{H}} = -A.$$

Когато $A = A_0 + \imath A_1$, то

$$A_0^{\top} = -A_0, \ A_1^{\top} = A_1.$$

В частност матрицата A е антиермитова точно когато матрицата $\imath A$ е ермитова.

- Реалните антисиметрични матрици, определени от

$$A^{\top} = -A.$$

Реалните антисиметрични матрици могат да се интерпретират като антиермитови матрици с нулева имагинерна част.

Да разгледаме сега какво следва от факта, че всяка нормална матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ има диагонална Шур форма

$$S = U^{\mathrm{H}}AU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

където $\lambda_i = \lambda_i(A)$ са собствените стойности на матрицата A.

Ако матрицата A е унитарна, то от

$$A^{\mathrm{H}}A = US^{\mathrm{H}}SU^{\mathrm{H}} = I_n$$

следва

$$S^{\mathrm{H}}S = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, \ldots, |\lambda_n|^2) = I_n$$

и

$$|\lambda_i| = 1,\ i = 1, \dots, n.$$

Следователно спектърът на всяка комплексна унитарна (и в частност на всяка реална ортогонална) матрица е разположен върху единичата окръжност в $\mathbb{C}$.

Нека матрицата A е реална ортогонална. Тогава нейните собствени стойности могат да бъдат реални и равни на ± 1, или комплексно спрегнати от вида $\lambda_i = \alpha_i \pm \imath\beta_i$. В този случай матрицата A е ортогонално подобна на блок–диагонална матрица

$$\Sigma = V^\top AV,\ V \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}),$$

с 2×2 диагонални блокове

$$\begin{bmatrix} \alpha_i & -\beta_i \\ \beta_i & \alpha_i \end{bmatrix},\ \alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1,$$

и 1×1 блокове, равни на 1 или -1.

Когато матрицата A е ермитова (и в частност реална симетрична), то нейната Шур форма S също е ермитова ($S^{\mathrm{H}} = S$) и следователно реална. Така комплексните ермитови и реалните симетрични матрици имат само реални собствени стойности. По–нататък ще означаваме с $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$ най–голямата и най–малката собствени стойности на ермитовата матрица A съответно.

Когато матрицата A е антиермитова (и в частност реална антисиметрична), то нейната Шур форма S също е антиермитова ($S^{\mathrm{H}} = -S$) и следователно имагинерна. Така комплексните антиермитови и реалните антисиметрични матрици имат само имагинерни собствени стойности.

Ермитовата матрица A се нарича *положително определена* когато $x^{\mathrm{H}}Ax > 0$ за всеки ненулев вектор x. Аналогично се дефинират *неотрицателно определени, отрицателно определени* и *неположително определени* матрици (дайте съответните формални определения!). Когато матрицата A е реална и симетрична, условието за положителна определеност е $x^\top Ax > 0$ за всеки реален ненулев вектор x. Очевидно матрицата A е положително (съответно неотрицателно) определена точно когато матрицата $-A$ е отрицателно (съответно неположително) определена.

Ермитовата матрица A се нарича *(знако) неопределена* когато са възможни равенствата $x^{\mathrm{H}}Ax > 0$ и $y^{\mathrm{H}}Ay < 0$ за два вектора x и y. Матрицата A е неопределена точно когато е неопределена и матрицата $-A$.

Да положим $y = U^{\mathrm{H}}x$, където $S = U^{\mathrm{H}}AU$ е диагоналната Шур форма на ермитовата матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ със собствени стойности λ_i. Тогава имаме $x = Uy$ и съответно

$$x^{\mathrm{H}}Ax = y^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}AUy = y^{\mathrm{H}}Sy = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2.$$

Да означим с $n_+ \geq 0$, $n_- \geq 0$ и $n_0 \geq 0$ броят на положителните, отрицателните и нулевите собствени стойности на A съответно, където $n_+ + n_- + n_0 = n$. Тогава е ясно, че матрицата A е:

– положително определена точно когато $n_+ = n$;
– неотрицателно определена точно когато $n_- = 0$;
– неопределена точно когато $n_+ > 0$ и $n_- > 0$.

11.3 Мярка за нормалност

Нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е произволна (не непременно нормална) матрица. Съществуват различни начини да се прецени колко „близо” до нормалност е матрицата A. Така например като мярка за нормалност може да се приеме всяка непрекъсната функция $\mu : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$, такава че $\mu(A) = 0$ точно когато матрицата A е нормална.

Да означим с $\mathcal{N}_n(\mathbb{F}) \subset \mathbb{F}^{n\times n}$ множеството на нормалните матрици:

$$\mathcal{N}_n(\mathbb{F}) := \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : A^{\mathrm{H}}A = AA^{\mathrm{H}}\}.$$

Използват се следните мерки за нормалност на матрица:
– разстояние до множеството $\mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ в нормата на Фробеиус,

$$\mu_{\mathrm{F}}(A) := \min\{\|A - N\|_{\mathrm{F}} : N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{F})\};$$

– разстояние до множеството $\mathcal{N}_n(\mathbb{F})$ в спектралната норма,

$$\mu_2(A) := \min\{\|A - N\|_2 : N \in \mathcal{N}_n(\mathbb{F})\};$$

– оценка на остатъка $A^{\mathrm{H}}A - AA^{\mathrm{H}}$ в нормата на Фробеиус,

$$\nu_{\mathrm{F}}(A) := \sqrt{\|A^{\mathrm{H}}A - AA^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}}};$$

– оценка на остатъка $A^{\mathrm{H}}A - AA^{\mathrm{H}}$ в спектралната норма,

$$\nu_2(A) := \sqrt{\|A^{\mathrm{H}}A - AA^{\mathrm{H}}\|_2}.$$

Използват се още две мерки за нормалност, основани на следното наблюдение. Както знаем, матрицата A е нормална точно когато нейната Шур форма $U^{\mathrm{H}}AU$ е диагонална.

От друга страна за всяка матрица A нейната Шур форма $S = U^{\mathrm{H}}AU$ може да се представи като $S = \Lambda + M$, където матрицата

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

съдържа собствените стойности на A по диагонала си, а матрицата M е строго горно триъгълна. Това представяне не е единствено. Следователно можем да дефинираме величината

$$\omega(A) := \min\{\|M\| : U^{\mathrm{H}}AU = \Lambda + M,\ U \in \mathcal{U}(n)\},$$

където $\|\cdot\|$ е някоя унитарно инвариантна матрична норма.

Когато използваме нормата на Фробениус имаме

$$\|A\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\Lambda + M\|_{\mathrm{F}}^2 = \|\Lambda\|_{\mathrm{F}}^2 + \|M\|_{\mathrm{F}}^2.$$

От друга страна

$$\|\Lambda\|_{\mathrm{F}} = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2.$$

Следователно в този случай мярката за нормалност от тип ω е

$$\omega_{\mathrm{F}}(A) = \sqrt{\|A\|_{\mathrm{F}}^2 - \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2}.$$

При използване на спектралната норма съответната мярка ще означаваме с $\omega_2(A)$. За съжаление няма удобен израз за пресмятане на величината $\omega_2(A)$ в общия случай.

Всички разгледани мерки за нормалност μ, ν, ω, притежават и свойствата

$$\mu(A) = \mu(\overline{A}) = \mu(A^\top) = \mu(A^{\mathrm{H}}) = \mu(U^{\mathrm{H}} A U),$$

където матрицата U е унитарна.

В сила са следните зависимости между въведените по–горе мерки за нормалност (навсякъде за краткост матричният аргумент е изпуснат):

$$\begin{aligned}
\mu_2 &\le \mu_{\mathrm{F}} \le \sqrt{n}\,\mu_2, \qquad (11.1)\\
\nu_2 &\le \nu_{\mathrm{F}} \le \sqrt{n}\,\nu_2,\\
\omega_2 &\le \omega_{\mathrm{F}} \le \sqrt{n}\,\omega_2,\\
\omega_{\mathrm{F}} &\le \left(\frac{n^3 - n}{12}\right)^{1/4} \nu_{\mathrm{F}},\\
\nu_{\mathrm{F}}^2 &\le \sqrt{2\left(\|A\|_{\mathrm{F}} + \|\Lambda\|_{\mathrm{F}}^2\right)}\,\omega_{\mathrm{F}} \le 2\|A\|_{\mathrm{F}}\omega_{\mathrm{F}},\\
\nu_{\mathrm{F}}^2 &\le 4\|A\|_2 \mu_{\mathrm{F}},\\
\nu_{\mathrm{F}}^2 &\le 4\|A\|_{\mathrm{F}}\mu_2 + \sqrt{2n}\,\mu_2^2,\\
\mu_{\mathrm{F}} &\le \omega_{\mathrm{F}}.
\end{aligned}$$

11.4 Упражнения

Упражнение 11.1 Намерете всички реални нормални матрици с размер 2×2.

Упражнение 11.2 Намерете всички комплексни нормални матрици с размер 2×2.

Упражнение 11.3 Нормални ли са комплексните симетрични матрици ($A^\top = A$)? Дайте примери.

Упражнение 11.4 Покажете, че всяка квадратна комплексна матрица може да се представи като сума от една ермитова и от една антиермитова матрица. Единствено ли е това представяне?

Упражнение 11.5 Покажете, че всяка квадратна реална матрица може да се представи като сума от една симетрична и от една антисиметрична матрица. Единствено ли е това представяне?

Упражнение 11.6 Известни са близо 100 условия за нормалност на матрица. Покажете например, че матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ със собствени стойности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ е нормална точно когато е изпълнено което и да е от следните условия:

– за всеки полином p матрицата $p(A)$ е нормална;

– за всяка унитарна матрица U матрицата $U^{\mathrm{H}}AU$ е унитарна;

– за всяка унитарна матрица U, такава че

$$U^{\mathrm{H}}AU = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

и матрицата B е квадратна, имаме $C = 0$;

– за всяко A–инвариантно подпространство $L \subset \mathbb{F}^n$ ортогоналното допълнение $L^{\perp}$ също е A–инвариантно;

– съществува унитарна матрица U, такава че матрицата $U^{\mathrm{H}}AU$ е диагонална;

– матрицата A има система от n линейно независими собствени вектори, като всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални;

– съществува полином p, такъв че $A^{\mathrm{H}} = p(A)$;

– матрицата A комутира с някоя нормална матрица с различни собствени стойности;

– матрицата A комутира с някоя ермитова матрица с различни собствени стойности;

– матриците $A + A^{\mathrm{H}}$ и $A - A^{\mathrm{H}}$ комутират;

– изпълнено е

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 = \|A\|_{\mathrm{F}}.$$

Упражнение 11.7 Покажете че неособената матрица A е нормална точно когато е изпълнено което и да е от следните условия:

– матрицата A^{-1} е нормална;

– матрицата $A^{-1}A^{\mathrm{H}}$ е нормална;

– матриците A и $A^{-1}A^{\mathrm{H}}$ комутират.

Упражнение 11.8 Покажете, че една ермитова матрица е положително (съответно отрицателно) определена точно когато тя е обратима и нейната обратна матрица е също положително (съответно отрицателно) определена. Обратима ли е всяка неопределена матрица?

Упражнение 11.9 Нека е дадена ермитовата матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Да означим с d_i детерминантата на $i \times i$ подматрицата на A, образувана от пресичането на първите i реда и i стълба на A. Покажете, че матрицата A е положително определена точно когато са изпълнени неравенствата

$$d_i > 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Тези условия за положителна определеност са известни като критерий на Силвестър[2]. Впрочем, критерият на Силвестър рядко се използва за практически цели предвид на проблемите при пресмятане на детерминанти в крайна аритметика.

Упражнение 11.10 Нека е дадена блочната ермитова матрица

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{1,2}^{\mathrm{H}} & A_{2,2} \end{bmatrix}$$

(тук по необходимост подматриците $A_{1,1}$ и $A_{2,2}$ на A също са ермитови). Покажете, че матрицата A е положително определена точно когато матрицата $A_{1,1}$ е обратима, а матрицата

$$A_{2,2} - A_{1,2}^{\mathrm{H}} A_{1,1}^{-1} A_{1,2}$$

е положително определена. Формулирайте аналогичен резултат като размените местата на индексите 1 и 2.

Упражнение 11.11 Докажете неравенствата (11.1).

[2]Дж. Силвестър, английски математик, 1814-1897.

Глава 12

ИТЕРАЦИОННИ МЕТОДИ ЗА ЛИНЕЙНИ УРАВНЕНИЯ

12.1 Уводни бележки

Редица практически задачи изискват решаването на големи линейни системи

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{F}^{n\times n},$$

например с $n = 1\,000$ или $n = 10\,000$, в които матрицата A има специална структура. Типичен пример тук са т.нар. *разредени матрици*, които често се оказват и симетрични. В такива случай директните методи, основани на декомпозиция на матрицата A на множители[1], могат да се окажат неефикасни, тъй като те разрушават специалната структура на матрицата.

Алтернатива на директните методи са *итерационните методи*, при които решението се получава като граница на редица от последователни приближения. На свой ред тези приближения удовлетворяват някакви нови алгебрични уравнения, които са сравнително лесни за решаване.

12.2 Основни итерационни схеми

Да разгледаме уравнението

$$Ax = b,\ A \in \mathbb{F}^{n\times n},\ b \in \mathbb{F}^n, \tag{12.1}$$

относно неизвестния вектор $x \in \mathbb{F}^n$, в което матрицата A е неособена. Всички итерационни схеми се основават на еквивалентно представяне на уравнението във вида

$$Mx = Nx + c, \tag{12.2}$$

[1]Такива са методите на Гаус и на QR декомпозицията.

където $M \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е неособена матрица с проста структура, която позволява лесно решаване на уравнението $Mx = d$. Например M може да се избере като диагонална матрица.

Уравнението (12.2) се решава итеративно по схемата

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + c,\ k = 0, 1, 2\dots, \tag{12.3}$$

при зададено начално приближение $x^{(0)}$.

Когато спектралният радиус $\mathrm{rad}(M^{-1}N)$ на матрицата $M^{-1}N$ е по–малък от 1, последователните приближения $x^{(k)}$ се схождат при $k \to \infty$ към вектора

$$x = (M - N)^{-1}c$$

за всеки начален вектор $x^{(0)}$. При това

$$|x - x^{(k)}| \preceq B^k(I_n - B)^{-1}|x^{(1)} - x^{(0)}|,$$

където $B := |M^{-1}N|$ и $|R| := [|r_{i,j}|]$ е матричният модул на матрицата $R := [r_{i,j}]$. Ще напомним, че неравенството $x \preceq y$ за векторите x, y с елементи x_i, y_i съответно се разбира поелементно, т.е., $x_1 \le y_1, \dots, x_n \le y_n$.

В сила е и оценката

$$|x - x^{(k+1)}| \preceq B^k|x - x^{(0)}|,$$

в която обаче векторът $|x - x^{(0)}|$ е предварително неизвестен.

За да бъдат уравненията (12.1) и (12.2) еквивалентни, т.е., за да имат те едно и също решение, е необходимо и достатъчно да бъде изпълнено условието

$$c = (M - N)A^{-1}b$$

(докажете!). В частност може да се избере $A = M - N$ и $c = b$. Това представяне се нарича *разцепване* на матрицата A. Разцепването се прави с оглед на следните съображения:

– матрицата M трябва да е неособена и проста (в частност лесна за обръщане), така че уравнението $Mx = d$ да се решава лесно за всяка дясна страна d;

– спектралният радиус на матрицата $M^{-1}N$ трябва да е колкото се може по–малък от 1.

Подобни изисквания се налагат и в общия случай на еквивалентно представяне на уравнението (12.1) във вида (12.2).

Да представим матрицата $A = [a_{i,j}]$ във вида

$$A = L + D + U,$$

където L, D и U са съответно строго долно триъгълната, диагоналната и строго горно тригъгълната части на A,

$$L := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$D := \mathrm{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}),$$

$$U := \begin{bmatrix} 0 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да предположим, че матрицата има ненулев диагонал. Тогава можем да изберем

$$M = D,\ N = L + U,\ c = b.$$

Това е най–простата итерационна схема, известна като *итерация на Якоби*[2]. При тази схема последователните приближения $x_i^{(k)}$ към елементите x_i на решението x се определят по формулите

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right). \tag{12.4}$$

Както е прието, при $i = 1$ първата сума от 1 до 0 се приема за празна, а при $i = n$ за празна се приема втората сума от $n + 1$ до n.

Итерацията на Якоби допуска известно подобрение както следва. От (12.4) се вижда, че при определянето на $x_i^{(k+1)}$, $i \geq 1$, се използват приближенията $x_1^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ (вж. първата сума), докато вече са определени и приближенията $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$, за които се предполага, че са по–точни. Като заместим в първата сума тези по–точни приближения получаваме *итерацията на Гаус–Зайдел*[3]

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{i,i}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} \right). \tag{12.5}$$

Формално итерацията на Гаус–Зайдел се получава като вземем

$$M = L + D,\ N = -U.$$

[2]К. Якоби, немски математик, 1804-1851.

[3]Л. Зайдел, немски математик, 1821-1896.

Може да се покаже, че

$$\mathrm{rad}(D^{-1}(L+U) < 1$$

и следователно итерацията на Якоби е сходяща за всяко начално приближение $x^{(0)}$, когато са изпълнени условията

$$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|,\ i = 1, \ldots, n$$

(в този случай се казва, че матрицата A е с *доминиращ* диагонал).

В много приложения, например при числено решаване на елиптични частни диференциални уравнения, матрицата A е симетрична ($U = L^\top$) и положително определена. В този случай

$$\mathrm{rad}((L+D)^{-1}L^\top) < 1$$

и итерацията на Гаус–Зайдел е сходяща.

Критичен момент при използване на итерационните схеми е изборът на матриците M и N оглед на минимизиране на спектралния радиус

$$\rho := \mathrm{rad}(M^{-1}N) < 1$$

и съответно повишаване на скоростта на сходимост на итерационния процес.

Един от начините за минимизиране на ρ е както следва. Матриците M и N и векторът c се представят като като аффини изрази, зависещи от един скаларен параметър $\omega \in \mathbb{F}$, например

$$\begin{aligned} M &= M(\omega) := D + \omega L, \\ N &= N(\omega) := (1-\omega)D - \omega U, \\ c &= c(\omega) := \omega b,\ 0 \neq \omega \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Параметърът ω се нарича *релаксационен параметър*, а съответната итерационна схема

$$M(\omega)x^{(k+1)} = N(\omega)x^{(k)} + c(\omega),\ k = 0, 1, 2 \ldots, \tag{12.6}$$

– *метод на последователната релаксация*[4]. При $\omega = 1$ получаваме класическата итерация на Гаус–Зайдел.

Параметърът ω се определя от условието за минимум на спектралния радиус

$$\rho(\omega) := \mathrm{rad}(M^{-1}(\omega)N(\omega)).$$

Това е трудна задача в общия случай. За щастие при някои важни за практиката случаи на симетрична положително определена матрица A е възможно релаксационният параметър да се намери с прости алгебрични операции.

[4]На английски *method of successive over–relaxation* или *SOR method*.

Съществува и една друга група итерационни методи за решаване на уравнението $Ax = b$ с неособена матрица A. Те се основават на минимизирането (или максимизирането) на някаква нелинейна функция $x \mapsto f(x)$, която има глобален екстремум в точката $x = A^{-1}b$. Нека например $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и матрицата A е симетрична положително определена. Да разгледаме израза

$$f(x) = 0.5\, x^\top Ax - b^\top x.$$

Минимумът на f е $-b^\top A^{-1}b/2$ и се достига за $x = A^{-1}b$.

Един от най–простите начини за минимизиране на f е по *метода на най–бързото спускане*. Нека е дадена точка $x^{(0)}$, такава че $Ax^{(0)} \neq b$.[5]. Функцията f намалява най–бързо по посока на вектора $r^{(0)} := b - Ax^{(0)} \neq 0$, противоположен на градиента $Ax^{(0)} - b$ на f в точката $x^{(0)}$. Следователно съществува число $\mu > 0$, такова че

$$f(x^{(0)} + \mu r^{(0)}) < f(x^{(0)}).$$

Ако определим μ от условието за минимум на израза $f(x^{(0)} + \mu r^{(0)})$ получаваме

$$\mu = \mu_0 := \frac{(r^{(0)})^\top r^{(0)}}{(r^{(0)})^\top Ar^{(0)}}.$$

С тази стойност на μ векторът x се актуализира до

$$x^{(1)} := x^{(0)} + \mu_0 r^{(0)}.$$

Аналогично се определят следващите приближения

$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + \mu_k r^{(k)},\ k = 1, 2, \ldots .$$

Глобалната сходимост на метода се гарантира от неравенството, дадено в упражнение 12.6. Тази сходимост, обаче, може да не е достатъчно бърза в случаите, когато числото на обусловеност

$$\mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$$

на матрицата A е много по–голямо от 1. Поради това се използват и други, по–усъвършенствани итерационни методи за минимизиране на функцията f, които тук не се разглеждат.

12.3 Упражнения

Упражнение 12.1 Покажете, че итерацията

$$Mx^{(k+1)} = Nx^{(k)} + b,\ A = M - N,$$

[5] Ако $Ax^{(0)} = b$, то уравнението се оказва някакси решено и няма какво повече да се оптимизира.

с неособена матрица M може да се запише във вида

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + M^{-1}r^{(k)},\ r^{(k)} := b - Ax^{(k)}.$$

Докажете, че ако при неособена матрица A тази итерация е сходяща за всяко начално приближение $x^{(0)}$, то непременно е изпълнено неравенството $\mathrm{rad}(M^{-1}N) < 1$. Вярно ли е това твърдение когато матрицата A е особена?

Упражнение 12.2 Нека матрицата $A = M - N$ е особена, а матрицата M – неособена. Възможно ли е да е изпълнено неравенството $\mathrm{rad}(M^{-1}N) < 1$? Разсъждавайте чрез допускане на противното.

Упражнение 12.3 Използвайте някоя от компютърните системи за математически пресмятания, например MATHEMATICA, MATLAB или SYSLAB, за да конструирате итерациите на Якоби и на Гаус–Зайдел. Експериментирайте итерационните схеми за уравнения със симетрична матрица A с доминиращ диагонал и с известно (еталонно) рещение, например

$$A = \begin{bmatrix} 2.10 & 1.00 & 1.05 \\ 1.00 & 2.15 & 1.10 \\ 1.05 & 1.10 & 2.20 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 4.15 \\ 4.25 \\ 4.35 \end{bmatrix}.$$

Точното решение е $x = [1, 1, 1]^\top$.

Упражнение 12.4 Използвайте някоя от оптимизационните процедури в компютърните системи за математически пресмятания MATHEMATICA или MATLAB за да намерите стойността ω_0 на релаксационния параметър ω,

$$\rho(\omega_0) = \min\{\rho(\omega) : 0 \neq \omega \in \mathbb{R}\},$$

за матрицата A от упражнение 12.3.

Начертайте графиката на функцията $\omega \mapsto \rho(\omega)$, $\omega \neq 0$.

Конструирайте съответната релаксационна схема и сравнете скоростта й на сходимост с тази на схемите на Якоби и на Гаус–Зайдел.

Упражнение 12.5 Нека спектралният радиус $\mathrm{rad}(B)$ на матрицата $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е по–малък от 1. Покажете, че за всяко положително число $\varepsilon < 1 - \mathrm{rad}(B)$ съществува векторна норма $\|\cdot\| : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}_+$, такава че

$$\|B\| < \mathrm{rad}(B) + \varepsilon,$$

където $\|B\|$ е съответната операторна норма на матрицата B.

Упражнение 12.6 Покажете, че при метода на най–бързото спускане е в сила оценката

$$f(x^{(k+1)}) \leq \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}\right) f(x^{(k)}) - \frac{b^\top A^{-1} b}{2\mathrm{cond}_2(A)}.$$

Глава 13

УНИТАРНИ ДЕКОМПОЗИЦИИ

13.1 Уводни бележки

В тази глава се разглеждат унитарните декомпозиции, или факторизации, на комплексна матрица и съответните им ортогонални аналози при реална матрица. Първо са разгледани елементарните унитарни матрици. После е описано пресмятането на унитарно–триъгълната, или QR–декомпозицията на матрица. Обсъдени са и някои свързани с това декомпозиции.

Разгледани са също декомпозицията на Шур и полярната декомпозиция на квадратна матрица. Накрая е разгледана декомпозицията по сингулярни числа на произволна матрица.

Унитарните и ортогоналните матрици са особено полезни при извършване на пресмятания в крайна аритметика тъй като техните елементи по абсолютна стойност не надхвърлят 1. По този начин елементите на преобразуваните матрици също не могат да нараснат много. Също така при трансформации с унитарни или ортогонални матрици унитарно инвариантните норми на преобразуваните матрици обикновено се запазват, а другите матрични норми не се променят съществено. Това е важно предимство при пресмятания в изчислителна среда с плаваща точка, където грешките от закръгляне по принцип са пропорционални на абсолютните стойности на пресмятаните величини.

Ще припомним, че матрицата $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е *унитарна* ако $U^{\mathrm{H}}U = I_n$, и *ортогонална*, ако $U^{\top}U = I_n$. Важно е да се знае, че ортогоналните матрици могат и да са комплексни, а не са непременно реални.

Комплексната унитарна или реалната ортогонална матрица U се нарича също *ортонормирана* тъй като нейните стълбове u_i удовлетворяват условията $u_i^* u_j = 0$ при $i \neq j$ и $u_i^* u_i = 1$, където $u^* = u^{\mathrm{H}}$ в комплексния случай и $u^* = u^{\top}$ в реалния случай.

Множеството на комплексните унитарни матрици се означава с $\mathcal{U}(n)$, а множеството на ортогоналните $n \times n$ матрици над полето $\mathbb{F}$ – с $\mathcal{O}(n, \mathbb{F})$. Тези множества са мултипликативни групи относно стандартното матрично умножение.

Ако $U \in \mathcal{U}(n)$ или $U \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, то $\|U\|_2 = 1$ и $\|U\|_\mathrm{F} = \sqrt{n}$. Следователно $\mathcal{U}(n) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ и $\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ са централни затворени кълба с радиус $\sqrt{n}$ относно метриката, породена от скаларните произведения $\langle U, V\rangle = \mathrm{tr}(U^\mathrm{H} V)$ и $\langle U, V\rangle = \mathrm{tr}(U^\top V)$ (или от нормата на Фробениус).

Ако дадена (комплексна) матрица U е представена като

$$U = U_0 + \imath U_1,$$

където матриците U_0 и U_1 са реални, то тя е унитарна точно когато реалната матрица

$$U^\mathbb{R} := \begin{bmatrix} U_0 & -U_1 \\ U_1 & U_0 \end{bmatrix}$$

е ортогонална (докажете!).

В много приложения, а и при някои теоретични разглеждания, една обща матрица A се декомпозира като произведение, включващо унитарни или ортогонални матрици, от вида

$$A = USV^\mathrm{H}$$

или

$$A = USV^\top,$$

където матрицата S има размерите на A, а матриците U и V са унитарни или ортогонални. Матриците U и V могат да са свързани (например V може да е равна на U), или пък една от тях може да е единичната матрица, или пък да е пермутационна матрица. Матрицата S е в *опростена*, или *кондензирана форма*, например триъгълна или даже диагонална. Тази кондензирана форма отразява инвариантната структура на матрицата $A = [a_{i,j}]$ под действието на унитарните

$$A \mapsto S = U^\mathrm{H} AV$$

или ортогоналните

$$A \mapsto S = U^\top AV.$$

трансформации.

Спектралната, или 2–нормата

$$\|A\|_2 = \max\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 = 1\} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\mathrm{H} A)}$$

и нормата на Фробениус, или F–нормата

$$\|A\|_\mathrm{F} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\mathrm{H} A)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\right)$$

играят важна роля при използването на унитарни и ортогонални трансформации. Причината е, че тези норми са *унитарно инвариантни* в смисъл, че описаните по–горе трансформации запазват нормата на преобразуваната матрица:

$$\|S\|_2 = \|A\|_2, \ \|S\|_{\mathrm{F}} = \|A\|_{\mathrm{F}}.$$

Също така в сила е полезното неравенство

$$\|AB\|_{\mathrm{F}} \le \|A\|_2 \|B\|_{\mathrm{F}},$$

което лесно се обобщава до неравенството

$$\|A_1 A_2 \cdots A_r\|_{\mathrm{F}} \le \|A_k\|_{\mathrm{F}} \prod_{i \ne k} \|A_i\|_2 \tag{13.1}$$

за всяко $k \in \{1, \ldots, r\}$ и $r \ge 2$. Неравенството (13.1) ще бъде доказано по–късно.

13.2 Елементарни унитарни матрици

Една обща унитарна матрица може да се декомпозира като произведение от елементарни унитарни матрици. Има няколко вида унитарни матрици, които се смятат за елементарни в известен смисъл. Сред тях по–важни за приложенията са равнинните ротации (или ротациите на Гивънс) и елементарните отражения (или отраженията на Хаусхолдър).

Елементарната комплексна равнинна ротация е унитарна $n \times n$ матрица ($n > 1$), която се различава от единичната матрица I_n в не повече от четири позиции, заети от елементите на една 2×2 унитарна матрица. По–точно, *ротация* в (p, q)–равнината, $p < q$, е $n \times n$ матрица R_{pq}, чиито (i, k) елементи r_{ik} са определени както следва. Матрицата с размер 2×2

$$\begin{bmatrix} r_{pp} & r_{pq} \\ r_{qp} & r_{qq} \end{bmatrix} \tag{13.2}$$

е унитарна (вж. упражнение 13.5), а r_{ik} е символът на Кронекер когато $\{i, k\} \cap \{p, q\} = \emptyset$.

Елементарната реална равнинна ротация се определя по подобен начин. Тя е реална ортогонална $n \times n$ матрица R_{pq}, като матрицата (13.2) е ортогонална, вж. упражнение 13.1.

При тази дефиниция може да се окаже, че в реалния случай подматрицата (13.2), а следователно и цялата матрица R_{pq}, имат детерминанта, равна на -1. В този случай и двете матрици са отражения в рамките на определението, според което една реална ортогонална матрица е ротация или отражение когато детерминантата ѝ е равна на 1 или -1 съответно.

Един друг вид елементарни унитарни матрици са елементарните отражения. Нека $u \in \mathbb{C}^n$ е ненулев вектор. Матрицата

$$H(u) := I_n - \frac{2uu^{\mathrm{H}}}{u^{\mathrm{H}}u} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

се нарича *комплексно елементарно* (или *хаусхолдърово*) *отражение*. От това определение следва, че $H(u) = H(\alpha u)$ за всеки ненулев скалар α. Матрицата $H(u)$ е едновременно ермитова и унитарна.

Реалните елементарни отражения се определят аналогично от

$$H(v) := I_n - \frac{2vv^{\top}}{v^{\top}v} \in \mathbb{R}^{n\times n},\ 0 \neq v \in \mathbb{R}^n.$$

Матрицата $H(v)$ е едновременно симетрична и ортогонална.

Умножаването на отражение $H(u)$ по вектор $x \in \mathbb{C}^n$ се свежда до пресмятане на едно скаларно произведение $u^{\mathrm{H}}x$, умножаване на вектор по скалар и изваждане на два вектора съгласно зависимостта

$$H(u)x = x - \left(\frac{2u^{\mathrm{H}}x}{u^{\mathrm{H}}u}\right)u.$$

В частност имаме

$$H(u)u = u - \left(\frac{2u^{\mathrm{H}}u}{u^{\mathrm{H}}u}\right)u = u - 2u = -u$$

и

$$\det(H(u)) = -1.$$

Елементарните отражения водят своето наименование от факта, че изображението $x \mapsto H(u)x$ е отражение относно равнината

$$\mathrm{Ker}(u^{\mathrm{H}}) = \{x \in \mathbb{C}^n : u^{\mathrm{H}}x = 0\}.$$

Действително, имаме

$$u^{\mathrm{H}}(x + H(u)x) = 2u^{\mathrm{H}}\left(x - \frac{uu^{\mathrm{H}}x}{u^{\mathrm{H}}u}\right) = 2(u^{\mathrm{H}}x - u^{\mathrm{H}}x) = 0,$$

т.е., векторът u е ортогонален на сумата от вектора x и неговия образ $H(u)x$. Другояче казано, векторът u е колинеарен на разликата $x - H(u)x$, тъй като векторите x и $H(u)x$ имат еднакви 2–норми. Следователно умножаването на вектор с матрицата $H(u)$ отразява този вектор относно равнината $\mathrm{Ker}(u^{\mathrm{H}})$.

Като използваме тези съображения можем да получим едно много елегантно решение на следната задача. Нека са дадени два различни вектора $x, y \in \mathbb{C}^n$ с еднакви 2–норми. Търси се унитарна матрица U, която преобразува x в y в смисъл, че $y = Ux$. От показаното по–горе отражателно свойство на преобразуванието с матрица $H(u)$ следва, че решението на тази задача е

$$U = H(x - y),$$

т.е.,

$$H(x-y)x = y.$$

Често срещана в практиката задача е да се преобразува даден ненулев вектор x във вектор с единствен ненулев елемент, например в k–та позиция. Това се прави по следния начин.

Да предположим, че векторът $x \in \mathbb{C}^n$ не е успореден (или пропорционален) на k–тия стълб e_k на единичната матрица I_n (ако векторът x е успореден на e_k няма какво да преобразуваме). Нека $\alpha \in \mathbb{C}$ и $|\alpha| = 1$. Тогава търсената трансформация е

$$H(x-y)x = y, \ y := \alpha \|x\|_2 e_k. \tag{13.3}$$

Матрицата $H(x-y)$ е коректно определена понеже $y \neq x$.

В реалния случай $x \in \mathbb{R}^n$ имаме $\alpha = \pm 1$ и съответно

$$H(x-y)x = y, \ y := \pm \|x\|_2 e_k. \tag{13.4}$$

Изборът на параметъра α в (13.3), съответно на знака в (13.4), се прави въз основа на числени съображения с оглед на избягване на възможно взаимно унищожение при изваждане на близки числа както следва.

Ако аргументът на елемента x_k на x е φ_k, т.е., ако

$$x_k = \rho_k \exp(\imath \varphi_k), \ \rho_k \geq 0,$$

то избираме аргумента на α като $\varphi_k + \pi$, което дава

$$\alpha = -\exp(\imath \varphi_k).$$

По този начин k–тият елемент на вектора $x - y$ става

$$x_k - y_k = (\rho_k + \|x\|_2) \exp(\imath \varphi_k).$$

Аналогично, в реалния случай когато елементът x_k е неотрицателен (съответно отрицателен) избираме $y = \|x\|_2 e_k$ (съответно $y = -\|x\|_2 e_k$).

Тъй като матрицата

$$H(x \mp \|x\|_2 e_k)$$

е едновременно ермитова и унитарна, имаме

$$x = H(x-y)y = \alpha \|x\|_2 H(x-y) e_k = \alpha \|x\|_2 h_k(x-y),$$

където $h_k(x-y)$ е k–тият стълб на $H(x-y)$. Следователно матрицата $H(u)$ трансформира даден вектор $x \neq 0$ в $\alpha \|x\|_2 e_k$, $|\alpha| = 1$, точно когато нейният k–ти стълб $h_k(u)$ е колинеарен на вектора x.

Сега сме в състояние да решим и следната задача. Даден е единичен вектор $x \in \mathbb{C}^n$ и е необходимо да се намери $n \times (n-1)$ матрица V, такава че матрицата $U := [x, V]$ да бъде унитарна. Ако векторът x е колинеарен на някои стълб e_k на единичната матрица I_n, то V съдържа останалите стълбове на I_n. Нека в общия случай векторът x не е колинеарен на стълб на I_n. Нека $h_1, \ldots, h_n$ са стълбовете на отражението $H(x \mp e_1)$, което трансформира x в e_1 (по–горе беше показано как се строи такова отражение). Тогава едно възможно решение на задачата е

$$V = [h_2, \ldots, h_n].$$

Действително, в този случай имаме $x = \pm h_1$.

13.3 QR декомпозиция

Трансформациите с елементарни унитарни матрици обикновено се използват за анулиране на елементите в зададени позиции на вектори и матрици, например за привеждане на вектор в множител на даден стълб на единичната матрица. С помощта на такива трансформации и в рамките на краен брой стъпки се получава унитарно–тригъгълната, или QR декомпозицията на обща правоъгълна матрица.

Да припомним първо какво представлява ешалонната форма на матрица.

Нека $A = [a_{i,j}]$ е $m \times n$ матрица от ранг $r \geq 1$. Да означим с $k_1, \ldots, k_r$ номерата на първите r линейно независими стълба на A. Нека $s \in \{1, \ldots, r\}$ е зададено цяло число. Ще казваме, че матрицата A е в *редова s–ешалонна форма*, ако $a_{i,j} = 0$ при $i = 1, \ldots, s$ и $j < k_i$, както и при $l = 1, \ldots, s$ и $i > k_l$, $j = k_l$. Матрицата A е в *редова ешалонна форма*, ако тя е в редова r–ешалонна форма. Ще приемем също, че нулевата матрица е в редова ешалонна форма, както и че всяка матрица е в редова 0–ешалонна форма.

Така редовата ешалонна форма е матрица A с $a_{i,k_i} \neq 0$ при $i = 1, \ldots, r$ и с нулеви елементи под всеки елемент a_{i,k_i}. Ако A е в редова s–ешалонна форма, то $a_{i,k_i} \neq 0$ при $i = 1, \ldots, s$. Също така, ако A е в редова ешалонна форма, то $a_{i,j} = 0$ за $i > r$. Ясно е също, че ако A е в редова s–ешалонна форма с $s \geq 1$, то тя е и в редова l–ешалонна форма за $l = 1, \ldots, s - 1$.

Редовата ешалонна форма на A е горно триъгълна матрица, и даже горно трапецовидна матрица когато $k_r > r$, т.е., когато първите r стълба на A са линейно зависими.

Аналогично се дефинират стълбови ешалонни форми. В частност матрицата A е в стълбова ешалонна форма точно когато $A^\top$ е в редова ешалонна форма. По–долу са дадени примери за редови ешалонни форми.

Пример 13.1 Нека $m = 4$, $n = 6$, $r = 3$ и $k_1 = 2$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$. Редови 1,2,3–ешалонни форми са както следва:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \bullet & \times & \times & \times & \times \\ 0 & a & a & \bullet & \times & \times \\ 0 & a & a & b & \bullet & \times \\ 0 & a & a & b & c & c \end{bmatrix}.$$

Във всички тези редови ешалонни форми елементите, отбелязани с $\times$, са произволни, първият стълб на A е нулев, а вторият, четвъртият и петият стълбове на A са линейно независими. В редовата 1–ешалонна форма първият „куршум" $\bullet$ (наричан също *водещ елемент*) е ненулев, а елементите, означени с a, са нулеви. В редовата 2–ешалонна форма първите два куршума са ненулеви, а елементите, означени с a и b, са нулеви. И накрая, в редовата ешалонна форма всичките три куршума са ненулеви, а елементите, означени с a, b и c, са нулеви.

Ако матрицата $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ от ранг r е в редова s–ешалонна форма ($s < m$), то

$$A = \begin{bmatrix} A_s & \times \\ 0 & A_{s+1} \end{bmatrix},$$

където $s \times k_s$ матрицата A_s е в редова ешалонна форма, а $(m-s)\times(n-k_s)$ матрицата A_{s+1} е от ранг $r-s$. По този начин редовите ешалонни форми разкриват последователно ранговата структура на съответната матрица.

Нека е дадена общата $m \times n$ матрица A от ранг r. Тогава можем да конструираме унитарна матрица $Q \in \mathcal{U}(m)$, такава че

$$A = QR, \tag{13.5}$$

където $m \times n$ матрицата R е в редова ешалонна форма. Ще отбележим, че ако $r < m$, то последните $m - r$ реда на матрицата R са нулеви и следователно

$$A = QR = [Q_1, Q_2]\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q_1R_1, \tag{13.6}$$

където R_1 е $r \times n$ матрица от пълен редови ранг, а Q_1 е матрицата, формирана от първите r стълба на Q.

Факторизациите $A = QR$ и $A = Q_1R_1$ се наричат съответно *QR декомпозиция* и *кондензирана QR декомпозиция* на матрицата A.

Понякога се разглежда QR декомпозиция, включваща десен множител, например,

$$A = QR\Pi,$$

където Π е $n \times n$ пермутационна матрица, избрана така, че първите r стълба на $A\Pi$ да бъдат линейно независими.

Използва се също и *триъгълно–унитарната*, или *LQ декомпозиция*

$$A = LP^{\mathrm{H}},$$

където матрицата L е в стълбова ешалонна форма, а $P \in \mathcal{U}(n)$. Когато $r < n$ последните $n - r$ стълба на L са нулеви и

$$A = LP^{\mathrm{H}} = [L_1, 0]\begin{bmatrix} P_1^{\mathrm{H}} \\ P_2^{\mathrm{H}} \end{bmatrix} = L_1P_1^{\mathrm{H}}.$$

Тук L_1 е матрица от пълен стълбов ранг и P_1 е матрицата, формирана от първите r стълба на P.

Когато матрицата A е реална всички матрици в QR и LQ декомпозициите могат да се изберат също реални. При това матриците Q и P са ортогонални.

При някои допълнителни изисквания към матриците R и L, те се оказват канонични форми за действията

$$A \mapsto R = Q^{\mathrm{H}} A$$

и

$$A \mapsto AP$$

на матричните групи $\mathcal{U}(m)$ и $\mathcal{U}(n)$ в множеството $\mathbb{C}^{m\times n}$. Например, за целта е достатъчно да се поиска водещите елементи в R и L да бъдат реални и положителни.

Нека $l_1, \ldots, l_r$ са номерата на първите r линейно независими реда на матрицата A и следователно на матрицата L. Каноничните форми R и L съдържат не повече от

$$r(n+1) - \sum_{i=1}^{r} k_i$$

и

$$r(m+1) - \sum_{i=1}^{r} l_i$$

ненулеви елемента (сред тях r положителни), съответно. Тези елементи формират алгебричната инварианта на матрицата A относно действията на ляво и дясно умножаване на групите $\mathcal{U}(m)$ и $\mathcal{U}(n)$. Генерично е изпълнено $k_i = l_i = i$ и в този случай броят на скаларните алгебрични инварианти е $r(2n-r+1)/2$ и $r(2m-r+1)/2$ съответно.

Наредените целочислени r–торки $(k_1, \ldots, k_r)$ и $(l_1, \ldots, l_r)$ образуват аритметичните инварианти относно разгледаните по–горе действия. Аритметичната и алгебричната инварианти образуват пълно множество от инварианти относно мултипликативните действия на съответната унитарна матрична група.

Един директен краен алгоритъм за пресмятане на QR декомпозицията се основава на следното обстоятелство. Нека A е произволна $m \times n$ матрица и a е нейният първи ненулев стълб. Тогава елементарното отражение H, което трансформира a във вектор $Ha = \alpha \|a\|_2 e_1$, $|\alpha| = 1$, успореден на първия стълб e_1 на единичната матрица I_m, също така трансформира матрицата A в 1–ешалонна форма HA.

По–долу е описан алгоритъм за построяване на QR декомпозицията на матрица, като за удобство на читателя са дадени размерите на съответните подматрици.

На първата стъпка нека H_1 е елементарното отражение, което трансформира матрицата A в редова 1–ешалонна форма,

$$H_1 A = \begin{bmatrix} 0_{1\times(k_1-1)} & \bullet & \times \\ 0_{(m-1)\times(k_1-1)} & 0_{(m-1)\times 1} & A_2 \end{bmatrix},$$

където A_2 е $(m-1)\times(n-k_1)$ матрица от ранг $r-1$.

На втората стъпка нека H_2' е елементарното $(m-1)\times(m-1)$ отражение, което трансформира подматрицата A_2 в редова 1–ешалонна форма. Тогава отражението

$$H_2 := \mathrm{diag}(1, H_2')$$

не засяга първия ред на матрицата H_1A и трансформира подматрицата A_2 в редова 1–ешалонна форма. В резултат матрицата H_2H_1A е в редова 2–ешалонна форма,

$$H_2H_1A$$
$$= \begin{bmatrix} 0_{1\times(k_1-1)} & \bullet & \times & \times & \times \\ 0_{1\times(k_1-1)} & 0 & 0_{1\times(k_2-k_1)} & \bullet & \times \\ 0_{(m-2)\times(k_1-1)} & 0_{(m-2)\times 1} & 0_{(m-2)\times(k_2-k_1)} & 0_{(m-2)\times 1} & A_3 \end{bmatrix},$$

където матрицата A_3 е с размери $(m-2)\times(n-k_2)$ и е от ранг $r-2$.

Продължавайки по същия начин, на s–тата стъпка получаваме матрицата

$$H_s\cdots H_2H_1A,$$

която е в редова s–ешалонна форма, и съответно $(m-s)\times(n-k_s)$ подматрицата A_{s+1} от ранг $r-s$.

На r–тата стъпка процесът се прекъсва, тъй като подматрицата A_{r+1} е нулева (в противен случай рангът на A щеше да надвишава r). Матрицата

$$R := H_r\cdots H_2H_1A$$

е в редова ешалонна форма. Като положим

$$Q := (H_r\cdots H_2H_1)^{\mathrm{H}} = H_1H_2\cdots H_r$$

получаваме желаната QR декомпозиция $A = QR$ на матрицата A.

Като се използва QR декомпозицията на матрица може да се реши следната задача. Нека е дадена $m\times n$ матрицата X с $n<m$ ортонормирани стълбове. Необходимо е да се намери $m\times(m-n)$ матрица Y, такава че матрицата $[X, Y]$ да е унитарна. Решението е елегантно и просто. Ако $X = QR$ е QR е декомпозиция на X, то Y може да се избере като матрицата, формирана от последните $m-n$ стълба на Q.

Ако рангът r на A е по–малък от $\min\{m,n\}$ каноничните форми R и L могат да бъдат още компресирани с допълнителна унитарна трансформация. Така се получава т.нар. QCP декомпозиция, описана по–долу. Нека

$$R_1 = [C_1, 0]P^{\mathrm{H}}$$

е LQ декомпозицията на матрицата R_1 в (13.6). Тогава е в сила *QCP декомпозицията*

$$A = QCP^{\mathrm{H}} = Q\begin{bmatrix} C_1 & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{\mathrm{H}}, \qquad (13.7)$$

където $r \times r$ матрицата C_1 е неособена (тази декомпозиция понякога се нарича *URV декомпозиция*).

QCP декомпозицията може да се запише и в кондензирана форма като

$$A = Q_1 C_1 P_1^{\mathrm{H}},$$

където Q_1 и P_1 са матриците, формирани от първите r стълба на Q и P съответно.

За разлика от декомпозицията по сингулярни стойности, описана по–долу, QCP декомпозицията се получава с помощта на краен брой стъпки и лесно може да бъде актуализирана. Декомпозицията (13.7) също така позволява да се получат (поне теоретично) полярната декомпозиция и декомпозицията по сингулярни стойности.

13.4 Шур декомпозиция

Един от най–полезните резултати в приложната линейна алгебра е следната теорема на Шур (И. Шур, немски математик, 1875–1941), която позволява да се намери спектърът на обща квадратна матрица като се използват само унитарни или ортогонални преобразувания на подобие.

Нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Тогава съществува матрица $U \in \mathcal{U}(n)$, такава че

$$A = UTU^{\mathrm{H}}, \tag{13.8}$$

където

$$T = U^{\mathrm{H}}AU = \begin{bmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{bmatrix}. \tag{13.9}$$

Декомпозицията (13.8), (13.9) се нарича *Шур декомпозиция* на матрицата A.

Диагоналните елементи $t_{i,i}$ на матрицата T са собствените стойности $\lambda_i = \lambda_i(A)$ на A.

Горно триъгълната матрица T се нарича *Шур форма* на A. Стълбовете на унитарната матрица U формират *Шур базата* на $\mathbb{F}^n$ относно A (или, накратко, Шур базата за A). Двойката (T, U) се нарича *Шур система* на матрицата A, вж. също глава 10.

При тази постановка на задачата Шур системата на матрица, и в частност нейната Шур форма, не са еднозначно определени. Поради това тази форма не е канонична, а само кондензирана. От практическа гледна точка няма разлика между кондензираната и каноничната форми. Ще отбележим, че е възможно да се постигне всяко нареждане на собствените стойности на матрицата A по диагонала на Шур формата T, вж. упражнение 13.13.

Когато матрицата A е реална и има само реални собствени стойности, матрицата U може да се избере реална и следователно ортогонална, т.е., $U \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$.

Когато матрицата A е реална, но има поне една двойка комплексно спрегнати собствени стойности, то матрицата U не може да се избере реална, тъй като в този случай Шур формата T, съдържаща комплексни диагонални елементи, е комплексна матрица.

Нека например реалната матрица A има n_1 реални и $2n_2$ комплексни собствени стойности ($n_1 + 2n_2 = n$). Да положим $p = n_1 + n_2$. В този случай съществуват матрица $W \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ и реална блочна горно триъгълна Шур форма

$$T^0 = W^\top A W = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,p} \\ 0 & T_{2,2} & \dots & T_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_{p,p} \end{bmatrix}$$

на A, където блоковете $T_{i,i}$ са 1×1 и са равни на λ_i когато съответстват на реални собствени стойности λ_i, или са с размер 2×2 когато съответстват на комплексно спрегнати собствени стойности $\alpha_i \pm \imath\beta_i$ на A.

Всеки диагонален 2×2 блок на T^0, съответстващ на собствените стойности $\alpha \pm \imath\beta$, може допълнително да се редуцира до една от формите

$$\begin{bmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \alpha \end{bmatrix}, \ \gamma\delta = -\beta^2$$

или

$$\begin{bmatrix} \gamma & -\beta \\ \beta & \delta \end{bmatrix}, \ \gamma + \delta = 2\alpha,$$

вж. упражнение 13.15.

Съществуването на Шур декомпозицията на матрица се доказва с индукция по размера n. Да разгледаме за определеност комплексната Шур форма (13.9). При $n = 1$ Шур формата на A е самата A и като така съществува. Да предположим, че Шур системата съществува при всички размери до $n - 1$ включително, където $n \geq 2$ е дадено натурално число. Нека λ е собствена стойност на $n \times n$ матрицата A и $x \in \mathbb{C}^n$ е съответният нормиран собствен вектор, т.е.,

$$Ax = \lambda x, \ \|x\|_2 = 1.$$

Да разгледаме унитарната матрица $U = [x, V]$, чиито първи стълб е x (такава матрица беше конструирана по–горе). Непосредствено се проверява, че

$$AU = U \begin{bmatrix} \lambda & \times \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

където A_2 е $(n - 1) \times (n - 1)$ матрица, а $\times$ е някакъв матричен блок. Нека $A_2 = U_2 T_2 U_2^{\mathrm{H}}$ е Шур декомпозицията на A_2, която съществува по силата на индуктивното предположение. Тогава матрицата

$$\begin{aligned} T &:= \operatorname{diag}\left(1, U_2^{\mathrm{H}}\right) U^{\mathrm{H}} A U \operatorname{diag}(1, U_2) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & \times \\ 0 & U_2^{\mathrm{H}} A_2 U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \times \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

е горно триъгълна и следователно е Шур форма на A.

Така доказахме съществуването на Шур декомпозицията на произволна квадратна матрица. Доказателството, обаче, не е конструктивно. Ние използвахме факта, че съществува собствена стойност λ на матрицата A, но не я пресметнахме. Някои трудности при пресмятането на собствените стойности на обща матрица са разгледани по–долу.

За разлика от QR декомпозицията, Шур декомпозицията на обща матрица не може да бъде построена чрез краен брой алгебрични операции (т.е., аритметични операции и коренуване). Това е принципно ограничение, което следва от знаменитата теорема на Абел[1]–Руфини[2]–Галуа[3], според която корените на общо алгебрично уравнение от степен ≥ 5 не могат да се изразят чрез коефициентите му с помощта на краен брой алгебрични операции.

Наистина, ако предположим, че обща $n \times n$ матрица с $n \geq 5$ може да се преобразува в Шур форма чрез краен брой алгебрични операции, то това ще е в сила и за т.нар. *съпровождаща матрица*

$$C_p := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

на общия полином

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

от n–та степен. Но собствените стойности $\lambda_i(C_p)$ на матрицата C_p са корените на полинома p, които не могат да се пресметнат чрез крайна алгебрична процедура. Следователно всеки алгоритъм за пресмятане на Шур декомпозицията на обща матрица от ред $n > 4$ по необходимост трябва да е итеративен. Пример за такъв алгоритъм е знаменитият QR алгоритъм на Франсиз–Кублановская (разработен през 1959–1963), който е обобщение на алгоритъма на Рутисхаузер от 1950.

Накратко QR алгоритъмът изглежда така. Да означим $A_1 = A$ и нека $A_1 = Q_1 R_1$ е QR декомпозицията на A_1, където матрицата Q_1 е унитарна и матрицата R_1 е горно триъгълна. По–нататък да положим $A_2 = R_1 Q_1$ и нека $A_2 = Q_2 R_2$ е QR декомпозицията на матрицата A_2.

---

[1] Н. Абел, норвежки математик, 1802-1829.

[2] П. Руфини, италиански математик, 1765-1822.

[3] Е. Галуа, френски математик, 1811-1832.

Аналогично, нека на k–тата стъпка сме получили матрицата A_k, чиято QR декомпозиция е $A_k = Q_k R_k$. Тук матрицата Q_k е унитарна и матрицата R_k е горно триъгълна. Полагаме $A_{k+1} = R_k Q_k$ и преминаваме към следващата стъпка.

Лесно се вижда, че

$$A_{k+1} = U_k^{\mathrm{H}} A U_k,\ U_k := Q_1 Q_2 \cdots Q_k.$$

Следователно матрицата A_{k+1} е унитарно подобна на първоначалната матрица A. При известни условия редицата $\{A_k\}$ е сходяща към някоя от Шур формите на A.

Разбира се, QR алгоритъмът не се прилага в тази опростена форма, тъй като скоростта на сходимост на описания рекурентен процес е много бавна. Поради това се предлагат различни подобрения. Например, като предварителна стъпка матрицата A се привежда в т.нар. *форма на Хесенберг*. Формата на Хесенберг е матрица $H = [h_{i,j}]$, такава че $h_{i,j} = 0$ при $i > j+1$.

Пример 13.2 При $n = 5$ формата на Хесенберг има вида

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

Когато матрицата A е нормална, т.е., $A^{\mathrm{H}} A = A A^{\mathrm{H}}$, то нейната Шур форма T в (13.9) е диагонална,

$$T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),\ \lambda_i = \lambda_i(A).$$

Действително, от равенствата

$$A^{\mathrm{H}} A = U T^{\mathrm{H}} T U^{\mathrm{H}},\ A A^{\mathrm{H}} = U T T^{\mathrm{H}} U^{\mathrm{H}}$$

следва, че матрицата A е нормална точно когато нейната Шур форма $T = [t_{i,j}]$ също е нормална, т.е.,

$$T^{\mathrm{H}} T = T T^{\mathrm{H}}.$$

Ако положим

$$t = [t_{1,2}, \ldots, t_{1,n}] \in \mathbb{F}^{1\times(n-1)},$$

то с непосредствено пресмятане се показва, че елементът $(1,1)$ на $T^{\mathrm{H}} T$ е $|t_{1,1}|^2$, докато елементът $(1,1)$ на $T T^{\mathrm{H}}$ е $|t_{1,1}|^2 + \|t\|_2^2$. Тъй като тези елементи са равни, то $t = 0$ и T трябва да бъде от вида

$$T = \mathrm{diag}(t_{1,1}, T_2),$$

където T_2 е $(n-1)\times(n-1)$ горно триъгълна матрица. Но сега е ясно, че нормалността на T е еквивалентна на нормалност на T_2. Следователно $T_2 = \mathrm{diag}(t_{2,2}, T_3)$ и

$$T = \mathrm{diag}(t_{1,1}, t_{2,2}, T_3),$$

където T_3 е матрица с размери $(n-2)\times(n-2)$. След общо $n-1$ такива стъпки стигаме до заключението, че матрицата T е диагонална,

$$T = \mathrm{diag}(t_{1,1}, t_{2,2}, \ldots, t_{n,n}).$$

Шур декомпозицията позволява да се пресметнат стойностите на аналитична функция от нормална матрица (в случай на общи матрици се използва декомпозицията на Жордан).

Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е аналитична функция,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k,\ z \in D,$$

в областта $D \subset \mathbb{C}$, съдържаща спектъра на нормалната $n \times n$ матрица A, чиято Шур декомпозиция е $A = UTU^{\mathrm{H}}$. С оглед нормалността на A матрицата T е диагонална. Сега можем да определем матричната функция f както следва

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (A - aI_n)^k,\ \mathrm{spect}(A) \subset D.$$

Изразът $f(A)$ е коректно определен когато величината $\|A - aI_n\|$ е по–малка от разстоянието между точката $a \in \mathbb{C}$ и границата на областта D. Тъй като $A^k = UT^kU^{\mathrm{H}}$, то можем да пресметнем $f(A)$ от

$$f(A) := Uf(T)U^{\mathrm{H}},$$

където

$$f(T) := \mathrm{diag}(f(t_{1,1}), f(t_{2,2}), \ldots, f(t_{n,n})).$$

Когато матрицата A е ермитова и неотрицателно определена, то нейната Шур форма T е реална диагонална матрица с неотрицателни елементи и ние можем да пресметнем неотрицателно определения *квадратен корен* на A от

$$A^{1/2} := U\mathrm{diag}\left(\sqrt{t_{1,1}}, \sqrt{t_{2,2}}, \ldots, \sqrt{t_{n,n}}\right)U^{\mathrm{H}}.$$

13.5 Полярна декомпозиция

Като пряко следствие на QR и Шур декомпозициите се получава и т.нар. полярна декомпозиция на квадратната матрица A. Да предположим първо, че матрицата A е неособена. Тогава матриците $A^{\mathrm{H}}A$ и AA^{H} са ермитови положително определени и в частност нормални. Да разгледаме матрицата

$$U_l := A(A^{\mathrm{H}}A)^{-1/2}.$$

Имаме

$$\begin{aligned} U_l U_l^{\mathrm{H}} &= A(A^{\mathrm{H}}A)^{-1/2}(A^{\mathrm{H}}A)^{-1/2}A^{\mathrm{H}} \\ &= A(A^{\mathrm{H}}A)^{-1}A^{\mathrm{H}} = AA^{-1}A^{-\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}} = I_n \end{aligned}$$

и следователно матрицата U_l е унитарна. Така получаваме представянето

$$A = U_l(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}, \tag{13.10}$$

където матрицата $(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}$ е ермитова положително определена.

Декомпозицията (13.10) се нарича *полярна декомпозиция* на матрицата A.

Съществува аналогична полярна декомпозиция, определена от

$$A = (AA^{\mathrm{H}})^{1/2}U_r, \tag{13.11}$$

където $(AA^{\mathrm{H}})^{1/2}$ е ермитова положително определена матрица, а матрицата

$$U_r := (AA^{\mathrm{H}})^{-1/2}A$$

е унитарна.

Декомпозициите (13.10) и (13.11) са обобщения на полярната декомпозиция

$$z = \sqrt{z\overline{z}}\exp(\imath\varphi) = |z|\exp(\imath\varphi)$$

на комплексното число $z \neq 0$, откъдето идва и тяхното наименование.

Декомпозиции от вида (13.10) и (13.11) са в сила и когато $n\times n$ матрицата A е особена от ранг $r < n$. Тук ермитовите множители са ермитови неотрицателно определени матрици, а унитарните множители са определени по специален начин. Действително, в този случай кондензираната форма (13.7) е

$$A = Q\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{\mathrm{H}} = Q_1C_1P_1^{\mathrm{H}},$$

където

$$P = [P_1, P_2],\ Q = [Q_1, Q_2] \in \mathcal{U}(n),$$

матриците Q_1 и P_1 са с размер $n \times r$ и $r \times r$ матрицата C_1 е неособена.

С непосредствено пресмятане се убеждаваме в съществуването на полярните декомпозиции

$$\begin{aligned} A &= V_l(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}, \qquad (13.12) \\ V_l &:= \left[Q_1C_1\left(C_1^{\mathrm{H}}C_1\right)^{-1/2}, Q_2\right]P^{\mathrm{H}} \in \mathcal{U}(n) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} A &= (AA^{\mathrm{H}})^{1/2}V_r, \qquad (13.13) \\ V_r &:= Q\left[P_1C_1^{\mathrm{H}}\left(C_1C_1^{\mathrm{H}}\right)^{-1/2}, P_2\right]^{\mathrm{H}} \in \mathcal{U}(n). \end{aligned}$$

Ще отбележим, че

$$(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2} = P \begin{bmatrix} \left(C_1^{\mathrm{H}}C_1\right)^{1/2} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{\mathrm{H}}$$

и

$$(AA^{\mathrm{H}})^{1/2} = Q \begin{bmatrix} \left(C_1C_1^{\mathrm{H}}\right)^{1/2} & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} Q^{\mathrm{H}}.$$

Полярна декомпозиция може да се дефинира и за случая на правоъгълна матрица като произведение на ермитова матрица и на матрица с ортонормирани стълбове или редове. Например когато матрицата A е правоъгълна и от пълен стълбов ранг, в сила е релацията (13.10), където матрицата U_l е правоъгълна и с ортонормирани стълбове. Аналогично, когато матрицата A е правоъгълна и от пълен редови ранг, то е в сила зависимостта (13.11), в която U_r е правоъгълна матрица с ортонормирани редове.

За реални матрици са в сила подобни резултати, като думата 'ермитова' трябва да се замени със 'симетрична', а думата 'унитарна' – с 'ортогонална'. Съответно операцията ермитово спрягане трябва да се замени с операцията транспониране.

Препоръчваме на читателя като упражнение да формулира различните полярни декомпозиции в реалния случай.

13.6 Декомпозиция по сингулярни стойности

Като следствие на QR декомпозицията, Шур декомпозицията и полярната декомпозиция може да се изведе т.нар. декомпозиция по сингулярни стойности на обща правоъгълна матрица. Последната декомпозиция намира широко теоретично и практическо приложение.

Декомпозиция по сингулярни стойности на $m \times n$ матрицата A е произведението

$$A = USV^{\mathrm{H}}$$

когато A е комплексна, или

$$A = USV^{\top}$$

когато A е реална, където матриците U, V са унитарни в комплексния случай и ортогонални в реалния случай. И в двата случая матрицата S е реална диагонална с неотрицателни диагонални елементи, наредени в нерастяща последователност.

Матрицата S е канонична форма на A за описаното по–горе действие на групите $\mathcal{U}(m) \times \mathcal{U}(n)$ или $\mathcal{O}(m,\mathbb{R}) \times \mathcal{O}(n,\mathbb{R})$.

Точното описание на S зависи от числата m, n и $r = \mathrm{rank}(A)$. В тривиалния случай $A = 0_{m\times n}$ имаме $S = 0_{m\times n}$. Когато $r \geq 1$ имаме четири възможности: $r = m = n$, $r = n < m$, $r = m < n$ и $r < \min\{m,n\}$ както следва.

1. Случай $r = m = n$. Да разгледаме полярната декомпозиция

$$A = U_l(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}$$

на A, където

$$U_l = A(A^{\mathrm{H}}A)^{-1/2}.$$

Тъй като матрицата $(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}$ е ермитова положително определена, нейната Шур декомпозиция е

$$(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2} = V\Sigma V^{\mathrm{H}},$$

където $V \in \mathcal{U}(n)$ и

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \ \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0.$$

Така получихме декомпозицията по сингулярни числа

$$A = USV^{\mathrm{H}}, \ S = \Sigma,$$

където $U := U_l V \in \mathcal{U}(n)$, а матрицата

$$U_l = A(A^{\mathrm{H}}A)^{-1/2} \in \mathcal{U}(n)$$

е левият унитарен множител в полярната декомпозиция

$$A = U_l(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}$$

на матрицата A. По този начин доказахме съществуването на декомпозицията по сингулярни числа на квадратни неособени матрици.

2. Случай $r = n < m$. Тук QR декомпозицията на A е

$$A = QR = Q_1 R_1,$$

където

$$Q = [Q_1, Q_2] \in \mathcal{U}(m),$$

матрицата Q_1 е $m \times n$, а $n \times n$ горно триъгълната матрица R_1 е неособена. Нека $R_1 = U_1 \Sigma V^{\mathrm{H}}$ е декомпозицията по сингулярни стойности на R_1, където $U_1, V \in \mathcal{U}(n)$. Тогава декомпозицията по сингулярни стойности на A е

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0_{m-n} \end{bmatrix} V^{\mathrm{H}},$$

където

$$U := [Q_1 U_1, Q_2].$$

3. Случай $r = m < n$. LQ декомпозицията на A тук е

$$A = LP^{\mathrm{H}} = L_1 P_1^{\mathrm{H}},$$

където

$$P = [P_1, P_2] \in \mathcal{U}(n),$$

матрицата P_1 е с размер $n \times m$, а $m \times m$ долно триъгълната матрица L_1 е неособена. Нека $L_1 = U\Sigma V_1^{\mathrm{H}}$ е декомпозицията по сингулярни стойности на L_1, където $U, V_1 \in \mathcal{U}(m)$. Тогава декомпозицията по сингулярни стойности на A е

$$A = U[\Sigma, 0_{n-m}]V^{\mathrm{H}},$$

където

$$V := [P_1V_1, P_2].$$

4. Случай $r < \min\{m,n\}$. Да разгледаме компресираната QCP декомпозиция

$$A = QCP^{\mathrm{H}} = Q_1C_1P_1^{\mathrm{H}}$$

от (13.7), където матриците Q_1 и P_1 са формирани от първите r стълба на Q и P съответно. Нека $A_1 = U_1\Sigma V_1^{\mathrm{H}}$ е декомпозицията по сингулярни стойности на неособената $r \times r$ матрица A_1. Тогава декомпозицията по сингулярни стойности на матрицата A е

$$A = USV^{\mathrm{H}} = U \begin{bmatrix} \Sigma & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} V^{\mathrm{H}}, \tag{13.14}$$

където

$$U := [Q_1U_1, U_2],\ P = [P_1V_1, P_2].$$

Декомпозицията по сингулярни стойности на обща матрица A може винаги да се запише във вида (13.14), където всяка от посочените като нулеви $0_{p\times q}$ матрици се приема за празна когато $p = 0$ или $q = 0$.

Ще отбележим, че декомпозицията по сингулярни стойности намира приложение в много задачи на линейната алгебра, например при пресмятането на ранг на матрица, решаването на линейни алгебрични уравнения и задачи за най–малки квадрати и др.

Числата

$$\sigma_i = \sigma_i(A) \geq 0$$

се наричат *сингулярни стойности* на матрицата A. Техният брой е $\min\{m,n\}$. Първите r от тях, където $r = \mathrm{rank}(A)$, са положителни. Когато $r < \min\{m,n\}$ останалите сингулярни стойности са нулеви. Положителните сингулярни стойности на A са равни на положителните собствени стойности на матриците $(A^{\mathrm{H}}A)^{1/2}$ или $(AA^{\mathrm{H}})^{1/2}$.

Тъй като

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{H}}A &= V\mathrm{diag}(\Sigma^2, 0_{(n-r)\times(n-r)})V^{\mathrm{H}}, \\ AA^{\mathrm{H}} &= U\mathrm{diag}(\Sigma^2, 0_{(m-r)\times(m-r)})U^{\mathrm{H}}, \end{aligned}$$

то U и V са модалните матрици (матриците от нормирани собствени вектори) на $A^{\mathrm{H}}A$ и AA^{H} съответно. Стълбовете на U и V се наричат *леви* и *десни сингулярни вектори* съответно на матрицата A. [4]

[4] Терминът „сингулярен" не изглежда особено подходящ, тъй като няма нищо сингулярно (т.е., особено) в декомпозицията по сингулярни стойности.

Като се използват левите и десните сингулярни вектори, декомпозицията по сингулярни стойности на матрицата A може да се запише като

$$A = U_1 \Sigma V_1^{\mathrm{H}} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^{\mathrm{H}},$$

където $r = \mathrm{rank}(A)$. Тук матриците U, V са разделени на блокове като $U = [U_1, U_2]$ и $V = [V_1, V_2]$, при което матрицата U_1 е $m \times r$, а матрицата V_1 е $n \times r$.

Оттук получаваме следните ортонормирани бази на подпространствата $\mathrm{Rg}(A)$ и $\mathrm{Ker}(A)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(A) &= \mathrm{Rg}(U_1) = \mathrm{Ker}\left(U_2^{\mathrm{H}}\right), \\ \mathrm{Ker}(A) &= \mathrm{Ker}\left(V_1^{\mathrm{H}}\right) = \mathrm{Rg}(V_2). \end{aligned}$$

13.7 Псевдообратна матрица

Декомпозицията по сингулярни стойности се използва и при пресмятане на т.нар. псевдообратна матрица на произволна матрица.

До този момент ние дефинирахме обратната матрица на квадратна матрица от пълен ранг, дясната обратна матрица на матрица от пълен редови ранг и лявата обратна матрица на матрица от пълен стълбов ранг. Обобщение на тези понятия за случая на произволна матрица е дадено по–долу.

Да разгледаме първо сингулярната декомпозиция (13.14), където $1 \leq r \leq \min\{m, n\}$. Както обикновено, матриците $0_{p\times 0}$ или $0_{0\times q}$ се приемат за празни.

Матрицата

$$A^{\dagger} := V S^{\dagger} U^{\mathrm{H}} := V \begin{bmatrix} \Sigma^{-1} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} U^{\mathrm{H}} \tag{13.15}$$

с размер $n \times m$ се нарича *псевдообратна матрица* на $m \times n$ матрицата A от ранг $r \geq 1$. Също така по определение се приема

$$0_{m\times n}^{\dagger} = 0_{n\times m}.$$

Съществуват и други определения за псевдообратни матрици, поради което описаната по–горе псевдообратна матрица се нарича още *нормална псевдообратна*, или *псевдообратна по Мур–Пенроуз*.

Псевдобратната матрица съществува за всяка матрица, включително за нулевата матрица. Когато матрицата е неособена, нейната обратна и псевдообратна матрици съвпадат.

Операцията псевдообръщане е инволютивна,

$$(A^{\dagger})^{\dagger} = A.$$

За някои други свойства на псевдообратната матрица вж. упражнения 13.18 – 13.20.

13.8 Упражнения

Упражнение 13.1 Покажете, че има само два вида реални ортогонални 2×2 матрици, а именно *ротации*

$$R(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

на ъгъл φ в равнината $\mathbb{R}^2$ на векторите $x = [x_1, x_2]^\top$, и *отражения*

$$S(\theta) := \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}$$

относно правата

$$x_1 \sin(\theta) + x_2 \cos(\theta) = 0.$$

Упражнение 13.2 Една комплексна ортогонална 2×2 матрица може да се представи като $R(z)$, където $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ и R е определено в упражнение 13.1. Ограничена ли е нормата на $R(z)$?

Упражнение 13.3 Нека $R(z)$ е както в упражнение 13.2. Покажете, че

$$\|R(z)\|_{\mathrm{F}} = \sqrt{2\coth(2y)}$$

и $\|R(z)\|_2 = \exp y$. Така за голямо $y > 0$ имаме асимптотиката

$$\|R(z)\|_{\mathrm{F}} = \exp y + O(\exp(-3y)),\ \ y \to \infty.$$

Коментирайте този резултат. Упътване: Използвайте равенствата

$$\sin z = \sin x \cosh y + \imath \cos x \sinh y$$

и

$$\cos z = \cos x \cosh y - \imath \sin x \sinh y$$

за да докажете, че

$$\begin{aligned} |\sin z|^2 &= \sin^2 x + \sinh^2 y, \\ |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \sinh^2 y \end{aligned}$$

и следователно

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \cosh(2y).$$

Упражнение 13.4 Представете общата 3×3 реална ортогонална матрица U с $\det(U) = 1$ като произведение на три равнинни ротации $R(1,2)$, $R(1,3)$ и $R(2,3)$ от $\mathcal{O}(3,\mathbb{R})$.

Упражнение 13.5 Покажете, че унитарните 2×2 матрици имат вида

$$\mathrm{diag}(\exp(\imath\alpha), 1) R(\varphi) \mathrm{diag}(\exp(\imath\beta), \exp(\imath\gamma)),$$

където α, β, γ и φ са произволни реални параметри.

Упражнение 13.6 Покажете, че ако матрицата U е ортогонална, то $\det(U) = \pm 1$, а ако е унитарна, то $|\det(U)| = 1$.

Упражнение 13.7 Покажете, че комплексната унитарна група $\mathcal{U}(n)$, комплексната ортогонална група $\mathcal{O}(n, \mathbb{C})$ и реалната ортогонална група $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ са (изоморфни на) реални аналитични многообразия с размерности n^2, $n(n-1)$ и $n(n-1)/2$ съответно.

Упражнение 13.8 Покажете, че всяка матрица $U \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ с $\det(U) = 1$ може да се представи като произведение на $n(n-1)/2$ елементарни ротации $R_{ij}(\varphi_{ij})$ в равнините (i, j), където $\varphi_{ij} \in [0, 2\pi)$, $j = 1, \ldots, n-1$, $i = j+1, \ldots, n$. Полученото произведение зависи от $n(n-1)/2$ реални параметъра φ_{ij}.

Упражнение 13.9 Покажете, че всяка матрица $U \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$ с $\det(U) = -1$ може да се представи като произведение от $n(n-1)/2$ елементарни ротации както в упражнение 13.9, и от матрицата $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$.

Упражнение 13.10 Покажете, че всяка реална ортогонална матрица може да се представи като произведение на елементарни отражения.

Упражнение 13.11 Обобщете резултатите от упражнение 13.8 за унитарни матрици U. Вярно ли е, че всяка комплексна ортогонална матрица може да се представи като произведение от $n(n-1)/2$ комплексни ротации $R_{ij}(z_{ij})$ (евентуално с допълнителен множител $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$)?

Упражнение 13.12 Нека $n \geq 2$ и $1 \leq k < n$ са дадени цели числа и $\mathcal{U}_k(n)$ е множеството на комплексните $n \times n$ матрици U, такива че $U^{\mathrm{H}} J_k U = J_k$, където $J_k := \mathrm{diag}(I_k, -I_{n-k})$. Покажете, че $\mathcal{U}_k(n)$ е мултипликативна матрична група. Опишете групата $\mathcal{U}_k(n) \cap \mathcal{U}(n)$.

Разгледайте подобна задача за множеството $\mathcal{O}_k(n, \mathbb{R})$ на ортогоналните $n \times n$ матрици U, такива че $U^{\top} J_k U = J_k$.

Упражнение 13.13 Намерете унитарна 2×2 матрица U, такава че

$$U^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} \lambda_2 & \times \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},$$

където $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Упражнение 13.14 Намерете ортогонални матрици с размери 3×3 и 4×4, които при действие на подобие разместват диагоналните блокове на матриците

$$\begin{bmatrix} t_1 & \times \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_1 & \times \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}.$$

Тук t_1 е скалар, T_1 и T_2 са 2×2 матрици с непресичащи се спектри и t_1 не е собствена стойност на T_1.

Упражнение 13.15 Покажете, че ако реалната 2×2 матрица A има двойка комплексно спрегнати собствени стойности, то тя може да се приведе в каноничната форма

$$B = [b_{i,j}] = W^\top AW, \ W \in \mathcal{O}(2, \mathbb{R}),$$

с $b_{1,1} = b_{2,2}$ и намерете израз за матрицата W. Направете същото за канонична форма B с $b_{1,2} + b_{2,1} = 0$.

Упражнение 13.16 Покажете, че

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \sigma_1(A), \\ \|A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\sigma_1^2(A) + \cdots + \sigma_r^2(A)}, \quad r = \mathrm{rank}(A), \end{aligned}$$

и следователно

$$\|A\|_{\mathrm{F}} \leq \sqrt{r}\, \|A\|_2.$$

Упражнение 13.17 Покажете, че ако $n \times n$ матрицата A е неособена, то

$$\sigma_i(A^{-1}) = \frac{1}{\sigma_{n-i+1}(A)}$$

и

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sigma_n(A)}, \ \|A\|_{\mathrm{F}} \geq \frac{\sqrt{n}}{\|A^{-1}\|_2}.$$

Упражнение 13.18 Покажете, че псевдообратната матрица $A^\dagger$ на матрицата A удовлетворява уравненията $AXA = A$ и $XAX = X$.

Упражнение 13.19 Покажете, че всички решения на задачата за най–малки квадрати

$$\min\{\|Ax - b\|_2 : x \in \mathbb{F}^n\}$$

се дават от формулата

$$x = A^\dagger b + \left(I_n - A^\dagger A\right) c,$$

където векторът $c \in \mathbb{F}^n$ е произволен. Докажете, че ако се наложи допълнителното изискване нормата $\|x\|_2$ на решението да е минимална, то решението на задачата е $x_0 = A^\dagger b$ и е единствено.

Упражнение 13.20 Покажете, че псевдообратната матрица $A^\dagger$ на $m \times n$ матрицата A може да се дефинира като (единствената) $n \times m$ матрица X, такава че решението с минимална норма на задачата за най–малки квадрати от упражнение 13.19 може да се представи като $x_0 = Xb$ за всяко $b \in \mathbb{F}^m$.

Глава 14

ПРОИЗВЕДЕНИЕ НА КРОНЕКЕР

14.1 Уводни бележки

В тази глава са представени сведения за кронекеровото (или тензорното) произведение на матрици. Това произведение е много полезен инструмент при решаване на линейни матрични уравнения и на други задачи на линейната алгебра.

По–долу често се срещат стандартни произведения и суми на две или повече матрици. Във всички такива случаи без допълнителни уговорки се предполага, че размерите на участващите матрици позволяват коректно изпълнение на съответните операции.

14.2 Определения и свойства

Нека са дадени матриците $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{F}^{p\times q}$.

Матрицата

$$A \otimes B := [a_{i,j}B] = \begin{bmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \dots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \dots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & a_{m,2}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{mp\times nq}$$

се нарича *кронекерово произведение* (или *тензорно произведение*) на матриците A и B (Л. Кронекер, немски математик, 1823-1891).

Кронекеровото произведение $A\otimes B$ е $m\times n$ блочна матрица, чиито (i,j)–блок е $p\times q$ матрицата $a_{i,j}B$. В горното представяне A може на свой ред да е блочна матрица като определението остава в сила когато $a_{i,j}$ са произволни $m_i \times n_j$ матрици.

Ще отбележим, че тук не се налагат никакви ограничения върху размерите на матриците A и B с оглед на това матрицата $A \otimes B$ да е коректно определена.

Обикновено стандартното матрично умножение, кронекеровото умножение и стандартното матрично сумиране се считат за матрични операции с намаляващ приоритет. Така например изразът

$$E = ((AB) \otimes C) + D$$

се записва без скоби като

$$E = AB \otimes C + D.$$

Независимо от това, за да избегнем недоразумения ще приемем, че умноженията имат еднакъв приоритет като алгебрични операции. Това в частност означава, че горният израз се записва като

$$E = (AB) \otimes C + D.$$

Някои важни приложения на кронекеровото произведение при решаване на матрични уравнения се основават на стълбовото векторно представяне на произведението AXB, а именно

$$\mathrm{vec}(AXB) = (B^\top \otimes A)\mathrm{vec}(X). \tag{14.1}$$

В частност имаме

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(AX) &= (I_n \otimes A)\mathrm{vec}(X), \\ \mathrm{vec}(XB) &= \left(B^\top \otimes I_m\right)\mathrm{vec}(X). \end{aligned}$$

Оттук като следствие получаваме

$$\begin{aligned} \|AX\|_{\mathrm{F}} &= \|\mathrm{vec}(AX)\|_2 = \|(I_n \otimes A)\mathrm{vec}(X)\|_2 \\ &\leq \|I_n \otimes A\|_2 \|\mathrm{vec}(X)\|_2 = \|A\|_2 \|X\|_{\mathrm{F}}. \end{aligned}$$

Тук беше използвано равенството

$$I_n \otimes A = \mathrm{diag}(A, \ldots, A),$$

от което следва

$$\|I_n \otimes A\|_2 = \|A\|_2.$$

Аналогично имаме

$$\|XB\|_{\mathrm{F}} = \|B^\top X^\top\|_{\mathrm{F}} \leq \|B\|_2 \|X\|_{\mathrm{F}}$$

и

$$\|AXB\|_{\mathrm{F}} \leq \|A\|_2 \|XB\|_{\mathrm{F}} \leq \|A\|_2 \|C\|_2 \|X\|_{\mathrm{F}}.$$

Обобщението (13.1) на този резултат за произведение на произволен брой матрици е непосредствено.

Ако матрицата X е с размер $m \times n$, то

$$\mathrm{vec}(X^\top) = \Pi(m,n)\mathrm{vec}(X),$$

където $\Pi(m,n) \in \mathbb{R}^{mn\times mn}$ е пермутационна матрица, наречена *век–пермутационна матрица*. Тя притежава свойството

$$\Pi^\top(m,n) = \Pi(n,m). \tag{14.2}$$

Матриците $A \otimes B$ и $B \otimes A$ имат еднакъв размер $mp \times nq$. Това не е в сила за стандартното матрично произведение, където някое от произведенията AB или BA може да не е дефинирано, или пък и двете произведения могат да са дефинирани, но да имат различни размери.

В общия случай кронекеровото произведение не е комутативно, т.е., възможно е

$$A \otimes B \neq B \otimes A.$$

Освен това

$$A \neq I \otimes A, \; A \neq A \otimes I$$

с изключение на случая, когато I е числото 1.

Кронекеровото произведение е асоциативно и дистрибутивно относно стандартното сумиране:

$$\begin{aligned} (A\otimes B)\otimes C &= A\otimes(B\otimes C) = A\otimes B\otimes C, \qquad (14.3)\\ (A+B)\otimes C &= A\otimes C + B\otimes C,\\ C\otimes(A+B) &= C\otimes A + C\otimes B. \end{aligned}$$

Една фундаментална зависимост между стандартното матрично произведение и кронекеровото произведение е

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = (AC)\otimes(BD). \tag{14.4}$$

Освен това имаме

$$\begin{aligned} (A\otimes B)^\top &= A^\top \otimes B^\top, \qquad (14.5)\\ \overline{A\otimes B} &= \overline{A}\otimes\overline{B},\\ (A\otimes B)^{\mathrm{H}} &= A^{\mathrm{H}}\otimes B^{\mathrm{H}}. \end{aligned}$$

Когато матриците A и B са квадратни и неособени, то и тяхното кронекерово произведение $A \otimes B$ е квадратна неособена матрица, като

$$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}. \tag{14.6}$$

Пример 14.1 Нека матриците A и B са неособени, като $A = [a_{i,j}]$ е с размер 2×2. Тогава

$$(A\otimes B)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left[\begin{array}{cc} a_{2,2}B^{-1} & -a_{1,2}B^{-1} \\ -a_{2,1}B^{-1} & a_{1,1}B^{-1} \end{array}\right].$$

Транспонирането и обръщането на кронекеровото произведение не променя реда на множителите за разлика от стандартното произведение, при което имаме $(AB)^\top = B^\top A^\top$ и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. За променим реда на множителите в едно кронекерово произведение можем да използваме формулата

$$(A \otimes B)\Pi(n, q) = \Pi(m, n)(B \otimes A), \tag{14.7}$$

или

$$A \otimes B = \Pi(m, n)(B \otimes A)\Pi(q, n).$$

Като използваме (14.7) можем да получим израз, подобен на (14.1), за векторното редово представяне на произведението AXB. Да означим с

$$\mathrm{row}(X) = [x_{1\bullet}, x_{2\bullet}, \dots, x_{m\bullet}] \in \mathbb{F}^{1\times mn}$$

редовата векторизация на $m \times n$ матрицата X с редове $x_{i\bullet} \in \mathbb{F}^{1\times n}$. Имаме

$$\mathrm{row}(X) = \mathrm{vec}^\top(X^\top) = \mathrm{vec}^\top(X)\Pi(n, m).$$

Като вземем редова векторизация от двете страни на равенството $Y := AXB$ получаваме следния редови аналог на знаменитата формула (14.1):

$$\mathrm{row}(AXB) = \mathrm{row}(X)(A^\top \otimes B). \tag{14.8}$$

Сингулярните стойности на матрицата $A\otimes B$ са произведенията $\sigma_i(A)\sigma_k(B)$, където $\sigma_i(A)$ и $\sigma_k(B)$ са сингулярните стойности на A и B съответно. Действително, нека $A = U_A S_A V_A^{\mathrm{H}}$ и $B = U_B S_B V_B^{\mathrm{H}}$ са декомпозициите по сингулярни стойности на матриците A и B. Тогава

$$A \otimes B = (U_A \otimes U_B)(S_A \otimes S_B)\left(V_A^{\mathrm{H}} \otimes V_B^{\mathrm{H}}\right)$$

е декомпозицията по сингулярни стойности на кронекеровото произведение $A \otimes B$ (с точност до евентуално пренареждане на диагонала на матрицата $S_A \otimes S_B$). Тъй като матриците S_A и S_B са диагонални с диагонални елементи $\sigma_i(A)$ и $\sigma_k(B)$ съответно, то диагоналните елементи на матрицата $S_A \otimes S_B$ са всевъзможните произведения $\sigma_i(A)\sigma_k(B)$.

Аналогично, ако $A \in \mathbb{F}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$, то собствените стойности на кронекеровото произведение $A \otimes B$ са всевъзможните произведения $\lambda_i(A)\lambda_k(B)$, където $\lambda_i(A)$ и $\lambda_k(B)$ са собствените стойности на A и B съответно. Действително, нека $A = W_A T_A W_A^{\mathrm{H}}$ е Шур декомпозицията на A. Тогава

$$A \otimes B = (W_A \otimes I_n)(T_A \otimes B)\left(W_A^{\mathrm{H}} \otimes I_n\right)$$

и следователно собствените стойности на $A \otimes B$ са тези на $T_A \otimes B$. Но $T_A \otimes B$ блочна горно триъгълна матрица с диагонални блокове $\lambda_i(A)B$. Всеки от тези блокове има спектър $\lambda_i(A)\mathrm{spect}(B)$. Обединението на тези спектри (с отчитане на алгебричните кратности на елементите на спектрите) е множеството на всевъзможните произведения $\lambda_i(A)\lambda_k(B)$.

Нека сега $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Кронекерова сума* на матриците B и A е матрицата

$$B \oplus A := B \otimes I_m + I_n \otimes A \in \mathbb{C}^{mn\times mn}.$$

Ще отбележим, че кронекеровото сумиране не е комутативно, т.е., възможно е

$$B \oplus A \neq A \oplus B.$$

Собствените стойности на матрицата $B \oplus A$ са всевъзможните суми $\lambda_i(A) + \lambda_k(B)$. Действително, нека $B = W_B T_B W_B^{\mathrm{H}}$ е Шур декомпозицията на B. Тогава матрицата $B \oplus A$ е подобна на матрицата

$$\left(U_B^{\mathrm{H}} \otimes I_m\right)(B \oplus A)(U_B \otimes I_m) = T_B \otimes I_m + I_n \otimes A = T_B \oplus A.$$

Матрицата $T_B \oplus A$ е $n \times n$ блочна горно триъгълна с $m \times m$ диагонални блокове $A + \lambda_k(B)I_m$. Спектърът на всеки такъв блок е обединение на $\mathrm{spect}(A)$ с едноелементното множество $\{\lambda_k(B)\}$. Така целият спектър на $T_B \oplus A$ и следователно на $B \oplus A$, е обединение от спектрите на диагоналните блокове.

Горните резултати водят до задачата да се намери прост и удобен израз за спектъра на матрицата

$$M := A \otimes B + C \otimes D,$$

където матриците A и C са с размер $m \times m$, а B и D са с размер $n \times n$. Това се оказва възможно само ако се предположи една специална структура на горните четири матрици. Да предположим например, че матриците A и C имат обща Шур база U, т.е., че съществува матрица U, такава че матриците $T_A := U^{\mathrm{H}}AU$ и $T_C := U^{\mathrm{H}}CU$ са едновременно горно триъгълни. Тогава матрицата M е подобна на

$$\widetilde{M} = \left(U^{\mathrm{H}} \otimes I_n\right) M (U \otimes I_n) = T_A \otimes B + T_C \otimes D.$$

Матрицата $\widetilde{M}$ е $m \times m$ блочна горно триъгълна с $n \times n$ диагонални блокове $\lambda_i(A)B + \lambda_k(C)D$. Следователно спектърът на $\widetilde{M}$, равен на спектъра на M, е обединение (с повторения) от наборите

$$\mathrm{spect}(\lambda_i(A)B + \lambda_k(C)D)).$$

Тези резултати намират приложение при изследване на спектъра на линейните матрични оператори.

Пример 14.2 Нека $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ и $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Да разгледаме операторите $\mathcal{L}_c$ и $\mathcal{L}_d$ в непрекъснатото и дискретното уравнения на Силвестър

$$\mathcal{L}_c(X) := AX + XB = C$$

и

$$\mathcal{L}_d(X) := AXB - X = C,$$

съответно, където X е неизвестната $m \times n$ матрица. Спектърът на един линеен матричен оператор е спектърът на неговото матрично представяне. Следователно спектърът

$$\operatorname{spect}(\mathcal{L}_c) = \operatorname{spect}\left(I_n \otimes A + B^\top \otimes I_m\right)$$

е множеството на всевъзможните суми $\lambda_i(A) + \lambda_j(B)$ от собствените стойности на A и B. Аналогично, спектърът

$$\operatorname{spect}(\mathcal{L}_d) = \operatorname{spect}\left(B^\top \otimes A - I_{mn}\right)$$

е множеството на всевъзможните изрази $\lambda_i(A)\lambda_j(B) - 1$.

По–подробна информация за кронекеровото произведение може да се намери в книгата [21].

14.3 Упражнения

Упражнение 14.1 Докажете равенството (14.1).

Упражнение 14.2 Намерете необходими и достатъчни условия за да бъде в сила комутативната зависимост $A \otimes B = B \otimes A$, където A и B са с размер 2×2. *Упътване:* трябва да намерите 6 нетривиални зависимости между елементите на A и B.

Упражнение 14.3 Намерете необходими и достатъчни условия за да е изпълнено равенството $A \otimes B = B \otimes A$, в което A и B са $n \times n$ матрици. *Упътване:* трябва да намерите $n^2(n^2-1)/2$ нетривиални зависимости между елементите на A и B.

Упражнение 14.4 Докажете зависимостите (14.4) – (14.8).

Упражнение 14.5 *Адамарово произведение* $C = A \circ B$ на матриците $A = [a_{i,j}]$ и $B = [b_{i,j}]$ с еднакви размери е матрицата $C = [c_{i,j}]$ с елементи $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$. *Симетрично произведение* $A \bullet B$ на квадратните матрици A и B с еднакви размери е матрицата $(AB+BA)/2$. Намерете зависимости между стандартното произведение, кронекеровото произведение, адамаровото произведение и симетричното произведение на две матрици. Проверете дали симетричното произведение е асоциативно (т.е., дали $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C)$) и дистрибутивно относно стандартното сумиране (т.е., дали $(A+B) \bullet C = A \bullet C + B \bullet C$).

Упражнение 14.6 Покажете, че

$$\Pi(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} E_{i,j}(m,n) \otimes E_{j,i}(n,m)$$

и

$$\Pi^{-1}(m,n) = \Pi^\top(m,n) = \Pi(n,m).$$

Тук $E_{i,j}(m,n)$ е $m \times n$ матрица с единствен ненулев елемент в позиция (i,j).

Упражнение 14.7 Нека $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{C}^l$ и нека f е аналитична матрична функция (вж. глава 15). Докажете, че

$$\begin{aligned}
\det(B\otimes A) &= (\det(B))^m(\det(A))^n,\\
\mathrm{tr}(B\otimes A) &= \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(A),\\
\exp(A\oplus B) &= \exp(A)\otimes\exp(B),\\
f(I_n\otimes A) &= I_n\otimes f(A),\\
f(A\otimes I_n) &= f(A)\otimes I_n,\\
C\otimes x &= (I_n\otimes x)C,\\
C\otimes x^\top &= C\left(I_m\otimes x^\top\right).
\end{aligned}$$

Глава 15

МАТРИЧНИ ФУНКЦИИ

15.1 Основни определения

В редица практически задачи се налага да се пресметне изразът $f(A)$, където A е квадратна матрица.

Нека например е дадено векторното диференциално уравнение

$$x'(t) = Ax(t)$$

с начално условие $x(0) = x_0$, където $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ е търсената векторна функция, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ е зададена матрица и $x_0 \in \mathbb{C}^n$ е зададен начален вектор. Решението на тази задача може да се запише във вида

$$x(t) = \exp(At)x_0,$$

където т.нар. *матрична експонента* $\exp(A)$ (означавана още като e^A) се определя като сумата на сходящия матричен ред

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I_n + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^k}{k!} + \cdots .$$

В скаларния случай $a \in \mathbb{C}$ изразът $\exp(a) = e^a$ е стандартната експонента.

В общия случай дефинирането на матрична функция на матричен аргумент не е проста задача.

Нека $D \subset \mathbb{C}$ е област (отворено и свързано множество) и $f : D \to \mathbb{C}$ е аналитична комплексна функция. Нека освен това z_0 е фиксирана точка от D. Тогава в околност на z_0 стойностите на функцията f могат да се представят чрез сходящия степенен ред

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z-z_0)^k = f_0 + f_1(z-z_0) + f_2(z-z_0)^2 + \cdots . \tag{15.1}$$

Нека $\rho = \rho(z_0)$ е радиусът на сходимост на реда (15.1).

Да предположим, че $A_0 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е фиксирана матрица. Тогава за всяка матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че $\|A - A_0\| \leq \rho$ имаме

$$\mathrm{spect}(A - A_0) \subset D$$

и можем да определим матричния израз $f(A)$ чрез сходящия матричен ред

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (A - A_0)^k = f_0 I_n + f_1(A - A_0) + f_2(A - A_0)^2 + \cdots .$$

По-нататък без ограничаване на общността ще приемем, че $A_0 = 0$.

Ще отбележим също така, че ако

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

където g и h са аналитични функции в околност на началото, то при достатъчно малки по норма матрици A можем да определим израза

$$f(A) = g(A)(h(A))^{-1} = (h(A))^{-1} g(A).$$

Пример 15.1 Нека при $x \neq 0.5$ изразът $f(z)$ е определен от

$$f(z) = \frac{3+z}{1-2z}.$$

Тогава за всяка матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, такава че $0.5 \notin \mathrm{spect}(A)$, можем да определим матричния израз

$$f(A) = (3I_n + A)(I_n - 2A)^{-1} = (I_n - 2A)^{-1}(3I_n + A).$$

Описаният способ за дефиниране на матричен израз $f(A) \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, въз основа на скаларния израз $f(z) \in \mathbb{F}$, $z \in \mathbb{F}$, се нарича *заместване „A-вместо-z”*. Строги определения на матрична функция на матричен аргумент $f : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ са дадени в следващата секция.

15.2 Пресмятане на матрични функции

Да предположим, че комплексната функция f е аналитична в областта $D \subset \mathbb{C}$, оградена от контура γ, и е непрекъсната върху γ. Нека освен това за някоя матрица $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е изпълнено $\mathrm{spect}(A) \subset D$. Тогава можем да определим матрицата

$$f(A) = \frac{1}{2\pi\imath} \oint_{\gamma} f(s)(sI_n - A)^{-1} \mathrm{d}s,$$

където интегрирането се извършва поелементно. Последният израз е матрична версия на знаменитата интегрална формула на Коши.

Съгласно горната дефиниция, ако $A = U\Lambda U^{-1}$, където $U \in \mathcal{GL}(n,\mathbb{F})$, то

$$f(A) = Uf(\Lambda)U^{-1}.$$

Също така, ако

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_p)$$

е блочно диагонална матрица с диагонални блокове $\Lambda_1, \dots, \Lambda_p$, то

$$f(\Lambda) = \mathrm{diag}(f(\Lambda_1), \dots, f(\Lambda_p)).$$

Да предположим сега, че Λ е комплексната жорданова форма на матрицата A. Тогава всеки блок Λ_k е или скалар $\Lambda_k = \lambda$, $\lambda \in \mathrm{spect}(A)$, при което

$$f(\Lambda_k) = f(\lambda),$$

или $m \times m$ матрица ($m > 1$) от вида

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Матрицата J може да се запише като

$$J = \lambda I_m + N_m,$$

където N_m е матрица с елементи $(N_m)_{i,j} = \delta_{i,j-1}$ (тук $\delta_{i,j}$ е символът на Кронекер, равен на 0 при $i \neq j$ и на 1 при $i = j$).

Когато $s \notin \mathrm{spect}(J)$ имаме

$$(sI_m - J)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N_m^k}{(s-\lambda)^{k+1}}.$$

Оттук и от интегралната формула на Коши следва

$$f(J) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{2\pi\imath} \oint_\gamma \frac{f(s)\mathrm{d}s}{(s-\lambda)^{k+1}} \right) N_m^k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(\lambda)}{k!} N_m^k.$$

Като вземем предвид, че $(N_m^k)_{i,j} = \delta_{i,j-k}$, получаваме

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\lambda)}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(\lambda)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

В частност, ако матрицата A е диагонализируема,

$$A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^{-1}, \tag{15.2}$$

то

$$f(A) = U\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n))U^{-1}. \tag{15.3}$$

Нека освен това

$$U = [u_1, \ldots, u_n],\ U^{-1} = [v_1, \ldots, v_n]^*.$$

Тогава от (15.3) следва

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)u_k v_k^*.$$

15.3 Конкретни матрични функции

Когато матрицата $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е диагонализируема и $m > 1$ е натурално число, то можем да определим максимум m^n на брой m–ти корени на A по формулата

$$A^{1/m} = U\mathrm{diag}(\lambda_1^{1/m}, \ldots, \lambda_n^{1/m})U^{-1}.$$

Тук всяко $\lambda_k^{1/m}$ пробягва m–те (комплексни) корена на числото λ_k.

Когато матрицата A е комплексна ермитова (реална симетрична) неотрицателно определена имаме $\lambda_k \geq 0$ и можем да определим неотрицателно определения квадратен корен

$$A^{1/2} = U\mathrm{diag}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_n^{1/2})U^*,\ \lambda_k^{1/2} \geq 0.$$

В предишната секция беше определена показателната матрична функция

$$A \mapsto \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Аналогично се определят матричният синус

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

и матричният косинус

$$\cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!}.$$

Когато спектърът на $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ лежи в отворения единичен кръг в комплексната равнина можем да определим и функцията

$$A \mapsto \ln(I_n - A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k}.$$

Трябва да се има предвид, че горните формули, основани на жордановата канонична форма на A, не са подходящи за реализация в крайна аритметика [19]. Причината за това е, че в общия случай малки грешки (например от закръгляне) могат да променят жордановата структура на матрицата. Дори в случая (15.2), (15.3) на диагонализируема матрица грешките в изчислените собствени стойности λ_k на A могат да са от порядъка на $\mathrm{eps}\,\mathrm{cond}(U)$, където eps е мярката на закръгляне на крайната аритметика, а $\mathrm{cond}(U) = \|U\|\,\|U^{-1}\|$.

По принцип може да се очаква, че когато матрицата A има прост спектър, но (поне две) близки собствени стойности и/или големи извъндиагонални елементи, задачата за нейната диагонализация ще се натъкне на изчислителни трудности.

Пример 15.2 Нека

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & a \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2},$$

където $a > 0$ и числото

$$\delta := \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} > 0$$

е малко. Имаме

$$A = U \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) U^{-1},$$

където

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u \\ 0 & v \end{bmatrix}$$

и

$$u := \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}},\ v := \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}.$$

Имаме

$$\mathrm{cond}_2(U) = \frac{1+u}{v} = \frac{1+\sqrt{1+\delta^2}}{\delta}$$

и при малко δ величината $\mathrm{cond}_2(U)$ е от порядъка на

$$\frac{2}{\delta} = \frac{2a}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

15.4 Упражнения

Упражнение 15.1 Нека A е квадратна матрица и f е аналитична функция. Покажете, че:

– матриците A и $f(A)$ комутират;

– ако матрицата A е горно триъгълна, то и $f(A)$ е горно триъгълна. Вярно ли е обратното? Обобщете този резултат за блочно триъгълни матрици.

– ако матрицата A е комплексна ермитова (реална симетрична), то и $f(A)$ е комплексна ермитова (реална симетрична). Вярно ли е обратното?

Упражнение 15.2 Нека $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Покажете, че

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$$

точно когато $AB = BA$.

Упражнение 15.3 Нека $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Покажете, че

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

и

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

точно когато $AB = BA$.

Упражнение 15.4 Въведете матрични аналози на функциите тангенс и котангенс и на техните обратни функции чрез степенни редове, като определите съответните области на сходимост. Направете същото за хиперболичните синус, косинус, тангенс и котангенс и за техните обратни функции.

Упражнение 15.5 Изведете матрични аналози (за комплексни матрици) на зависимостите между тригонометричните и хиперболичните функции в комплексната област.

Упражнение 15.6 Докажете, че ако $a, b \in \mathbb{R}$, то

$$\exp\left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = \exp(a)\begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}.$$

Упражнение 15.7 Като използвате резултата от упражнение 15.6 пресметнете $\exp(K)$ когато K е реален жорданов блок от втори тип.

Упражнение 15.8 Покажете, че ако матрицата A е комплексна антиермитова (реална антисиметрична), то матрицата $\exp(A)$ е унитарна (ортогонална).

Упражнение 15.9 Покажете, че

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$$

точно когато спектърът на матрицата A лежи в лявата отворена комплексна полуравнина.

Упражнение 15.10 Покажете, че

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0$$

точно когато спектърът на матрицата A лежи в централния отворен единичен кръг в комплексната равнина.

Упражнение 15.11 Докажете, че ако $J := \lambda I_m + N_m$, то

$$J^p = \sum_{k=0}^{\min\{m-1,p\}} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} N_m^k.$$

и

$$\exp(tJ) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Упражнение 15.12 Покажете, че за матричните синус и косинус са в сила зависимостите

$$\cos(2A) = 2\cos^2(A) - I, \ \sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A).$$

Упражнение 15.13 Да разгледаме матричното диференциално уравнение

$$X''(t) + AX(t) = 0$$

с начални условия

$$X(0) = X_0, \ X'(0) = X_0',$$

където $X : \mathbb{R} \to \mathbb{F}^{n\times m}$ е търсеното решение, $X_0, X_0' \in \mathbb{F}^{n\times m}$ са зададени матрици и $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е комплексна ермитова (или реална симетрична) положително определена матрица. Покажете, че

$$X(t) = \cos(tA^{1/2})X_0 + A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})X_0'.$$

Упражнение 15.14 Нека $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ е зададена матрица, а функцията $[t_0, t_1] \to \mathbb{F}^{n\times n}$, зададена от $t \mapsto f(tA)$, е четирикратно диференцируема. Да разгледаме задачата за приближено пресмятане на интеграла

$$Y := \int_{t_0}^{t_1} f(tA)\mathrm{d}t,$$

зададен поелементно. По формулата на Симпсън със стъпка $h := (t_1 - t_0)/N$ имаме

$$Y \approx \widetilde{Y} := \frac{h}{3}\sum_{k=0}^{N} w_k f((t_0 + kh)A),$$

където $N > 2$ е четно число, а теглата w_k са определени от $w_k = 1$ когато $k = 0$ или $k = m$, $w_k = 2$ когато $0 < k < N$ е четно и $w_k = 4$ когато k е нечетно.

Покажете, че за нормата на грешката е изпълнено

$$\|Y - \widetilde{Y}\|_2 \le \frac{n(t_1 - t_0)h^4}{180} \max_{t_0 \le t \le t_1} \|f^{(4)}(At)\|_2.$$

Библиография

[1] В. Воеводин. *Линейная алгебра.* „Наука”, Москва, 1980.

[2] В. Воеводин, Ю. Кузнецов. *Матрицы и вычисления.* „Наука”, Москва, 1984.

[3] Н. Вълчанов, М. Константинов. *Съвременни математически методи за компютърни пресмятания. Част 1: Основи на компютърните пресмятания. Числено диференциране и интегриране.* Студии на БИАП по математически науки, т. 1, ЕЛМА, София, 1996.

[4] Ф. Гантмахер. *Теория матриц.* „Наука”, Москва, 1967.

[5] И. Глазман, Ю. Ахиезер. *Конечномерный линейный анализ.* „Наука”, Москва, 1969.

[6] К. Дочев, Д. Димитров. *Линейна алгебра.* „Наука и изкуство”, София, 1973.

[7] Н. Ефимов, Э. Розендорн. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* „Наука”, Москва, 1974.

[8] М. Константинов. *Числени основи на математическите методи.* Изд. УАСГ, София, 1997.

[9] М. Константинов, Н. Вълчанов. *Съвременни математически методи за компютърни пресмятания. Част 1: Числена линейна алгебра.* Студии на БИАП по математически науки, т. 2, ЕЛМА, София, 1997.

[10] М. Константинов, П. Петков, Н. Христов. *Диалогова система S за матрични пресмятания.* Изд. ВИАС, София, 1992.

[11] А. Курош. *Курс высшей алгебры.* „Наука”, Москва, 1968.

[12] Ч. Лоусон, Р. Хенсон. *Численное решение задач метода наименьших квадратов.* „Наука”, Москва, 1986. (превод от Ch. Lawson, R. Hanson. *Solving Least Square Problems.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974).

[13] М. Маркус, Х. Минк. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* „Наука”, Москва, 1972 (превод от M. Marcus, H. Minc. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities.* Allyn & Bacon, Boston, 1964).

[14] Х. Минк. *Перманенты.* „Мир”, Москва, 1982 (превод от H. Minc. *Permanents.* Addison Wesley, Reading, 1978).

[15] М. Петков. *Числени методи на линейната алгебра.* „Наука и изкуство”, София, 1974.

[16] Г. Станилов. *Линейна алгебра.* „Наука и изкуство”, София, 1974.

[17] Г. Стренг. *Линейная алгебра и ее применения.* „Мир”, Москва, 1980 (превод от G. Strang. *Linear Algebra and its Applications.* Academic Press, N.Y., 1976.).

[18] Г. Шилов. *Математический анализ. Конечномерные линейные пространства.* „Наука”, Москва, 1969.

[19] G. Golub, C.F. Van Loan. *Matrix Computations.* John Hopkins Univ. Press, London, 1989.

[20] N. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.* SIAM, Philadelphia, 1996.

[21] R. Horn, Ch. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[22] V. Pan. *How to Multiply Matrices Faster.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[23] P. Petkov, N. Christov, M. Konstantinov. *Computational Methods for Linear Control Systems.* Prentice Hall, Hemel Hempstead, 1991.